|  |  |
| --- | --- |
| **Título del guion** | Las sucesiones y las progresiones |
| **Código de guion** | MA\_G09\_08\_CO |
| **Descripción** | Una sucesión es una secuencia ordenada de números reales que sirven para dar solución a numerosos problemas. En esta sección se estudian las propiedades de las sucesiones, varias estrategias para determinar el término siguiente de una sucesión, así como ciertas clases de sucesiones y algunas de sus aplicaciones. |

[SECCIÓN 1] **1 Las sucesiones**

Una **sucesión** es un conjunto de elementos denominados **términos**. Por lo general, estos términos son números reales que están organizados uno a continuación del otro cumpliendo cierto orden; estas sucesiones se pueden categorizar en dos grupos: las sucesiones finitas y las sucesiones infinitas. El número de términos que tiene una sucesión se denomina longitud de la sucesión.

Algunos ejemplos de sucesiones son:

1. El conjunto de los números pares: {2, 4, 6, 8, 10…}
2. La sucesión de Fibonacci: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…}
3. La sucesión de niños registrados en una registraduría en un día, teniendo en cuenta su orden de llegada: {Pedro, Sebastián, Milena, Luisa, Miriam, Pedro, Samary, Jhon, Milena, Jairo}

El primer y segundo ejemplos son sucesiones infinitas, mientras que el tercero es una sucesión finita de longitud 10.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Sucesiones** |
| **Contenido** | La **sucesión {*an*}**,donde *a ∈ P*,se define como una sucesión de los números naturales en el conjunto P,  *f:* ℕ→ *P*  tal que el elemento *ak*, con *k* ∈ℕ,está dado por *f*(*k*).  Una sucesión se denota como {*an*}*,* donde *a* representa el término y *n* simboliza la posición que ocupa en la sucesión. |

Por ejemplo, el término *a*3 en la sucesión {2, 4, 6, 8, 10…} es 6.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC10 |
| **Título** | Introducción a las sucesiones y progresiones |
| **Descripción** | Interactivo que introduce los conceptos de sucesión y progresiones aritméticas y geométricas |

Algunas sucesiones se pueden establecer por medio de una expresión algebraica. En la siguiente sección se trabaja con este tipo de sucesiones.

[SECCIÓN 2] **1.1 El término general de una sucesión**

Cuando los términos de una sucesión son números y siguen un patrón de formación, es posible establecer una expresión algebraica (fórmula) que permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupe; esta expresión recibe el nombre de **término general de la sucesión.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Construcción de números triangulares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/N%C3%BAmeros_triangulares.png  <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/N%C3%BAmeros_triangulares.png> |
| **Pie de imagen** | Los números triangulares y su término general. |

Observa los siguientes ejemplos:

1. En la sucesión: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14…}, el término general de esta sucesión es: *an* =2*n*

donde *n* es la posición del término en la sucesión; por ejemplo, para determinar el término de la posición 5, se remplaza 5 por *n*, así:

*a*5 = 2*n* = 2(5) = 10

Es decir que en la posición 5 de la sucesión *an* = 2*n* se encuentra el número 10.

1. En la sucesión: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19…}, el término general es

*bn* *=* 2*n* – 1.

En este sentido, el término de la posición 6 de la sucesión se puede encontrar remplazando a *n* por 6en la fórmula

*b*6 = 2(6) – 1 = 12 – 1 = 11

En este caso, la posición 6 de la sucesión {2*n* – 1} es 11.

Algunas sucesiones no tienen una regla matemática que permita encontrar sus términos en función a su posición; estas sucesiones no poseen término general.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Carrera de niños |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/940660/277085996/stock-photo-new-york-city-may-new-york-road-runners-sponsored-a-kids-run-in-central-park-to-mark-277085996.jpg  <http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/940660/277085996/stock-photo-new-york-city-may-new-york-road-runners-sponsored-a-kids-run-in-central-park-to-mark-277085996.jpg> |
| **Pie de imagen** | La sucesión que corresponde al número que portan los niños en su pecho cuyo orden está establecido por el orden de llegada a la meta, es una sucesión que no posee término general, ya que no se puede predecir el número del niño que llegará en la décima posición. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC20 |
| **Título** | Las sucesiones: término general y ley de recurrencia |
| **Descripción** | Interactivo que refuerza los conceptos básicos de las sucesiones a partir de ejemplos concretos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC30 |
| **Título** | Interpreta el término general de una sucesión |
| **Descripción** | Actividad para identificar los términos de una sucesión numérica |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las sucesiones recurrentes**

Existen algunas sucesiones en las cuales el término *n* se obtiene a partir de los anteriores; estas sucesiones se denominan recurrentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La regla de recurrencia** |
| **Contenido** | La **regla de recurrencia de una sucesión** es la expresión algebraica de la función que expresa el término *n* a partir de los términos anteriores. |

1. Encontrar los 5 primeros términos de la sucesión dada por la siguiente ley de recurrencia: *an* = *an* - 1 + 2, con *a*1 = 5.

Como ya se tiene el primer término de la sucesión, se aplica la ley de recurrencia para encontrar los demás:

*a*1 = 5

*a*2 = *a*2 – 1 + 2 = *a*1 + 2 = 5 + 2 = 7

*a*3 = *a*3 – 1 + 2 = *a*2 + 2 = 7 + 2 = 9

*a*4 = *a*4 – 1 + 2 = *a*3 + 2 = 9 + 2 = 11

*a*5 = *a*5 – 1 + 2 = *a*4 + 2 = 11 + 2 = 13

Los 5 primeros términos de esta sucesión son {5, 7, 9, 11, 13}.

1. Encontrar el término *a*6 de la sucesión, dada por la siguiente ley de recurrencia: *an* = *an* – 2 + *an* – 1, con *a*1 = 1 y *a*2 = 1.

Ya que se tienen el primero y segundo términos de la sucesión, se aplica la ley de recurrencia para hallar los demás:

*a*1 = 1

*a*2 = 1

*a*3 = *a*3 – 2 + a3 – 1 = *a*1 + *a*2 = 1 + 1 = 2

*a*4 = a4 – 2 + *a*4 – 1 = *a*2 + *a*3 = 1 + 2 = 3

a5 = *a*5 – 2 + *a*5 – 1 = *a*3 + *a*4 = 2 + 3 = 5

a6 = *a*6 – 2 + *a*6 – 1 = *a*4 + *a*5 = 3 + 5 = 8

Por lo tanto, el sexto término de la sucesión es 8; esta sucesión recibe el nombre de **sucesión de Fibonacci**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | La espiral de Fibonacci |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12733/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_05_img5_small.jpg  Aulaplaneta.com/3 eso/matemáticas académicas/ sucesiones y progresiones/ cuaderno de estudio/ sucesiones recurrentes |
| **Pie de imagen** | La sucesión de Fibonacci es un ejemplo de las sucesiones recurrentes, ya que se necesitan los dos términos anteriores para encontrar el término *n*. |

[SECCIÓN 2] **1.3 Producto de una sucesión por un número**

Sea *p* un número real y{*an*} una sucesión de números reales; el producto se denota como *p* **·** {*an*} *=* {*p* **·** *an*}*,* es decir:

{a*n*} *=* {*a*1*, a*2*, a*3, *a*4, *a*5, *a*6*…*}

*p* **·**{*an*} *=* {*p* **·** *a*1, *p* **·** *a*2, *p* **·** *a*3, *p* **·** *a*4, *p* **·** *a*5, *p* **·** *a*6*…*}

Por ejemplo:

Multiplicar la sucesión {*an*} *= n* + 3 por -2 genera una nueva sucesión que se puede definir como: -2 **·** {*n +* 3}=-2*n* – 6. A continuación se presentan los 10 primeros términos de las dos sucesiones:

{*an*}*=* {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

De donde se obtiene la sucesión:

{-2*n* – 6} = {-8, -10, -12, -14, -16, -18, -20, -22, -24, -26, -28…}

Esta operación cumple las siguientes propiedades:

Sean *p* y *r* números reales, {*an*}y{*bn*} sucesiones de números reales:

**Propiedad 1:** 1 **·** {*an*} *=* {*a*n}

**Propiedad 2:** (*p* + *r*) **·** {*an*} *= p* **·** {*an*} *+ r* **·** {*an*}

**Propiedad 3:** *p* **·** [{*an*} + {*an*}] *= p* **·** {*an*} *+ p* **·** {*an*}

**Propiedad 4:** (*p* **·** *r*) **·** {*an*} *= p* **·** {*r* **·** *an*}

[SECCIÓN 2] **1.4 Adición de sucesiones**

La **adición de sucesiones** es una operación cerrada, es decir que si se adicionan dos sucesiones de números reales, el resultado será otra sucesión de números reales, por ejemplo:

Se tienen dos sucesiones definidas como {*an*} = 3*n* y {*bn*} = 2*n* – 1, y se determinan los 6 primeros términos de cada una de las sucesiones:

{*an*} *=* {3, 6, 9, 12, 15, 18…}

{*bn*} *=* {1, 3, 5, 7, 9, 11…}

Se adicionan las sucesiones componente a componente, para generar una nueva sucesión:

{*an*}= {3, 6, 9, 12, 15, 18…}

{*bn*} *=* {1, 3, 5, 7, 9, 11…}

{*an + bn*} *=* {4, 9, 14, 19, 24, 29…}

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Adición de sucesiones** |
| **Contenido** | Sean las sucesiones {*an*} y {*bn*}, donde  {*an*} = {*a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5, *a*6…, *an,*…} y  {*bn*} = {*b*1, *b*2, *b*3, *b*4, *b*5, *b*6,… *bn,*…}.  La adición de sucesiones {*an* + *bn*} se define como:  {*an* + *bn*} = {*a*1+ *b*1, *a*2+ *b*2, *a*3+ *b*3, *a*4+ *b*4, *a*5+ *b*5, *a*6+ *b*6 … *an* + *bn* …}  Si ambas sucesiones tienen término general, la sucesión {*an* + *bn*} se puede determinar adicionando los términos generales de cada sucesión. |

En el ejemplo anterior se tiene que {*an*} = 3*n* y {*bn*} = 2n – 1, por lo tanto,

{*an + bn*} = (3*n*)+ (2*n* – 1) = 5*n* – 1, es decir, la nueva sucesión está determinada por el término general *an + bn* = 5*n* – 1.

Las propiedades que cumple la adición de sucesiones son las siguientes:

**Cerradura:** para toda sucesión de números reales {*an*} y {*bn*}, la adición {*an*} + {*bn*} es una sucesión de números reales.

**Asociativa:** para toda sucesión de números reales {*an*}, {*bn*} y {*cn*}

({*an*} + {*bn*}) + {*cn*} = {*an*} + ({*bn*} + {*cn*})

**Conmutativa:** sean {*an*} y {*bn*} sucesiones de números reales, entonces se cumple que

{*an*} + {*bn*} = {*bn*} + {*an*}

**Elemento neutro:** sea {0} una sucesión de números reales que se define como {0} = {0, 0, 0, 0, 0…}

tal que

{*an*} + {0} = {0} + {*an*} = {*an*}

**Existencia del inverso aditivo:** para todo {*an*} existe {-*an*}, tal que

{*an*} + {-*an*} = {-*an*} + {*an*} = {0}

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC40 |
| **Título** | Aplica la adición de sucesiones y producto por un escalar |
| **Descripción** | Actividad para practicar la adición de sucesiones y el producto por un escalar |

[SECCIÓN 2] **1.4 Producto de sucesiones**

El **producto entre sucesiones** es una operación cerrada, ya que si se multiplican dos sucesiones el resultado es otra sucesión. La forma como se define el producto entre sucesiones es la siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Producto de sucesiones** |
| **Contenido** | Sean las sucesiones {*an*} y {*bn*}, donde  {*an*} ={*a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5, *a*6… *an*…} y  {*bn*} ={*b*1, *b*2, *b*3*, b*4, *b*5, *b*6… *bn*…}.  El producto de sucesiones {*an* **·** *bn*} se define como:  {*an* **·** *bn*} *=* {*a*1**·** *b*1, *a*2**·** *b*2, *a*3**·** *b*3, *a*4**·** *b*4, *a*5**·** *b*5, *a*6**·** *b*6, … *an* **·** *bn,* …}  Si ambas sucesiones tienen término general, la sucesión {*an* **·** *bn*} se puede determinar multiplicando los términos generales de cada sucesión. |

Por ejemplo:

Sean las sucesiones {*an*} *=* 2*n* – 1 y{*bn*} *=* 3*n* + 1, encontrar el término general que define la sucesión {*an* **·** *bn*} y los 10 primeros términos:

* {*an* **·** *bn*}*=* (2*n* – 1)(3*n* + 1) *=* 6*n*2 + 2*n* – 3*n* – 1 *=* 6*n*2 – *n* – 1.
* {*an* **·** *bn*} *=* {4, 21, 50, 91, 144, 209, 289, 400, 532, 682}

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC50 |
| **Título** | Practica el producto de sucesiones |
| **Descripción** | Actividad para practicar el producto de sucesiones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC60 |
| **Título** | Las propiedades de las operaciones entre sucesiones |
| **Descripción** | Interactivo que presenta las propiedades de la adición, producto y producto por un escalar en sucesiones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC70 |
| **Título** | Clasifica las progresiones aritméticas y progresiones geométricas |
| **Descripción** | Actividad para clasificar las progresiones en aritméticas y geométricas |

[SECCIÓN 2] **1.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC80 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las sucesiones |
| **Descripción** | Actividades sobre Las sucesiones |

[SECCIÓN 1] **2 Las progresiones aritméticas**

Las **progresiones aritméticas** son un tipo especial de sucesiones, en las cuales todos sus términos excepto el primero, se obtienen a partir de la adición del término anterior con una cantidad fija, que se denomina **diferencia,** que por lo general se representa con la letra ***d***. A continuación se presentarán algunos ejemplos de progresiones aritméticas:

{*an*}*=* {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19…}, *d* = 3

{*bn*}= {10, 15, 20, 25, 30, 35…}, *d* = 5

<<MA\_09\_08\_01.gif>>

{*dn*} = {1, -101, -203, -305, -407…}, *d* = -102

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Edificio construcción |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/2078930/234264481/stock-photo-apartment-building-on-a-sunny-summer-day-in-hellerup-a-suburb-of-copenhagen-denmark-234264481.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/2078930/234264481/stock-photo-apartment-building-on-a-sunny-summer-day-in-hellerup-a-suburb-of-copenhagen-denmark-234264481.jpg> |
| **Pie de imagen** | Las progresiones aritméticas se pueden ver en las construcciones, por ejemplo, la altura de muchos edificios está en progresión aritmética respecto al número de pisos que este tenga. |

Las progresiones aritméticas pueden ser crecientes o decrecientes; las sucesiones *an* y *bn* son crecientes porque su *d* > 0, mientras que *cn* y *dn* son decrecientes porque en estos casos *d* < 0*.*

[SECCIÓN 2] **2.1 El término general de una progresión aritmética**

El **término general de una progresión aritmética** es la expresión que permite determinar cualquiera de sus términos, conociendo alguno de los términos de la progresión con su posición en la sucesión, además, se debe conocer la diferencia (*d*) de la progresión.

Para encontrar la expresión que determina el término general de una progresión aritmética se partirá de lo que hasta el momento se conoce:

* si se sustraen dos términos consecutivos de la progresión el resultado será *d:*

*an - an -* 1*= d*

* se despeja el término *an*:

*an = d* *+ an -* 1

* se aplica la ley de recurrencia, es decir, para encontrar el término 2 de la sucesión es necesario utilizar el término 1 de la sucesión y así sucesivamente hasta *n*:

*a*2 *= a*1 + *d*

*a*3 = *a*2 + *d* = (*a*1 + *d) + d* = *a*1 + 2*d*

*a*4 = *a*3 + *d* = (*a*1 + 2*d) + d* = *a*1 + 3*d*

*a*5 = *a*4 + *d* = (*a*1 +3*d*) + *d = a*1 +4*d*

*.*

*.*

*.*

*an* = *an* - 1 + *d* = (*a*1 + (*n* – 2)*d*) + *d = a*1 + (*n* - 1)*d*

*an*= *a*1 + (*n* – 1)*d*

Ejemplo:

Calcular la fórmula del término general de la siguiente progresión y encontrar el término 30 de la sucesión:

{*an*} *=* {5, 9, 13, 17…}

* *a*1 = 5, *d* = 4 *→ an =* 5 +4(*n* – 1) *=* 5 + 4*n* – 4 = 4*n* + 1

La fórmula del término general es *an* = 5 + (*n* - 1)**·** 4 =4*n* + 1

* Al remplazar en la fórmula general *a*30= 4(30) + 1 = 120 + 1 = 121; entonces, el término 30 de la sucesión es 121.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC10 |
| **Título** | Las progresiones aritméticas: definición y término general |
| **Descripción** | Interactivo que muestra el procedimiento para deducir la fórmula del término general de una progresión aritmética |

[SECCIÓN 2] **2.2 Suma de *n* términos consecutivos de una progresión aritmética**

Existe un método muy sencillo que permite encontrar la suma de los *n* primeros términos consecutivos de una progresión aritmética.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Suma de *n* términos consecutivos de una progresión aritmética** |
| **Contenido** | La suma de los primeros *n* términos de una progresión aritmética es  <<MA\_09\_08\_02.gif>>  donde *Sn*es el resultado de la suma de los *n* primerostérminos de la progresión aritmética, *a*1 es el primer término de la progresión aritmética, *an* es el último término de la sucesión y *n* es la cantidad de elementos que se adicionan. |

Para deducir la fórmula general

Considere la suma de los *n* primeros elementos de una progresión aritmética; se intercambian de orden

<<MA\_09\_08\_15.gif>>

Se adicionan estas sucesiones y se obtiene:

<<MA\_09\_08\_44.gif>>

De esta suma se deduce que 2*Sn* = (*a*1 + *an*)*n*, por lo tanto:

<<MA\_09\_08\_02.gif>>

Por ejemplo, dada la sucesión de los números naturales {*an*} = {1, 2, 3, 4,…}, para determinar la suma de los 9 primeros números naturales, se aplica la fórmula

<<MA\_09\_08\_03.gif>>

Se comprueba la suma: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC100 |
| **Título** | Practica la suma de "n" términos de una progresión aritmética |
| **Descripción** | Actividad para trabajar el cálculo de la suma de los "n" primeros términos de una progresión aritmética |

SECCIÓN 2] **2.2 Interpolación de *k* términos diferenciales entre *a* y *b***

La palabra interpolar se puede interpretar como introducir entre otros dos; si esta idea se lleva a las progresiones aritméticas, **interpolación de *k* términos diferenciales entre *a* y *b*,** se puede interpretar comocolocar *k* términos entre dos dados, el término inicial *a* y el término final *b*, teniendo en cuenta que todos los términos deben estar en progresión aritmética.

Para lograr la interpolación de *k* términos entre *a* y *b* lo primero que se debe definir es el número de términos de la progresión aritmética que será *k* + 2, es decir los *k* términos, el término *a* y el término *b*. Lo segundo es hallar la diferencia de la progresión, es decir a *d*; para ello, se parte de la expresión que define el término general de una progresión aritmética, se despeja a *d* y se cambia a *n* por *n* + 2, siendo *n* la cantidad de los términos interpolados:

<<MA\_09\_08\_07gif>>

Luego, se remplaza a *n* por *n* + 2.

<<MA\_09\_08\_08gif>>

Con esta fórmula se encuentra a *d* y se construye la progresión aritmética agregando a cada término de la progresión, iniciando por *a*, la diferencia *d* hasta llegar a *b*.

Por ejemplo:

1. Construir una progresión aritmética entre 10 y 20 e interpolar 5 términos.

* Se remplaza en la fórmula para encontrar *d* identificando *an* = 22*, a*1 = 10 y *n* = 5:

<<MA\_09\_08\_09gif>>

* Puesto que *d* = 2, se construye la sucesión iniciando por *a*1 = 10:

{10, 12, 14, 16, 18, 20, 22}

1. Entre -18 y 12 se quieren interpolar 9 términos; calcular la progresión aritmética.

* Se determina *d* identificando *an* = 12*, a*1 = -18*, n* = 9:

<<MA\_09\_08\_10gif>>

* Construcción de la progresión sabiendo que *d* = 3y *a*1= -18:

{-18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12}

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC110 |
| **Título** | Trabaja con la interpolación de progresiones aritméticas |
| **Descripción** | Actividad para practicar el cálculo de "k" medios aritméticos entre dos términos de una progresión aritmética |

[SECCIÓN 2] **2.3 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC120 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las progresiones aritméticas |
| **Descripción** | Actividades sobre las progresiones aritméticas |

[SECCIÓN 1] **3 Las progresiones geométricas**

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la cual cada término se genera multiplicando al anterior por una cantidad fija llamada razón, que por lo general se simboliza con la letra *r*;la razón de una progresión geométrica se determina dividiendo un término *an* entre *an* - 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Monedas en progresión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12733/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_05_img9_small.jpg  Aulaplaneta.com/3eso/matemáticas/sucesiones y progresiones/progresión geometrica |
| **Pie de imagen** | Por ejemplo, la sucesión {1, 3, 9, 27, 81…} es una progresión geométrica donde *r* = 3. |

Otros ejemplos de progresiones geométricas son:

{*an*} = {2, 4, 8, 16, 64…}, *r* = 2

{*bn*} = {-2, -10, -50, -250, -1250…}, *r* = 5

<<MA\_09\_08\_11gif>>

Las progresiones geométricas pueden ser crecientes o decrecientes; la sucesión {*an*}es creciente, mientras que {*bn*} y {*cn*}son decrecientes.

[SECCIÓN 2] **3.1 El término general de una progresión geométrica**

El **término general de una progresión geométrica** es la expresión algebraica que permite encontrar cualquiera de sus términos, a partir de un término dado.

La expresión que determina el término general de una progresión geométrica se obtiene así:

Dado que

*a*2 = *a*1*r*

*a*3 = *a*2*r* = (*a*1*r)r* = *a*1*r*2

*a*4 *= a*3*r* = (*a*1*r*2)*r = a*1*r*3

*a*5 = *a*4*r* = (*a*1*r*3)*r = a*1*r*4

*.*

*.*

*.*

*an = an* - 1*r =* (*a*1*rn* - 2)*r* = *a*1*rn* - 1

*an**= a*1*rn* - 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El término de una progresión geométrica** |
| **Contenido** | La fórmula del término general de cualquier progresión geométrica es:  *an = a*1*rn* - 1  donde *an* es el término general, *a*1esel primer término de la sucesión, *n* la posición del término y *r* es la razón. |

Ejemplo:

1. Calcular la fórmula del término general de la siguiente progresión geométrica y encontrar el término 12 de la sucesión:

{a*n*} = {7, 21, 63, 189, 567…}

* *a*1 = 7*, r* = 3 *→ an =* 7(3)*n* – 1

La fórmula del término general es *an* = 7(3)*n* – 1.

*a*12 = 7(3)12 – 1 = 7(3)11 = 1 240 029

El término 12 de la sucesión es 1 240 029.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC130 |
| **Título** | Relaciona progresiones geométricas con su expresión general |
| **Descripción** | Actividad para determinar y aplicar la fórmula del término general de una progresión geométrica |

[SECCIÓN 2] **3.2 Suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica**

Existe un método muy sencillo que permite encontrar la **suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica**, como se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica** |
| **Contenido** | La fórmula  <<MA\_09\_08\_12gif>>  permite determinar la suma de *n* términos de una progresión geométrica. En esta fórmula, *Sn* es la suma de los primeros *n* elementos de la sucesión geométrica, *a*1 es el primer término de la sucesión geométrica, *n* es el número de elementos consecutivos que se quieren adicionar y *r* es la razón de la progresión. |

Esta fórmula se construye de la siguiente manera:

Sea *Sn* = *a*1 + *a*2 + … + *an* – 1 + *an*

Se multiplica por *r* a ambos lados de la igualdad, de esta forma:

*Sn* **·** *r* = *a*1 **·** *r* + *a*2 **·** *r* + … + *an* – 1 **·** *r* + *an* **·** *r*

Luego, se simplifica la expresión:

<<MA\_09\_08\_17gif>>

Por lo tanto:

*Sn* **·** *r* = *a*2 + *a*3 + … + *an* + *an* **·** *r*

Se aplica la diferencia entre *Sn* **·** *r* y *Sn*, así:

<<MA\_09\_08\_18gif>>

Se factoriza y se despeja *Sn.*

<<MA\_09\_08\_19gif>>

Y se obtiene la fórmula general.

Por ejemplo, para calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica {*an*} = {4, 12, 36, 108…}

Como *a*1 = 4 y *r* = 3, se remplazan en la fórmula:

<<MA\_09\_08\_20gif>>

La suma de los 10 primeros términos de la sucesión *an =* 4 **·** 3*n* – 1es 118 096.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC140 |
| **Título** | Practica la suma de "n" términos de una progresión geométrica |
| **Descripción** | Actividad para calcular la suma de *n* términos de progresiones geométricas |

[SECCIÓN 2] **3.3 Suma de todos los términos de una progresión geométrica con *│r│*< 1**

Cuando la razón de una progresión geométrica está entre -1 y 1, la suma de todos sus términos se puede calcular. Para esto hay que tener en cuenta que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dado un número real *r*, tal que -1 < *r* < 1, una potencia de *r* con exponente un número real muy grande, se aproxima a cero.  Por ejemplo: 0,12 = 0,01; 0,13 = 0,001; 0,014 = 0,0001  De esta manera, *r*∞ = 0. |

Debido a que -1 < *r* < 1, a medida que *n* es más grande la potencia *rn* se aproxima a cero, de esta forma *rn* – 1 se acerca a -1. Además, *r* – 1 es un número real negativo.

De esta forma,

<<MA\_09\_08\_21.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La suma de todostérminos consecutivos de una progresión geométrica, cuando |*r*| < 1** |
| **Contenido** | Dada una progresión geométrica cuya razón es un número real entre -1 y 1, la suma de todos sus términos se calcula mediante la fórmula  <<MA\_09\_08\_22.gif>>  donde *Sn* es la suma de los términos, *a*1 es el primer término y *r* es la razón de la progresión geométrica. |

Por ejemplo:

1. Encontrar la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

<<MA\_09\_08\_23.gif>>

En esta sucesión

*a*1 = 1

<<MA\_09\_08\_24.gif>>

Se remplazan estos valores en la fórmula y se desarrolla:

<<MA\_09\_08\_25.gif>>

Por lo tanto, la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica es igual a:

<<MA\_09\_08\_26.gif>>

1. Hallar la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica cuyo término general está dado por la fórmula:

<<MA\_09\_08\_27.gif>>

De la fórmula se deduce que

*a*1 = 3

<<MA\_09\_08\_28.gif>>

* Se remplazan estos valores en la fórmula:

<<MA\_09\_08\_29.gif>>

La suma de los infinitos términos de la progresión geométrica es *S*= 6*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC150 |
| **Título** | Calcula la suma de los términos de una progresión geométrica |
| **Descripción** | Actividad para calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuando |*r*| < 1 |

[SECCIÓN 2] **3.4 Producto de *n* términos de una progresión geométrica**

Dada una progresión geométrica {*an*} = {*a*1, *a*2, *a*3,… *an* - 2, a*n* - 1, *an*}, el producto de los extremos equidistantes de los extremos siempre es el mismo, es decir:

*a*1 **·** *an* = *a*2 **·** *an* - 1= *a*3 **·** *an* – 2 = …

Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_IMG06 |
| **Descripción** | Monedas en progresión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12733/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_09_05_img10_zoom.jpg  Aulaplaneta.com/3eso/matemáticas/sucesiones y progresiones/las progresiones geométricas/El producto de n términos de una progresión geométrica |
| **Pie de imagen** | En estos ejemplos se muestra que el producto de los términos equidistantes a los extremos siempre es el mismo. |

De esta manera, la fórmula para determinar el producto de *n* términos de una progresión geométrica se obtiene como sigue.

Sea:

*Pn* = *a*1 **·** *a*2 **·** *a*3 **·** … **·** *an* - 2 **·** a*n* - 1 **·** *an*

Asimismo:

*Pn* = *an* **·** *an* - 1 **·**  *an* - 2 **·** … **·** *a*3 **·** a2 **·** *a*1

Al multiplicar ambas expresiones y aplicar la propiedad asociativa, se presenta la expresión:

*Pn*2 = (*a*1 **·** *an*)(*a*2 **·** a*n* - 1)(*a*3 **·** *an* - 2) … (*an* - 2 **·** *a*3)(a*n* - 1 **·** *a*2)(*an* **·** *a*1)

Como ***a*1** **· *an*** = *a*2 **·** *an* – 1 = *a*3 **·** *an* – 2 = …, luego

*Pn*2 = (*a*1 **·** *an*)(*a*1 **·** *an*)(*a*1 **·** *an*) … (*a*1 **·** *an*)(*a*1 **·** *an*)(*a*1 **·** *an*) = (*a*1 **·** *an*)*n*

Por lo tanto:

*Pn*2 = (*a*1 **·** *an*)*n*

Se extrae la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad y se obtiene la fórmula:

<<MA\_09\_08\_30.gif>>

donde *Pn* es el resultado de multiplicar los *n* primeros términos consecutivos de la progresión geométrica, *a*1 es el primer término de la progresión geométrica y *an* el enésimo término.

Por ejemplo, encontrar el producto de los primeros 8 términos de la siguiente progresión geométrica:

{*an*}= {1, 1,5, 2,25, 3,375…}

Para determinar este producto se deben conocer los términos *a*1 y *a*8. Como se conocen que *a*1= 1y *r =* 1,5, por lo tanto, se calcula *a*8:

*a*8 = 1(1,5)8 – 1 = 1(1,5)7 = 17,0859375

Se remplazan los valores en la fórmula:

<<MA\_09\_08\_31.gif>>

El resultado de multiplicar los primeros 8 términos de la progresión es 85 222,693.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC160 |
| **Título** | El producto de los términos de una progresión geométrica |
| **Descripción** | Actividad que explica el producto de los términos de una progresión geométrica |

[SECCIÓN 2] **3.5 Interpolación de *k* términos proporcionales entre *a* y *b***

Recuerda que interpolar es introducir entre otros dos; en este caso, i**nterpolar *k* términos proporcionales entre *a* y *b*** se puede interpretar comocolocar *k* términos entre los términos *a* y *b*, donde *a* es el término inicial y *b* el término final, con la condición de que estos términos se encuentren en progresión geométrica.

Para lograr la interpolación de *k* términos proporcionales entre *a* y *b* se debe encontrar la razón mediante la fórmula

<<MA\_09\_08\_32.gif>>

Teniendo la razón *r* y el término inicial de la progresión geométrica, es posible encontrar su término general y los *k* términos que estarán interpolados entre *a* y *b*; observa el siguiente ejemplo:

1. Interpolar 3 términos entre:

<<MA\_09\_08\_33.gif>>

Se aplica la fórmula para encontrar *r* y se obtiene que:

<<MA\_09\_08\_34.gif>>

Por lo tanto:

*a*1 = 8

<<MA\_09\_08\_35.gif>>

<<MA\_09\_08\_36.gif>>

<<MA\_09\_08\_37.gif>>

<<MA\_09\_08\_38.gif>>

Es decir que la progresión con sus 3 términos interpolados es:

<<MA\_09\_08\_39.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC170 |
| **Título** | Practica la interpolación de progresiones geométricas |
| **Descripción** | Actividad que trabaja la interpolación de "k" medios geométricos entre dos términos de una progresión geométrica |

[SECCIÓN 2] **3.6 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las progresiones geométricas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las progresiones geométricas |

[SECCIÓN 1] **4 Resolución de problemas de sucesiones y progresiones**

Las sucesiones y las progresiones pueden ser utilizadas como herramienta para resolver problemas o ejercicios de las matemáticas o de otros campos del pensamiento humano. A continuación se presentan algunos ejemplos de problemas y la forma como se pueden resolver.

1. Una costurera se plantea una meta de trabajo de 10 días. El primer día quiere coser 10 pantalones y cada día que pasa, coser tres más que el día anterior, ¿Cuántos pantalones coserá en el día 12? ¿Cuántos pantalones coserá en total?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Costurera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/84610/153453917/stock-photo-asian-seamstress-or-worker-in-a-indonesian-factory-sewing-with-a-industrial-sewing-machine-she-is-153453917.jpg  <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/84610/153453917/stock-photo-asian-seamstress-or-worker-in-a-indonesian-factory-sewing-with-a-industrial-sewing-machine-she-is-153453917.jpg> |
| **Pie de imagen** | El trabajo realizado puede ser medido en algunas ocasiones por medio de progresiones. |

* Se identifica que la relación matemática establecida es una progresión aritmética donde:

*a*1 = 10

*d* = 3

Para saber cuántos pantalones cosió el día 12, se determina el término general de la progresión aritmética y se halla el término que ocupa la posición 12, luego:

*an* = *a*1 + (*n* – 1)*d → an =* 10 + (*n* – 1)3 *→ a*12= 10 + (12 – 1)3= 10 + 33 = 43

En el día 12 la costurera deberá coser 43 pantalones.

* Para determinar cuántos pantalones coserá en los 12 días se debe utilizar la fórmula para adicionar *n* términos de una progresión aritmética partiendo desde la posición 1 hasta la posición 12, donde:

*a*1 = 10

*a*12 = 43

*n* = 12

De esta forma:

<<MA\_09\_08\_40.gif>>

En total deberá coser 318 pantalones.

1. Una máquina para estampar fue comprada por 12 380 000 pesos. Si esta máquina se devalúa cada año a la mitad, ¿qué precio tendrá cuando pasen 5 años, 15 años, 20 años?

Este problema se puede resolver planteando el término general que determina la progresión geométrica que modela la situación, donde:

*a*1 = 12 380 000

<<MA\_09\_08\_41.gif>>

Así, el término general es:

<<MA\_09\_08\_42.gif>>

Ya teniendo el término general que determina la progresión geométrica, se remplazan los valores dados, es decir, 5 años, 10 años y 15 años respectivamente:

<<MA\_09\_08\_43.gif>>

Pasados 5 años el valor de la máquina será 773 750 pesos, después de 10 años el valor de la máquina es aproximadamente de 24 179 y pasados 15 años el valor de la máquina será cercano a 755 pesos.

[SECCIÓN 2] **4.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Algunas aplicaciones prácticas de sucesiones y progresiones |
| **Descripción** | Actividades sobre algunas aplicaciones prácticas de progresiones y sucesiones |

[SECCIÓN 1] **5 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_CO\_REC200 |
| **Título** | Competencias: Los números poligonales |
| **Descripción** | Actividad para trabajar los números poligonales como la suma de los términos de una progresión |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_08\_CO\_REC210 |
| **Título** | Competencias: Práctica de las progresiones geométricas |
| **Descripción** | Actividad que propone el procedimiento de cálculo del término general de una progresión geométrica |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_31\_CO\_REC220 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre el tema Las sucesiones y las progresiones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_01\_CO\_REC230 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema Las sucesiones y las progresiones |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | LE\_G08\_01\_CO\_REC240 | |
| **Web 01** | La sucesión de Fibonacci | <http://vviana.es/doc/LaSorprendente%20SucesionDeFibonacci.pdf> |
| **Web 02** | La media geométrica con regla y compás | <http://cms.dm.uba.ar/materias/1erCuat2007/geometria/Apunte-2.pdf> |
| **Web 03** | Las sucesiones | <http://datateca.unad.edu.co/contenidos/551109/unidades/UNIDAD_1/captulo_1_las_sucesiones.html> |