|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Los triángulos y los cuadriláteros** |
| Código del guion | MA\_08\_09\_CO |
| Descripción | Los triángulos y los cuadriláteros son las figuras geométricas que más aplicaciones tienen en campos como la ingeniería, el arte y la arquitectura. En este tema caracterizaremos cada uno de estos polígonos y estudiaremos sus propiedades. |

[SECCIÓN 1] **1 Los triángulos**

Los elementos que componen un triángulo son:

**Los vértices: s**on los puntos en los cuales se unen los lados del triángulo y se denotan por las letras mayúsculas *A*, *B* y *C*.

**Los lados:** son los segmentos que unen dos vértices en el triángulo, se denotan por la misma letra del vértice opuesto pero se escribe en minúscula.

**Los ángulos: e**s la abertura que existe entre dos lados de un triángulo, estos pueden ser internos o externos, se denotan por la misma letra del vértice o usando letras del alfabeto griego.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Las letras al lado del triángulo deben ir en cursiva, las mayúscula rojas son los nombres de los puntos, las minúsculas verdes son la medida del lado y deben tener cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos que componen un triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Definición de triángulo |
| **Contenido** | Un triángulo es un polígono de tres lados determinado por tres puntos no colineales denominados vértices del triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Clasificación de los triángulos**  Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados en:  **Equilátero**: es aquel en el que la medida de todos sus lados es igual.  **Isósceles:** es aquel que tiene dos de sus lados con medidas iguales.  **Escaleno:** es aquel en el que la medida de todos sus lados es diferente.  Y según la medida de sus ángulos en:  **Acutángulo:** es aquel en el que la medida de todos sus ángulos es menor a 90°.  **Obtusángulo:** es aquel en el que la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90°.  **Rectángulo:** es aquel en el que la medida de uno de sus ángulos es de 90°. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben estar en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, tener cuidado con poner las mismas líneas que van en la mitad de algunas de las líneas de los triángulos de arriba. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Clasificación de los triángulos. |

[SECCIÓN 2] **1.1 Los ángulos de un triángulo**

En todo triangulo se encuentran dos clases de ángulos que se conocen como **ángulos internos** y **ángulos externos**.

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Los ángulos internos de un triángulo**

Los ángulos internos de un triángulo están determinados por dos lados del triángulo, para nombrarlo se usa el símbolo∠, que significa ángulo, acompañado de la letra del vértice que forma al ángulo o una letra del alfabeto griego.

Así en la figura el ángulo con vértice en *A* se nombra como: ∠*A* y se lee <<el ángulo a>>.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Letras rojas en cursiva, son el nombre de los puntos, NO agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos internos de un triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de ángulo interior** |
| **Contenido** | Dado Δ*ABC* un ángulo interior es aquel que se forma por las semirrectas que contienen a dos lados del triángulo con un vértice común. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Los ángulos externos de un triángulo**

Los ángulos exteriores de un triángulo se forman a partir de uno de sus lados y la prolongación de otro de sus lados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de ángulo exterior** |
| **Contenido** | Dos ángulos formados por las rectas que contienen a los lados de un triángulo, si son suplementarios con el ángulo interior adyacente, reciben el nombre de ángulos exteriores. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∠1 y ∠2 son ángulos exteriores porque son adyacentes al ángulo formado en el vértice *B*, de igual forma los ángulos ∠3, ∠4, ∠5 y ∠6 son ángulos exteriores por ser adyacentes a los ángulos formados en los vértices *C* y *A* respectivamente. |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las propiedades de los triángulos**

Teniendo como base la definición de triángulo, los elementos que lo componen y la clase de ángulos que lo conforman, se puede realizar el estudio de las propiedades que se cumplen en todo triangulo.

**Propiedad 1:** La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben ir en cursiva, son nombres de los puntos, NO agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso ∠*A* = 89°, ∠*B* = 40° y ∠*C* = 51°, realizando la adición se tiene: 89° + 40° + 51° = 180°. |

**Propiedad 2:** En todo triángulo *ABC* la medida del ángulo exterior siempre es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso se tiene que ∠*A* = 890, ∠*B* = 40° y ∠*C* = 51° y verificando la propiedad se tiene:  ∠*A*’ = 40° + 51° = 91°  ∠*B*’ = 89° + 51°= 132°  ∠*C*’ = ∠89° + ∠40°= 129° |

**Propiedad 3:** Un ángulo interior y su respectivo ángulo exterior siempre forman un par lineal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso se tiene que ∠*A* = 890 y ∠*A*’ = 910 por tanto:  ∠*A* + ∠*A*’ = 89° + 91°= 180° |

**Propiedad 4:** La medida de uno de los lados de un triángulo siempre es menor que la suma de las medidas de los otros dos. Esta propiedad es conocida como la propiedad de la desigualdad triangular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | Las letras deben ir en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, las minúsculas son la medida de los lados, agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la figura se puede observar que la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| La propiedad de la desigualdad triangular | | |
| *a* < *b* + *c*  10,44 < 6,66 + 8,05  10,35 < 14,71 | *b* < *a* + *c*  6,66 < 10,44 + 8,05  6,66 < 18,49 | *c* < *a* + *b*  8,05 < 10,44 + 6,66  8,35 < 17,1 |

A partir de las propiedades de los triángulos es posible resolver problemas asociados a los triángulos y a las medidas de sus lados y sus ángulos, observemos algunos ejemplos.

* A partir de la figura, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos internos del triángulo?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

De acuerdo a la figura tenemos que ∠A = 2*x* + 5, ∠B = 7*x* − 20 ∠C = 10*x* + 5 y según la propiedad uno ∠A + ∠B + ∠C = 180 y reemplazando tenemos la siguiente ecuación:

(2*x* + 5) + (7*x* − 20) + (10*x* + 5) = 180

Resolviendo esta ecuación lineal tenemos que:

2*x* + 5 + 7*x* − 20 + 10*x* + 5 = 180

19*x* −10 = 180

19*x* = 180 + 10

19*x* = 190

*x* = 190/19

*x* = 10

Ahora reemplazamos el valor de *x* en cada ángulo y tenemos que:

∠A = 2*x* + 5

∠A = 2(10) + 5

∠A = 250

∠B = 7*x* − 20

∠B = 7(10) − 20

∠B = 500

∠C = 10*x* + 5

∠C = 10(10) + 5

∠C = 1050

**Problema 2**

Hallar la medida del ángulo θ

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG10 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

De acuerdo a la figura tenemos que ∠A = 520, ∠B = 320 ∠C = 300 y según la propiedad del ángulo exterior podemos decir que:

Para ΔADC, ∠D’= ∠A + ∠B y para ΔDBX θ = ∠D’ + ∠B es decir que:

∠D’= ∠A + ∠B

∠D’= 520 + 300

∠D’= 820

Por tanto:

θ = ∠D’ + ∠B

θ = 820 + 320

θ = 1140

**Problema 3**

Verifiquemos si las medidas dadas en la siguiente figura corresponden a las medidas de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG11 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Para ello aplicaremos la propiedad 4 y comprobaremos si se cumple la desigualdad triangular.

Sabemos que *a* = 4cm, *b* = 10cm y *c* = 15cm; entonces debemos comprobar que ***a* < *b* + *c,***

***b* < *a* + *c, c* < *a* + *b.***

4 < 10 + 15

4 < 25

10 < 4 + 15

10 < 19

15 < 4 + 10

**15 < 14**

Como observas, la propiedad se cumple para los dos primeros casos pero en el tercer caso llegamos a una contradicción porque 15 no es menor que 4 lo cual implica que las medidas das no corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

[SECCIÓN 2] **1.3 La construcción de triángulos**

Aunque los triángulos son los polígonos más simples de la geometría, una parte importante de su estudio es su proceso de construcción.

Por ejemplo ¿cómo construir un triángulo si se conoce la medida de sus tres lados?

Construyamos un triángulo en el que la medida de sus tres lados sean las siguientes:

*a* = 5cm, *b* = 7cm y *c* = 4cm. Para ello vamos a seguir los siguientes pasos.

Primero con la regla vamos a trazar el segmento *BC* de 5cm que represente el lado a.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG12 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Segundo con el compás hacemos centro en B y trazamos una circunferencia con radio igual a 7cm.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG13 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen el dibujo de un compás que represente el trazo de la circunferencia. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Tercero con el compás hacemos centro en C trazamos una circunferencia con radio igual a 4cm, marcamos el punto de intersección entre las dos circunferencia y lo llamamos A.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG14 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen un compás que muestre el trazo de la circunferencia con centro en C. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Cuarto trazamos los segmentos *AB* y *AC* y así nos queda formado Δ*ABC.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG15 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo escaleno de medidas 5cm, 7cm y 4cm. |

Ahora revisemos como podemos construir un triángulo que sea equilátero.

Primero trazamos un segmento AB

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG16 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Con centro en A y radio AB trazamos una circunferencia y luego con centro en B y radio BA trazamos otra circunferencia, uno de los puntos de intersección entre las dos circunferencias lo llamamos C.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG17 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen un compás que muestre el trazo de la circunferencia con centro en A y otro que muestre el trazo de la circunferencia con centro en B. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Trazamos los segmentos AC y BC, y así construimos el triángulo equilátero ABC

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG18 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo Equilátero ***ABC.*** |

Ahora revisemos como construir un triángulo rectángulo.

Primero trazamos una recta *l* y sobre ella ubicamos el segmento AB

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG19 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Con centro en A trazamos una circunferencia con radio menor a AB y marcamos como *m* y *n* los puntos de corte de la circunferencia con la recta *l.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG20 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Con radio *mn* Hacemos centro en m y trazamos una circunferencia, luego realizamos el mismo procedimiento con centro en n. Y marcamos como k uno de los puntos de corte entre las dos circunferencias.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG21 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

Trazamos la recta que pasa por A y k y sobre ella ubicamos un punto C y trazamos el triángulo ABC.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG22 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo rectángulo ABC. |

[SECCIÓN 2] **1.4 Las líneas y los puntos notables del triángulo**

Ahora vamos a revisar otros elementos que son importantes en el estudio de los triángulos. Imagina que debes instalar una antena repetidora en una ciudad que debe estar a la misma distancia de 3 estaciones de radio. O que debes construir una base triangular que está apoyada sobre una única viga de soporte. ¿En qué lugar de la ciudad ubicarías la antena de repetición o en qué lugar ubicarías la viga de soporte? Esto solo lo podemos saber estudiando las diferentes líneas y puntos notables de un triángulo.

**Alturas y Ortocentro**

Dado un triángulo *ABC* la altura es el segmento de recta que parte desde un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto del vértice.

El ortocentro es el punto de corte de las tres alturas de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG23 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Alturas y Ortocentro. |

**Medianas y Baricentro**

Dado un triángulo *ABC* las medianas son el segmento que va desde un vértice hasta el punto medio de su lado opuesto.

El baricentro es el punto de corte de las tres medianas, este punto también se conoce como centro de masa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG24 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medianas y Baricentro. |

**Bisectriz e Incentro**

Dado un triángulo *ABC* la bisectriz es la semirrecta que parte desde un vértice que divide en dos ángulos congruentes a cada ángulo interior de un triángulo.

El incentro es el punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG25 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bisectriz e Incentro. |

**Mediatriz y circuncentro**

Dado un triángulo *ABC* la mediatriz de un triángulo es la recta perpendicular a cada lado del triángulo y que pasa por el punto medio de cada lado.

El circuncentro es el punto de corte de las tres mediatrices del triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG26 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medianas y circuncentro. |

[SECCIÓN 2] **1.5 Los triángulos congruentes**

Observa el siguiente par de triángulos en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG27 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulos congruentes. |

Al observarlos te darás cuenta que los dos triángulos tienen entre si la misma **forma** y **tamaño,** cuando se cumplen estas dos condicionesdecimos que lostriángulos son **congruentes** y lo representaremos mediante el símbolo ≅.

Así decimos que:

ΔABC **≅** ΔDEF

Que se lee como: el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF.

Esto significa que tanto la medida de los lados como la medida de los ángulos en los dos triángulos son iguales, por lo que tenemos que los lados y los ángulos también son congruentes. Es decir que:

Y también que:

∠A ≅ ∠D

∠B ≅ ∠E

∠C ≅ ∠F

Así por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG28 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulos congruentes. |

Observa que en los dos triángulos la medida de los ángulos y los lados son iguales, es decir que son congruentes lo que implica que los triángulos también lo son, es decir:

ΔABC **≅** ΔA’B’C’

[SECCIÓN 3] **1.5.1 Los criterios de congruencia**

Los criterios de congruencia los definimos como postulados y teoremas que enuncian cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes. Por tanto definiremos los siguientes criterios.

**Criterio LAL, Lado ángulo lado**

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo determinado por ellos respectivamente congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG29 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Criterio lado ángulo lado. |

Tenemos que si AB ≅ A’B’, AC ≅ A’C’ y ∠α ≅ ∠ α’ entonces ΔABC **≅** ΔA’B’C’

**Criterio ALA, Ángulo lado ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos, respectivamente, congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG230 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Pie de imagen** | Criterio ángulo lado ángulo. |

Tenemos que si ∠α ≅ ∠ α’, AC ≅ A’C’ y ∠γ ≅ ∠ γ’ entonces ΔABC **≅** ΔA’B’C’

**Criterio LLA, Lado lado ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG31 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Criterio lado lado ángulo. |

Tenemos que si ∠α ≅ ∠ α’, AB ≅ A’B’ y BC ≅ B’C’ entonces ΔABC **≅** ΔA’B’C’

**Criterio LLL, Lado lado lado**

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG32 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Criterio lado lado lado. |

Tenemos que si AB ≅ A’B’, AC ≅ A’C’ y BC ≅ B’C’ entonces ΔABC **≅** ΔA’B’C’

[SECCIÓN 3] **1.5.2 Criterios de congruencia en la resolución de problemas**

Partir de los criterios de congruencia vamos a revisar algunos problemas y teoremas que se pueden demostrar a través de estos criterios.

Problema 1: Demostrar que dado ΔABC isósceles con AC ≅ BC la bisectriz del ∠C divide a ΔABC en dos triángulos ΔAMC y ΔBMC congruentes.

Reformulando este enunciado lo que debemos demostrar es que si ΔABC es isósceles con AC ≅ BC y CM es bisectriz del ∠C entonces ΔAMC ≅ ΔBMC congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG33 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

A partir de los datos y la figura realicemos la demostración:

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. ΔABC es isósceles. 2. AC ≅ BC. 3. CM es bisectriz de ∠C. 4. ∠A ≅ ∠B. 5. ∠ACM ≅ ∠BCM. 6. ΔAMC ≅ ΔBMC | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por definición de triangulo isósceles. 5. Por definición de bisectriz. 6. Por el criterio de congruencia ALA. |

En este caso el razonamiento que se usó permitió llegar al criterio ALA para demostrar la congruencia de los dos triángulos.

Problema 2: Sea ABCD un paralelogramo y sea E el punto de intersección de las diagonales AD y CB. Demostrar que ΔACE ≅ ΔBDE

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En los paralelogramos podemos encontrar triángulos congruentes. |

Ahora demostremos que la afirmación es cierta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. ABCD es Paralelogramo. 2. AD y CB son diagonales de ABCD. 3. E punto de intersección entre AD y CB. 4. AC || BD. 5. AD es transversal a AC y BD. 6. CB es transversal a AC y BD. 7. ∠CAD ≅ ∠BDA. 8. ∠ACB ≅ ∠DBC. 9. AC ≅ BD 10. ΔACE ≅ ΔBDE | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por definición de paralelogramo. 5. Por definición de diagonal. 6. Por definición de diagonal. 7. Por ser ángulos internos alternos entre párlelas. 8. Por ser ángulos internos alternos entre párlelas. 9. Por definición de paralelogramo. 10. Por el criterio ALA |

En este ejemplo hemos construido los argumentos que nos llevan la congruencia de los triángulos a través del criterio ALA.

[SECCIÓN 3] **1.5.3 Triángulos rectángulos congruentes**

Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel en el que a medida de uno de sus ángulos es de 90° y a este ángulo se le llama el ángulo recto del triángulo. Y también los elementos del triángulo rectángulo los nombramos de otra forma:

Los lados que componen el ángulo recto se denominan catetos, mientras que el lado que se opone al ángulo recto se denomina hipotenusa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos del triángulo rectángulo. |

Los criterios de congruencia que hasta ahora hemos revisado se cumplen para cualquier triángulo ABC, ahora revisaremos unos criterios específicos para los triángulos rectángulos.

En los criterios anteriores siempre necesitamos asegurar la congruencia de por lo menos tres elementos correspondientes en dos triángulos para verificar su congruencia.

En este caso solo requerimos verificar dos elementos ya que tenemos asegurado uno de ellos y es su ángulo recto, pues como sabemos en todo triangulo rectángulo la medida de uno de sus ángulos es de 90°. Los criterios que vamos a revisar son los siguientes:

**Criterio cateto – cateto.**

Si los catetos de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a los catetos correspondientes de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG35 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AB ≅ DE ∧ BC ≅ EF entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio Hipotenusa – ángulo.**

Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a la hipotenusa y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG36 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AC ≅ DF ∧ ∠α ≅ ∠β entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio Cateto – ángulo.**

Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a un cateto y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG37 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AB ≅ DE ∧ ∠α ≅ ∠β entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio cateto – Hipotenusa.**

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a la hipotenusa y al cateto correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG38 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si BC ≅ EF ∧ AC ≅ DF entonces ΔABC ≅ ΔDEF

A partir de los criterios de congruencia para triángulos rectángulos demostremos el siguiente teorema:

Si una recta ***l*** es mediatriz de un segmento **AB**, entonces cualquier punto **P** ∈ ***l*** es equidistante de los extremos de **AB.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG39 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. AB es un segmento. 2. *l* es mediatriz de AB. 3. Sea P ∈ *l*. 4. M punto medio de AB. 5. m∠AMP = 90° y m∠BMP = 90°. 6. ∠AMP y ∠BMP son rectos. 7. ΔAMP y ΔBMP son rectángulos. 8. AM ≅ MB. 9. MP ≅ MP. 10. ΔAMP ≅ ΔBMP. 11. AP ≅ BP. | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por construcción. 5. Por definición de mediatriz. 6. Porque miden 90°. 7. Porque tienen un ángulo recto. 8. Por definición de punto medio. 9. Por propiedad reflexiva. 10. Por el criterio cateto – cateto. 11. Por definición de triángulos congruentes. |

Así queda demostrado el teorema.

[SECCIÓN 2] **1.6 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **2** **Cuadriláteros**

¿Qué es un cuadrilátero? Lo definiremos como un polígono de cuatro lados y cuatro ángulos. Y pueden ser de dos tipos: **Convexo** son aquellos cuadriláteros tales que, si se toman dos puntos interiores A y B cualesquiera del mismo, todos los puntos del segmento AB que lo determinan están dentro del cuadrilátero y **Cóncavo** son aquellos cuadriláteros en los que se pueden encontrar dos puntos interiores A y B del mismo, tales que algunos de los puntos del segmento AB que lo determinan están fuera del cuadrilátero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG40 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cuadriláteros convexos y cóncavos. |

Como todo cuadrilátero está formado por cuatro ángulos vamos a revisar cuáles son sus posiciones relativas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG41 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Posición relativa de los lados y los ángulos de un cuadrilátero. |

**Lados opuestos**: llamamos lados opuestos de un cuadrilátero a los lados que no tienen un vértice común. En la figura los segmentos AD y BC son lados opuestos del cuadrilátero ABCD, al igual que los lados AB y DC.

**Lados adyacentes:** llamamos lados adyacentes de un cuadrilátero a los lados que tienen un vértice en común. En la figura son ejemplo de lados adyacentes los segmentos EF y FG, al igual que los segmentos GH y HE.

**Ángulos opuestos:** En un cuadrilátero decimos que dos ángulos opuestos son aquello que no tienen ningún lado en común. En la figura son ejemplo de ángulos opuestos ∠J y ∠L al igual que ∠I y ∠K.

**Ángulos adyacentes:** En un cuadrilátero decimos que dos ángulos son adyacentes si comparten un lado común. En la figura son ejemplo de ángulos adyacentes ∠N y ∠M al igual que ∠O y ∠P.

[SECCIÓN 2] **2.1** **Clasificación de los cuadriláteros**

Los cuadriláteros convexos los clasificaremos según el paralelismo de sus lados en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

[SECCIÓN 3] **2.1.1** **Los paralelogramos y sus propiedades**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tienen dos pares de lados paralelos, y entre ellos encontramos:

**Cuadrado**: tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados congruentes.

**Rectángulo**: tiene sus cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos iguales.

**Rombo**: Tiene sus cuatro lados congruentes y sus ángulos opuestos congruentes.

**Romboide**: tiene sus lados opuestos congruentes y sus ángulos opuestos congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG42 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los paralelogramos se caracterizan por tener dos pares de lados paralelos. |

**Propiedades de los paralelogramos**

En todo paralelogramo ABCD se cumplen las siguientes propiedades:

* Cada diagonal lo descompone en dos triángulos congruentes.
* Las diagonales se intersecan en el punto medio.
* La suma de la medida de dos ángulos consecutivos es 180°

[SECCIÓN 3] **2.1.2** **Los Trapecios y sus propiedades**

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un único par de lados opuestos paralelos.

En un trapecio los lados opuestos que son paralelos se llaman **bases,** la base mayor es el segmento de mayor longitud y la base menor es el segmento de menor longitud. El segmento que une a los puntos medios de los lados no paralelos se conoce como **base media.**

La **altura** de un trapecio es el segmento perpendicular que une un punto de la base mayor con un punto de la base menor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG43 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos de un trapecio. |

Los trapecios se clasifican en:

**Trapecio Rectángulo**: Tiene un lado perpendicular a sus bases que forma ángulos de 90°.

**Trapecio isósceles**: Tiene sus lados no paralelos congruentes y los ángulos de la base común también son congruentes.

**Trapecio escaleno:** Es aquel en el que la medida de todos sus lados y sus ángulos es diferente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG44 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los trapecios se caracterizan por tener un par de lados paralelos |

En los trapecios, el trapecio isósceles se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

* Las diagonales de un trapecio isósceles siempre son congruentes.
* Los ángulos formados en cada una de las bases son congruentes entre sí.

[SECCIÓN 3] **2.1.3** **Los trapezoides y sus propiedades.**

Un trapezoide es un paralelogramo que no tiene ningún par de lados paralelos y pueden ser de dos tipos tales como:

**Trapezoide simétrico**: Tiene dos pares de lados consecutivos iguales, pero el primer par es diferente del segundo par.

**Trapezoide asimétrico**: Es aquel que no conserva las características de un trapezoide simétrico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG45 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los trapezoides se caracterizan por no tener ningún par de lados paralelos. |

En un trapezoide simétrico se cumple la siguiente propiedad:

La diagonal mayor de un trapezoide simétrico lo divide en dos triángulos congruentes.

[SECCIÓN 2] **2.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **3.** **Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |