|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Los triángulos y los cuadriláteros** |
| Código del guion | MA\_08\_09\_CO |
| Descripción | Los triángulos y los cuadriláteros son las figuras geométricas que más aplicaciones tienen en campos como la ingeniería, el arte y la arquitectura. En este tema caracterizaremos cada uno de estos polígonos y estudiaremos sus propiedades. |

[SECCIÓN 1] **1 Los triángulos**

Los elementos que componen un triángulo son:

**Los vértices: s**on los puntos en los cuales se unen los lados del triángulo y se denotan por las letras mayúsculas *A*, *B* y *C*.

**Los lados:** son los segmentos que unen dos vértices en el triángulo, se denotan por la misma letra del vértice opuesto pero se escribe en minúscula.

**Los ángulos: e**s la abertura que existe entre dos lados de un triángulo, estos pueden ser internos o externos, se denotan por la misma letra del vértice o usando letras del alfabeto griego.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Las letras al lado del triángulo deben ir en cursiva, las mayúscula rojas son los nombres de los puntos, las minúsculas verdes son la medida del lado y deben tener cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos que componen un triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Definición de triángulo |
| **Contenido** | Un triángulo es un polígono de tres lados determinado por tres puntos no colineales denominados vértices del triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Clasificación de los triángulos**  Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados en:  **Equilátero**: es aquel en el que la medida de todos sus lados es igual.  **Isósceles:** es aquel que tiene dos de sus lados con medidas iguales.  **Escaleno:** es aquel en el que la medida de todos sus lados es diferente.  Y según la medida de sus ángulos en:  **Acutángulo:** es aquel en el que la medida de todos sus ángulos es menor a 90°.  **Obtusángulo:** es aquel en el que la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90°.  **Rectángulo:** es aquel en el que la medida de uno de sus ángulos es de 90°. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben estar en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, tener cuidado con poner las mismas líneas que van en la mitad de algunas de las líneas de los triángulos de arriba. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Clasificación de los triángulos. |

[SECCIÓN 2] **1.1 Los ángulos de un triángulo**

En todo triangulo se encuentran dos clases de ángulos que se conocen como **ángulos internos** y **ángulos externos**.

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Los ángulos internos de un triángulo**

Los ángulos internos de un triángulo están determinados por dos lados del triángulo, para nombrarlo se usa el símbolo ∡, que significa ángulo, acompañado de la letra del vértice que forma al ángulo o una letra del alfabeto griego.

Así en la figura el ángulo con vértice en *A* se nombra como: ∡*A* y se lee <<el ángulo a>>.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Letras rojas en cursiva, son el nombre de los puntos, NO agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos internos de un triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de ángulo interior** |
| **Contenido** | Dado Δ*ABC* un ángulo interior es aquel que se forma por las semirrectas que contienen a dos lados del triángulo con un vértice común. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Los ángulos externos de un triángulo**

Los ángulos exteriores de un triángulo se forman a partir de uno de sus lados y la prolongación de otro de sus lados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de ángulo exterior** |
| **Contenido** | Dos ángulos formados por las rectas que contienen a los lados de un triángulo, si son suplementarios con el ángulo interior adyacente, reciben el nombre de ángulos exteriores. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos 1 y 2 son ángulos exteriores porque son adyacentes al ángulo formado en el vértice *B*, de igual forma los ángulos 3, 4, 5 y 6 son ángulos exteriores por ser adyacentes a los ángulos formados en los vértices *C* y *A* respectivamente. |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las propiedades de los triángulos**

Teniendo como base la definición de triángulo, los elementos que lo componen y la clase de ángulos que lo conforman, se puede realizar el estudio de las propiedades que se cumplen en todo triangulo.

**Propiedad 1:** La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben ir en cursiva, son nombres de los puntos, NO agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso ∡*A* = 89°, ∡*B* = 40° y ∡*C* = 51°, realizando la adición se tiene: 89° + 40° + 51° = 180°. |

**Propiedad 2:** En todo triángulo *ABC* la medida del ángulo exterior siempre es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso se tiene que γ = 890, α = 40° y β = 51° y verificando la propiedad se tiene δ = 89° + 40°= 129°. |

**Propiedad 3:** Un ángulo interior y su respectivo ángulo exterior siempre forman un par lineal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso se tiene que γ = 89° y ε = 91°por tanto γ + ε = 89° + 91°= 180°. |

**Propiedad 4:** La medida de uno de los lados de un triángulo siempre es menor que la suma de las medidas de los otros dos. Esta propiedad es conocida como la propiedad de la desigualdad triangular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | Las letras deben ir en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, las minúsculas son la medida de los lados, agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la figura se puede observar que la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| La propiedad de la desigualdad triangular | | |
| *a* < *b* + *c*  10,44 < 6,66 + 8,05  10,35 < 14,71 | *b* < *a* + *c*  6,66 < 10,44 + 8,05  6,66 < 18,49 | *c* < *a* + *b*  8,05 < 10,44 + 6,66  8,35 < 17,1 |

A partir de las propiedades de los triángulos es posible resolver problemas asociados a los triángulos y a las medidas de sus lados y sus ángulos, observemos algunos ejemplos.

* A partir de la figura, ¿cuál es la medida de cada uno de los ángulos internos del triángulo?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben estar en itálica y cursiva, las fórmulas que están adentro son a medida de los ángulos respectivamente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos internos del triángulo son: 2*x* + 5, 7*x* − 20 y 10*x* + 5. |

De acuerdo a la propiedad uno se tiene (2*x* + 5) + (7*x* − 20) + (10*x* + 5) = 180°. Resolviendo esta ecuación lineal:

2*x* + 5 + 7*x* − 20 + 10*x* + 5 = 180°

19*x* −10 = 180

19*x* = 190

*x* = 190/19

*x* = 10

Ahora se reemplaza el valor de *x* en cada ángulo.

En el vértice *A*: 2*x* + 5 = 2(10) + 5 = 25

En el vértice *B*: 7*x* − 20 = 7(10) − 20 = 50

En el vértice *C*: 10*x* + 5 = 10(10) + 5 = 105

* Determinar la medida del ángulo θ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Sin cotas, las letras deben estar en mayúscula y cursiva. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | De acuerdo a la figura se tiene que el ángulo del vértice *A* es 52°, del vértice *B* es 32° y del vértice *C* es 30°. |

Según la propiedad del ángulo exterior se puede decir que para Δ*ADC*:

∡*D*’= ∡*A* + ∡*B*

∡*D*’= 52° + 30°

∡*D*’= 820

Para Δ*DBX*:

θ = ∡*D*’ + ∡*B*

θ = 82°+ 32°

θ = 114°

* Verifiquemos si las medidas dadas en la siguiente figura corresponden a las medidas de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Dejar un espacio entre el número y el símbolo de centímetros, el símbolo de centímetros (cm) debe estar en minúscula y sin cursiva. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para verificar si las medidas dadas en la figura corresponden a las medidas de un triángulo se puede aplicar la propiedad 4 y comprobar si se cumple la desigualdad triangular. |

Se sabe que *a* = 4 cm, *b* = 10 cm y *c* = 15 cm; entonces se debe comprobar que:

*a* < *b* + *c →* 4 < 10 + 15 → 4 < 25

*b* < *a* + *c →* 10 < 4 + 15 → 10 < 19

*c* < *a* + *b →* 15 < 4 + 10 → 15 < 14

Se puede observar que la propiedad se cumple para los dos primeros casos pero en el tercer caso se llega a una contradicción porque 15 no es menor que 14 lo cual implica que las medidas dadas en la figura no corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

[SECCIÓN 2] **1.3 La construcción de triángulos**

Aunque los triángulos son los polígonos más simples de la geometría, una parte importante de su estudio es su proceso de construcción.

Por ejemplo ¿cómo construir un triángulo si se conoce la medida de sus tres lados?

* Construyamos un triángulo en el que la medida de sus tres lados sean las siguientes:

*a* = 5 cm, *b* = 7 cm y *c* = 4 cm. Para ello se pueden seguir los siguientes pasos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Letras en cursiva, la letra a en minúscula es la medida del segmento, agregar cotas, las mayúsculas son los nombres de los puntos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con la regla vamos a trazar el segmento *BC* de 5 cm que represente el lado *a*. |

Segundo paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen el dibujo de un compás que represente el trazo de la circunferencia.  Se supone que la recta BC mide 5 cm, el radio de la circunferencia con centro en B mide 7 cm. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con el compás se hace centro en *B* y se traza una circunferencia con radio igual a 7cm. |

Tercer paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen un compás que muestre el trazo de la circunferencia con centro en *C*. La circunferencia pequeña tiene el centro en el punto *C* y su radio es de 4 cm. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con el compás se hace centro en *C* y se traza una circunferencia con radio igual a 4 cm, se marca el punto de intersección entre las dos circunferencia y lo llamamos *A.* |

Cuarto paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  De la imagen anterior se trazan los segmentos AB y AC. Las letras minúsculas son las medidas de los lados por favor agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se trazan los segmentos *AB* y *AC,* de esta forma queda formado Δ*ABC* que es un triángulo escaleno de medidas 5cm, 7cm y 4cm. |

* Ahora revisemos como podemos construir un triángulo que sea equilátero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben estar en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, la letra minúscula es la medida del segmento, agregar cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Primero se traza un segmento *AB*. |

Segundo paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Agregar a la imagen un compás que muestre el trazo de la circunferencia con centro en A y otro que muestre el trazo de la circunferencia con centro en B. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con centro en *A* y radio *AB* se traza una circunferencia y luego con centro en *B* y radio *BA* se traza otra circunferencia, uno de los puntos de intersección entre las dos circunferencias lo llamamos *C*. |

Tercer paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras mayúsculas son nombres de puntos, las letras minúsculas son las medidas de los lados por favor agregar las cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se trazan los segmentos *AC* y *BC*, de esta forma se construye el triángulo equilátero *ABC*. |

* Ahora revisemos como construir un triángulo rectángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Primero se traza una recta *l* y sobre ella se ubica el segmento *AB*. |

Segundo paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con centro en *A* se traza una circunferencia con radio menor a *AB* y se marca como *m* y *n* los puntos de corte de la circunferencia con la recta *l.* |

Tercer paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Con radio *mn* se hace centro en *m* y se traza una circunferencia, luego se realiza el mismo procedimiento con centro en *n*, finalmente se marca como *k* uno de los puntos de corte entre las dos circunferencias. |

Cuarto paso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG22 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Finalmente se traza la recta que pasa por *A* y *k* y sobre ella se ubica un punto *C* y se traza el triángulo rectángulo *ABC*. |

[SECCIÓN 2] **1.4 Las líneas y los puntos notables del triángulo**

Álvaro debe instalar una antena repetidora en una ciudad que debe estar a la misma distancia de 3 estaciones de radio, para instalar la antena debe construir una base triangular que este apoyada sobre una única viga de soporte. ¿En qué lugar de la ciudad se debe ubicar la antena de repetición? ¿En qué lugar se debe ubicar la viga de soporte? Este tipo de problemas se puede solucionar mediante el estudio de las diferentes líneas y puntos notables de un triángulo.

**Alturas y Ortocentro**

Dado un triángulo *ABC* la altura es el segmento de recta que parte desde un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto del vértice.

El ortocentro es el punto de corte de las tres alturas de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las tres alturas del triángulo *ABC* se cortan en un mismo punto, este punto recibe el nombre de ortocentro y en cualquier triángulo acutángulo se encuentra situado en el interior del triángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para encontrar el ortocentro de un triángulo obtusángulo se trazan las alturas a cada uno de sus lados desde los correspondientes ángulos opuestos, se prologan las tres alturas y se cortan en un mismo punto que es el ortocentro, situado en este caso fuera del triángulo. |

**Medianas y Baricentro**

Dado un triángulo *ABC* al marcar el punto medio de cada uno de sus lados y trazar segmentos desde cada vértice el punto medio de cada uno de los lados opuestos a ese ángulo existe una única intersección de esos segmentos. Esos tres segmentos se conocen como **medianas** de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto llamado **baricentro**. |

**Bisectriz e incentro**

Dado un triángulo **la bisectriz** es la semirrecta que parte desde un vértice que divide en dos ángulos congruentes a cada ángulo interior de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El incentro es el punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo. |

**Mediatriz y circuncentro**

Dado un triángulo *ABC* la **mediatriz** de un triángulo es la recta perpendicular a cada lado del triángulo y que pasa por el punto medio de cada lado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El circuncentro es el punto de corte de las tres mediatrices del triángulo. |

[SECCIÓN 2] **1.5 Los triángulos congruentes**

Observa el siguiente par de triángulos en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Las letras deben estar en cursiva, las mayúsculas son los nombres de los puntos, las letras minúsculas son la medida de los lados por favor agregar cotas. |
| **Pie de imagen** | Triángulos congruentes. |

Al observar los triángulos de la figura se nota que los dos triángulos tienen entre si la misma **forma** y **tamaño,** cuando se cumplen estas dos condiciones **s**e dice que lostriángulos son **congruentes,** esto serepresenta mediante el símbolo ≅. Así se dice que:

Δ*ABC* ≡Δ*DEF*

Que se lee el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *DEF*.

Esto significa que tanto la medida de los lados como la medida de los ángulos en los dos triángulos son iguales, por lo que se tiene que los lados y los ángulos también son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En los dos triángulos la medida de los ángulos y los lados son iguales, es decir que son congruentes lo que implica que los triángulos también lo son.  Δ*ABC* ≡Δ*A’B’C’* |

[SECCIÓN 3] **1.5.1 Los criterios de congruencia**

Los criterios de congruencia se definen como postulados y teoremas que enuncian cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes. Por tanto se pueden definir criterios de congruencia.

**Criterio LAL, lado – ángulo - lado**

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido del otro triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Como *AB* ≡ *DE*, *BC* ≡ *EF* y ∠*B* ≡ ∠*E*, entonces se puede afirmar que Δ*ABC* ≡Δ*DEF* pues se cumple el criterio de congruencia lado ángulo lado. |

**Criterio ALA, ángulo - lado - ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos, respectivamente, congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Como ∡*B* ≡ ∡*F,* ∡*C* ≡ ∡*E* y *BC* ≡ *FE* se puede afirmar que Δ*ABC* ≡Δ*DEF* pues se cumple el criterio ángulo lado ángulo*.* |

**Criterio LLA, lado – lado - ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG32 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Como ∡*A* ≡ ∡*D*, *AB* ≡ *DE* y *BC* ≡ *EF*, entonces Δ*ABC* ≡Δ*DEF* pues se cumple el criterio lado – lado - ángulo. |

**Criterio LLL, lado - lado - lado**

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG33 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se tiene que si *AB* ≡ *A’B’*, *AC* ≡ *A’C’* y *BC* ≡ *B’C’* entonces se puede afirmar que Δ*ABC* ≡Δ*A’B’C’* debido a que se cumple el criterio lado - lado - lado. |

[SECCIÓN 3] **1.5.2 Criterios de congruencia en la resolución de problemas**

A partir de los criterios de congruencia vamos a revisar algunos problemas y teoremas que se pueden demostrar a través de estos criterios.

* Demostrar que dado el triángulo *ABC* isósceles con *AC* ≡ *BC* la bisectriz del ángulo del vértice *C* divide a Δ*ABC* en dos triángulos: Δ*AMC* y Δ*BMC* que son congruentes entre sí.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Poner la letra γ para identificar el ángulo de ese vértice, dejar todas las letras en cursiva. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Reformulando el problema se puede observar que lo que se debe demostrar es que si Δ*ABC* es isósceles con *AC* ≡ *BC* y *CM* es bisectriz del ángulo γ entonces Δ*AMC* ≡ Δ*BMC*. |

A partir de los datos y la figura se puede realizar la demostración:

|  |  |
| --- | --- |
| Demostración de Δ*AMC* ≡ Δ*BMC* | |
| Afirmación | Razón |
| 1. Δ*ABC* es isósceles. 2. *AC* ≡ *BC* 3. *CM* es bisectriz de γ. 4. α ≡ β 5. ∡*ACM* ≡ ∡*BCM* 6. Δ*AMC* ≡ Δ*BMC* | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por definición de triangulo isósceles. 5. Por definición de bisectriz. 6. Por el criterio de congruencia ALA. |

En este caso el razonamiento que se usó permitió llegar al criterio ALA para demostrar la congruencia de los dos triángulos.

* Sea *ABCD* un paralelogramo y sea *E* el punto de intersección de las diagonales *AD* y *CB*. Demostrar que Δ*ACE* ≡ Δ*BDE.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Dejar las letras en cursiva, tener cuidado de dejar las mismas letras griegas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En los paralelogramos podemos encontrar triángulos congruentes. |

|  |  |
| --- | --- |
| Demostración deΔ*ACE* ≡ Δ*BDE* | |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. *ABCD* es Paralelogramo. 2. *AD* y *CB* son diagonales de *ABCD*. 3. *E* es el punto de intersección entre *AD* y *CB*. 4. *AC* es paralelo a *BD*. 5. *AD* es transversal a *AC* y *BD*. 6. *CB* es transversal a *AC* y *BD*. 7. γ ≡ δ 8. β ≡ α 9. *AC* ≡ *BD* 10. Δ*ACE* ≡ Δ*BDE* | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por definición de paralelogramo. 5. Por definición de diagonal. 6. Por definición de diagonal. 7. Por ser ángulos internos alternos entre párlelas. 8. Por ser ángulos internos alternos entre paralelas. 9. Por definición de paralelogramo. 10. Por el criterio ALA |

En este ejemplo se han construido los argumentos que nos llevan la congruencia de los triángulos a través del criterio ALA.

[SECCIÓN 3] **1.5.3 Triángulos rectángulos congruentes**

Un triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos interiores de 90°, este ángulo se le llama el ángulo recto del triángulo. Y también los elementos del triángulo rectángulo los nombramos de otra forma:

Los lados que componen el ángulo recto se denominan catetos, mientras que el lado que se opone al ángulo recto se denomina hipotenusa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos del triángulo rectángulo. |

Los criterios de congruencia que hasta ahora hemos revisado se cumplen para cualquier triángulo ABC, ahora revisaremos unos criterios específicos para los triángulos rectángulos.

En los criterios anteriores siempre necesitamos asegurar la congruencia de por lo menos tres elementos correspondientes en dos triángulos para verificar su congruencia.

En este caso solo requerimos verificar dos elementos ya que tenemos asegurado uno de ellos y es su ángulo recto, pues como sabemos en todo triangulo rectángulo la medida de uno de sus ángulos es de 90°. Los criterios que vamos a revisar son los siguientes:

**Criterio cateto – cateto.**

Si los catetos de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a los catetos correspondientes de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG35 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AB ≅ DE ∧ BC ≅ EF entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio Hipotenusa – ángulo.**

Si la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a la hipotenusa y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG36 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AC ≅ DF ∧ ∠α ≅ ∠β entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio Cateto – ángulo.**

Si un cateto y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a un cateto y al ángulo agudo correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG37 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si AB ≅ DE ∧ ∠α ≅ ∠β entonces ΔABC ≅ ΔDEF

**Criterio cateto – Hipotenusa.**

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo ABC son congruentes a la hipotenusa y al cateto correspondiente de otro triángulo rectángulo DEF, entonces los triángulos son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG38 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

En la figura: Si BC ≅ EF ∧ AC ≅ DF entonces ΔABC ≅ ΔDEF

A partir de los criterios de congruencia para triángulos rectángulos demostremos el siguiente teorema:

Si una recta ***l*** es mediatriz de un segmento **AB**, entonces cualquier punto **P** ∈ ***l*** es equidistante de los extremos de **AB.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG39 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. AB es un segmento. 2. *l* es mediatriz de AB. 3. Sea P ∈ *l*. 4. M punto medio de AB. 5. m∠AMP = 90° y m∠BMP = 90°. 6. ∠AMP y ∠BMP son rectos. 7. ΔAMP y ΔBMP son rectángulos. 8. AM ≅ MB. 9. MP ≅ MP. 10. ΔAMP ≅ ΔBMP. 11. AP ≅ BP. | 1. Dado. 2. Dado. 3. Dado. 4. Por construcción. 5. Por definición de mediatriz. 6. Porque miden 90°. 7. Porque tienen un ángulo recto. 8. Por definición de punto medio. 9. Por propiedad reflexiva. 10. Por el criterio cateto – cateto. 11. Por definición de triángulos congruentes. |

Así queda demostrado el teorema.

[SECCIÓN 2] **1.6 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **2** **Cuadriláteros**

¿Qué es un cuadrilátero? Lo definiremos como un polígono de cuatro lados y cuatro ángulos. Y pueden ser de dos tipos: **Convexo** son aquellos cuadriláteros tales que, si se toman dos puntos interiores A y B cualesquiera del mismo, todos los puntos del segmento AB que lo determinan están dentro del cuadrilátero y **Cóncavo** son aquellos cuadriláteros en los que se pueden encontrar dos puntos interiores A y B del mismo, tales que algunos de los puntos del segmento AB que lo determinan están fuera del cuadrilátero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG40 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cuadriláteros convexos y cóncavos. |

Como todo cuadrilátero está formado por cuatro ángulos vamos a revisar cuáles son sus posiciones relativas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_IMG41 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Posición relativa de los lados y los ángulos de un cuadrilátero. |

**Lados opuestos**: llamamos lados opuestos de un cuadrilátero a los lados que no tienen un vértice común. En la figura los segmentos AD y BC son lados opuestos del cuadrilátero ABCD, al igual que los lados AB y DC.

**Lados adyacentes:** llamamos lados adyacentes de un cuadrilátero a los lados que tienen un vértice en común. En la figura son ejemplo de lados adyacentes los segmentos EF y FG, al igual que los segmentos GH y HE.

**Ángulos opuestos:** En un cuadrilátero decimos que dos ángulos opuestos son aquello que no tienen ningún lado en común. En la figura son ejemplo de ángulos opuestos ∠J y ∠L al igual que ∠I y ∠K.

**Ángulos adyacentes:** En un cuadrilátero decimos que dos ángulos son adyacentes si comparten un lado común. En la figura son ejemplo de ángulos adyacentes ∠N y ∠M al igual que ∠O y ∠P.

[SECCIÓN 2] **2.1** **Clasificación de los cuadriláteros**

Los cuadriláteros convexos los clasificaremos según el paralelismo de sus lados en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

[SECCIÓN 3] **2.1.1** **Los paralelogramos y sus propiedades**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tienen dos pares de lados paralelos, y entre ellos encontramos:

**Cuadrado**: tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados congruentes.

**Rectángulo**: tiene sus cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos iguales.

**Rombo**: Tiene sus cuatro lados congruentes y sus ángulos opuestos congruentes.

**Romboide**: tiene sus lados opuestos congruentes y sus ángulos opuestos congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG42 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los paralelogramos se caracterizan por tener dos pares de lados paralelos. |

**Propiedades de los paralelogramos**

En todo paralelogramo ABCD se cumplen las siguientes propiedades:

* Cada diagonal lo descompone en dos triángulos congruentes.
* Las diagonales se intersecan en el punto medio.
* La suma de la medida de dos ángulos consecutivos es 180°

[SECCIÓN 3] **2.1.2** **Los Trapecios y sus propiedades**

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un único par de lados opuestos paralelos.

En un trapecio los lados opuestos que son paralelos se llaman **bases,** la base mayor es el segmento de mayor longitud y la base menor es el segmento de menor longitud. El segmento que une a los puntos medios de los lados no paralelos se conoce como **base media.**

La **altura** de un trapecio es el segmento perpendicular que une un punto de la base mayor con un punto de la base menor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG43 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos de un trapecio. |

Los trapecios se clasifican en:

**Trapecio Rectángulo**: Tiene un lado perpendicular a sus bases que forma ángulos de 90°.

**Trapecio isósceles**: Tiene sus lados no paralelos congruentes y los ángulos de la base común también son congruentes.

**Trapecio escaleno:** Es aquel en el que la medida de todos sus lados y sus ángulos es diferente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG44 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los trapecios se caracterizan por tener un par de lados paralelos |

En los trapecios, el trapecio isósceles se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

* Las diagonales de un trapecio isósceles siempre son congruentes.
* Los ángulos formados en cada una de las bases son congruentes entre sí.

[SECCIÓN 3] **2.1.3** **Los trapezoides y sus propiedades.**

Un trapezoide es un paralelogramo que no tiene ningún par de lados paralelos y pueden ser de dos tipos tales como:

**Trapezoide simétrico**: Tiene dos pares de lados consecutivos iguales, pero el primer par es diferente del segundo par.

**Trapezoide asimétrico**: Es aquel que no conserva las características de un trapezoide simétrico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G08\_09\_IMG45 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los trapezoides se caracterizan por no tener ningún par de lados paralelos. |

En un trapezoide simétrico se cumple la siguiente propiedad:

La diagonal mayor de un trapezoide simétrico lo divide en dos triángulos congruentes.

[SECCIÓN 2] **2.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **3.** **Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |