|  |  |
| --- | --- |
| **Título del guion** | Los números complejos |
| **Código de guion** | MA\_9\_03\_CO |
| **Descripción** | El conjunto de los números complejos contiene al conjunto de los números reales y a los números cuyos cuadrados son números negativos. Conoce el conjunto de los números complejos, cómo se operan, qué propiedades cumplen y en qué situaciones se pueden encontrar. |

[SECCIÓN 1] **1 La necesidad de** **ampliar el conjunto de los números reales**

Los conjuntos numéricos surgen de la necesidad de dar solución a algunas operaciones. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros (Z) surge de la necesidad de resolver sustracciones en la cuales el minuendo es menor que el sustraendo, como es el caso de 9 – 11 cuyo resultado es –2; este número no es natural pero si es un número entero.

En el conjunto de los números enteros es posible adicionar, sustraer multiplicar y dividir dos números naturales, sin embargo en esta última operación, no siempre se obtiene un número entero. Por ejemplo,



es un número racional.

Un número racional (Q) se expresa como una fracción de números enteros cuyo denominador sea diferente de cero. También se representan con decimales finitos o infinitos periódicos como se muestra en los siguientes ejemplos:

* 
*  = 

Los números que no son racionales son números irracionales (\mathbb{I}) y su parte decimal siempre es infinita no periódica. Un ejemplo de número irracional es π:



Ese nímero irracional que se lee pi es aproximadamente igual a 3,1416.

La unión del conjunto de los números racionales y de los irracionales forma el conjunto de los números reales; en este conjunto es posible realizar operaciones más complejas.

Por ejemplo, en el conjunto de los números reales es posible dar respuesta a expresiones como:





En el primer caso, el resultado es un número racional pero en el segundo, es un número irracional.

Sin embargo, en el conjunto de los números reales no es posible calcular raíces de índice par, para radicandos negativos que son soluciones por ejemplo de expresiones como *x*2 + 1 = 0 o *a*2 + 4 = 0.

Cuando se despaja el valor desconocido en cada caso se obtiene respectivamente,





Números que no pertencen al conjunto de los números reales.

En matemáticas a los números cuyo cuadrado corresponde a un número negativo se les denominaron **imaginarios**.

[SECCIÓN 2] **1.1 Los números imaginarios**

Los números imaginarios se crearon para dar solución a ecuaciones como

*x*2 + 1 = 0. El número:



se considera la unidad principal de los números imaginarios y se representa con la letra *i*. Es decir



De esa manera, se puede establecer que *i*2 = –1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Números imáginarios** |
| **Contenido** | En los números reales se define que el cuadrado de todo número es no negativo, por tal razón, expresiones como como *x*2 + 1 = 0 no tienen solución real.  Entonces, se define un número *i* que no es real cuyo cuadrado es igual a –1.  *i*2 = –1  A la cantidad se le denomina la **unidad imaginaria**.  Al producto de un número real por la unidad imaginaria se le conoce como **imaginario puro**. |

Por ejemplo, 3*i* es un **número imaginario puro** porque:

.

Otros números imaginarios puros son: y .

En los siguientes ejemplos vemos cómo escriben las raíces con radicando negativos como números imaginarios puros.

1. 
2. XXXX







1. Desarrollar el otro ejemplo.

Los números imaginarios nos ayudan a resolver ecuaciones de segundo grado como 2*x*2 + 42 = –58.

Observa:

2*x*2 + 20 = –58

2*x*2 = –58 – 20

2*x*2 = –78



*x*2 = –49





*x* = 7*i*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | ¿A qué conjunto numérico pertenece la solución de la operación? |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar los conjuntos numéricos y sus elementos |

Incluir practica de escribir imaginarios puros

[SECCIÓN 2] **1.2 Las potencias de**

Para calcular las potencias de la unidad imaginaria *i*, se aplican las propiedades de la potenciación de números reales.

Las potencias de *i* se deducen de su definición:

…

Los resultados de las potencias de con *n* un número natural determina el ciclo . Luego, para determinar el resultado de una potencia se divide a *n* entre 4, y al residuo de la división se le asigna el valor de la potencia correspondiente, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Residuo división** | **Potencia** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Por ejemplo,

* , ya que al dividir 15 entre 4, se obtiene como residuo a 3, y a este residuo le corresponde .
* , pues al dividir 22 entre 4, se obtiene como residuo a 2, y a este residuo le corresponde -1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC20 |
| **Título** | Practica las equivalencias de las potencias de i |
| **Descripción** | Actividad para relacionar potencias de *i* con sus equivalencias (incluir expresiones para simplificar) |

Si acá comienza la sección 2 entonces debe haber un Consolidación antes del título.

[SECCIÓN 1] **2 El conjunto de los números complejos**

Ya sabemos que los números de la forma *ai* son números imaginarios. Pero que sucede si a un imaginario se adicionas un número real. Es decir ¿qué clase de número es *ai* + *b*, siendo *b* un número real?

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El conjunto de los números complejos** |
| **Contenido** | Los números de la forma *ai* + *b* con *a* y *b* números reales no son reales. Estos números pertenecen a un núevo conjunto numérico llamado **el conjunto de los números complejos**. |

En un número complejo *a* + *bi* se identifican la parte real *a* y la parte imaginaria *bi*. Por ejemplo, en el número –13 – 4*i*; el número –13 es la parte real y 4*i* es la parte imaginaria.

El conjunto de los números complejos se denota con la letra y se define como:

Algunos ejemplos de números complejos son:

* ; en donde es la parte real y 7*i* la parte imaginaria.
* ;siendo la parte real y i la parte imaginaria.

¿En los números 4,6 y 0,2 + π, cuál es la parte imaginaria?

Efectivamente estos números son reales y su parte imaginaria es 0. En ese caso, se dice que el número es de la forma *a* + 0i.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** |  |
| **Contenido** | Todo número real a puede escribirse de la forma a + 0i |

Los números reales y los números imaginarios son subconjuntos de los números complejos.

Cuando la parte real es 0 se forman los números imaginarios y cuando la parte imaginaria es 0 se obtienen los números reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama números complejos y subconjuntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Relación de contenencia entre los conjuntos numéricos, tal que:   * , conjunto de números complejos * , conjunto de números reales * , conjunto de números racionales * , conjunto de números irracionales * , conjunto de números enteros * , conjunto de números naturales * Conjunto de números imaginarios |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC30 |
| **Título** | Breve historia de los números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que presenta una breve historia del conjunto de los números complejos  Presentar algunas aplicaciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC40 |
| **Título** | Los números imaginarios y los números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica el conjunto de los números complejos y sus subconjuntos |

[SECCIÓN 2] **2.1 La igualdad entre números complejos**

Dos números complejos son iguales si y solo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria es decir,

*a* + *bi* = *c* + *di* si y solo si *a* = *c* y *b* = *d*.

Por ejemplo,

*p* + *qi* = 5 - 7i si *p* = 5 y *q* = -7

[SECCIÓN 2] **2.2 La forma cartesiana de un número complejo**

Los números complejos se representan como un pareja ordenada de número reales. Si un número complejo se define como *x + yi*, se puede expresar como (*x, y*). Esta expresión de los números complejos recibe el nombre de **forma cartesiana**. Por ejemplo,

* en su forma cartesiana es .
* en su forma cartesiana es .

[SECCIÓN2]  **2.3 La representación geométrica de un número complejo**

A partir de la representación geométrica de un número complejo en su forma cartesiana, los números complejos pueden ser representados geométricamente en el plano complejo, que es similar al plano cartesiano .

En el plano complejo la representación geométrica de (*x, y*) es un punto tal que *x* está ubicado en el eje real e *y* en el eje imaginario. En general, a cualquier numero complejo se le asocia un punto en el plano complejo. Por ejemplo, la representación en el plano complejo del número 5 + 2*i* es la representación del punto (5, 2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Representación geométrica de 5 + 2*i*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | HACER CUADRICULA |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica de 5 + 2*i* en el plano complejo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Plano de Argand** |
| **Contenido** | El plano complejo donde encontramos un eje real y un eje imaginario también se conoce como diagrama de Argand, su creación se le atribuye a Jean Robert Argand ( [1768](http://es.wikipedia.org/wiki/1768)-[1822](http://es.wikipedia.org/wiki/1822)) donde X es eje real, y Y el eje imaginario. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC50 |
| **Título** | Representación geométrica, módulo y conjugado de un número complejo |
| **Descripción** | Interactivo que explica la representación geométrica, el módulo y el conjugado de un número complejo |

[SECCIÓN 2] **2.4 El módulo de un número complejo**

En el plano complejo, el **módulo** de un número complejo se define como la distancia entre el punto de origen del plano complejo, con coordenadas (0, 0) y el punto que representa el numero complejo.

El módulo de un número complejo *x + yi* se representa y es igual a:

Por ejemplo, el módulo del número 2 + 3*i* es igual a:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Representación geométrica de un número complejo y su módulo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica del número complejo 2 + 3*i* y su módulo, . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC60 |
| **Título** | Practica el cálculo del módulo de un número complejo |
| **Descripción** | Actividad para calcular el módulo de números complejos |

**Aplicación de los números complejos en la electricidad**

En electricidad, cuando en un mismo circuito circula corriente alterna por resistencias, condensadores y bobinas, la oposición que presentan estos al paso de la corriente se denomina impedancia.

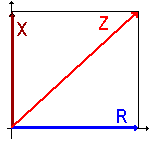
La impedancia es la suma de una componente resistiva (*R*) o reactancia, debido a las resistencias y una componente reactiva (*X*) o reactancia, debido a las bobinas y condensadores. La impedancia se mide en ohmios y se define como:

*Z = R* + *jX*

En física la *j* que acompaña la *X* representa la misma unidad imaginaria *i* y quiere decir que no es una suma directa sino la representación de un número complejo.

El valor de la impedancia *Z* se calcula de la misma forma como se calcula el módulo de un número complejo, es decir:



COLOCAR EN CURSIVAS

Por ejemplo la impedancia de un transformador de resistencia 15 ohmios y reactancia 10 ohmios es igual a:

ohmios

[SECCIÓN 2] **2.5. El conjugado de un número complejo**

En el plano complejo el **conjugado** de un número se define como la simetría con respecto al eje real, del número complejo.

El conjugado del número complejo *x* + *yi* , se representa y es igual a:

Por ejemplo, el conjugado de 1 + 3*i* es igual a:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Representación geométrica de un número complejo y su conjugado. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representacion geométrica del número complejo 1 + 3*i* y su conjugado, 1 – 3*i*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC70 |
| **Título** | Practica el cálculo del conjugado de un número complejo |
| **Descripción** | Actividad para calcular el conjugado de un número complejo |

[SECCIÓN 2**] 2.6 Consolidacion**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC80 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los números complejos |
| **Descripción** | Actividad sobre Los números complejos |

[SECCIÓN 1**] 3 Las operaciones con números complejos**

En el conjunto de los números complejos se definen las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división a partir de los siguientes algoritmos.

[SECCIÓN 2**] 3.1 La adición de números complejos**

**La adición de números complejos** se realiza sumando las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

Sean los números complejos *a + bi* y *c + di*, entonces su adición se define como:

(*a + bi*) + (*c + di*) = (*a + c*) + (*b + d*)*i*,

Por ejemplo,

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC90 |
| **Título** | Practica la adición de números complejos |
| **Descripción** | Actividad que permite la ejercitación de la adición de números complejos |

[SECCIÓN 3**] 3.1.1 Las propiedades de la adición de números complejos**

La adición de números complejos cumple las siguientes **propiedades**.

* **Propiedad clausurativa**

La adición de dos números complejos es otro número complejo.

* **Propiedad conmutativa**

Ejemplo:

* **Propiedad asociativa**

Ejemplo:

* **Elemento neutro**

El elementos neutro de la adición de números complejos es *0 + 0i*. Luego,

Ejemplo:

* **Inverso aditivo**

El inverso aditivo de un número complejo *a + bi* es –(*a + bi*) = –*a – bi*, tal que:

*a + bi* + (–(*a + bi*)) = *a + bi* + ( –*a – bi*) = *0 + 0i*

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC100 |
| **Título** | Practica las propiedades de la adición de números complejos |
| **Descripción** | Actividad para practicar las propiedades de la adición de números complejos |

[SECCIÓN 2**] 3.2 La sustracción de números complejos**

En la sustracción de números complejos, la diferencia se obtiene restando las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

La sustracción de los números complejos *e + fi* y *g + hi* se define como:

(*e + fi*) – (*g + hi*) = (*e* – *g*) + (*f* – *h*)*i*

Ejemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Distancia entre dos números complejos** |
| **Contenido** | En el plano complejo la distancia *d* entre dos números complejos *a + bi* y *c + di* es igual al módulo de la diferencia de los dos números y se define:  Por ejemplo, la distancia entre 4 *+* 3*i* y *-2 + 4i*  es igual a |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Representación geométrica de dos números complejos y su distancia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representacion geométrica de la distancia entre 4 *+* 3*i* y *-2 + 4i* igual a . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | Ma\_G09\_03\_CO\_REC110 |
| **Título** | La adición y sustracción de números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica la adición y la sustracción de números complejos; y las propiedades de la adición |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC120 |
| **Título** | Practica la sustracción números complejos |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar la sustracción de números complejos |

[SECCIÓN 2**] 3.3 La multiplicación de números complejos**

**La multiplicación de números complejos** se define aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números reales, así:

Aplicando la propiedad asocativa y reemplazando el valor de se obtiene:

Ejemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC130 |
| **Título** | Ejercita la multiplicación de números complejos |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios de multiplicación de números complejos |

[SECCIÓN 3**] 3.3.1 Las propiedades de la multiplicación de números complejos**

La multiplicación de números complejos cumple las siguientes  **propiedades**:

* **Clausurativa**

La mutiplicación de dos números complejos es otro número complejo.

* **Conmutativa**

Ejemplo:

* **Asociativa**

Ejemplo:

* **Elemento neutro**

En el conjunto de los números complejos existe 1 + 0i tal que:

Luego, el elemento neutro de la multiplicación de números complejos es el número

Ejemplo:

* **Inverso multiplicativo**

Para todo número complejo *a + bi* con *a* ≠ 0 y *b* ≠ 0, existe (*a + bi*)-1 tal que

(*a + bi*) · (*a + bi*)-1 = 1 + 0*i* con (*a + bi*)-1 .

Ejemplo:

El inverso multiplicativo de 2 *+* 4*i* es (2 *+* 4*i*)-1 ya que:

(2 *+* 4*i*) · (2 *+* 4*i*)-1 =

* **Distributiva**

La multiplicación de un número complejo por una adición es igual a la adición de las multiplicaciones de dicho número complejo por cada uno de los sumandos.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC140 |
| **Título** | Practica las propiedades de la multiplicación de números complejos |
| **Descripción** | Actividad para relacionar operaciones con la propiedad de la multiplicación de números complejos que está cumpliendo |

[SECCIÓN 2**] 3.4 La división de números complejos**

La **división entre dos números complejos (*a* + *bi*)y (*c* + *di*)**se define como el cociente del producto entre (*a* + *bi*) y (*c* - *di*),y el producto entre (*c* + *di*) y (*c* - *di*), siendo (*c* - *di*) el conjugado de (*c* + *di*). Así:

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | Ma\_G09\_03\_CO\_REC150 |
| **Título** | La multiplicación y la división de números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica la multiplicación y división de números complejos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC160 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

[SECCIÓN 2**] 3.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las operaciones con números complejos |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios sobre las operaciones con números complejos |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC180 |
| **Título** | Competencias: el radar complejo |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios a partir de la representación de puntos en un plano complejo |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_31\_CO\_REC190 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual del tema Los números complejos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_01\_CO\_REC200 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Actividad que permite evaluar los conocimientos del estudiante sobre el tema Los números complejos |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | LE\_G08\_01\_CO\_REC210 | |
| **Web 01** | Operaciones de números complejos forma binomial | <http://www.vadenumeros.es/primero/complejos-en-forma-binomica.htm> |
| **Web 02** | Características de los números complejos | <http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo> |
| **Web 03** | Relación entre los números complejos y los fractales | <http://es.slideshare.net/Samara/f-r-a-c-t-a-l-e-s> |