|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **La probabilidad** |
| Código del guion | MA\_08\_12\_CO |
| Descripción | ¿Cuáles son los conceptos básicos de la probabilidad? Aprende qué son los experimentos aleatorios y aplica la ley de Laplace para conocer las probabilidades de un suceso. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_12\_IMG00 |
| **Descripción** | C:\Users\EdgarJosué\Documents\GitHub\RecursosGenerales\graficos\iconosGuiones\Matematicas\MT_09_12.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | MT\_09\_12  ESO3°-Matemáticas académicas-La probabilidad |
| **Pie de imagen** |  |
|  |  |

[SECCIÓN 1] **1 La probabilidad**

La **probabilidad** es la disciplina matemática que estudia los **experimentos** o **fenómenos aleatorios**.

Conocer la probabilidad nos ayuda a mejorar la **toma de decisiones** en situaciones de incertidumbre y tener sentido crítico ante informaciones de fenómenos aleatorios.

Si lanzamos dos dados de seis caras y queremos acertar el resultado de su suma, ¿es mejor apostar por un número que por otro? Si nos dejan escoger entre 2, 7 o 10, ¿por cuál debemos decidirnos?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_12\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14873/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_12_img1_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Imagen aprovechada de:  3°ESO-Matemáticas académicas-La probabilidad-Sección 1(imagen 1) |
| **Pie de imagen** | La **probabilidad** estudia **fenómenos aleatorios**, como tirar unos dados o lanzar una moneda al aire, cuyo resultado no se puede predecir. |

Puede parecer que todo depende de la suerte y que el resultado es imprevisible. La realidad es que nuestra decisión es importante dado que hay más combinaciones de números que suman 7 que combinaciones que suman 10 o 2. Por tanto, deberíamos apostar por el número 7.

Profundiza: Introducción a la probabilidad

[SECCIÓN 2] **1.1 Los fenómenos aleatorios**

Se usa el término ***experimento*** para describir cualquier método de recogida de datos. Un experimento puede producir un valor numérico o un resultado cualitativo.

Los experimentos estadísticos pueden ser de dos tipos:

* Los **deterministas**: podemos **predecir** los resultados. Por ejemplo, en el experimento de “sacar un bola de una bolsa llena con bolas verdes y observar su color”, el resultado es predecible: se extraerá una bola de color verde.
* Los **aleatorios**: los resultados son **impredecibles**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_12\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14873/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_12_img2_zoom.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Imagen aprovechada de:  3°ESO-Matemáticas académicas-La probabilidad-Sección 2(imagen 2 del cuaderno) |
| **Pie de imagen** | El resultado de tirar unos dados es un **experimento aleatorio**, porque no se puede predecir. En cambio, si se lanza una pelota al aire, es un **experimento determinista**, porque se puede predecir con seguridad que volverá a caer al suelo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Experimento aleatorio** |
| **Contenido** | Los **experimentos aleatorios** son fenómenos en los cuales no es posible predecir su resultado antes de realizarlo pero se conoce el conjunto de los posibles resultados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Experimento determinístico** |
| **Contenido** | En los **experimentos determinísticos** el resultado es predecible. |

Por ejemplo**,** ¿qué diferencia existe entre extraer una balota roja de una urna en la que todas las balotas son rojas y extraer una balota azul de una urna en la que todas las balotas son de diferente color?

En el primer caso tendremos la seguridad de decir que la balota extraída será roja, mientras que en el segundo caso no podemos asegurar de antemano que la balota sea azul.

En este último caso diremos que estamos frente a un **fenómeno** o **experimento aleatorio,** por tanto diremos que un **experimento aleatorio** es aquel en el que no es posible predecir su resultado, aunque si se conocen sus posibles resultados. Si en el experimento los resultados se pueden predecir con anterioridad, diremos que es un experimento **determinístico**.

Los fenómenos o **experimentos aleatorios** tienen en común las siguientes características:

* Se conoce el conjunto de todos los **resultados posibles**, pero no el que se obtendrá al realizar el experimento.
* Se puede **repetir** tantas veces como se quiera en condiciones idénticas y su resultado siempre puede variar.
* Cualquier modificación de las condiciones iniciales de la repetición puede modificar el resultado.
* Si el experimento se repite un gran número de veces, entonces aparece algún modelo de **regularidad estadística** en los resultados obtenidos.

[SECCIÓN 2] **1.2 El espacio muestral y los sucesos**

El **conjunto de todos los resultados posibles** de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**. Lo representamos con la letra *S*, aunque también se suele denotar mediante la letra griega omega mayúscula (Ω).

Por ejemplo:

* Al lanzar una moneda al aire para ver si sale cara o cruz, el espacio muestral tiene dos elementos: *S* = {cara, cruz}.
* Al lanzar un dado cúbico y apuntar el resultado, el espacio muestral será el conjunto: *S*= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
* Al sacar un tornillo de una caja en la que hay muchos, para saber si es defectuoso o no, el espacio muestral será: *S* = {defectuoso, no defectuoso}.

A cualquier hecho o resultado que puede interesarnos estudiar en un experimento aleatorio lo llamamos **suceso** o **evento**. Se representa con una letra mayúscula.

Así por ejemplo en el experimento de lanzar un dado al aire cuyo espacio muestral es: *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, podemos definir los siguientes sucesos:

* Que el resultado del dado sea un número par. *A* = {2, 4, 6}.
* Que el resultado del dado sea un múltiplo de 3: *B* = {3, 6}.
* Que el resultado del dado sea un número primo: *C* = {2, 3, 5}.

[SECCIÓN 3] **1.2 .1 Los tipos de sucesos**

Decimos que un determinado suceso ha ocurrido si el resultado de la experiencia aleatoria ha sido alguno de los elementos de ese suceso. Por ejemplo, si al lanzar un dado ha salido un 2, un 4 o un 6, podemos asegurar que ha tenido lugar el suceso “salir un número par”.

Hay distintos tipos de sucesos que pueden producirse en función de su resultado:

* Los **elementales** o **simples**: están formados por **un único resultado** del espacio muestral. En el ejemplo del dado, los sucesos simples son: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, que se corresponden con cada uno de los resultados posibles del experimento. En el experimento “sacar una bola de una urna con tres bolas blancas y tres bolas negras”, los sucesos simples son: {bola negra}, {bola blanca}.
* Los **compuestos**: determinados por **dos** o **más resultados** del espacio muestral. Es decir, están formados por **dos** o **más sucesos elementales**. Por ejemplo: un suceso compuesto del experimento aleatorio de lanzar un dado sería “obtener un número par”: {2, 4, 6}. Un suceso del experimento de sacar una bola de una urna con tres bolas blancas y tres negras dos veces consecutivas sería el suceso “obtener al menos una bola blanca”: {(bola negra, bola blanca), (bola blanca, bola blanca), (bola blanca, bola negra)}.
* Los **imposibles**: son los que nunca ocurrirán. Se denotan con el signo de conjunto vacío: {∅}. Por ejemplo, un suceso imposible del experimento aleatorio de “sacar una bola de una urna con tres bolas blancas y tres bolas negras” sería “sacar una bola roja”.
* Los **seguros**: están formados por todos los resultados posibles del experimento, ocurren siempre y coinciden con el espacio muestral. En el experimento de “tirar un dado de seis caras”, sería el suceso “sacar una puntuación menor que 7”.
* Los **equiprobales**: dos sucesos son equiprobables si tienen la misma probabilidad de suceder. Por ejemplo, el suceso “sacar un 2” y el suceso “sacar un 5” al lanzar un dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Espacio muestral y suceso** |
| **Contenido** | El **espacio muestral** es el conjunto de toso los posibles resultados de un experimento aleatorio, se denota con la letra *S* o la letra Ω.  Un **evento** o **suceso** es un subconjunto del espacio muestral que cumple una característica particular. Se representa con las letras mayúsculas del alfabeto. |

Profundiza Experimentos aleatorios y sucesos

[SECCIÓN 2] **1.3 Las operaciones con sucesos**

Antes de exponer las operaciones que se pueden realizar con sucesos, conviene saber qué dos sucesos cualesquiera pueden ser **compatibles** o **incompatibles**.

* **Los sucesos compatibles**: aquellos que **se pueden dar de forma simultánea**. Por ejemplo, tenemos el suceso *A*, “obtener un número par”, con los resultados favorables {2, 4, 6}, y el suceso *B*, “obtener un número mayor que 2”, con los resultados favorables {3, 4, 5, 6}. Al lanzar un dado se ha obtenido un 4: como pertenece a los dos sucesos, decimos que los sucesos *A* y *B* son compatibles.
* Los **sucesos incompatibles**: aquellos que no se pueden dar de forma simultánea. La intersección de sus resultados favorables es el conjunto vacío {∅}. Para que dos sucesos sean incompatibles, no pueden tener elementos comunes. Por ejemplo, en el lanzamiento de dados, el suceso “obtener un número impar” {1, 3, 5} es incompatible con el suceso “obtener un número par” {2, 4, 6}.

Las **operaciones** que se pueden realizar con sucesos son:

* La **unión de sucesos**: la unión de dos sucesos *A* y *B* se verifica cuando se ocurren *A* o *B*. El suceso unión de *A* y *B* es el formado por todos los elementos de *A* y todos los elementos de *B*. Se escribe como:

***A*** ⋃ ***B***

Y se lee *A* unión *B*.

* La **intersección de sucesos**: solo sucede cuando *A* y *B* ocurren al mismo tiempo (deben ser sucesos compatibles). El **suceso intersección** de *A* y *B* es el formado por todos los elementos que son, a la vez, de *A* y de *B*. Se escribe como:

***A*** ⋂ ***B***

Se lee *A* intersección *B*.

* La **inclusión de sucesos**: sucede cuando *A* contiene a *B*. Se escribe como:

***A*** ⊂ ***B***.

Se lee *A* contiene a *B*.

* El suceso **diferencia**: sucede cuando ocurre *A*, pero no ocurre *B*. Si se toma como ejemplo los sucesos *A* = {2, 4, 6} y *B*= {3, 6}, el suceso diferencia sería: *A* – *B* = {2, 4}.
* El suceso **contrario** o **complementario**: es el conjunto de resultados posibles no favorables. Dado un suceso cualquiera *A*, al suceso que tiene lugar siempre que no suceda *A*, lo llamamos **suceso contrario** de *A*. Por ejemplo: el contrario de {1, 3} es {2, 4, 5, 6}, para el lanzamiento de un dado de 6 caras. El suceso contrario se escribe *Ac.*

Ten en cuenta que dos sucesos contrarios siempre son incompatibles, pero dos sucesos incompatibles no siempre son contrarios: además, la unión de los sucesos posibles del experimento tiene que ser el espacio muestral.

Vamos a ver las operaciones con sucesos con el experimento de lanzar un dado al aire una vez. Cuyo espacio muestral es:

*S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Y definamos los siguientes sucesos:

* Que el resultado sea un número par: *A* = {2, 4, 6}.
* Que el resultado sea un múltiplo de 3: *B* = {3, 6}.
* Que el resultado dado sea un número mayor que 2: *C* = {3, 4, 5, 6}.
* Que el resultado sea un número impar: *D* = {1, 3, 5}.

Las operaciones con sucesos serán:

* La **unión de sucesos s**ería igual a: *A* ⋃ *B*={2, 3, 4, 6}.
* La **intersección de sucesos** sería: *A* ⋂ *B* = {3}
* La **inclusión de sucesos,** observa que en nuestro ejemplo el suceso *C* = {3, 4, 5, 6}, contiene al suceso *B* = {3, 6}, ya que los elementos de *B* también pertenecen a *C*. Por tanto: ***C*** ⊂ ***B.***
* El suceso **diferencia** sería: *A* – *B* = {2, 4}.
* El suceso **contrario** o **complementario**, para el evento *A* = {2, 4, 6} el evento *D* = {1, 3, 5}, sería su complemento. El suceso contrario se escribe como *Ac.* Así: *D* = *Ac* = {1, 3, 5}.

Para ejemplificar un experimento podemos utilizar una ilustración llamada ***diagrama de Venn***. Veámoslo para el experimento de lanzar un dado y los sucesos *A* “obtener un número par” {2, 4, 6} y *C* “obtener un número mayor que 2” {3, 4, 5, 6}. El rectángulo representa el espacio muestral:

*A* ⋃ *C* = {2, 3, 4, 5, 6}

*A* ⋂ *C* = {4, 6}

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_12\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14873/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_12_img3_zoom.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Imagen aprovechada de:  3°ESO-Matemáticas académicas-La probabilidad-Sección 2(imagen 3 del cuaderno) |
| **Pie de imagen** | **Diagrama de Venn** en el que se representan los sucesos *A* “obtener un número par” y *B* “obtener un número mayor que 2”. |

Vamos a practicar las operaciones con sucesos en el siguiente ejemplo: realizamos el experimento aleatorio “tirar un dado dos veces consecutivas”.

Paso 1: hallamos su espacio muestral.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Resultados posibles de tirar dos dados de seis caras** | | | | | |
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

Paso 2: seleccionamos entre todos los resultados aquellos que correspondan a los siguientes sucesos.

* Suceso *A* = “salir dos números iguales”: *A* = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}
* Suceso *B* = “obtener una suma par”: *B* = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3),(5, 5),(6, 2),(6, 4),(6, 6)}
* Suceso *C* = “obtener una suma de 9”: *C* = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}
* Suceso *D* = “obtener una suma impar”: *D* = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)}

Paso 3: realizamos las operaciones con sucesos.

* Suceso *A* ⋃ *C* = “salir dos números iguales” u “obtener una suma de 9”:

*A* ⋃ *C* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

* Suceso *A* ⋃ *D* = “salir dos números iguales” u “obtener una suma impar”:

*A* ⋃ *D* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)}

* Suceso *A* ⋂ *C* = “salir dos números iguales” y “obtener una suma de 9”:

*A* ⋂ *C* = {∅}

* Suceso complementario o contrario de *A* ⋃ *D* (es decir, aquellos resultados que faltan al conjunto *A* ⋃ *D* para completar el espacio muestral):

{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)}

* ¿Qué sucesos son incompatibles?

El suceso *A* y *C*, el suceso *A* y *D*, el suceso *C* y *B*, y el suceso *B* y *D*.

* De todos estos sucesos incompatibles, ¿cuáles son también sucesos contrarios?

El suceso *B* y *D*, porque o saldrá una suma par o saldrá una suma impar. Fijémonos en que la unión de ambos nos da el espacio muestral.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Las operaciones con sucesos** |
| **Contenido** | Las operaciones que se pueden realizar con sucesos son:   * La **unión de sucesos**: *A* ⋃ *B* es el suceso que ocurre si y sólo si *A* o *B* (o ambos) ocurren. * La **intersección de sucesos**: *A* ∩ *B* es el suceso que ocurre si y sólo si *A* y *B* ocurren. * La **inclusión de sucesos**: el suceso *A* ⊂ *B* ocurre cuando *A* contiene a *B*. * El suceso **diferencia**: sucede cuando ocurre *A*, pero no ocurre *B*. * El suceso **contrario:** el suceso *Ac* ocurre cuando no ocurre *A.* |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **2 Tipos de probabilidad**

[SECCIÓN 2] **2.1 La probabilidad experimental**

La probabilidad experimental se basa en la observación de la repetición de un experimento aleatorio y los resultados que este arroja cada vez que se realiza.

Así por ejemplo si lanzamos una moneda al aire 30 veces y anotamos sus resultados en una tabla, podemos observar con qué **frecuencia** sucede cada resultado posible en el experimento. Y podemos hacer una aproximación a la probabilidad teórica del evento.

Recuerda que el espacio muestral de lanzar una moneda al aire es *S* = {cara, sello}

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Lanzamiento | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Resultado | C | C | S | C | C | S | S | S | C | C | C | S | C | S | C |
| Lanzamiento | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Resultado | S | S | C | C | S | C | S | C | C | C | C | S | S | C | S |

[SECCIÓN 3] **2.1.1 La frecuencia de un suceso**

Si un experimento aleatorio se repite un número *N* de veces, podemos distinguir la **frecuencia absoluta** y la **frecuencia relativa** de un suceso:

* La **frecuencia absoluta**: es el número de veces que se repite ese suceso. Se representa con ***fi***. La suma de todas las frecuencias absolutas debe ser igual al número de veces que se ha realizado el experimento.

En el ejemplo de la moneda que se ha lanzado 30 veces, el suceso que muestra que el resultado es cara se ha repetido 17 veces, así la frecuencia absoluta del suceso “obtener cara” es: *f1* (cara) = 17 y el suceso “obtener un sello” es *f2* (sello) = 13

* La **frecuencia relativa**: es su frecuencia absoluta dividida entre el número de veces que se ha realizado el experimento. Se representa como *hi*:

*hi* = *fi*/*N*

* La suma de las frecuencias relativas es:
  + Igual a 1: si se expresa como un número decimal.
  + Igual a 100%: si se expresa en porcentaje (%).

Por ejemplo para el ejemplo de la moneda tenemos que:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20h_%7B1%7D%28cara%29%3D%5Cfrac%7B17%7D%7B30%7D%3D0.57%3D57%5C%25

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20h_%7B2%7D%28sello%29%3D%5Cfrac%7B13%7D%7B30%7D%3D0.43%3D43%5C%25

*h*1 + *h*2 = 0.57 + 0.43 = 1 y *h*1 + *h*2 = 57% + 43% = 100%

Revisemos ahora el ejemplo de lanzar un dado al aire 40 veces y anotemos sus resultados en una tabla de frecuencias del siguiente modo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *f*i | *h*i | *h*i∙100% |
| 1 | 5 | 0.13 | 13% |
| 2 | 8 | 0.2 | 20% |
| 3 | 7 | 0.17 | 17% |
| 4 | 5 | 0.13 | 13% |
| 5 | 7 | 0.17 | 17% |
| 6 | 8 | 0.2 | 20% |
| Total | 30 | 1 | 100% |

Observa que la suma de las frecuencias absolutas es igual a 1 mientras que en la suma de las frecuencias relativas se obtiene el 100%.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para redondear cifras decimales: si tenemos que suprimir una cifra decimal **más grande** o **igual a 5**, tenemos que aumentar en 1 la cifra decimal anterior.  Por ejemplo: 0,165 se redondea a 0,17 si queremos solo dos cifras decimales. |

[SECCIÓN 3] **2.1.2 La ley de los grandes números**

En las experiencias de azar, se puede observar que cuando se repite un experimento aleatorio cierto número de veces, los valores de la frecuencia relativa se estabilizan en torno a un valor concreto. A ese valor es al que llamaremos frecuencia relativa esperada o ***probabilidad del suceso*** estudiado.

Por ejemplo si lanzamos una moneda al aire 100 veces, ¿cuántas veces imaginas que se obtendrá sello? ¿Y si la lanzamos 200 veces o 400 veces? Observemos que sucede con los resultados en la siguiente tabla.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Resultados de lanzar una moneda al aire y obtener sello | | | |
| Lanzamientos | *fi* | *hi* | *hi∙*100% |
| 100 veces | 40 | 0,4 | 40% |
| 200 veces | 105 | 0,53 | 53% |
| 400 veces | 197 | 0,49 | 49% |

Observa que a medida que el experimento se repite un número mayor de veces, el valor de la frecuencia relativa se aproxima cada vez más al número ½ = 0,5 que es la **probabilidad teórica del suceso**.

El resultado de que la frecuencia relativa se vaya acercando más y más a la probabilidad del evento, es conocido como la “La Ley de los grandes números”.

Observa a través del histograma de frecuencias como la tendencia del experimento se aproxima a 0.5

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_10\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cuando un experimento se repite N veces su frecuencia tiende a estabilizarse alrededor de un valor. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Ley de los grandes números** |
| **Contenido** | El valor de la **frecuencia relativa** de un suceso cualquiera, en las repeticiones de un experimento aleatorio, tiende a acercarse a un **valor constante** a medida que el número de repeticiones se hace más grande.  Decimos que la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su **probabilidad teórica** a medida que aumenta el número de experiencias que se realizan. |

[SECCIÓN 2] **2.2 La probabilidad teórica**

La **probabilidad de un suceso** es un número que representa la proporción de veces que podemos esperar que un suceso ocurra cuando el experimento es repetido muchas veces en idénticas condiciones. Lo representamos con la notación:

*p*(*x*) y se lee la probabilidad del suceso *x.*

Donde *x* es el suceso del que medimos la probabilidad.

.

Así por ejemplo cuando lanzamos un dado al aire, la probabilidad de sacar un 1 se escribiría como:

*p*(*1*) y se leería la probabilidad de que el resultado sea 1.

En muchos experimentos aleatorios, todos los casos posibles se pueden definir de forma que tengan la misma probabilidad de ocurrir. En estos casos, decimos que los sucesos elementales del experimento son **equiprobables**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos sucesos son **equiprobables** si tienen la **misma probabilidad** de suceder. |

Es decir que la probabilidad teórica de un suceso elemental y equiprobale de un experimento aleatorio *E* se calcula mediante la razón:

http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14873/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_12_formula13_resized.gif

En el caso del dado como el espacio muestral del experimento es *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

La probabilidad de cada suceso elemental es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%281%29%3Dp%282%29%3Dp%283%29%3Dp%284%29%3Dp%285%29%3Dp%286%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D

Ya que cada resultado puede ocurrir una vez entre seis.

[SECCIÓN 3] **2.2.1 La probabilidad de un suceso. Ley de Laplace**

Ahora vamos a definir la probabilidad de ocurrencia de un suceso en un experimento aleatorio del siguiente modo.

Si A es un suceso no vacío de un experimento aleatorio y S es el espacio muestral del experimento, la probabilidad de que el suceso A ocurra se define como:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28A%29%3D%5Cfrac%7B%5C%23A%7D%7B%5C%23S%7D

Donde:

#A significa número de casos favorables del suceso A.

#S Significa número de posibles resultados del experimento aleatorio.

Retomemos el ejemplo del lanzamiento del dado.

*S* = 1, 2, 3, 4, 5, 6} donde #*S* = 6

Y los sucesos:

Que el resultado sea un número par.

*A* = {2, 4, 6} donde #*A* = 3.

Que el resultado sea un múltiplo de 3.

*B* = {3, 6} donde #*B* = 2

Así la probabilidad de que ocurra el evento *A* es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28A%29%3D%5Cfrac%7B%5C%23A%7D%7B%5C%23S%7D%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B6%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D0.5%3D50%5C%25

Y la probabilidad de que ocurra el suceso *B* es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28B%29%3D%5Cfrac%7B%5C%23B%7D%7B%5C%23S%7D%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B6%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%3D0.%5Coverline%7B3%7D%3D33.3%5C%25

Revisemos otro ejemplo, si tenemos una urna con 40 balotas: 20 rojas, 10 verdes, 5 azules y 5 amarillas, y sacamos una bola al azar, la probabilidad de una balota sea de cada color es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28Roja%29%3D%5Cfrac%7B20%7D%7B40%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D0.5%3D50%5C%25

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28Verde%29%3D%5Cfrac%7B10%7D%7B40%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B5%7D%3D0.25%3D25%5C%25

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20p%28Amarilla%29%3Dp%28Azul%29%3D%5Cfrac%7B5%7D%7B40%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B8%7D%3D0.125%3D12.5%5C%25

Como puedes observar probabilidad de un suceso se puede expresar como una **razón**, un **número** **decimal** y un **porcentaje**.

[SECCIÓN 3] **2.2.2 Las propiedades de la probabilidad**

Las **propiedades** de las operaciones con sucesos son:

* Para **cualquier suceso *A***, se cumple:

0 ≤ *p*(*A*) ≤ 1 si la probabilidad esta expresada como un número decimal.

0 ≤ *p*(*A*) % ≤ 100 si la probabilidad esta expresada como un porcentaje.

* Probabilidad de un **suceso seguro**:

*p*(*E*) = 1

Si lo expresamos en porcentajes escribimos *p*(*E*) % = 100.

* Probabilidad de un **suceso imposible**:

*p*(∅) = 0

El suceso imposible no ocurre nunca, es el suceso contrario de *E*.

* Probabilidad de la **unión** de dos sucesos **incompatibles o mutuamente excluyentes** *A* y *B*:

*p*(*A* ∪ *B*) = *p*(*A*) + *p*(*B*)

* Probabilidad de la **unión** de dos sucesos **compatibles***A* y *B*:

*p*(*A* ∪ *B*) = *p*(*A*) + *p*(*B*) − *p*(*A* ∩ *B*)

* Probabilidad de los **sucesos contrarios***A* y *Ac*:

*p*(*Ac*) = 1 − *p*(*A*)

Ya que *A* y *Ac* son mutuamente excluyentes, *A* ∪ *Ac* = *E* y *p*(*E*) = 1.

De las probabilidades anteriores, se deduce que:

* La **probabilidad** de un suceso es la **suma** de las probabilidades de sus **casos favorables**.

Por ejemplo, al tirar un dado de seis caras sin defectos, ¿cuál es la probabilidad que salga un número múltiplo de 2?

Los números múltiplos de 2 forman el suceso *A* = {2, 4, 6}. Su probabilidad es la suma de las probabilidades de sus casos favorables:

http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14873/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_12_formula19_resized.gif

Si se aplica esta propiedad a un suceso seguro, se puede afirmar que:

* La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales tiene que ser 1.

Por ejemplo, en el lanzamiento del dado, *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y se cumple que:

*p*(1) + *p*(2) + *p*(3) + *p*(4) + *p*(5) + *p*(6) = 1

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D&plus;%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D&plus;%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D&plus;%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D&plus;%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D&plus;%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D%3D%5Cfrac%7B6%7D%7B6%7D%3D1

[SECCIÓN 2] **2.3 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **3 Los experimentos aleatorios compuestos**

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples, realizados de forma consecutiva.

Distinguiremos dos tipos de experimentos aleatorios compuestos:

* Los **sucesos independientes**: el resultado de cada uno de ellos no depende del resultado de los demás. La probabilidad se expresa mediante la fórmula:

*p*(*A* ∩ *B*) = *p*(*A*) • *p*(*B*).

Por ejemplo Si lanzamos una moneda al aire dos veces, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos lanzamientos sean sello?

El espacio muestral de cada lanzamiento es: S = {cara, sello}, como el resultado del primer lanzamiento no afecta al segundo lanzamiento tenemos que la probabilidad de que el primer lanzamiento (L1) sea sello es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28L_%7B1%7D%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D0%2C5%3D50%5C%25

Y para el segundo lanzamiento (L2) es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28L_%7B2%7D%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D0%2C5%3D50%5C%25

Por tanto la probabilidad de obtener dos sellos en el lanzamiento es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28L_%7B1%7D%5Ccap%20L_%7B2%7D%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Ccdot%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%3D0%2C25%3D25%5C%25

* Los **sucesos dependientes**: el resultado de un suceso afecta al resultado del siguiente. La probabilidad se expresa mediante la fórmula:

*p*(*A* ∩ *B*) = *p*(*A*) • *p*(*B/A*).

Por ejemplo Si una urna contiene 4 balotas rojas, 3 balotas verdes y 5 balotas azules ¿Cuál es la probabilidad de que la primera balota sea verde y la segunda balota sea roja?, si al momento de sacar la primer balota esta no es reemplazada por otra en la urna.

Para este caso observemos que se trata de los eventos simples A sacar una balota verde y B sacar una balota roja sin reemplazar la que salió anteriormente. Cada una de las probabilidades es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28A%29%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B12%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%3D0%2C25%3D25%5C%25

Ya que son 3 balotas verdes de las 12 que existen en la urna.

Para hallar la probabilidad del evento B debemos tener en cuenta que se ha extraído una por tanto el espacio muestral del experimento cambia de 12 a 11. Así que:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28B%29%3D%5Cfrac%7B4%7D%7B11%7D%3D0%2C36%3D25%5C%25

Por tanto la probabilidad de que una balota sea verde y la segunda sea roja es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28A%5Ccap%20B%29%3DP%28A%29%5Ccdot%20P%28B/A%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%5Ccdot%5Cfrac%7B4%7D%7B11%7D%20%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B11%7D0%2C09%3D9%5C%25

[SECCIÓN 2] **3.1 Los diagramas de árbol**

Para representar el desarrollo de un experimento aleatorio y estudiar la probabilidad de un evento aleatorio, es conveniente graficar un **diagrama de árbol**, que muestra todos los posibles resultados del experimento.

Observemos ele ejemplo del lanzamiento de la moneda dos veces.

Sabemos que en el primer lanzamiento los posibles resultados son cara o sello así que cada uno de estos posibles resultados es una raíz del árbol y a partir de ellos se desprende una rama para cada posible resultado del segundo lanzamiento.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_10\_IMG05 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Un diagrama de árbol esquematiza los resultados de un experimento aleatorio. |

Observa que cada camino de flechas forma un elemento del espacio muestral del experimento que consiste en “lanzar una moneda al aire dos veces”

*S* = {(Cara, Cara), (Cara, Sello), (Sello, Cara), (Sello, Sello)}

También se verifica que la probabilidad de que los dos lanzamientos sean sello es de ¼.

Por tanto de un diagrama de árbol también podemos hallar la probabilidad de un evento compuesto.

Por ejemplo David, Camila y Viviana son candidatos a presidente y vicepresidente de una compañía, ¿Cuál es la probabilidad de que el cargo de presidente y vicepresidente sea ocupado por las dos mujeres?

Realicemos el diagrama de árbol para resolver este problema.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_10\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A partir de los diagramas de árbol se puede calcular la probabilidad de un evento compuesto. |

Como ebservas el diagrama de árbol muestra que el espacio muestral del experimento “Elegir un presidente y un vicepresidente de entre tres candidatos” es:

*S* = {(Camila, David), **(Camila, Viviana)**, (David, Camila), (David, Viviana), **(Viviana, Camila),** (Viviana, David)}

De donde observamos que la probabilidad del evento es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28mujer%2C%20mujer%29%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B6%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%3D0.%5Coverline%7B3%7D%3D33.3%5C%25

El diagrama de árbol también permite verificar la definición de probabilidad de eventos dependientes. En la primera raíz observas que hay 2 mujeres de los 3 candidatos y cuando una mujer es presidente para el cargo de vicepresidente quedan dos candidatos de los cuales una es mujer es decir:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28presidente%29%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28vicepresidente%29%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D

Así que la probabilidad de que los cargos sean de las dos mujeres es:

https://latex.codecogs.com/png.latex?%5Cfn_jvn%20P%28presidente%2C%20vicepresidente%29%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%5Ccdot%20%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B6%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D

[SECCIÓN 1] **4.** **Competencias**

**Falta renglón**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

[SECCIÓN 1] **5.** **Fin de tema**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_09\_REC00 | |
| **Web 01** | *Probabilidad y estadística* | *http://probabilidadmitad1.blogspot.com.co/p/eventos-dependientes-e-independientes.html* |
| **Web 02** | *Estadística y probabilidad* | *https://aula.tareasplus.com/Marcela-Gomez/Probabilidad-y-Estadistica* |
| **Web 03** | *Concepto de probabilidad* | *https://www.youtube.com/watch?v=SmqQAUAV8O8* |