|  |  |
| --- | --- |
| **Título del guion** | Los números complejos |
| **Código de guion** | MA\_9\_03\_CO |
| **Descripción** | El conjunto de los números complejos contiene al conjunto de los números reales y a los números cuyos cuadrados son números negativos. Conoce el conjunto de los números complejos, cómo se operan, qué propiedades cumplen y en qué situaciones se pueden encontrar. |

[SECCIÓN 1] **1 La necesidad de** **ampliar el conjunto de los números reales**

Los conjuntos numéricos surgen de la necesidad de dar solución a algunas operaciones. En el conjunto de los números naturales () la sustracción de dos números naturales no siempre es un número natural, por ejemplo, la solución de 9 – 11 es un número entero. En el conjunto de los números enteros () es posible adicionar o sustraer dos números naturales, pero no siempre es posible dividirlos, por ejemplo 9 ÷ 5 es un número racional.

Un número racional puede expresarse como una fracción de números enteros cuyo denominador sea diferente de cero. Además, todo número entero se puede expresar como un número racional con denominador igual a 1. El conjunto de los números racionale se nota con la letra .

Las representaciones decimales de los números racionales son finitas, o no finitas y repetitivas. Por ejemplo,

*  y
*  que se representa como 

Los números que no son racionales son números irracionales (\mathbb{I}) y su parte decimal siempre es infinita no repetitiva. Un ejemplo de número irracional es  (pi):

, que se lee pi es aproximadamente igual a 3,1416.

No existe un número racional tal que *b*2 = 2; pero sí existe el número irracional , tal que .

Todos los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales, que se nota con la letra .

En el conjunto de los números reales no existen cuadrados negativos de números enteros positivos *a*. Por ejemplo, no existe un número real *a* tal que tal que *a*2 = -4, o lo que es lo mismo, no existe un número real .

El conjunto de los números reales unido con los números cuyos cuadrados son negativos se denomina el conjunto de los números complejos.

En el conjunto de los números complejos a la expresión  se le denomina **unidad imaginaria** y se nota con la letra *i*.

*i* =

[SECCIÓN 2] **1.1 Los números imaginarios**

Los números imaginarios son un subconjunto de los números complejos. Un número imaginario puro se define como *ai*, con *a* un número real diferente de cero.

En general cualquier número real multiplicado por es un número imaginario puro.

Por ejemplo, 3*i* es un **número imaginario puro**.

.

Otros números imaginarios puros son: y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | ¿A qué conjunto numérico pertenece la solución de la operación? |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar los conjuntos numéricos y sus elementos |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las potencias de**

Las potencias de i se deducen de la definición de *i*, así:

…

Los resultados de las potencias de con *n* un número natural determina el ciclo . Luego, para determinar el resultado de una potencia se divide a *n* entre 4, y al residuo de la división se le asigna el valor de la potencia correspondiente, así:

|  |  |
| --- | --- |
| Residuo división | Potencia |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Por ejemplo,

* , ya que al dividir 15 entre 4, se obtiene como residuo a 3, y a este residuo le corresponde .
* , pues al dividir 22 entre 4, se obtiene como residuo a 2, y a este residuo le corresponde -1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC20 |
| **Título** | Practica las equivalencias de las potencias de i |
| **Descripción** | Actividad para relacionar potencias de i con sus equivalencias |

[SECCIÓN 1] **2 El conjunto de los números complejos**

El conjunto de los **números complejos** son todos los números de la forma *a* + *bi* con *a*, *b* números reales e . En un número complejo *a* + *bi* se identifican la parte real *a* y la parte imaginaria *b*. El conjunto de los números complejos se denota con la letra y se define como:

Algunos ejemplos de números complejos son:

* -13 - 4*i*; -13 es la parte real y -4 es la parte imaginaria.
* ; es la parte real y 7 la parte imaginaria.
* ; es la parte real y la parte imaginaria.

Los números reales y los números imaginarios son subconjuntos de los números complejos.

Cuando la parte real es 0 se forman los números imaginarios y cuando la parte imaginaria es 0 se forman los números reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama números complejos y subconjuntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Relación de contenencia entre los conjuntos numéricos, tal que:   * , conjunto de números complejos * , conjunto de números reales * , conjunto de números racionales * , conjunto de números irracionales * , conjunto de números enteros * , conjunto de números naturales * Conjunto de números imaginarios |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC30 |
| **Título** | Breve historia de los números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que presenta una breve historia del conjunto de los números complejos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC40 |
| **Título** | Los números imaginarios y los números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica el conjunto de los números complejos y sus subconjuntos |

[SECCIÓN 2] **2.1 La igualdad entre números complejos**

Dos números complejos son iguales si y solo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria es decir,

*a* + *bi* = *c* + *di* si y solo si *a* = *c* y *b* = *d*.

Por ejemplo,

*p* + *qi* = 5 - 7i si *p* = 5 y *q* = -7

[SECCIÓN 2] **2.2 La forma cartesiana de un número complejo**

Los números complejos se representan como un pareja ordenada de número reales. Si un número complejo se define como *x + yi*, se puede expresar como (*x, y*). Esta expresión de los números complejos recibe el nombre de **forma cartesiana**. Por ejemplo,

* en su forma cartesiana es .
* en su forma cartesiana es .

[SECCIÓN2]  **2.3 La representación geométrica de un número complejo**

A partir de la representación geométrica de un número complejo en su forma cartesiana, los números complejos pueden ser representados geométricamente en el plano complejo, que es similar al plano cartesiano .

En el plano complejo la representación geométrica de (*x, y*) es un punto tal que *x* está ubicado en el eje real e *y* en el eje imaginario. En general, a cualquier numero complejo se le asocia un punto en el plano complejo. Por ejemplo, la representación en el plano complejo del número 5 + 2*i* es la representación del punto (5, 2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Representación geométrica de 5 + 2*i*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | HACER CUADRICULA |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica de 5 + 2*i* en el plano complejo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Plano de Argand** |
| **Contenido** | El plano complejo donde encontramos un eje real y un eje imaginario también se conoce como diagrama de Argand, su creación se le atribuye a Jean Robert Argand ( [1768](http://es.wikipedia.org/wiki/1768)-[1822](http://es.wikipedia.org/wiki/1822)) donde X es eje real, y Y el eje imaginario. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC50 |
| **Título** | Representación geométrica, módulo y conjugado de un número complejo |
| **Descripción** | Interactivo que explica la representación geométrica, el módulo y el conjugado de un número complejo |

[SECCIÓN 2] **2.4 El módulo de un número complejo**

En el plano complejo, el **módulo** de un número complejo se define como la distancia entre el punto de origen del plano complejo, con coordenadas (0, 0) y el punto que representa el numero complejo.

El módulo de un número complejo *x + yi* se representa y es igual a:

Por ejemplo, el módulo del número 2 + 3*i* es igual a:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Representación geométrica de un número complejo y su módulo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica del número complejo 2 + 3*i* y su módulo, . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC60 |
| **Título** | Practica el cálculo del módulo de un número complejo |
| **Descripción** | Actividad para calcular el módulo de números complejos |

**Aplicación de los números complejos en la electricidad**

En electricidad, cuando en un mismo circuito circula corriente alterna por resistencias, condensadores y bobinas, la oposición que presentan estos al paso de la corriente se denomina impedancia.

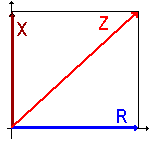
La impedancia es la suma de una componente resistiva (*R*) o reactancia, debido a las resistencias y una componente reactiva (*X*) o reactancia, debido a las bobinas y condensadores. La impedancia se mide en ohmios y se define como:

*Z = R* + *jX*

En física la *j* que acompaña la *X* representa la misma unidad imaginaria *i* y quiere decir que no es una suma directa sino la representación de un número complejo.

El valor de la impedancia *Z* se calcula de la misma forma como se calcula el módulo de un número complejo, es decir:



COLOCAR EN CURSIVAS

Por ejemplo la impedancia de un transformador de resistencia 15 ohmios y reactancia 10 ohmios es igual a:

ohmios

[SECCIÓN 2] **2.5. El conjugado de un número complejo**

En el plano complejo el **conjugado** de un número se define como la simetría con respecto al eje real, del número complejo.

El conjugado del número complejo *x* + *yi* , se representa y es igual a:

Por ejemplo, el conjugado de 1 + 3*i* es igual a:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Representación geométrica de un número complejo y su conjugado. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representacion geométrica del número complejo 1 + 3*i* y su conjugado, 1 – 3*i*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC70 |
| **Título** | Practica el cálculo del conjugado de un número complejo |
| **Descripción** | Actividad para calcular el conjugado de un número complejo |

[SECCIÓN 2**] 2.6 Consolidacion**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC80 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los números complejos |
| **Descripción** | Actividad sobre Los números complejos |

[SECCIÓN 1**] 3 Las operaciones con números complejos**

En el conjunto de los números complejos se definen las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división a partir de los siguientes algoritmos.

[SECCIÓN 2**] 3.1 La adición de números complejos**

**La adición de números complejos** se realiza sumando las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

Sean los números complejos *a + bi* y *c + di*, entonces su adición se define como:

(*a + bi*) + (*c + di*) = (*a + c*) + (*b + d*)*i*,

Por ejemplo,

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC90 |
| **Título** | Practica la adición de números complejos |
| **Descripción** | Actividad que permite la ejercitación de la adición de números complejos |

[SECCIÓN 3**] 3.1.1 Las propiedades de la adición de números complejos**

La adición de números complejos cumple las siguientes **propiedades**.

* **Propiedad clausurativa**

La adición de dos números complejos es otro número complejo.

* **Propiedad conmutativa**

Ejemplo:

* **Propiedad asociativa**

Ejemplo:

* **Elemento neutro**

El elementos neutro de la adición de números complejos es *0 + 0i*. Luego,

Ejemplo:

* **Inverso aditivo**

El inverso aditivo de un número complejo *a + bi* es –(*a + bi*) = –*a – bi*, tal que:

*a + bi* + (–(*a + bi*)) = *a + bi* + ( –*a – bi*) = *0 + 0i*

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC100 |
| **Título** | Practica las propiedades de la adición de números complejos |
| **Descripción** | Actividad para practicar las propiedades de la adición de números complejos |

[SECCIÓN 2**] 3.2 La sustracción de números complejos**

En la sustracción de números complejos, la diferencia se obtiene restando las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

La sustracción de los números complejos *e + fi* y *g + hi* se define como:

(*e + fi*) – (*g + hi*) = (*e* – *g*) + (*f* – *h*)*i*

Ejemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Distancia entre dos números complejos** |
| **Contenido** | En el plano complejo la distancia *d* entre dos números complejos *a + bi* y *c + di* es igual al módulo de la diferencia de los dos números y se define:  Por ejemplo, la distancia entre 4 *+* 3*i* y *-2 + 4i*  es igual a |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Representación geométrica de dos números complejos y su distancia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representacion geométrica de la distancia entre 4 *+* 3*i* y *-2 + 4i* igual a . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | Ma\_G09\_03\_CO\_REC110 |
| **Título** | La adición y sustracción de números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica la adición y la sustracción de números complejos; y las propiedades de la adición |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC120 |
| **Título** | Practica la sustracción números complejos |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar la sustracción de números complejos |

[SECCIÓN 2**] 3.3 La multiplicación de números complejos**

**La multiplicación de números complejos** se define aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números reales, así:

Aplicando la propiedad asocativa y reemplazando el valor de se obtiene:

Ejemplos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC130 |
| **Título** | Ejercita la multiplicación de números complejos |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios de multiplicación de números complejos |

[SECCIÓN 3**] 3.3.1 Las propiedades de la multiplicación de números complejos**

La multiplicación de números complejos cumple las siguientes  **propiedades**:

* **Clausurativa**

La mutiplicación de dos números complejos es otro número complejo.

* **Conmutativa**

Ejemplo:

* **Asociativa**

Ejemplo:

* **Elemento neutro**

En el conjunto de los números complejos existe 1 + 0i tal que:

Luego, el elemento neutro de la multiplicación de números complejos es el número

Ejemplo:

* **Inverso multiplicativo**

Para todo número complejo *a + bi* con *a* ≠ 0 y *b* ≠ 0, existe (*a + bi*)-1 tal que

(*a + bi*) · (*a + bi*)-1 = 1 + 0*i* con (*a + bi*)-1 .

Ejemplo:

El inverso multiplicativo de 2 *+* 4*i* es (2 *+* 4*i*)-1 ya que:

(2 *+* 4*i*) · (2 *+* 4*i*)-1 =

* **Distributiva**

La multiplicación de un número complejo por una adición es igual a la adición de las multiplicaciones de dicho número complejo por cada uno de los sumandos.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC140 |
| **Título** | Practica las propiedades de la multiplicación de números complejos |
| **Descripción** | Actividad para relacionar operaciones con la propiedad de la multiplicación de números complejos que está cumpliendo |

[SECCIÓN 2**] 3.4 La división de números complejos**

La **división entre dos números complejos (*a* + *bi*)y (*c* + *di*)**se define como el cociente del producto entre (*a* + *bi*) y (*c* - *di*),y el producto entre (*c* + *di*) y (*c* - *di*), siendo (*c* - *di*) el conjugado de (*c* + *di*). Así:

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | Ma\_G09\_03\_CO\_REC150 |
| **Título** | La multiplicación y la división de números complejos |
| **Descripción** | Interactivo que explica la multiplicación y división de números complejos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC160 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

[SECCIÓN 2**] 3.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las operaciones con números complejos |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios sobre las operaciones con números complejos |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_03\_CO\_REC180 |
| **Título** | Competencias: el radar complejo |
| **Descripción** | Actividad que propone ejercicios a partir de la representación de puntos en un plano complejo |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_31\_CO\_REC190 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual del tema Los números complejos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_01\_CO\_REC200 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Actividad que permite evaluar los conocimientos del estudiante sobre el tema Los números complejos |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | LE\_G08\_01\_CO\_REC210 | |
| **Web 01** | Operaciones de números complejos forma binomial | <http://www.vadenumeros.es/primero/complejos-en-forma-binomica.htm> |
| **Web 02** | Características de los números complejos | <http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo> |
| **Web 03** | Relación entre los números complejos y los fractales | <http://es.slideshare.net/Samara/f-r-a-c-t-a-l-e-s> |