[SECCIÓN 1] **1. La función cuadrática**

La **funciones cuadráticas** se definen como las funciones que se pueden escribir de la forma *f*(*x*) *= ax2 + bx + c,* donde *a, b, c* son números realescon *a ≠ 0*.

Por ejemplo, las funciones *f*(*x*) = *x*2 + 3*x* + 1; *g*(*x*) = –5*x*2 – 8 y *h*(*x*) = –*x*2 son funciones cuadráticas. A este tipo de funciones cuadráticas también se les conoce como funciones de segundo grado porque el exponente del término *ax*2 es 2. En cada una de ellas se identifican los valores de *a*, *b* y *c*. Así, en la función *f*(*x*) = *x*2 + 3*x* + 1, *a* = 1, *b* = 3 y *c* = 1; en la función *g*(*x*) = –5*x*2 – 8, *a* = –5, *b* = 0 y *c* = –8 y en *h*(*x*) = –*x*2, *a* = -1; *b* = 0 y *c* = 0.

[SECCIÓN 2] 1.1 La representación gráfica de las funciones cuadráticas

Para obtener la representación gráfica de una función cuadrática, debemos construir una tabla de valores y, después, ubicar los pares ordenados obtenidos en un sistema de coordenadas cartesianas. Para ello, debemos asignar valores a la variable *x* y calcular mediante la función los que corresponden a la variable dependiente *y*.

Ejemplos

* La función *f*(*x*) *= x*2, con *x* ∈ ℝ es una función cuadrática, con *a* = 1, *b* = 0 y *c* = 0. Para obtener una representación gráfica se asignan valores a la variable independiente *x*, luego se determinan los valores de *f*(*x*)así*:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 |
| *f*(*x*) | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 9 | 9 |

Teniendo estos puntos se puede trazar su gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG02 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\1.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f*(*x*) *= x2*. |

* La función *f*(*x*) *= x2 + 2x*, con *x* *∈* ℝ es una función cuadrática puesto que *a* = 1, *b* = 2 y *c* = 0. La representación gráfica se obtiene asignando valores a *x* para encontrar los valores de *f*(*x*)*:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 |
| *f(x)* | 0 | 3 | -1 | 8 | 0 | 15 | 3 |

Su gráfica se muestra en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG03 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\2.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f(x) = x2 + 2x.* |

La representación gráfica de esta clase de funciones son curvas que pueden abrir para arriba o para abajo y se identifican con el nombre de **parábolas**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG25 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | C:\Users\Lzambrano\Documents\GitHub\Matematicas\fuentes\visuales\grado09\guion06\materialGrafico\MA_09_06_CO_REC20_IMG06a.jpg |
| **Pie de imagen** | Representaciones de curvas con forma de parábolas. |

En nuestro entorno podemos encontrar objetos o elementos de la naturaleza que puede tener esa forma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG01 |
| **Descripción** | Arco iris |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/822973/137729087/stock-photo-rainbow-over-the-sea-and-rock-137729087.jpg |
| **Pie de imagen** | En la naturaleza, el arco iris describe la forma de una parábola. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG04 |
| **Descripción** | Puente cuyas bases forman una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/533572/218553973/stock-photo-charles-bridge-in-prague-czech-republic-218553973.jpg>  http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/533572/218553973/stock-photo-charles-bridge-in-prague-czech-republic-218553973.jpg |
| **Pie de imagen** | Creación del hombre con parábolas en las bases de un puente. |

La gráfica de una función *f*(*x*) = *ax*2 + *bx* + *c* tiene las siguientes características.

* Abre **hacia arriba** si el valor de *a*, es mayor que cero.
* Abre **hacia abajo** si el valor *a*, es menor que cero.
* Tiene un **vértice** que corresponde al punto mínimo de la parábola si *a* > 0, o al punto máximo si *a* < 0.
* Interseca al eje *X* en los puntos donde el valor de la función es 0. Es decir donde *f*(*x*) = 0.
* Interseca al eje *Y*, en el punto (0, *c*).
* Posee **eje de simetría** que corresponde a la recta paralela al eje *Y* que pasa por las coordenadas del vértice.

Por ejemplo, la función que relaciona el área de un cuadrado con su triple es *f*(*x*) = 3x2. En la tabla se representan algunos valores y en la imagen su representación gráfica.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla de valores para la función *f*(*x*) = 3*x*2** | | | | | | | |
| *x* | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| *f(x)* | 27 | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 | 27 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG 07 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | C:\Users\Lzambrano\Documents\GitHub\Matematicas\fuentes\visuales\grado09\guion06\materialGrafico\MA_09_06_CO_IMG07_zoom.png |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 3*x*2. En este caso, *b* = 0 y *c* = 0. |

* La curva es una parábola que abre hacia arriba porque *a* = 3, es mayor que cero.
* Su vértice es el punto (0, 0) y es el único punto donde la gráfica interseca al eje *X*.
* Su eje de simetría es el eje *Y*.

#### Recuerda

Si el **coeficiente de *x*2** es negativo, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo, y si es positivo, hacia arriba.

El valor absoluto del coeficiente del término con *x*2 determina la abertura de la parábola. Observemos la representación gráfica de las siguientes seis funciones cuadráticas, que difieren solo en el coeficiente de *x*2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *y* = 25*x*2 | *y* = *x*2 | *y* = 0,1*x*2 |
| *y* = –*x*2 | *y* = –*x*2 | *y* = –0,1*x*2 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG26 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img3_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Observa cómo cambian las configuraciones de estas funciones cuadráticas según el valor del coeficiente del término de segundo grado. |

Si observamos el signo y el valor del coeficiente del término de segundo grado, vemos lo siguiente:

* A mayor valor absoluto del coeficiente de las *x*, menor abertura de la parábola.
* Si el coeficiente es negativo, la parábola tiene sus ramas hacia abajo, y si es positivo, hacia arriba.

#### Las funciones cuadráticas de la forma y = ax2

La gráfica de una función cuadrática de la forma *y* = *ax*2 es una parábola con el vértice en el origen (0, 0) y simétrica respecto al eje *Y*.

* Si *a* > 0, la parábola presenta un mínimo en su vértice y sus ramas están dirigidas hacia arriba.
* Si *a* < 0, la parábola presenta un máximo en su vértice y las ramas están dirigidas hacia abajo.
* Cuanto mayor es el valor absoluto de *a*, menor es la abertura de las ramas de la parábola.

El siguiente ejemplo muestra la representación de una función cuadrática con *b* = 0 y *c* ≠ 0.

* Representemos gráficamente la función

C:\Users\Lzambrano\Desktop\Nueva carpeta\MA_09_06_204.gif

MA\_09\_06\_formula1

Se construye una tabla de valores asignando valores arbitrarios a *x*, tanto positivos como negativos; luego se ubican en el plano cartesiano las parejas ordenadas y se traza la gráfica.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla de valores para la función *f*(*x*) = –5/6*x*2 + 3** | | | | | | | |
| *x* | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| *f(x)* | –4,5 | –0,3 | 2,17 | 3 | 2,17 | –0,3 | –4,5 |

La gráfica de la función se muestra en la imagen:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG27 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función f(x) = –5/6*x*2 + 3. . |

Esta parábola abre hacia abajo porque *a* = –5/6 es menor que cero. Tiene vértice en el punto (0, 3) y su eje de simetría es el eje *Y*.

### [SECCIÓN 2] 1.2 Las traslaciones de la función cuadrática

Una función cuadrática de la forma *y* = *ax*2 se representa gráficamente mediante una parábola simétrica respecto al eje Y, con el vértice en el origen de coordenadas (0, 0).

Si trasladamos esta parábola a lo largo del eje Y o del eje X, podemos obtener nuevas parábolas que mantendrán la misma abertura, pero que se diferenciarán en la posición del vértice o del eje de simetría.

Para analizar qué tipos de funciones cuadráticas generan estos desplazamientos, veamos los tipos de traslaciones que podemos hacer (vertical, horizontal y oblicua) y cómo se modifica la ecuación de la parábola original.

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La traslación vertical**

Si trasladamos la parábola **en vertical** a lo largo del **eje *Y*,** obtendremos nuevas parábolas que tendrán la misma abertura y el mismo eje de simetría, pero diferentes vértices.

En la siguiente imagen se observa la parábola de la función *y* = *x*2 (en azul) y la misma parábola trasladada tres unidades hacia arriba (en rojo) y dos unidades hacia abajo (en verde), ambas traslaciones a lo largo del eje *Y*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG28 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img5_small.jpg](http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img5_zoom.jpg) |
| **Pie de imagen** | Gráficos de la parábola *y* = *x*2 y de dos de sus **traslaciones verticales**. |

Las dos nuevas parábolas poseen la misma forma que la original, pero tienen sus vértices en el punto de coordenadas (0, *c*), con *c* ≠ 0. Sus ecuaciones serán de la forma:

*y* = *x*2 + *c*

Así, en el ejemplo, las dos nuevas parábolas representadas responden a las siguientes ecuaciones y vértices:

* Tres unidades hacia arriba: *y* = *x*2 + 3, con vértice en (0, 3).
* Dos unidades hacia abajo: *y* = *x*2 − 2, con vértice en (0, −2).

Si *c* > 0, la parábola se desplaza hacia arriba y si *c* < 0, la parábola se desplaza hacia abajo.

#### La traslación a lo largo del eje Y

La traslación vertical de una parábola de ecuación *y* = *x*2 da como resultado otra parábola con la misma abertura, pero con vértice en el punto de coordenadas (0, *c*) y ecuación de la forma

***f(x)* = *x*2 + *c***

[SECCIÓN 3] **1.2.2 La traslación horizontal**

Si **trasladamos** la parábola **en horizontal** a lo largo del **eje *X***, se obtienen nuevas parábolas que tendrán la misma abertura, pero distinto eje de simetría y distinto vértice.

En la siguiente imagen se observa la parábola de la función *y* = *x*2 (en azul) y la misma parábola trasladada tres unidades hacia la derecha (en rojo) y dos unidades hacia la izquierda (en verde), en ambas ocasiones a lo largo del eje *X*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG29 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img6_small.jpg](http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img6_zoom.jpg) |
| **Pie de imagen** | Gráficos de la parábola *y* = *x*2 y de dos de sus **traslaciones horizontales**.. |

Las dos nuevas parábolas tienen la misma forma que la original, de ecuación *y* = *x*2, pero tienen sus vértices en el punto de coordenadas (−*h*, 0), con *h* ≠ 0. Sus ecuaciones serán de la forma:

*y* = *a*(*x* + *h*)2

Así, en el ejemplo, las dos nuevas parábolas representadas responden a las siguientes ecuaciones y vértices:

* Tres unidades hacia la derecha: *y* = (*x* − 3)2, con vértice en (3, 0).
* Dos unidades hacia la izquierda: *y* = (*x* + 2)2, con vértice en (−2, 0).

Si *h* > 0, la parábola se desplaza hacia la izquierda, y si *h* < 0, la parábola se desplaza hacia la derecha.

#### La traslación a lo largo del eje X

La **traslación horizontal** de una parábola de ecuación *y* = *x*2 da como resultado otra parábola con la misma abertura pero con distinto eje de simetría, con vértice en el punto de coordenadas (−*h*, 0) y la siguiente ecuación general:

***y* = (*x* + *h*)2**

[SECCIÓN 3] **1.2.3 La traslación oblicua**

Si se efectúan de forma sucesiva dos desplazamientos, uno horizontal y otro vertical, se dice que se ha realizado una **traslación oblicua**. Las nuevas parábolas tendrán la misma abertura, pero**distinto eje de simetría**y**vértice.**

En la siguiente imagen se observa la parábola de la función *y* = *x*2 (en azul) y la misma parábola trasladada tres unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba (en rojo) y dos unidades hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo (en verde).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG30 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img7_small.jpg](http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img7_zoom.jpg) |
| **Pie de imagen** | Gráficos de la parábola *y* = *x*2 y de dos de sus **traslaciones oblicuas**... |

Las dos nuevas parábolas tienen la misma forma que la original, de ecuación *y* = *x*2, pero tienen sus vértices en el punto de coordenadas (–*h*, *k*). Sus ecuaciones son de la forma:

*y* = (*x* + *h*)2 + *k*

Así, en el ejemplo, las dos nuevas parábolas representadas responden a las siguientes ecuaciones y vértices:

* Tres unidades hacia la derecha y hacia arriba: *y* = (*x* − 3)2 + 3, con vértice en (3, 3).
* Dos unidades hacia la izquierda y hacia abajo: *y* = (*x* + 2)2 − 2, con vértice en (−2, −2).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Las traslaciones de la función cuadrática *y* = *ax*2** | | | |
| TRASLACIÓN | VÉRTICE | ECUACIÓN | DESPLAZAMIENTO |
| Vertical | (0, *q*) | *y* = *ax*2 + *c* | *c* < 0, *q* unidades hacia abajo.  *c* > 0, *q* unidades hacia arriba. |
| Horizontal | (–*h*, 0) | *y* = *a*(*x* + *h*)2 | *h* < 0, *p* unidades hacia la derecha.  *h* > 0, *p* unidades hacia la izquierda. |
| Oblicua | (–*h*, *k*) | *y* = *a*(*x* + *k*)2 + *k* | *k* < 0, *q* unidades hacia abajo.  *k* > 0, *q* unidades hacia arriba.  *h* < 0, *p* unidades hacia la derecha.  *h* > 0, *p* unidades hacia la izquierda. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC10 |
| **Título** | El estudio de la función cuadrática |
| **Descripción** | Interactivo que presenta el concepto de función cuadrática, su gráfica, sus características y elementos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC100 |
| **Título** | Reconoce las traslaciones de la función cuadrática |
| **Descripción** | Actividades sobre la función cuadrática. |

[SECCIÓN 2] **1.**3 El cálculo de las coordenadas del vértice de una parábola

La fórmula general de cualquier parábola es:

***y*=*ax*2** +***bx*+ *c***

Donde *a*, *b* y *c* son tres números cualesquiera, con *a* ≠ 0, y *x* e *y* son las variables independiente y dependiente, respectivamente.

Por ejemplo, en la ecuación:

*y* = *x*2 – 6*x* + 12

se tiene que *a* = 1, *b* = –6 y *c* = 12.

La fórmula general para calcular la coordenada *x* del vértice de una parábola cualquiera es:

http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_formula2_resized.gif

MA\_09\_06\_formula2

Una vez hemos hallado *x*, solo hay que sustituir su valor en la ecuación de la función para encontrar la coordenada y el vértice.

Por ejemplo, calculemos las coordenadas de los vértices de las parábolas cuyas ecuaciones son:

*y* = *x*2 – 6*x* + 12

*y* = *x*2 + 4*x* + 2

1. Calculamos la coordenada *x* del vértice para la primera ecuación:

http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_formula3_resized.gif

MA\_09\_06\_formula3

1. Para calcular la coordenada *y*, sustituimos el valor de *x* en la ecuación de la parábola:

*y* = *x*2 – 6*x* + 12

*y* = 32 · 6(3) + 12 = 9 –18 + 12 = 3

1. Repetimos el mismo procedimiento para calcular las coordenadas del vértice de la parábola de ecuación *y* = *x*2 + 4*x* + 2:

http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_formula4_resized.gif

MA\_09\_06\_formula4

1. Para calcular la coordenada *y*, sustituimos el valor hallado de x:

*y* = *x*2 + 4*x* + 2

(–2)2 + 4 · (–2) + 2 = 4 – 8 + 2 = –2

Así, las coordenadas de los vértices son:

* Para la parábola de ecuación *x*2 − 6*x* + 12 el vértice es (3, 3).
* Para la parábola de ecuación *x*2 + 4*x* + 2 el vértice es (−2, −2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG31 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img8_small.jpg](http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14640/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_07_img8_zoom.jpg) |
| **Pie de imagen** | Gráfico de las funciones *y* = *x*2 − 6*x* + 12 e *y* = *x*2 + 4*x* + 2, en los que se comprueba la **posición de los vértices**.... |

#### Las coordenadas del vértice de una parábola

Las **coordenadas***x* e *y* del **vértice de una parábola** cualquiera se pueden expresar mediante las siguientes fórmulas:



MA\_09\_06\_formula5

Por ejemplo, para calcular el vértice de la siguiente parábola: *y* = – *x*2 + 4*x* + 5, se aplican las fórmulas:



MA\_09\_06\_formula6



MA\_09\_06\_formula7

El vértice de la parábola será el punto de coordenadas (2, 9); como el coeficiente de *x*2 es menor que cero, se trata de un máximo y las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG32 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Gráfica de la función *y* = – *x*2 + 4*x* + 5 |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = – *x*2 + 4*x* + 5. Abre hacia abajo porque a = -1. Su vértice es el punto (2, 9). |

En general, según los valores de *a*, *b* y *c* de la función *f*(*x*) = *ax*2 + *bx* + *c* es posible clasificar las gráficas de las funciones cuadráticas de la siguiente forma.

1. Las parábolas con el vértice en el origen (0, 0) y que abren hacia arriba:su ecuación es de la forma *y = ax2* donde *a >* 0*.*

2. Las parábolas con el vértice en el origen (0, 0) y que abren hacia abajo:su ecuación es de la forma *y = –ax2* donde *a <* 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG 33 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\6.JPG C:\Users\Lzambrano\Documents\GitHub\Matematicas\fuentes\visuales\grado09\guion06\materialGrafico\MA_09_06_CO_IMG08_small.png |
| **Pie de imagen** | Gráficas de las funciones *y* = *f*(*x*) *=* 3*x2* (azul) y, *f*(*x*) *= –*3*x2*, con vértice en (0, 0); en el primer caso, la parábola abre hacia arriba porque *a* = 3 > 0, y en el segundo caso, abre hacia abajo porque *a* = *–*3 < 0. |

3. Las parábolas con vértice en *(*0, *c)* y que abren hacia arriba: su ecuación es de la forma

*y = ax2 + c* donde *a* > 0.

4. Las parábolas con el vértice en (0, *c*) y que abren para abajo: su ecuación es de la forma

*y = ax2 + c* donde *a* < 0*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG09 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\8.JPG |
| **Pie de imagen** | En la función *y =* 2*x2 +* 3 (color rojo) el vértice es (0, 3), y abre para arriba porque *a =* 2 > 0 *y c* = 3*.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG10 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la función *y =* -2*x2* + 1 el vértice es (0, 1), y abre para abajo porque a = -2 < 0 y *c* = 1. |

5. Las parábolas que abren para arriba y no tienen el vértice en el eje *Y*: su ecuación es de la forma  *y = ax2 + bx + c*  donde *a* > 0y *b* ≠ 0*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG11 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la función *y =* 4*x2 +* 2*x, a =* 4*, b =* 2 *y c =* 0; por lo tanto, se cumple que *a* es un número real positivo y *b* ≠ 0. De esta forma, la parábola abre hacia arriba y el vértice tiene las coordenadas que se muestra en la imagen. |

6. Las parábolas que abren para arriba y no tienen el vértice en el eje *Y*: su ecuación es de la forma  *y = ax2 + bx + c,* con *a* < 0*, b* ≠ 0*.* Observa la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\11.JPG |
| **Pie de imagen** | En la función *y=* –2*x2 +* 12*x +* 1 el vértice es (3, 19),y abre para abajo porque *a* = –2 < 0 y *b* = 12 ≠ 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG06 |
| **Descripción** | Gráfica de una parábola. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | J:\planeta\guion 6\imagenes\3.jpg |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la parábola *y =* 2*x2 +* 8*x +* 1. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC30 |
| **Título** | Identifica funciones cuadráticas |
| **Descripción** | Actividad que permite identificar funciones cuadráticas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC60 |
| **Título** | Relaciona cada gráfica con sus elementos |
| **Descripción** | Actividad para identificar la gráfica correspondiente a una función cuadrática dada. |

[SECCIÓN 2**] 1.4 Los ceros de la función cuadrática**

Los ceros de una función cuadrática, o las raíces,son los valores de *x* cuando la función es igual a cero, es decir cuando *f*(*x*) = 0. Gráficamente, son los valores de *x* cuando la función interseca al eje *Y*; estos se denominan *x*1 y *x*2*.*

Las funciones cuadráticas pueden tener dos raíces, una raíz, o no tener raíces, como se expone a continuación.

* **Funciones cuadráticas con dos raíces**: son aquellas funciones que al reemplazar *x* por las raíces de la función, su imagen es cero.

Por ejemplo**,** la función *f*(*x*) *=* 2*x2 +* 4*x* tiene dos ceros o dos raíces, las cuales son

*x*1= –2y *x2* = 0 ya que para x1 = –2, se tiene: *f*(–2) *=* 2(–2)2 + 4(–2) = 8 – 8 = 0 y para *x2* = 0 se tiene que *f*(0)= 2(0)2 + 4(0) = 0 + 0 = 0.

Gráficamente se observa que la parábola pasa por dos puntos en el eje X, como se muestra en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Representación gráfica de función cuadrática que tiene dos raíces o ceros. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\12.JPG |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *f*(*x*) *=* 2*x2 +* 4*x* se muestra que sus ceros son *x*1 = -2 y *x*2 = 0. |

* **Funciones cuadráticas con única raíz**: son aquellas funciones que tienen el vértice en el eje *X*.

Por ejemplo, la función *f*(*x*) *=* 2*x2 –* 12*x +* 18tiene un solo cero *x1 =* 3; este es el único valor que se si se reemplaza en la función, la imagen es cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG17 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática que tiene una raíz o un cero. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\13.JPG |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *f*(*x*) *=* 2*x2 –* 12*x +* 18 se observa que *x*1 = 3 y el punto (3, 0) es el vértice de la parábola. |

* **Funciones cuadráticas sin raíces**: son aquellas cuya gráfica no interseca el eje *X*; por lo tanto, no existe un valor en el dominio de la función que tenga como imagen cero.

Por ejemplo, la función *f*(*x*) *=* 2*x2 –* 4*x +* 4no tiene ningún cero o raíz, ya que su gráfica no interseca al eje *X,* es decir, no existe ningún valor de *x* que al reemplazarlo en la función arroje como resultado cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG18 |
| **Descripción** | Representación gráfica de una función cuadrática que no tiene raíz o ceros. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\planeta\guion 6\imagenes\14.JPG |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función *y =* 2*x2 –* 4*x +* 4no pasa por el eje X, por lo tanto no tiene ceros. |

Para encontrar **los ceros** de una función cuadrática se debe solucionar la ecuación que resulta de igualar la función a cero. En las siguientes secciones se mostrarán algunos métodos para encontrar las raíces de la función cuadrática y solucionar esta ecuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC80 |
| **Título** | Identifica los ceros de una función cuadrática |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la gráfica de una función cuadrática con sus ceros respectivos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC130 |
| **Título** | Representa gráficamente la función cuadrática |
| **Descripción** | Actividad que propone la representación gráfica de funciones cuadráticas. |

[SECCIÓN 2] **1.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: la función cuadrática |
| **Descripción** | Actividades sobre La función cuadrática. |

[SECCIÓN 1**] 2 La ecuación cuadrática**

Una **ecuación cuadrática** se caracteriza porque el mayor exponente de la incógnita es 2, y se puede expresar de la forma *ax2 + bx + c = 0,* donde *a, b, c* ∈ ℝ y *a ≠* 0*.* También se conoce con el nombre de ecuación de segundo grado con una incógnita. Algunos ejemplos de ella son:

2*x2 +* 3*x +* 5 = 0 *x2* =–1 23*x2 =* 2*x*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG19 |
| **Descripción** | Lanzamiento de jabalina. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/487144/111565067/stock-photo-full-length-of-man-with-arm-extended-about-to-release-javelin-111565067.jpg>  http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/487144/111565067/stock-photo-full-length-of-man-with-arm-extended-about-to-release-javelin-111565067.jpg |
| **Pie de imagen** | El tiempo, la distancia y la altura del lanzamiento de jabalina pueden ser modelados por ecuaciones cuadráticas. |

Las ecuaciones cuadráticas pueden categorizarse en dos grupos.

**Las ecuaciones cuadráticas completas**; son ecuaciones de la forma *ax2 + bx + c* = 0 donde lñas constantes son diferentes de 0.

Por ejemplo, la ecuación3*x2 –* 3*x =* 4se puede expresar como3*x2 –* 3*x* – 4 *= 0* con *a =* 3*, b =* –3 *y c =* 4;por lo tanto, es una ecuación cuadrática completa.

**Las ecuaciones cuadráticas incompletas**; como su nombre lo indica, son aquellas ecuaciones en las cuales algunos de los valores *b* y *c* son cero o ambos lo son. Es decir, *b* = 0, o *c* = 0 o *b* = *c* = 0.

De este tipo de ecuaciones incompletas se desprenden tres clasificaciones.

* Las ecuaciones que se pueden expresar de la forma *ax2 = 0*, es decir, que *b* = 0 *y c* = 0; estas se denominan **ecuaciones incompletas puras**.

Por ejemplo las siguientes son ecuaciones de este tipo.

2*x*2 = 0

–4*x*2 = 0

* Las ecuaciones que se pueden expresar de la forma *ax2 + c =* 0, es decir, que *b* = 0y *c* ≠ 0.

Por ejemplo estas ecuaciones cumplen esta característica.

3*x*2 – 7 = 0

–12*x*2 + 2 = 0

* Las ecuaciones que se pueden expresar de la forma *ax*2 + *bx* = 0, donde *b* ≠ 0 *y c* = 0; esta clase de ecuaciones se denomina **ecuaciones incompletas binomiales**.

Son ejemplo:

3*x*2 – 2*x* = 0

6*x*2 + 7*x* = 0

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG20 |
| **Descripción** | Representación por áreas de una ecuación cuadrática. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | J:\planeta\guion 6\imagenes\15.jpg |
| **Pie de imagen** | Algunas ecuaciones cuadráticas pueden representarse por áreas rectangulares o cuadradas: *x2 +* 2*x =* 25*.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC150 |
| **Título** | Las ecuaciones cuadráticas |
| **Descripción** | Interactivo mediante el cual se introducen las ecuaciones cuadráticas a partir de situaciones problema |

[SECCIÓN 2**] 2.1 La solución de ecuaciones cuadráticas incompletas**

A continuación se presentan algunos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.

**2.1.1 Ecuaciones de la forma *ax2* = 0**

Para resolver este tipo de ecuaciones se realiza el siguiente procedimiento.

Se despeja *x* en la ecuación, así:

*ax2* = 0

*x*2 = 0, se divide la igualdad entre *a*.

x = 0, se extrae la raíz cuadrada.

De esta manera, todas las ecuaciones de la forma *ax2* = 0tienen como única solución a *x = 0*.

Ejemplo:

La ecuación5*x2*= 0 tiene como solución *x* = 0, que se obtiene al despejar el valor de *x*.

Al comprobar la solución de la ecuación se obtiene que

5(0)2 = 0

5(0) = 0

**2.1.2 Ecuaciones de la forma *ax2 + c* = 0**

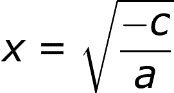
Para resolver las ecuaciones cuadráticas que tiene esta forma se sigue este procedimiento.

Se despeja x en la ecuación:

*ax2 + c* = 0

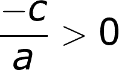
*ax*2 = –c

*x*2 = –c/a

 Colocar después del signo = el signo ±

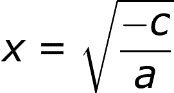
MA\_09\_06\_formula8

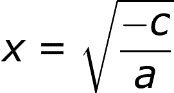
Por lo tanto, la ecuación de la ecuación *ax*2 + *c* = 0, tiene solución en el conjunto de los números reales, si y solo si



MA\_09\_06\_formula9

Además es necesario considerar dos soluciones:

 en x colocar x1, después del signo = colocar el signo +

 x colocar x2, después del signo = colocar el signo –

Ejemplos:

* Resolvamos la ecuación3*x*2 – 27 = 0.

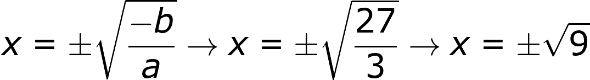
Primero se comprueba que la ecuación tenga solución reemplazando *a* = 3y *c =* –27 en la expresión –*c/a*.

-c/a = -(-27)/3 = 9 Digitar como fracciones

MA\_09\_06\_formula10

Como el radicando es mayor que cero, entonces la ecuación sí tiene solución en los números reales.

Ahora, mediante la fórmula se busca su solución.



Digitar como fórmulas independientes y eliminar las flechas.

MA\_09\_06\_formula11, MA\_09\_06\_formula12, MA\_09\_06\_formula13

De esta forma, las soluciones de la ecuación son *x*1 = 3 y *x*2 = –3.

Para comprobar si los resultados obtenidos son solución, se reemplazan los valores encontrados de *x* en la ecuación, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Cuando *x*1= 3:** | **Cuando *x*2 = –3*:*** |
| 3*x2* – 27 = 0  3(3)2 – 27 = 0  3(9) – 27 = 0  27 – 27 = 0 | 3*x2* – 27 = 0  3(–3)2 – 27 =0  3(9) – 27 = 0  27 – 27 = 0 |

* Resolver *2x2* + 8 = 0. Se comprueba que la ecuación tenga solución reemplazando *a* = 2 y *c* = 8.

–c/a =–8/4 = –4 Digitar como fracciones

MA\_09\_06\_formula14

Esto significa que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | En el caso de    la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales; las soluciones son números complejos debido a que la raíz cuadrada de números negativos no existe en el conjunto de los números reales. |

**2.1.3 Ecuaciones de la forma *ax2 + bx* = 0**

Para solucionar este tipo de ecuaciones se factoriza la variable *x, así*:

*ax2 + bx* = 0

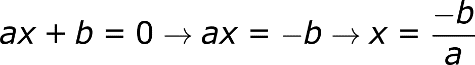
*x*(*ax + b*)= 0

En este caso se cumple que, *x* = 0 o (*ax* + *b*) = 0

Al resolver la ecuación se obtiene: *x* = -*b*/*a*

Por lo tanto, para la ecuación *ax2 + bx* = 0se obtienen las soluciones:

*x* = 0

 Dejar solo la última parte de la expresión x = -b/a

MA\_09\_06\_formula15

Ejemplo:

* Resolver la ecuación4*x2* *+* 7*x* = 0*.*

Primero se factoriza *x*: *x*(4*x +* 7)= 0

Luego se iguala cada factor a cero*: x =* 0 o4*x +* 7= 0 y despeja *x:*

4x = –7

*x* = –7/4 Digitar como fracción

MA\_09\_06\_formula16

Las soluciones de la ecuación son:

 La letra *x* se acompaña del subíndice 1 y 2 respectivamente.

MA\_09\_06\_formula17

Recuerda

Cuando el producto de dos números es cero, por lo menos uno de los dos factores es cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC160 |
| **Título** | Identifica ecuaciones cuadráticas |
| **Descripción** | Actividad que permite identificar ecuaciones cuadráticas a partir de la expresión algebraica. |

[SECCIÓN 2**] 2.2 La solución de una ecuación cuadrática completa**

Las **ecuaciones cuadráticas completas** tienen la forma *ax2 + bx + c* = 0, donde *a*, *b* y *c* son números reales y *b* ≠ 0 *y c* ≠ 0*.* Para resolver esta clase de ecuaciones existen diferentes técnicas: la factorización, completando el cuadrado perfecto y la fórmula general.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG21 |
| **Descripción** | Lanzamiento de un balón de baloncesto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/160669/160669,1324205712,1/stock-photo-basketball-player-throwing-a-ball-91078424.jpg>  http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/160669/160669,1324205712,1/stock-photo-basketball-player-throwing-a-ball-91078424.jpg |
| **Pie de imagen** | El lanzamiento de un balón de baloncesto puede ser modelado por una ecuación cuadrática. |

**2.2.1 Solución por factorización**

Un gran número de **ecuaciones cuadráticas completas** se puede resolver mediante la factorización, siempre y cuando después de expresar la ecuación como *ax2 + bx + c = 0*, la expresión *ax2 + bx + c*  se pueda escribir como el producto de dos o más expresiones algebraicas.

**Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización**

El siguiente es el procedimiento para resolver ecuaciones aplicando la factorización.

* Se expresa la ecuación en su forma general, *ax2 + bx + c =* 0.
* Se factoriza el trinomio.
* Se resuelve cada una de las ecuaciones obtenidas para encontrar la solución de la ecuación.

Ejemplos:

* Resolver la ecuación 4*x2 +* 12*x = –*9

Se expresa en su forma general: 4*x*2 + 12*x* + 9 = 0

Se factoriza el trinomio. En este caso es un trinomio cuadrado perfecto.

4*x2 +* 12*x +* 9 *= 0*

(*2*x + *3*)2 = 0

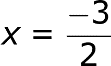
(2*x* + 3)(2*x* + 3) = 0

Se iguala cada factor a cero y se obtiene la ecuación *2x +* 3 = 0*.*

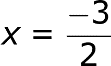
Se resuelve la ecuación obtenida.

2x + 3 = 0

2x = *–*3

MA\_09\_06\_formula18

Por lo tanto, la solución de la ecuación 4x2 + 12x = *–*9 es:

MA\_09\_06\_formula19

* Resolver la ecuación *x2 +* 9*x +* 14= 0

En este caso, la ecuación ya está en su forma general: *x2 +* 9*x* + 14 = 0*.*

Se factoriza el trinomio que en este caso es de la forma *x2 + bx* + c = 0.

*x*2 + 9*x* + 14 = 0

(*x* + 7)(*x* + 2) = 0

Ahora se buscan los valores de *x* que hacen que el producto sea igual a cero.

(*x* + 7)(*x* + 2) = 0

*x* + 7 = 0, entonces *x* = *–*7, y

*x* + 2 = 0 entonces *x* = *–*2

Esta ecuación tiene dos soluciones: *x* = *–*7 y *x* = *–*2. Compruébalas reemplazando sus valores en la ecuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC180 |
| **Título** | Resuelve ecuaciones cuadráticas con el método de factorización |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la solución de una ecuación cuadrática por medio de la factorización. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC190 |
| **Título** | Halla la solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la solución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado |

[SECCIÓN 2**] 2.2.2 La fórmula general**

Cuando una ecuación cuadrática no se puede resolver mediante la factorización, se utiliza la fórmula general. Esta fórmula general permite reconocer si una ecuación cuadrática tiene solución o no en el conjunto de los números reales y la determina sin importar si la ecuación es completa o incompleta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas** |
| **Contenido** | Para resolver una ecuación de la forma *ax*2 +*bx* + *c* = 0*,* se aplica la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.    MA\_09\_06\_formula20 |

Observemos en los siguientes ejemplos como se aplica la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

* Resolver la ecuación 3*x2 +* 2*x* = 4.

1. Se expresa de la forma *ax*2 + *bx* + *c*.

3*x*2 + 2*x* – 4 = 0, donde *a =* 3, *b* = 2 y *c =* –4

1. Se reemplazan por los valores *a, b* y *c* en la fórmula.

MA\_09\_06\_formula21

MA\_09\_06\_formula22

MA\_09\_06\_formula23

Las soluciones de la ecuación 3*x2 +* 2*x* = 4 son:

MA\_09\_06\_formula24

MA\_09\_06\_formula25

La siguiente situación es una aplicación de la fórmula cuadrática.

* Se tiene una caja para regalo con un volumen de 36 dam3, como la que se muestra en la imagen.

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la imagen?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG22 |
| **Descripción** | Una caja |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Averigua las dimensiones de la caja se sabe que tiene un volumen de 36 dm3. |

Para determinar las dimensiones de la caja se escribe la ecuación que modela la situación:

3*x*(*x* + 4) = 36

Su expresión equivalente de la forma *ax*2 + *bx* + *c* es:

3*x*2 + 12*x* – 36 = 0

Se identifican los valores de a, b y c y se aplica la fórmula general.

*a* = 3; *b* = 12 y *c* =36

Ahora se reemplazan en la fórmula.

MA\_09\_06\_formula26

MA\_09\_06\_formula27

=

MA\_09\_06\_formula28

De esta expresión se obtienen dos valores:

MA\_09\_06\_formula29

MA\_09\_06\_formula30

Luego la caja mide 2 dm de ancho, 6 dm de alto y 6 dm de largo.

La expresión que está dentro del radical en la fórmula se conoce como el **discriminante** de la ecuación cuadrática; este valor permite determinar si la ecuación tiene soluciones en el conjunto de los números reales o no, y si las tiene cuántas son.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El discriminante de una ecuación cuadrática** |
| **Contenido** | El discriminante de cualquier ecuación cuadrática *ax2 + bx + c* = 0 se define como *D = b2 –* 4*ac*.   * Si *D* > 0,la ecuación cuadrática tiene dos soluciones distintas en el conjunto de los números reales. * Si *D* = 0, la ecuación cuadrática tiene una única solución en los números reales. * Si *D* < 0, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales. |

Por ejemplo el discriminante de la ecuación 3*x2 +* 2*x* – 4 = 0 es:

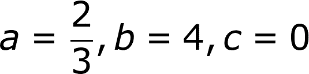
*D* = 22 – 4(3)( –4) = 4 + 48 = 52

Como 52 > 0, entonces, la ecuación tiene dos soluciones diferentes en el conjunto de los números reales.

* Resolver la ecuación que se indica en la siguiente expresión.

 MA\_09\_06\_formula31

1. La ecuación se encuentra en su forma estándar. Entonces se identifican los valores de a, b y c.



MA\_09\_06\_formula32

El discriminante de esta ecuación es:

MA\_09\_06\_formula33

Como el discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones diferentes en los números reales.

2. Para hallar los valores se utiliza la fórmula general.

MA\_09\_06\_formula34

MA\_09\_06\_formula35

MA\_09\_06\_formula36

MA\_09\_06\_formula37

* Resolver la ecuación 10*x*2 + 3*x* = –2

1. Se expresa la ecuación cuadrática en su forma estándar.

10*x*2 + 3*x* = –2 = 10*x*2 + 3*x* + 2 = 0, donde *a* = 10, *b* = 3 y *c* = 2.

1. Se calcula el discriminante de la ecuación.

*D =* 32 – 4(10)(2) = 9 – 80 = –71 y –71 < 0.

Como el discriminante es menor que cero, esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Como se puede observar, la **fórmula cuadrática** puede utilizarse para resolver cualquier ecuación cuadrática. Además, el discriminante permite saber si la ecuación tiene solución en el conjunto de los números reales, y si tiene, cuántas son.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC200 |
| **Título** | Resuelve ecuaciones cuadráticas con la fórmula cuadrática |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la solución de una ecuación cuadrática con la fórmula cuadrática. |

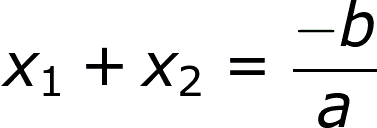
|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC210 |
| **Título** | ¿Cuántos cortes tiene la función cuadrática con el eje X? |
| **Descripción** | Ejercicios para calcular el discriminante y decidir si una función interseca el eje X. |

Las ecuaciones de la forma ax*2 + bx + c* = 0 tienen máximo dos soluciones o dos raíces que se pueden definir por **la fórmula cuadrática** como:

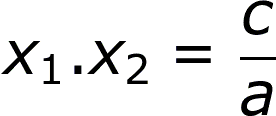
MA\_09\_06\_formula38

**Suma y producto de las soluciones de una ecuación cuadrática**

Si *x*1 y *x*2 son las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática se cumple que**:**



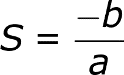
MA\_09\_06\_formula39



MA\_09\_06\_formula40

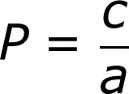
Estas dos propiedades permiten determinar la ecuación cuadrática a partir de la suma y del producto de sus dos soluciones de la siguiente manera.

Sea *S* la suma de las raíces y *P* su producto, es decir, que

 MA\_09\_06\_formula41

Se despeja *b* y se obtiene que  *b = –a · S*

Asimismo,

**  MA\_09\_06\_formula42

Al despejar *c* se obtiene la siguiente ecuación *c = a · P*

Se reemplazan *a, b* y *c* en la ecuación *ax*2 + *bx* + *c* = 0 y se obtiene: *ax2 - aSx + aP =* 0

Se divide por *a*, resultando:

*x2 - Sx + P = 0*

Analicemos el siguiente ejemplo:

* Determinar la ecuación de segundo grado cuya suma de sus raíces es 6 y su producto es 8.

Se reemplaza a *S = 6 y P = 8* en la ecuación *x2 - Sx + P = 0* y se obtiene *x2 – 6x + 8 = 0.*

Para comprobar si esta ecuación tiene como solución dos números reales cuya suma es 6 y cuyo producto es 8, se soluciona la ecuación *x2 – 6x + 8 = 0*. Para ello, se utiliza la fórmula cuadrática donde *a =* 1*, b = –*6 *y c =* 8*.*

MA\_09\_06\_formula43

MA\_09\_06\_formula44

MA\_09\_06\_formula45

La suma de las dos soluciones es: *x*1 *+ x*2= 4 + 2 = 6 y el producto es *x*1*·x*2= 4 · 2 = 8, que son los valores que cumplen la condición inicial.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC230 |
| **Título** | Practica las propiedades de una ecuación cuadrática |
| **Descripción** | Actividad que permite aplicar las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática para hallar la ecuación. |

[SECCIÓN 2] **2.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC240 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las ecuaciones cuadráticas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las ecuaciones cuadráticas |

[SECCIÓN 1**] 3 Las ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas**

Existen dos clases de ecuaciones, **con radicales** y **bicuadráticas**, que a simple vista no se relacionan directamente con una ecuación cuadrática de la forma ax2 *+ bx + c* = 0; pero si se les realizan algunas transformaciones algebraicas se pueden convertir en ecuaciones cuadráticas.

Además, existen otras clases de ecuaciones cuadráticas en las cuales no se busca un resultado numérico sino que su resultado algebraico en el que intervengan letras. Estas ecuaciones se denominan **cuadráticas** **literales**.

El estudio de esta clase de ecuaciones se mostrará en esta sección de una manera amplia y clara.

[SECCIÓN 2**] 3.1 Las ecuaciones con radicales**

Las **ecuaciones con radicales** son aquellas en las cuales la incógnita aparece en el radicando de alguna raíz; particularmente, las que se relacionan con las ecuaciones cuadráticas son aquellas en las cuales la variable aparece en los radicandos de las raíces cuadradas. Algunos ejemplos de ellas son:



MA\_09\_06\_formula46 hasta MA\_09\_06\_formula48

Un método para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente.

Paso 1: se despeja un radical, no importa si en la otra parte de la igualdad queden más radicales.

Paso 2: se eleva al cuadrado cada lado de la igualdad, y se desarrolla.

Paso 3: se verifica que se hayan eliminado todos los radicales de la ecuación; si no es así, se repiten los pasos 1 y 2 hasta cuando no quede ningún radical en la ecuación y se pueda escribir de la forma *ax2 + bx + c* = 0*.*

Paso 4: se resuelve la ecuación cuadrática.

Paso 5: se verifican las respuestas obtenidas. Este paso es muy importante, pues como se ha elevado al cuadrado, cabe la posibilidad de que aparezcan resultados que no son solución de la ecuación original.

Ejemplos:

* Resolver la ecuación



MA\_09\_06\_formula49

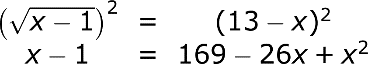
Paso 1: se despaja el radical.

 Eliminar la fecha y dejar las dos ecuaciones separadas

MA\_09\_06\_formula50

MA\_09\_06\_formula51

Paso 2: se elevan al cuadrado las dos expresiones y se desarrollan.

 Dejar las dos ecuaciones separadas

MA\_09\_06\_formula52

MA\_09\_06\_formula53

Paso 3: Se expresa de la forma *ax*2 + *bx* + *c*.

MA\_09\_06\_formula54

MA\_09\_06\_formula55

Paso 4: se soluciona la ecuación cuadrática obtenida, dado que *a* = 1, *b* = –27 y *c* = 170.

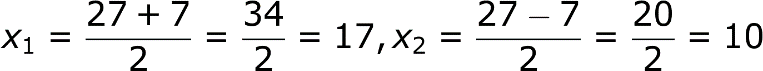
MA\_09\_06\_formula56

MA\_09\_06\_formula57

MA\_09\_06\_formula58

MA\_09\_06\_formula59

Las dos posibles respuestas son:

 Digitar fórmulas por separado

MA\_09\_06\_formula60

MA\_09\_06\_formula61

Paso 5: se reemplazan los dos valores encontrados en la ecuación original.

Cuando *x* = 17:



MA\_09\_06\_formula62

No es solución porque no satisface la ecuación.

Cuando *x =* 10:



MA\_09\_06\_formula63

Por tanto, tiene única solución cuando *x =* 10*.*

* Resolver la ecuación

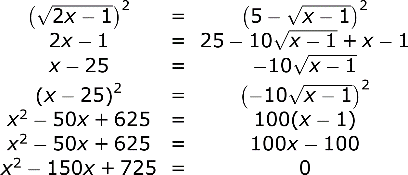


MA\_09\_06\_formula64

 Digitar fórmulas separadas

MA\_09\_06\_formula65

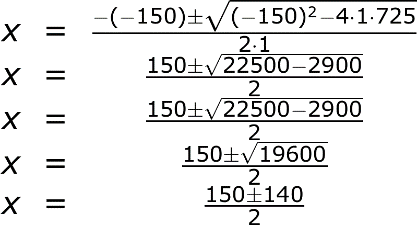
MA\_09\_06\_formula66

**Digitar por separado**

MA\_09\_06\_formula67 hasta MA\_09\_06\_formula73

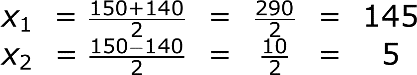
Paso 4:

Como *a* =1*, b* = 150 *y c* = 725, se resuelve la ecuación aplicando la fórmula cuadrática.

 **Digitar la primera, la cuarta y la quinta**

MA\_09\_06\_formula74 hasta MA\_09\_06\_formula76

Por lo tanto, las soluciones son



MA\_09\_06\_formula77 y MA\_09\_06\_formula78

Paso 5: se reemplazan los dos valores encontrados en la ecuación original. En este caso solo *x* = 5 es la única solución de esta ecuación, ya que satisface la igualdad. Verifícalo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC260 |
| **Título** | Simplifica ecuaciones con radicales |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la reducción de ecuaciones con radicales. |

[SECCIÓN 2**] 3.2 Las ecuaciones bicuadráticas**

Las ecuaciones bicuadráticas son todas las ecuaciones de la forma *ax*4 *+ bx*2 *+ c* = 0 con *a, b, c* ∈ ℝ y con *a ≠ 0*. Ejemplo de estas ecuaciones son:

*x*4 – 17*x*2 + 16 = 0 *x*4 – 13*x*2 + 36 = 0 4*x*4 + 4 = 0

Un método para resolver este tipo de ecuaciones es mediante una variación de la fórmula cuadrática en la cual se reemplace a *x* por *u2*; la nueva fórmula para resolver este tipo de ecuaciones bicuadráticas es:

**Cambiar x2 por u2**

MA\_09\_06\_formula79

Debe resaltarse que este tipo de ecuaciones puede tener como máximo cuatro soluciones. Esto se debe a que ya no se busca las soluciones a *x* sino a *x2.* Observa los siguientes ejemplos de cómo resolver ecuaciones bicuadráticas utilizando la variación de la fórmula cuadrática.

* Resolver la ecuación bicuadrática *x*4  – 17*x*2 + 16 = 0

En esta ecuación, *a* = 1, *b* = –17 y *c* = 16 y se remplaza la variable *x*2 por *u*. Estos valores se reemplazan y se desarrolla la fórmula.

Si *u* = *x*2 entonces *x*4  – 17*x*2 + 16 = 0 = (*u*)2 – 17*u*2 + 16

MA\_09\_06\_formula80

MA\_09\_06\_formula81

De ahí se desprenden dos soluciones: *u* = 16 y u = 1

Como *u* = *x*2, entonces

Las soluciones se escriben de la siguiente manera:

* *x*2 = 16 de donde se obtiene que *x* = 4 y *x* = –4
* *x*2 = 1 de donde se obtiene que *x* = 1 y *x* = –1

Esto significa que las soluciones de esta ecuación son *x*1 = 4, *x*2 = -4, *x*3 = 1 y *x*4 = -1

Ahora se debe comprobar cada una de las soluciones en la ecuación original.

*x*4 – 17*x*2 + 16 = 0

* Cuando *x*1= 4*:*

44 – 17(4)2 + 16 = 0

256 – 17(16) + 16 = 0 →256 – 272 + 16 = 0

* Cuando *x*2= –4*:*

(-4)4 – 17(-4)2 + 16 = 0

256 – 17(16) + 16 = 0

256 – 272 + 16 = 0

* Cuando *x*3= 1*:*

14 – 17(1)2 + 16

1 – 17 + 16 = 0

–16 + 16 = 0

* Cuando *x*4= -1*:*

(–1)4 – 17(–1)2 + 16

1 – 17 + 16 = –16 + 16 = 0

Como se comprobó que *x*1 = 4*, x*2= –4*, x3* = 1 *y x*4 *=* –1, son las soluciones de la ecuación bicuadrática *x*4*–* 17*x*2 *+* 16= 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC270 |
| **Título** | Simplifica ecuaciones bicuadráticas |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la reducción de ecuaciones bicuadráticas. |

[SECCIÓN 2**] 3.3 Las ecuaciones cuadráticas con expresiones literales**

Las **ecuaciones cuadráticas con expresiones literales** son aquellas en las que los coeficientes de *x2, x* y el término independiente son expresiones algebraicas que representan cantidades conocidas. Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

*x2*–7*ax +* 12*a2 =* 0

*b2x2* *–* 3*a2 =* –2*abx*

4*x(x – b) + b2 =* 4*c2*

Recuerda que la incógnita de estas ecuaciones se representa por la letra *x*; las demás letras en este tipo de ecuaciones representan números reales. Una forma para resolver estas ecuaciones es la siguiente.

Paso 1: escribir la ecuación en su forma general, *ax2 + bx + c = 0*, y determinar los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación.

Paso 2: resolver la ecuación mediante la fórmula general.

Paso 3: comprobar las soluciones encontradas en la ecuación inicial.

Ejemplo:

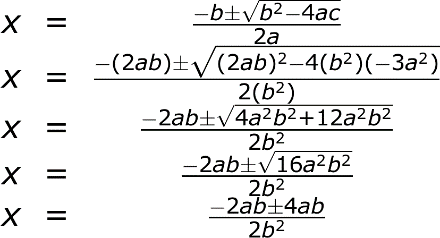
* Resolver la ecuación *b2x2* *–* 3*a2 =* –2*abx*

Paso 1:

*b2x2* *– 3a2 =* –*2abx* es equivalente a *b2x2 +* 2*abx –* 3*a2 =* 0

Donde, *a = b2, b =*2 *ab y c =* –3*a2*

Paso 2: se reemplazan en la fórmula general los valores de *a, b, c*.

**Digitar a partir de la segunda expresión**

MA\_09\_06\_formula82 hasta MA\_09\_06\_formula85

De donde se desprenden dos soluciones:



MA\_09\_06\_formula86



MA\_09\_06\_formula87

Paso 3: Comprueba las soluciones en la ecuación original: *b2x2* – *3a2 =* –*2abx*.

En este caso, ambas soluciones satisfacen la ecuación *b2x2 – 3a2 = -2abx.* Verifícalo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC280 |
| **Título** | Resuelve ecuaciones con expresiones literales |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la reducción de ecuaciones con expresiones literales. |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC290 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas |
| **Descripción** | Actividad sobre Las ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas. |

[SECCIÓN 1**] 4 Los problemas de aplicación de ecuaciones de segundo grado**

Existen algunas situaciones y problemas en las Matemáticas, la vida cotidiana y las Ciencias, que pueden ser modelados a través de alguna ecuación cuadrática.

Para abordar los problemas que se pueden modelar con ecuaciones cuadráticas es importante tener en cuenta las siguientes indicaciones.

1. **Comprender el problema**: para ello, es necesario leer detenidamente e identificar las incógnitas y los términos independientes que harán parte de la ecuación o de las ecuaciones.
2. **Plantear o modelar el problema**: plantear la ecuación que modela el problema.
3. **Resolver la ecuación**: solucionar la ecuación por medio del método que más se facilite.
4. **Comprobar la solución**: reemplazar los resultados obtenidos en la o las ecuaciones, y verificar si son solución; analizar si los resultados obtenidos tienen sentido en el contexto en que se planteó el problema.

Ejemplos:

* **Problema 1:** La base de un rectángulo mide 4 cm más que su altura; si se disminuye la altura del rectángulo en 5 cm, el área del nuevo rectángulo será 36 cm2.¿Cuánto miden los dos lados del rectángulo original?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_IMG23 |
| **Descripción** | Rectángulo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | **J:\planeta\guion 6\imagenes\16.jpg** |
| **Pie de imagen** | Representación del rectángulo (base y altura). |

1. Comprender el problema: se establece que la base del rectángulo es *x* + 4*,* la altura del nuevo rectángulo sería *x* – 5*,* y su área es 36 cm2.
2. Plantear o modelar el problema: la ecuación que modela el problema es:

(*x* + 4)(*x* – 5) = 36

1. Resolver la ecuación:se debe resolver (*x* + 4)(*x* – 5) = 36

*x*2 – 5*x* + 4*x* – 20 = 36

*x*2 – *x* – 20 = 36

*x*2 – *x* – 56 = 0

Se resuelve la ecuación cuadrática por cualquiera de los métodos trabajados, en este caso, por factorización.

*x*2 *– x –* 56 *=* 0

(*x* – 8)(*x* + 7) *= 56*

Por lo tanto, se presentan las siguientes opciones: *x* – 8 = 0y  *x* + 7 = 0. Al despejar cada una de las ecuaciones se obtienen las soluciones *x* = 8y *x* = –7.

1. Comprobar la solución: al reemplazar las soluciones en la ecuación inicial, se obtiene que

Para *x* = 8

(*x* + 4)(*x* – 5) = 36

(8 + 4)(8 – 5) = 36

12(3) = 36

Para x = –7

(*x* + 4)(*x* – 5) = 36

(–7 + 4)( –7 – 5) = 36

(–3)( –12) = 36

Aunque las dos respuestas satisfacen la ecuación original, en una situación real no puede existir un rectángulo cuya altura sea –7 cm. Esto quiere decir que la respuesta al problema es que la altura es 8 cm y por tanto, la base es 12 cm.

**Problema 2**: Los costos para preparar un terreno para cultivo de cebolla de forma cuadrada son los siguientes: poner una cerca alrededor del terreno cuesta $3000 por cada decámetro; preparar cada metro cuadrado del terreno para el cultivo cuesta $10 000.

Si para preparar y cercar el terreno se gastan en total $1 240 000, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

1. Comprender el problema: en algunos casos, elaborar dibujos permite interpretar con mayor claridad el problema.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG24 |
| **Descripción** | Terreno. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El número de metros para la cerca se representa con la expresión 4*x* y el área del terreno como *x*2. |

Para determinar el costo del cercado es necesario multiplicar el perímetro del terreno por el costo de cada metro, así:

(4*x*)(3000)= 12 000*x*

De la misma manera, la preparación de cada metro cuadrado se puede interpretar como 10 000*x2*, ya que esta expresión es el producto del área del terreno por el precio que cuesta preparar cada metro cuadrado del terreno:

(10 000)(*x*2) = 10 000*x*2

El costo total de hacer estas dos labores es de $1 240 400.

1. Plantear la ecuación que modela este problema es:

12 000*x* + 10 000*x*2 = 1240 000

1. Resolver la ecuación:

12 000*x*2 + 10 000*x* – 1 240 000 = 0 es equivalente a 12*x*2 + 10*x*2 – 1240, si se divide entre 1000.

De esa ecuación se obtiene que *a* = 12*, b =* 32 *y c =* –1240*.* Si se aplica la fórmula general se obtiene:

MA\_09\_06\_formula88

MA\_09\_06\_formula89

De donde se desprenden dos posibles respuestas:

MA\_09\_06\_formula90

MA\_09\_06\_formula91

1. Comprobar la solución: las dos respuestas satisfacen la ecuación original, pero en el contexto del problema la medida de los lados del terreno no puede ser negativa; por tal razón, el terreno es un cuadrado de lado 9 decámetros.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC300 |
| **Título** | Soluciona situaciones problema con la aplicación de sistemas de ecuaciones de segundo grado |
| **Descripción** | Actividad que propone la solución de problemas con la aplicación de sistema de ecuaciones de segundo grado. |

[SECCIÓN 2**] 4.3 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC310 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Problemas de aplicación de las ecuaciones cuadráticas |
| **Descripción** | Actividad que propone resolver situaciones con la aplicación de ecuaciones cuadráticas. |

[SECCIÓN 1] **5 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC320 |
| **Título** | Competencias: la función cuadrática en Geogebra |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la definición de función cuadrática, sus características y gráficas en construcciones de Geogebra. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC350 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual del tema La función cuadrática |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC360 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Actividad que permite evaluar los conocimientos del estudiante sobre el tema La función cuadrática. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_09\_06\_CO\_REC370 | |
| **Web 01** | Como graficar funciones cuadráticas con Geogebra | [*https://www.geogebra.org/material/show/id/130348*](https://www.geogebra.org/material/show/id/130348) |
| **Web 02** | *La función cuadrática* | [*http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/funciones/teoriafuncioncuadratica/teoriafunciones.htm*](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/funciones/teoriafuncioncuadratica/teoriafunciones.htm) |

