|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | Sistemas de ecuaciones lineales |
| **Código de guion** | MA\_09\_05\_CO |
| **Descripción** | Los sistemas de ecuaciones se utilizan para modelar y solucionar situaciones problema de las Matemáticas, de las Ciencias y del entorno inmediato de las personas. Amplía tus conocimientos sobre este tema y aplícalos cuando lo requieras. |

[SECCIÓN 1] **1 Las funciones lineales y afines**

Una **función** es una relación que se establece entre dos conjuntos *A* y *B*; el conjunto *A* es el dominio y el *B* es el recorrido. A todos los elementos del conjunto *A* les corresponde un único elemento del conjunto *B*.

Existe una forma de relacionar las funciones con las ecuaciones: esto se debe a que toda función definida en el conjunto de los números reales se puede representar, al menos, con una ecuación. Pero todas las ecuaciones en los números reales no representan funciones.

Ejemplo:

* La función *f*(*x*) *=* 2 *+* 3*x* se puede representar por medio de la ecuación *y =*2 *+* 3*x.*
* La ecuación *y = √x* no representa ninguna función ya que no se cumple que a todos los elementos del conjunto *A*, en este caso los valores de *x,* les corresponde un único valor del conjunto *B*, los valores de *y,* ya que si *x =* 9*, y =* 3 o *y = –*3. Por esta razón no determina una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC10 |
| **Título** | La función lineal |
| **Descripción** | Interactivo para explicar el concepto de dependencia lineal |

La **función lineal** se puede definir como toda expresión de la forma *f*(*x*) *= mx,* donde *m* es un número real diferente de 0; su representación gráfica es una recta que pasa por el origen (0, 0) en el plano cartesiano.

Matemáticamente se define como *f:* ℝ *→* ℝ */f*(*x*) *= mx, m ∈* ℝ.

Ejemplo

Sea la función lineal *f*(*x*) *=* 2*x*, se asignan valores a *x* para encontrar los valores de *f*(*x*).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | *–*1 | 2 | *–*2 | 3 | *–*3 |
| *f*(*x*) | 0 | 2 | *–*2 | 4 | *–*4 | 6 | *–*6 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función lineal. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\1.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de *f*(*x*) *= 2x.* |

La **función afín** se define como toda expresión de la forma *f*(*x*) *= mx + c*, donde *m* y *c* son números reales diferentes de 0; su representación gráfica es una recta que pasa por el punto (0, *c*) en el plano cartesiano.

Matemáticamente se define como: *f:* ℝ *→* ℝ */f*(*x*) *= mx* + *c*; *m, c ∈ ℝ*.

Ejemplo:

Sea la función afín *f*(*x*) *= x + 2*, se asignan valores a *x* para encontrar los valores

de *f(x).*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | *–*1 | 2 | *–*2 | 3 | *–*3 |
| *f*(*x*) | 2 | 3 | 1 | 4 | 0 | 6 | *–*1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función afín. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\2.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de *f*(*x*) *= x + 2.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El concepto de función** |
| **Contenido** | El concepto de función aparece a principios del siglo XVII gracias a los trabajos desarrollados por René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC50 |
| **Título** | Las funciones lineal y afín |
| **Descripción** | Interactivo que muestra las características de la funciones lineal y afín |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC90 |
| **Título** | Resuelve situaciones aplicando el concepto de función |
| **Descripción** | Actividad para resolver situaciones problema que involucran funciones lineales |

[SECCIÓN 2**] 1.1 La ecuación explícita de la recta**

Toda **función** determina como mínimo una **ecuación**.Las **funciones lineales** y **afines**  determinan **ecuaciones lineales** que gráficamente representan rectas en el plano cartesiano.

¿Es posible definir una **ecuación** que determine todas las funciones lineales y afines que existen en el plano cartesiano? La respuesta es sí. Es la **ecuación explícita de la recta**, que se define como ***y = mx+ b*** donde *m* es cualquier número real que recibe el nombre de **pendiente** y *b* es cualquier número real que recibe el nombre de la **ordenada en el origen**; esta expresión representa a todas las rectas que existen en el plano cartesiano.

Matemáticamente, **la ecuación explícita de la recta** se definecomo**:**

*y = mx + b; m, b ∈* ℝ, *m ≠ 0*

Ejemplo

La función *f*(*x*) *= 3x + 5* se representa por medio de laecuación explícita *y = 3x + 5* donde 3 es su pendiente y 5 su ordenada en el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Euclides y la recta** |
| Contenido | La recta fue trabajada por Euclides  ([325](http://es.wikipedia.org/wiki/325_a._C.) a. C *–* [265 a. C.](http://es.wikipedia.org/wiki/265_a._C.)). Se define como uno de los entes fundamentales de la geométrica junto al punto y al plano. |

[SECCIÓN 2**] 1.2 La pendiente de una recta**

En la recta definida por la ecuación *y = mx + b, m*recibe el nombre de **pendiente**;la pendiente determina la inclinación de la recta respecto al eje *X* en el plano cartesiano.

Ejemplos

* En la recta definida por la ecuación *y =* 2*x + 1*, la pendiente es *m =* 2. Es decir, que la inclinación de la recta con respecto al eje *X* es 2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\4.JPG |
| **Pie de imagen** | La pendiente *m* de la recta *y* = 2*x* + 1 es igual a 2. |

* En la siguiente recta*,* la pendiente *m* indica, la inclinación de la recta con respecto al eje *X*.

<<MA\_09\_05\_01.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\7.JPG  AGREGAR *x* A LA FRACCIÓN. |
| **Pie de imagen** | La pendiente *m* indica la inclinación de la recta con respecto al eje *X*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC20 |
| **Título** | Identifica la pendiente de la recta |
| **Descripción** | Actividad para identificar la pendiente de una recta dada la ecuación |

Si la recta está definida por la ecuación *y = mx + b,* encontrar la pendiente es muy sencillo, es igual a *m*. Pero si no se tiene la ecuación y solo se tienen dos puntos, con base en el postulado de Euclides: “*dados dos puntos se puede trazar una recta”*, se puede encontrar la pendiente de la recta a partir de la siguiente definición.

Dados dos puntos de la recta (*x1*, *y1*) y (*x2, y2*), entonces la pendiente *m* se calcula:

<<MA\_09\_05\_02.gif>>

En esta fórmula se evidencia la razón del incremento vertical en la recta con respecto al incremento horizontal.

Ejemplos

* Si una recta pasa por los puntos (2,4) y (7,2), la pendiente en igual a:

<<MA\_09\_05\_03.gif>>

Luego la pendiente de la recta que determina los dos puntos es

<<MA\_09\_05\_04>>

* Cuál es la pendiente de una recta si pasa por los puntos,

<<MA\_09\_05\_04a>>

Luego,

<<MA\_09\_05\_05>>

Entonces, la pendiente de la recta que determina los dos puntos es *m = 16.*

¿Qué pasa con la inclinación de la recta si la pendiente es un número positivo, un número negativo, es cero o no está determinada?

* Si la pendiente de la recta es un número positivo, la recta es ascendente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta ascendente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\8.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una recta con pendiente positiva, *m =* 1*.* |

* Si la pendiente de la recta es un número negativo, la recta es descendente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG06 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta descendente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\9.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una recta con pendiente negativa, *m =* –1*.* |

* Si la pendiente de la recta es igual a cero, la recta es horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta horizontal. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\10.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una recta con pendiente igual a cero, *m =* 0*.* |

* Si la pendiente de la recta no está determinada, es decir, el dividendo es 0, la recta es vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG08 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una recta vertical. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\11.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una recta cuya pendiente es indeterminada. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| Contenido | En la representación gráfica de la recta cuya ecuación es *y = mx + c* se cumple:   * si *m > 0*, la recta es creciente. * si *m < 0,* la recta es decreciente. * si *m = 0,* la recta no crece ni decrece, es constante. |

[SECCIÓN 2**]1. 3 La ecuación de la recta que pasa por dos puntos**

Si se tienen **dos puntos de la recta** es posible determinar la ecuación de la forma *y = mx + b* que la determina utilizando la fórmula **punto pendiente**, que es igual a:

*y – y1 = m*(*x – x1)*

Por ejemplo,

* Si se tienen los puntos (4, 6) y (5, 9) que pertenecen a una recta, los pasos para hallar la ecuación que la determina son los siguientes:

Se calcula la pendiente de la recta:

<<MA\_09\_05\_06.gif>>

Se reemplaza el valor de la pendiente *m* y las coordenadas de cualquiera de los dos puntos dados, en la fórmula **punto pendiente**. En este caso se reemplaza *m* = *3*, y las coordenadas del punto (4, 6), es decir *y1*= 6, *y x1*= 4. Así:

*y – y1 = m*(*x – x1)*

*y –* 6*=* 3(*x –* 4*)*

Se despeja *y* para obtener la ecuación de la recta *y = 3x – 6.*

También se puede reemplazar *y1 = 9* y *x1 = 5,* es decir, el otro punto conocido de la recta, y se llega a la misma ecuación:

*y – 9 = 3(x – 5)*

*y = 3x – 6*

De esta forma es posible encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC30 |
| **Título** | Halla la ecuación de la recta dados dos puntos |
| **Descripción** | Actividad para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC40 |
| **Título** | Calcula la ecuación de la recta |
| **Descripción** | Actividad para calcular la ecuación explícita de la recta |

[SECCIÓN 2**] 1.4 Rectas coincidentes, secantes, paralelas y perpendiculares**

Cuando se tienen dos rectas *l1* y *l2* en el mismo plano cartesiano, puede suceder solo una de las siguientes situaciones.

* Que las dos **rectas sean coincidentes**:significa que las dos rectas sean la misma recta; algebraicamente se puede interpretar como:

sean las rectas *l1: y = m1 x + b1*  y  *l2: y = m2 x + b2;* entonces

*l1 = l2* si y solo si *m1 = m2* y *b1 = b2*

Ejemplo

Las rectas *l1: y =* 2*x +* 3 y *l2: y =* 2x *+* 3 son **coincidentes** ya que:

*m1 = m2 =* 2y *b1 = b2**=* 3

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG09 |
| **Descripción** | Representación gráfica de dos rectas coincidentes. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\12.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de dos rectas coincidentes, *l1 = l2: y =* 2*x +* 3 |

* Que las dos **rectas sean secantes**:significa que las dos rectas tengan un punto en común; algebraicamente se puede interpretar como sigue.

Sean las rectas *l1: y = m1x + b1* y *l2: y = m2 x + b2;* entonces:

*l1* y *l2* son **secantes** si y solo si *m1 ≠ m2.*

Ejemplo

Las rectas *l1  y l2* son **secantes** ya que:

<<MA\_09\_05\_06a.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG10 |
| **Descripción** | Representación gráfica de dos rectas secantes. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\15.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de dos rectas secantes. |

* Que las dos **rectas sean perpendiculares**:significa que las dos rectas sean **secantes** y formen un **ángulo de 90°**; algebraicamente se puede interpretar como:

sean las rectas *l1: y = m1x + b1* y *l2: y = m2x + b2;* *l1* y *l2 ,* entonces,

*l1* y *l2*  son **perpendiculares** si y solo si *m1 ≠ m2* y  *m1* · *m2 =* –1*.*

Ejemplo

Las rectas

<<MA\_09\_05\_06b.gif>>

son **secantes** y además **perpendiculares** ya que,

<<MA\_09\_05\_06c.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG11 |
| **Descripción** | Representación gráfica de dos rectas secantes y perpendiculares. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\18.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de dos rectas secantes y perpendiculares. |

* Que las dos **rectas sean paralelas**:significa que las dos rectas no tienen ningún punto en común; algebraicamente se puede interpretar como sigue.
* Sean las rectas *l1: y = m1 x +* b1 y *l2: y = m2 x + b2*, entonces,

*l1* y *l2*son **paralelas** si y solo si *m1 = m2* y *b1 ≠ b2*

Ejemplo

Las rectas

<<MA\_09\_05\_06d.gif>>

son **paralelas** ya que,

<<MA\_09\_05\_06e.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG12 |
| **Descripción** | Representación gráfica de dos rectas perpendiculares. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\21.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de dos rectas paralelas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC80 |
| **Título** | Reconoce rectas paralelas y perpendiculares |
| **Descripción** | Actividad para hallar rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC60 |
| **Título** | ¿Qué recuerdas de las funciones? |
| **Descripción** | Actividad para recordar aspectos de las funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC70 |
| **Título** | Relaciona la representación gráfica de una función lineal con su fórmula |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la gráfica de una función lineal con su ecuación |

[SECCIÓN 2**] 1.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones lineales |
| **Descripción** | Actividad sobre Las funciones lineales |

[SECCIÓN 1**] 2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales**

Se denomina **ecuación lineal** a toda ecuación de la forma un polinomio de primer grado, es decir, que todas las incógnitas están elevadas al exponente uno; y además, las incógnitas no pueden estar multiplicándose entre sí. A continuación se muestran algunas características de las ecuaciones lineales.

* Las **incógnitas** se representan por medio de letras y están elevadas a la uno.
* Los números que multiplican las incógnitas reciben el nombre de **coeficientes**.
* Los números que están solos se llaman **término independiente**.
* Las ecuaciones lineales pueden tener *n* incógnitas siendo *n* un número natural.

De manera general, una ecuación lineal con *n* incógnitas se puede representar como:

*a1x1 + a2x2 + a3x3 + …* + *anxn = b*

donde *a*1, *a*2, ..., *a*n, *b* ∈ ℝ, y, *x*1, *x*2, …, *x*n representan las incógnitas.

Ejemplos de ecuaciones lineales,

* 3*x +* 4 *=* 12*,* ecuación lineal con una incógnita
* 2*x +* 2*y =* 4*,* ecuación lineal con dos incógnitas o ecuación de la recta.
* 2*x –* 3*y + z =* 12, ecuación lineal con tres incógnitas.
* 2y *–* 3*y +* 2*z –* 3*w =* 1, ecuación lineal con cuatro incógnitas

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Notación de las ecuaciones lineales** |
| Contenido | La notación simbólica que hoy se maneja en las ecuaciones lineales fue introducida por François Viète (1540*–*1603) y René Descartes (1596*–*1650). |

**Buscar la solución de una ecuación** es encontrar el valor de la incógnita o de las incógnitas, para que la igualdad sea verdadera. Algunas ecuaciones tienen soluciones únicas; otras ecuaciones tienen infinitas soluciones; y existen otras ecuaciones que no tienen solución.

Un ejemplo de ecuación con infinitas soluciones es 2*x +* 2*y =* 4; una de sus soluciones es (1, 1) y (2, 0) también es solución. En este caso, la ecuación tiene infinitas soluciones: mientras la variable *x* aumenta 1, la variable *y* disminuye 1 y viceversa; gráficamente, esta ecuación representa una recta y cada punto de la recta es solución de la ecuación.

[SECCIÓN 2**] 2.1 Sistema de ecuaciones lineales**

Es un conjunto de *n* ecuaciones lineales con *m* incógnitas siendo *m* y *n* números naturales con *n ≥ 2.*

Ejemplos

* El sistema de ecuaciones con 2 ecuaciones y 2 incógnitas se denomina **sistema de ecuaciones lineales 2 × 2:**

<<MA\_09\_05\_07>>

* El sistema de ecuaciones con 3 ecuaciones y 2 incógnitas se denomina **sistema de ecuaciones 3 × 2**:

<<MA\_09\_05\_08>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG14 |
| **Descripción** | Construcción edificio. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/62421/62421,1280155377,14/stock-photo-building-under-construction-with-workers-57862405.jpg>  http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/62421/62421,1280155377,14/stock-photo-building-under-construction-with-workers-57862405.jpg |
| **Pie de imagen** | Los sistemas de ecuaciones son útiles para modelar y solucionar problemas de varias variables que se pueden presentar, por ejemplo, en la construcción. |

Los **sistemas de ecuaciones lineales**, en algunas ocasiones, se pueden **solucionar**; ¿qué es solucionar un sistema de ecuaciones lineales? Si el sistema de ecuaciones tiene *m* incógnitas y *n* ecuaciones, se deben buscar conjuntos de *m* números que verifiquen las igualdades en las *n* ecuaciones, es decir, buscar un grupo de números que al reemplazarlos por las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema satisfagan las igualdades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG13 |
| **Descripción** | Solucionando un laberinto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [**http://thumb101.shutterstock.com/display\_pic\_with\_logo/172762/151874027/stock-photo-businessman-finding-the-solution-of-a-maze-151874027.jpg**](http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/172762/151874027/stock-photo-businessman-finding-the-solution-of-a-maze-151874027.jpg)  http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/172762/151874027/stock-photo-businessman-finding-the-solution-of-a-maze-151874027.jpg |
| **Pie de imagen** | Solucionar sistemas de ecuaciones por medio de diferentes métodos. |

Dependiendo de su solución, los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar de la siguiente manera.

* Los sistemas de ecuaciones que tienen solución reciben el nombre de **compatibles**.
* Los sistemas de ecuación cuya solución es única se denominan **compatibles determinados**.
* Los sistemas de ecuaciones que tienen infinitas soluciones reciben el nombre de **compatibles indeterminados.**
* Los sistemas de ecuaciones que no tienen solución se denominan **incompatibles**.

Ejemplos

* El sistema de ecuaciones

<<MA\_09\_05\_09>>

es **compatible determinado**, es decir, su solución es única: *x =* 5*, y =* 3*.*

Se verifica reemplazando estos valores en las dos ecuaciones:

2*x –* 4*y = –*2 *→* 2 · 5 – 4 · 3 = –2 → 10 – 12 = –2

*–*3*x +* 6*y =* 3→ –3 · 5 + 6 · 3 = 3 → –15 + 18 = 3

Luego, (5, 3) es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

* El sistema de ecuaciones

<<MA\_09\_05\_10.gif>>

es **compatible indeterminado**, ya que tiene infinitas soluciones. Esto sucede porque con una de las ecuaciones del sistema se pueden generar las otras, multiplicando cada término de la ecuación por el mismo número. En este ejemplo se multiplican los términos de la primera ecuación por 2 y se obtiene la segunda ecuación.

* El sistema de ecuaciones

<<MA\_09\_05\_11.gif>>

es **incompatible** pues no tiene solución, ya que no existe ningún par de números *x, y* que al reemplazarlos en las dos ecuaciones las satisfagan.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Los babilonios y los sistemas de ecuaciones** |
| Contenido | Algunas civilizaciones antiguas como los babilonios, los griegos, los hindúes y los chinos resolvían sistemas de ecuaciones mediante métodos aritméticos y geométricos. |

[SECCIÓN 2**] 2.2 El método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones**

El **método gráfico** se utiliza para solucionar sistemas de ecuaciones *n* × 2, *n* ecuaciones condos incógnitas. Este método se describe como sigue.

* Se despeja la variable dependiente en cada una de las ecuaciones.
* Se grafica cada una de las rectas en el mismo plano cartesiano.
* Se analizan las gráficas de las rectas según su posición: si son paralelas, el sistema no tiene solución; si todas las rectas tienen un punto en común, este será la solución del sistema, el punto (*a, b*);si todas las ecuaciones representan la misma recta, el sistema tiene infinitas soluciones que serán todos los puntos (*x, y*) que hagan parte de la gráfica de la recta.

Ejemplos

* Soluciona gráficamente el siguiente sistema.

<< MA\_09\_05\_12.gif>>

Entonces,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG15 |
| **Descripción** | Representación gráfica de tres ecuaciones. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\22.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de las ecuaciones:  4*x – y = –*5*,* 2*x + y =* –1*, –x + y =* 2*.* |

En la gráfica se puede observar que la solución del sistema de ecuaciones es igual a (–1, 1). Ahora se verifica reemplazando en las tres ecuaciones a *x* por –1 y a *y* por 1.

En la primera ecuación: 4*x – y =* –5 *→* 4 · (–1) – 1 = –5

En la segunda ecuación: 2*x + y =* –1 *→* 2 · (–1) + 1 = –1

En la tercera ecuación: *– x + y =* 2 *→* – (–1) + 1 = 2

En este caso la solución (–1, 1) es única.

* Soluciona gráficamente el siguiente sistema.

<< MA\_09\_05\_13.gif>>

Entonces,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Representación gráfica de dos ecuaciones. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\23.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de las ecuaciones –2*x – y =* 10, 4*x +* 2*y =* 7. |

Como se puede ver en la gráfica, las dos rectas son paralelas, no tienen puntos en común; es decir, este sistema de ecuaciones no tiene solución.

* Solucionar gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.

<<MA\_09\_05\_14.gif>>

Luego,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG17 |
| **Descripción** | Representación gráfica de tres ecuaciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 5\imagenes\24.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. |

Como se puede ver en la gráfica, las tres ecuaciones representan la misma recta, es decir, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones; por cada valor real de *x* se obtiene el mismo valor real de *y* en las tres ecuaciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC110 |
| **Título** | El método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones 2 × 2 |
| **Descripción** | Interactivo para explicar cómo se soluciona un sistema de ecuaciones por el método gráfico |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC120 |
| **Título** | Soluciona sistemas de ecuaciones lineales Geogebra |
| **Descripción** | Actividad para aplicar el programa Geogebra en la solución de sistemas de ecuaciones |

[SECCIÓN 2**] 2.3 El método de sustitución para solucionar sistemas de ecuaciones**

Para resolver un sistema de ecuaciones 2 × 2 por el **método de sustitución**:

* Se escoge una de las ecuaciones y se despeja una de las dos variables para reemplazarla en la otra ecuación; esto con el fin de generar una ecuación que tenga solo una incógnita.
* Se resuelve esta nueva ecuación con una incógnita y se halla el valor; para calcular el valor de la otra incógnita.
* Se reemplaza el valor calculado en cualquiera de las dos ecuaciones originales y se despeja la otra variable.

Ejemplo

Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

<<MA\_09\_05\_15.gif>>

* Se escoge una de las dos ecuaciones y se despeja una de las incógnitas, en este caso, la ecuación 3*x +* 2*y =* 16*.* Al despejar la incógnita *x* se obtiene,

<<MA\_09\_05\_16.gif>>

* En la segunda ecuación se reemplaza el valor de *x* obtenido, y se despeja la variable *y*, así:

<<MA\_09\_05\_18.gif>>

* Ahora, se reemplaza el valor de *y* en la primera ecuación y se calcula el valor de *x.* Observa.

<<MA\_09\_05\_19.gif>>

Luego, los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones es igual a:

<<MA\_09\_05\_20.gif>>

* Para comprobar la solución, se reemplazan los valores de *x* e *y* en las dos ecuaciones:

<<MA\_09\_05\_21.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC130 |
| **Título** | Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución |
| **Descripción** | Actividad para solucionar sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución |

[SECCIÓN 2**] 2.4 El método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones**

El **método de igualación** para resolver un sistema de ecuaciones 2 × 2 consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones y posteriormente igualar estas dos nuevas expresiones. Esto se puede realizar debido a que se ha despejado la misma incógnita. Al igualar estas dos expresiones se obtiene una ecuación con una incógnita; se resuelve y se obtiene el valor de una de las incógnitas. Para encontrar el valor de la otra incógnita se reemplaza el valor obtenido de la incógnita en cualquiera de las ecuaciones originales y se despeja.

Observa el siguiente ejemplo:

Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

<<MA\_09\_05\_23.gif>>

* Se escoge la incógnita *y* para despejarla en las dos ecuaciones.

En la primera ecuación

<<MA\_09\_05\_24>>

En la segunda ecuación

<<MA\_09\_05\_25>>

* Ahora, las dos expresiones que son equivalentes a *y* se igualan y se despeja *x* en esta nueva ecuación.

<<MA\_09\_05\_26.gif>>

* Se reemplaza *x* por 9 en cualquiera de las dos ecuaciones originales, y se despeja *y*;en este caso se reemplazará en la segunda ecuación.

2 · (9) – 7*y* = –17

– 7*y* = –17 – 18

*y* = 5

* Luego la solución del sistema de ecuaciones es *x =* 9, *y =* 5;ahora, para comprobarla se reemplazan en las dos ecuaciones.

En la primera ecuación:

<<MA\_09\_05\_28.gif>>

En la segunda ecuación:

2*x –* 7*y =* –17

2 · (9) – 7 · (5) = –17

18 – 35 = –17

–17 = –17

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC140 |
| **Título** | Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación |
| **Descripción** | Actividad para solucionar sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación |

[SECCIÓN 2**] 2.5 El método de adición y sustracción para solucionar sistemas de ecuaciones** 2 × 2

El **método de adición y sustracción** para solucionar sistemas de ecuaciones

2 × 2 consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por números *m* y *n* con el fin de conseguir dos ecuaciones que al adicionarlas componente a componente generen una ecuación con una sola incógnita, es decir, que se elimine una de las incógnitas. Posteriormente, se halla el valor de la incógnita que queda; para encontrar el valor de la otra incógnita se reemplaza en alguna de las ecuaciones originales el valor de la anterior incógnita.

Ejemplo

Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones por el método de adición y sustracción.

<<MA\_09\_05\_29.gif>>

* Se debe observar el sistema de ecuaciones y determinar cuál o cuáles son los números por los cuales multiplicaremos cada una de las ecuaciones para que cuando se sumen componente a componente, una de las variables se elimine. En este caso, se multiplica la ecuación (1) por 9 y la ecuación (2) por 4.

En la primera ecuación:

**9** · (8*x* + 4y = 18 ) → 72*x* + **36*y*** = 162

En la segunda ecuación:

**4**· (20*x* *–* 9y = *–* 12) → 80*x* ***–* 36*y*** = *–* 48

Como se puede observar, se elimina la variable *y* porque en la primera ecuación quedó 36*y* y en la segunda quedó –36y*.*

* Ahora, se suman las dos ecuaciones componente a componente para eliminar una de las incógnitas.

72*x +* 36*y =* 162

80*x –* 36*y =* –48

152*x +* 0*y =* 114

Se despeja *x* en la ecuación obtenida, es decir:

<<MA\_09\_05\_29a.gif>>

* Para encontrar el valor de *y*, se escoge cualquiera de las dos ecuaciones originales; en este caso se escoge la ecuación 8*x +* 4*y =* 18 y se reemplaza el valor obtenido de *x,* y se despeja la incógnita *y*.

<<MA\_09\_05\_30.gif>>

Por lo tanto, los valores de las incógnitas son:

<<MA\_09\_05\_31.gif>>

* Por último, se comprueba que los valores de *x* e *y* satistacen el sistema de ecuaciones:

En la primera ecuación:

<<MA\_09\_05\_32.gif>>

En la segunda ecuación:

<<MA\_09\_05\_33.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC150 |
| **Título** | Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de adición y sustracción |
| **Descripción** | Actividad para solucionar sistemas de ecuaciones lineales por el método de adición y sustracción |

[SECCIÓN 2**] 2.6 El método de determinantes**

El método de determinantes es otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en trabajar con los coeficientes de los términos de cada ecuación del sistema en forma de arreglo rectangular por filas y columnas, para hallar un número real que se le asigna a una matriz.

[SECCIÓN 3**] 2.6.1 Las matrices**

Las **matrices** son arreglos de números o expresiones ordenados por **filas** y **columnas**; las filas son los arreglos ubicados de forma horizontal, y las columnas son los arreglos ubicados de forma vertical. Observa.

<<MA\_09\_05\_35.gif>>

La matriz *A* tiene 2 filas y 3 columnas, es decir, la matriz es de dimensión

2 × 3; a cada posición de la matriz se le asigna un par de coordenadas: el primer número determina a qué fila pertenece y el segundo a qué columna corresponde. Por ejemplo, el número ubicado en *a13* indica que está en la fila 1, columna 3.

Ejemplos de matrices

* Matriz de dimensión 2 × 2.

<<MA\_09\_05\_36.gif>>

* Matriz de dimensión 3 × 3.

<<MA\_09\_05\_37.gif>>

* Matriz de dimensión 2 × 3.

<<MA\_09\_05\_38.gif>>

Con el conjunto de matrices cuyos elementos pertenecen a los números reales se pueden definir operaciones como las siguientes.

**Adición de matrices**

Dos matrices se pueden adicionar si y solo si tienen la misma dimensión, es decir, el mismo número de filas y el mismo número de columnas; esto se define componente a componente, es decir, cada uno de los elementos que ocupan la misma posición.

Ejemplos

Sean las matrices *A* y *B*, entonces

<<MA\_09\_05\_39.gif>>

<<MA\_09\_05\_40.gif>>

<<MA\_09\_05\_41.gif>>

**Multiplicación de matrices**

Dos matrices se pueden multiplicar si y solo si la cantidad de filas de la primera matriz es igual a la cantidad de columnas de la segunda matriz. El elemento *anm* del resultado se obtiene multiplicando cada elemento de la fila *n* de la primera matriz por cada elemento de la columna *m* de la segunda matriz y luego sumándolos.

Ejemplos

Sean las matrices *A* y *B*, entonces,

<<MA\_09\_05\_42.gif>>

<<MA\_09\_05\_43.gif>>

<<MA\_09\_05\_44.gif>>

[SECCIÓN 3**] 2.6.2 El determinante de una matriz**

El **determinante** de una matriz *A* es un número real que se le asigna a las matrices de dimensión *n* × *n*, es decir, que tengan la misma cantidad de filas y de columnas; se denota como *detA* o *|A|*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Leibniz y los determinantes** |
| Contenido | Un grupo de historiadores atribuyen la introducción de los determinantes a Leibniz, en 1693, pero otros la atribuyen a Seki Takakazu, en 1683. |

**El determinante de una matriz 2 × 2**

Para calcular el determinante de una matriz *A* de dimensión 2 *×* 2, como

<<MA\_09\_05\_45.gif>>

se multiplica el número que se encuentra en la posición *a11*con el número que se encuentra en la posición *a22*; a este resultado se le resta el producto de los números que se encuentran en las posiciones *a21* y *a22*;el resultado de la resta será el valor del determinante de la matriz, es decir,

*|A| = (a11* · *a22) – (a21* · *a12)*

Ejemplo

Encuentra el determinante de la matriz

<<MA\_09\_05\_46.gif>>

*|A|=* 12 ·.7 – (–3) · 4 = 84 + 12 = 96

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC160 |
| **Título** | Soluciona determinantes |
| **Descripción** | Actividad para practicar la solución de determinantes |

El método de **determinantes** también se conoce como la **regla de Cramer**. Este método se utiliza para solucionar sistemas de ecuaciones *n × n*, es decir, cuando la cantidad ecuaciones es igual a la cantidad de incógnitas. Para el desarrollo de este trabajo, la explicación se referirá a sistemas de ecuaciones 2 *×* 2, pero puede extenderse a sistemas de ecuaciones *n × n.*

Para comenzar, se determinan tres matrices y se encontrará su determinante.

Ahora, teniendo los tres determinantes se pueden encontrar los valores de las dos incógnitas de la siguiente manera:

<<MA\_09\_05\_47.gif>>

A continuación se presenta un ejemplo paso a paso para mayor claridad.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de los determinantes.

<<MA\_09\_05\_48.gif>>

* Se determinan tres matrices y se calculan sus respectivos determinantes.

Los elementos de la primera matriz son los coeficientes que acompañan a las variables en cada una de las ecuaciones, de forma que los coeficientes de cada variable están ordenados en columnas; posteriormente se halla el determinante de esta matriz y se representa con un *∆*.

<<MA\_09\_05\_49.gif>>

Una de las columnas de la segunda matriz serán los coeficientes que acompañan a una de las variables, y la otra columna serán los términos independientes de las dos ecuaciones. Se calcula el determinante de la matriz y se representa como ∆x o ∆y; cada letra en la parte inferior depende de los coeficientes de la incógnita que se reemplazaron por los términos independientes en la matriz. En este caso con ∆x.

<<MA\_09\_05\_50.gif>>

En la tercera matriz, una de las columnas serán los coeficientes de la variable que se reemplazó en la segunda matriz y la otra columna serán los términos independientes de las ecuaciones. En este caso se halla el determinante y se determina con ∆y.

<<MA\_09\_05\_51.gif>>

* Ahora, se calculan los valores de *x* y de *y* a partir de los determinantes.

<<MA\_09\_05\_52.gif>>

<<MA\_09\_05\_53.gif>>

Luego, la solución del sistema es igual a:

<<MA\_09\_05\_54.gif>>

* Se reemplazan en cada una de las ecuaciones del sistema los valores obtenidos para comprobar que lo satisface.

En la primera ecuación:

<<MA\_09\_05\_55.gif>>

En la segunda ecuación:

<<MA\_09\_05\_56.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC170 |
| **Título** | Soluciona sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer |
| **Descripción** | Actividad para practicar la solución de sistemas de ecuaciones utilizando determinantes |

[SECCIÓN 2**] 2.7 Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales**

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar y solucionar situaciones problema en diferentes ramas del conocimiento como la Ingeniería, la Economía, el transporte, la producción industrial, las ciencias y la misma Matemática. El problema se presenta de manera verbal en la mayoría de las situaciones, y se debe llevar al lenguaje de las Matemáticas, más específicamente, al lenguaje de los sistemas de ecuaciones lineales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG14 |
| **Descripción** | Solucionar problemas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [**http://thumb9.shutterstock.com/display\_pic\_with\_logo/1734793/165509396/stock-photo-problem-and-solution-business-concept-165509396.jpg**](http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1734793/165509396/stock-photo-problem-and-solution-business-concept-165509396.jpg)  http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1734793/165509396/stock-photo-problem-and-solution-business-concept-165509396.jpg  **ESCRIBIR EN ESPAÑOL** |
| **Pie de imagen** | Pasos para resolver una situación problema: leer, analizar y solucionar. |

Para abordar una situación problema que involucre sistemas de ecuaciones lineales es fundamental tener en cuenta las siguientes indicaciones.

* **Comprender el problema**: para ello, es necesario leer detenidamente e identificar las incógnitas y los términos independientes de las ecuaciones que harán parte del sistema.
* **Plantear o modelar el problema**: plantear el sistema de ecuaciones que modela el problema.
* **Resolver el problema**: resolver el sistema de ecuaciones por medio del método que más se te facilite; verificar si el sistema es compatible.
* **Comprobar la solución**: reemplazar los resultados obtenidos en las ecuaciones del sistema y verificar si son la solución; analizar si los resultados obtenidos tienen sentido en el contexto del problema.

Ejemplo 1

El costo total de 10 cuadernos y 7 lápices es de $18 050; el costo total de 4 cuadernos y 6 lápices es de $9300; ¿cuál es el valor de cada artículo?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG15 |
| **Descripción** | Cuaderno y lápiz. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/214081/214081,1275197720,1/stock-photo-notebook-with-pencil-over-white-d-rendered-image-54139510.jpg>  http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/214081/214081,1275197720,1/stock-photo-notebook-with-pencil-over-white-d-rendered-image-54139510.jpg |
| **Pie de imagen** | Situación problema relacionada con útiles de escritorio. |

* Se establecen las dos ecuaciones y se identifica que las incógnitas son el valor de un cuaderno y el valor de un lápiz, y los términos independientes son 18 050 y 9300.
* El sistema de ecuaciones que modela este problema es

<<MA\_09\_05\_58.gif>>

* Se resuelve por cualquier método; en este caso se utiliza el método de determinantes.

<<MA\_09\_05\_59.gif>>

<<MA\_09\_05\_60.gif>>

<<MA\_09\_05\_61.gif>>

<<MA\_09\_05\_62.gif>>

<<MA\_09\_05\_63.gif>>

* Se llega a que el valor de un cuaderno es de $1350 y de un lápiz es $650; se comprueba cada una de las ecuaciones del sistema con

*x =* 1350*, y =* 650*.*

* En la ecuación 1:

10*x* + 7*y* = 18 050

10 · (1350) + 7 · (650) = 18 050

13500 + 4550 = 18 050

18050 = 18 050

* En la ecuación 2:

4*x* + 6*y* = 9300

4 · (1350) + 6 · (650) = 9300

5400 + 3900 = 9300

9300 = 9300

Ejemplo 2

Se tienen 25 monedas, unas son de $200 y otras de $500; en total, con las 25 monedas se tienen $11 000 pesos. ¿Cuántas monedas son de $200 y cuántas son de $500?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Monedas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/52627/121913815/stock-vector-vector-illustration-stacks-of-golden-coins-isolated-on-a-white-background-121913815.jpg>  http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/52627/121913815/stock-vector-vector-illustration-stacks-of-golden-coins-isolated-on-a-white-background-121913815.jpg |
| **Pie de imagen** | Problemas de contextos reales. |

* Se establecen las dos ecuaciones y se identifican las incógnitas: son el número de monedas de 500 y el número de monedas de 200; los términos independientes son 25 y 11 000.
* El sistema de ecuaciones que modela este problema es

<<MA\_09\_05\_64.gif>>

* Se resuelve por cualquier método; en este caso se utiliza el método de adición o sustracción.

<<MA\_09\_05\_65.gif>>

Al realizar la adición de las nuevas ecuaciones componente a componente y despejar *y* se obtiene:

<<MA\_09\_05\_66.gif>>

Se reemplaza el valor de *y* en cualquiera de las dos ecuaciones para encontrar el valor de *x:*

*x + y =* 25  *→ x +* 5 = 25 *→ x =* 25 – 5 *→ x =* 20

* Se obtiene que hay 20 monedas de $500 y 5 monedas de $200; estas respuestas se comprueban en las dos ecuaciones:

*x =* 20*, y =* 5

* En la ecuación 1: *x + y =* 25 → 20 + 5 = 25 → 25 = 25
* En la ecuación 2:

500x + 200y = 11 000

500 · (20) + 200 · (5) = 11 000

10 000 +1000 = 11 000

11 000 = 11 000

Ejemplo 3

En un corral hay gallinas y ovejas; en total hay 100 cabezas y 250 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántas ovejas hay en el corral?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG17 |
| **Descripción** | Gallinas y ovejas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [**http://thumb1.shutterstock.com/display\_pic\_with\_logo/56478/140914450/stock-photo-sheep-and-chickens-freely-grazing-on-a-small-scale-sustainable-farm-140914450.jpg**](http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/56478/140914450/stock-photo-sheep-and-chickens-freely-grazing-on-a-small-scale-sustainable-farm-140914450.jpg)  http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/56478/140914450/stock-photo-sheep-and-chickens-freely-grazing-on-a-small-scale-sustainable-farm-140914450.jpg |
| **Pie de imagen** | Situación problema relacionada con un corral de ovejas y gallinas. |

* Se establecen las dos ecuaciones y se identifican las incógnitas: son la cantidad de gallinas y la cantidad de ovejas; los términos independientes son 100 y 250.
* El sistema de ecuaciones que modela este problema es

<<MA\_09\_05\_67.gif>>

* Se resuelve por cualquier método; en este caso se utiliza el método de igualación.

En la primera ecuación se despeja *x:*

*x + y* = 100 *→ x =* 100 *– y*

En la segunda ecuación se despeja *x:*

<<MA\_09\_05\_68.gif>>

Se igualan:

<<MA\_09\_05\_69.gif>>

Se reemplaza *y* por 25 en cualquiera de las ecuaciones:

*x + y =* 100 *→ x +* 25 = 100 *→ x =* 100 – 25 *→ x* = 75

* Se obtiene que en el corral hay 75 gallinas y 25 ovejas; estas respuestas se comprueban en las dos ecuaciones.

*x =* 75*, y =* 25

* En la primera ecuación:

*x + y =* 100 → 75 + 25 *=* 100 → 100 = 100

* En la segunda ecuación:

2*x +* 4*y =* 250

2 · (75) + 4 · (25) = 250

150 + 100 = 250

250 = 250

Ejemplo 4

Una fábrica de botellas tiene dos clases, una de 3 litros y otra de 5 litros; si se quieren utilizar 75 botellas para 305 litros de agua, ¿cuántas botellas de 3 litros y cuántas botellas de 5 litros se necesitan?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG18 |
| **Descripción** | Botellas de agua. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/798610/143616703/stock-vector-pet-bottle-bottle-of-water-143616703.jpg>  http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/798610/143616703/stock-vector-pet-bottle-bottle-of-water-143616703.jpg |
| **Pie de imagen** | Situación problemas relacionada con una fábrica de botellas. |

* Se establecen las dos ecuaciones y se identifican las incógnitas: son la cantidad de botellas de 3 litros y la cantidad de botellas de 5 litros; los términos independientes son 75 y 305.
* El sistema de ecuaciones que modela este problema es

<<MA\_09\_05\_70.gif>>

* Se resuelve por cualquier método; en este caso se utiliza el método de sustitución.

Se despeja *x* en la segunda ecuación:

<<MA\_09\_05\_71.gif>>

Se reemplaza en la primera ecuación el valor encontrado para *x* y se despeja *y*

<<MA\_09\_05\_72.gif>>

Se reemplaza *y =* 40 en cualquiera de las ecuaciones para obtener a *x.*

*x + y =* 75 *→ x +* 40 = 75 *→ x =* 75 – 40 *→ x* = 35

* Se necesitan 35 botellas de 5 litros y 40 botellas de tres litros para envasar los 305 litros de agua en 75 botellas; estas respuestas se comprueban en las dos ecuaciones.

*x =* 35*, y =* 40

En la primera ecuación:

*x + y =* 75 → 35 + 40 = 75 → 75 = 75

En la segunda ecuación:

3*x +* 5*y =* 305

3. (35*) +* 5 · (40) = 305

105 + 200 = 305

305 = 305

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC180 |
| **Título** | Resuelve problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales |
| **Descripción** | Actividad para resolver situaciones problema que involucran sistemas de ecuaciones lineales |

[SECCIÓN 2**] 2.8 La solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3**

En las secciones anteriores se ha trabajado en la solución de sistemas de ecuaciones 2 *×* 2*.* En esta sección se trabajará la **solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3***,* es decir, se buscarán tripletas (*x, y, z*) de números que satisfagan las tres ecuaciones.

Existen diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 3 *×* 3*;* en esta sección se desarrollarán dos métodos, el de igualación y el de Gauss Jordan.

[SECCIÓN 3**] 2.8.1 El método de igualación**

Este método puede entenderse mediante los siguientes pasos.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema por el método de igualación.

<<MA\_09\_05\_73.gif>>

* Se enumeran las tres ecuaciones 1, 2, 3.

3*x* + 5*y* +4*z* = 42 (1)

2*x* – 3*y* – 3*z* = –5 (2)

10*x* + 2*y* – 5*z* =74 (3)

* Se escoge la misma incógnita en las tres ecuaciones y se despeja. En este caso la *x* y se despeja en las tres ecuaciones.

En la ecuación (1)

<<MA\_09\_05\_74.gif>>

En la ecuación (2)

<<MA\_09\_05\_75.gif>>

En la ecuación (3)

<<MA\_09\_05\_76.gif>>

* Se igualan las ecuaciones 1 y 2, y 2 y 3; luego se despeja el término independiente.
* Ecuaciones 1 y 2:

<<MA\_09\_05\_77.gif>>

* Ecuaciones 2 y 3:

<<MA\_09\_05\_78.gif>>

* El nuevo sistema de ecuaciones 2 × 2 es:

<<MA\_09\_05\_79.gif>>

Se soluciona por el método de igualación; se despeja *y* en las dos ecuaciones.

En la ecuación 4:

<<MA\_09\_05\_80.gif>>

En la ecuación 5:

<<MA\_09\_05\_81.gif>>

Se igualan estas dos ecuaciones y se despeja *z*:

<<MA\_09\_05\_82.gif>>

Ahora, se reemplaza *z* por *–*2 en cualquiera de las ecuaciones anteriores para encontrar el valor de *y.*

<<MA\_09\_05\_83.gif>>

Como ya se tiene el valor de dos de las incógnitas: *z = –2 , y = 7.* Ahora se reemplazan estos dos valores en cualquiera de las ecuaciones iniciales, 1, 2 o 3, y se obtiene el valor de la incógnita que hace falta. Estos valores se remplazarán en la ecuación 1 y se despeja la incógnita:

<<MA\_09\_05\_84.gif>>

* Los valores encontrados son: *z =* –2*, y =* 7*, x =* 5*.* Se comprueban en las ecuaciones 1, 2 y 3.
* En la primera ecuación:

3*x +* 5*y + 4z =* 42

3 · (5) + 5 · (7) + 4 · (–2) = 42

15 + 35 – 8 = 42

42 = 42

* En la segunda ecuación:

2*x –* 3*y –* 3*z =* –5

2 · (5) – 3 · (7) – 3 · (–2) = –5

10 –21 + 6 = –5

–5 = –5

* En la tercera ecuación :

10*x +* 2*y –* 5*z =* 74

10 · (5) + 2 · (7) – 5 · (–2) = 74

50 + 14 + 10 = 74

74 = 74

Como *z = –*2*, y =* 7 *, x =* 5, se comprueba que las tres ecuaciones son solución del sistema.

[SECCIÓN 3**] 2.8.2 El método Gauss Jordan**

El método **Gauss Jordan** se describe en los siguientes pasos.

* Se representa el sistema de ecuaciones por medio de una matriz aumentada, es decir, la matriz formada por los coeficientes de las variables y los términos independientes.

Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones:

<<MA\_09\_05\_85.gif>>

La matriz aumentada que representa el sistema de ecuaciones es:

<<MA\_09\_05\_86.gif>>

* Se lleva la matriz aumentada que representa el sistema de ecuaciones a otra matriz aumentada equivalente llamada **matriz identidad**, que es de la forma

<<MA\_09\_05\_87.gif>>

donde *m, n, p* son números reales y serán la solución al sistema de ecuaciones. Para llevar la matriz aumentada que representa el sistema de ecuaciones a la matriz aumentada identidad se pueden aplicar intercambios a las filas y a las columnas: operaciones como adición, sustracción, multiplicación y división, teniendo en cuenta que lo que se realice se aplica a todos los elementos de la fila o de la columna.

* Se realiza la comprobación en el sistema de ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan.

<<MA\_09\_05\_88.gif>>

* Se representa el sistema por medio de una matriz aumentada.

<<MA\_09\_05\_89.gif>>

Se llevar la matriz aumentada.

<<MA\_09\_05\_90.gif>>

donde *m = x, n = y, p = z,* es decir, será la solución del sistema; esto se consigue de la siguiente manera: *f*1 será la fila uno, *f*2 la fila 2 y *f*3 la fila 3; se especificarán las operaciones o cambios que se realicen paso a paso.

<<MA\_09\_05\_91.gif>>

<<MA\_09\_05\_92.gif>>

<<MA\_09\_05\_93.gif>>

La solución del sistema de ecuaciones es *x* = 5*, y* = 7*, z* = –2.

* Se comprueba reemplazando en cada una de las ecuaciones del sistema los valores de las variables.

En la primer ecuación:

3*x +* 5*y +* 4*z =* 42

3 · (5) + 5 · (7) + 4 · (–2) = 42

15 + 35 – 8 = 42

42 = 42

En la segunda ecuación:

2*x* – 3*y* –3*z* = –5

2 · (5) – 3 · (7) – 3 · (–2) = –5

10 – 21 + 6 = –5

–5 = –5

En la tercera ecuación:

10*x* + 2*y* – 5*z* = 74

10 · (5) + 2 · (7) – 5 · (–2) = 74

50 + 14 + 10 = 74

74 = 74

Entonces *x =* 5*, y =* 7*, z =* –2 son solución del sistema

<<MA\_09\_05\_94.gif>>

Si al solucionar el sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan:

* Aparece una fila de la forma

<<MA\_09\_05\_95.gif>>

y *a* es cualquier número real diferente de cero, el sistema será incompatible, es decir, no tendrá solución.

* Aparece una fila de la forma

<<MA\_09\_05\_96.gif>>

el sistema tendrá infinitas soluciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| Contenido | El método se llama Gauss Jordan en homenaje a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC190 |
| **Título** | Soluciona sistemas de ecuaciones lineales 3 × 3 |
| **Descripción** | Actividad para solucionar sistemas de ecuaciones 3 × 3 |

[SECCIÓN 2**] 2.9 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC200 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Sistemas de ecuaciones lineales |
| **Descripción** | Actividad sobre Sistemas de ecuaciones lineales |

[SECCIÓN 1**] 3. Las desigualdades lineales con dos incógnitas**

Partiendo de la definición de desigualdad como una relación de orden entre dos expresiones matemáticas, una **desigualdad lineal** con dos incógnitas son expresiones que se pueden escribir de las formas:

*ax + by >c, ax + by < c, ax + by ≥ c, ax + by ≤ c* donde *a, b, c ∈* ℝ

Son desigualdades:

* 2*x +* 3*y >* 2
* 12*x ≤* 3*y +* 1
* *x ≥ y*
* <<MA\_09\_05\_96.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC210 |
| **Título** | Las desigualdades |
| **Descripción** | Interactivo para explicar la solución de desigualdades |

[SECCIÓN 2**] 3.1 La solución de desigualdades con dos incógnitas**

Para **solucionar una desigualdad con dos incógnitas** se deben encontrar todos las duplas (*x, y*) que satisfagan la desigualdad, es decir, que hagan que la desigualdad sea verdadera.

Uno de los métodos que se utiliza es el siguiente.

* Se cambia el signo de la desigualdad por el signo igual.
* Se despeja la variable *y*.
* Se grafica la recta en el plano cartesiano.
* Se analiza el gráfico. Como el plano queda dividido en dos semiplanos por la recta que se grafica, una de estas dos regiones es la solución de la desigualdad. Si la desigualdad es *≤* o *≥* la recta, será parte de la solución; pero si la desigualdad es < o > la recta, no hace parte de la solución. Para saber cuál de los dos semiplanos es la solución de la desigualdad, se escoge un punto de cada semiplano y se reemplazan en la inecuación; el punto que cumpla la desigualdad determina la región que es solución de la inecuación.

Ejemplo

Encuentra la solución de la siguiente desigualdad: 2*x +* 4*y* > 10.

* 2*x +* 4*y <* 10 → 2*x* + 4*y* = 10
* Se despeja la variable *y*. Luego se representa gráficamente la ecuación.

<<MA\_09\_05\_98.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una ecuación lineal. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 5\imagenes\1.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la ecuación 2*x* + 4*y* = 10. |

* Escoger dos puntos, uno de cada semiplano, y reemplazarlos en la desigualdad; el punto *D =* (–4,–1) y el punto *C =* (5, 3).
* Punto *D =* (–4, –1)*,* 2*x +* 4*y* > 10 *→* 2 · (–4) + 4 · (–1 ) > 10 → –12 > 10.Se llega a una falsedad, lo que quiere decir que el semiplano donde está ubicado el punto D no es solución de la desigualdad.
* Punto *C =* (5, 3), 2*x* +4*y* > 10 → 2 · (5) + 4 · (3) > 10 → 22 > 10. Se llega a una verdad, lo que quiere decir que el semiplano donde está ubicado el punto C es la solución de la desigualdad, sin incluir la recta porque la desigualdad es >.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Representación gráfica de la solución de una desigualdad. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 5\imagenes\2.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la solución de la desigualdad 2*x* + 4*y* > 10. |

[SECCIÓN 2**] 3.1 Los sistemas de desigualdades lineales**

En un sistema de desigualdades lineales intervienen dos o más desigualdades. La solución del sistema será el conjunto de valores que satisfacen a la vez todas las ecuaciones del sistema.

[SECCIÓN 2**] 3.1.1 ¿Qué es un sistema de desigualdades lineales con dos variables?**

Un sistema de desigualades lineales con dos incógnitas se puede definir como un conjunto de *n* desigualdades que se puede escribir de manera general como:

<<MA\_09\_05\_100.gif>>

donde *a1, b1, c1, a2, b2, c2………..an, bn, cn ∈* ℝ, *x, y* son las incógnitas y el signo < puede ser cualquier otro signo de desigualdad.

Ejemplos

<<MA\_09\_05\_101.gif>>

<<MA\_09\_05\_102.gif>>

<<MA\_09\_05\_103.gif>>

SECCIÓN 2**] 3.1.2 Solución de un sistema de desigualdades lineales con dos variables**

Para **solucionar un sistema de desigualdades lineales** se cambian todos los símbolos de desigualdad por el signo igual, es decir, todas las desigualdades se convierten en ecuaciones. Después, se despeja la incógnita *y* en cada una de las ecuaciones y se grafica en el mismo plano una por una definiendo cuál región es solución de la desigualdad. Si al graficar todas las ecuaciones existe un región que es la intersección de todas las soluciones de las inecuaciones, esta será la solución del sistema; cuando el símbolo de la desigualdad es la recta que limita, no hace parte de la solución; pero si los signos de la desigualdad son la recta que limita, sí hace parte de la solución del sistema.

Ejemplo

Solucionar el sistema de desigualdades lineales.

<<MA\_09\_05\_104.gif>>

* Se convierte cada desigualdad en ecuación y se despeja la variable *y*.

<<MA\_09\_05\_1005gif>>

<<MA\_09\_05\_106.gif>>

* Se grafica la primera ecuación.

<<MA\_09\_05\_107.gif>>

y se encuentra la solución de la desigualdad:3*x +* 2*y ≤* 10

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG17 |
| **Descripción** | Representación gráfica de la solución de una desigualdad. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\guion 5\imagenes\5.jpg |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la solución de la desigualdad3*x +* 2*y ≤* 10. |

* Se grafica la segunda ecuación:

<<MA\_09\_05\_108.gif>>

en el mismo plano que se graficó la primera ecuación y se encuentra la solución de la segunda desigualdad: *x +* 2*y <* 2 ; además, la intersección de las dos soluciones será la solución del sistema.

<<MA\_09\_05\_109.gif>>

La región está determinada por dos semirrectas: la semirrecta que hace parte de la solución 3*x* + 2*y* ≤ 10 forma parte de la solución; mientras que la semirrecta que hace parte de la solución *x* + 2*y* < 2 no forma parte de la solución.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG18 |
| **Descripción** | Representación gráfica de la solución de un sistema de desigualdades. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\guion 5\imagenes\6.jpg |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la solución de un sistema de desigualdades. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC220 |
| **Título** | Solución gráfica de desigualdades |
| **Descripción** | Actividad para solucionar de forma gráfica desigualdades con dos incógnitas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC230 |
| **Título** | Resuelve desigualdades lineales |
| **Descripción** | Actividad para practicar la solución de desigualdades lineales |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC240 |
| **Título** | Soluciona sistemas de desigualdades lineales con más de dos ecuaciones |
| **Descripción** | Actividad para solucionar sistemas de desigualdades con más de dos ecuaciones |

[SECCIÓN 2**] 3.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC250 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las desigualdades |
| **Descripción** | Actividad sobre el tema Las desigualdades |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC260 |
| **Título** | Competencias: sistemas de ecuaciones lineales en la literatura |
| **Descripción** | Actividad de aplicación de los sistemas de ecuaciones en contextos de literatura matemática |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC270 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual del tema Sistemas de ecuaciones lineales |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC280 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema Sistemas de ecuaciones lineales |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_09\_05\_CO\_REC290 | |
| **Web 01** | Conceptos relacionados con funciones | http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones1/index4\_8.htm |
| **Web 02** | Dominio de una función | http://www.vitutor.com/fun/2/a\_2.html |
| **Web 03** | Estudio gráfico de las características de una función | http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\_didacticos/Estudio\_grafico\_caracterisiticas\_globales\_funcion/index.htm |