|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | Sucesiones y progresiones |
| **Código de guion** | MA\_G09\_08\_CO |
| **Descripción** | Existen algunos conceptos matemáticos que a simple vista no son muy relevantes en nuestro diario vivir y en los diferentes campo del pensamiento humano, un ejemplo de ello son las sucesiones y progresiones las cuales hacen parte de nuestro diario vivir y de algunos campos del conocimiento humano de una manera implícita, te invitamos a que conozcas que son las sucesiones, las progresiones y de qué manera se relaciona con el mundo. |

[SECCIÓN 1] **1. Sucesiones**

Una **sucesión** es un grupo de elementos que se denomina **términos,** por lo general estos términos son números que están organizados uno a continuación del otro cumpliendo cierto orden, estas sucesiones se puede categorizar dos grupos las finitas y las infinitas. El número de términos que tenga la sucesión se denomina longitud de la sucesión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Carrera de niños |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/940660/277085996/stock-photo-new-york-city-may-new-york-road-runners-sponsored-a-kids-run-in-central-park-to-mark-277085996.jpg  <http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/940660/277085996/stock-photo-new-york-city-may-new-york-road-runners-sponsored-a-kids-run-in-central-park-to-mark-277085996.jpg> |
| **Pie de imagen** | *El orden de llegada de los niños determina una sucesión* |

Algunos ejemplos de sucesiones son:

1. El conjunto de los números pares:

[2,4,6,8,10…….]

1. La sucesión de Fibonacci :

[1,1,2,3,5,8,13,21,34,55…..]

1. En una carrera participan 12 corredores, cada corredor tiene un numero en su dorsal que lo identifica, los números van desde 1 hasta el 12 a continuación se muestra su orden de llegada a la meta:

[10,1,3,2,12,11,9,8,4,6,5,7]

1. En un día normal en la registraduria primera se registraron 10 niños, a continuación se mostrara el listado de los niños con su respectivo nombres teniendo en cuenta su orden de llegada:

[Pedro, Sebastián, Milena, luisa, Mirian, Pedro, Samary, Jhon, Milena, Jairo]

Recuerda que los términos de las sucesiones pueden ser números o no, los ejemplos uno, dos y tres son sucesiones numéricas, el cuarta ejemplos es un sucesión no numérica.

El primero y el segundo ejemplo son sucesiones infinitas, es decir que su longitud es ∞, el tercer y cuarto ejemplo son sucesiones finitas, en estos casos: la longitud del tercer ejemplo es 12 y la longitud del cuarto ejemplo es 10.

De manera general una sucesión se denota como *an ,*  donde *a* representa el termino y la sub *n* representa la posición que ocupa en la sucesión, por ejemplo el término *a3*  en la primera sucesión es 6.

La **sucesión finita *an*** de longitud *l,* donde *L* es un subconjunto de los números naturales que va desde *1* hasta *l*, con elementos *a ∈ P*  matemáticamente se puede definir por medio de la siguiente función:

*ƒ : L → P*

Donde el elemento ak con k *∈ L*  esta dado por *ƒ(k).*

La **sucesión infinita *an*** donde *a ∈ P*  matemáticamente se puede definir por medio de la siguiente función:

*ƒ :* ℕ *→ P*

Donde el elemento ak con k *∈* ℕestá dado por *ƒ(k).*

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| **Contenido** | Los primeros indicios del trabajo con sucesiones se remonta a la antigua Mesopotamia donde aparece el cálculo de raíz de dos en cuatro cifras sexagesimales, aun que ellos no eran consientes estas cifras pertenecen a el cálculo de una sucesión que converge a raíz de dos. . |

De modo generar se ha intentado explicar lo que es una sucesión, cabe recordar que existen sucesiones que se pueden establecer por medio de una expresión algebraica, en la siguiente sesión se trabajara y se explicara con esta expresión algebraica.

[SECCIÓN 2] **1.1 Término general de una sucesiones**

Cuando los términos de una sucesión son números y siguen un patrón de formación es posible establecer una expresión algebraica (fórmula), que permite obtener el valor de cualquier término en función a la posición que ocupe, esta expresión recibe el nombre de **término generar de la sucesión.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Construcción números triangulares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/N%C3%BAmeros_triangulares.png  <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/N%C3%BAmeros_triangulares.png> |
| **Pie de imagen** | *Los números triangulares y su término general* |

Observa los siguientes ejemplos:

1. La sucesión:

[2,4,6,8,10,12,14…….]

El término general de esta sucesión es:

*an = 2n*

Donde n es la posición que se quiere buscar en la sucesión, por ejemplo la posición 5 de la sucesión se puede encontrar remplazando a: *n* por *5* en la formula *2n*, *2.5* que es igual a *10*, es decir que en la posición *5* de la sucesión *2n* se encuentra el numero 10

1. La sucesión:

*[1,3,5,7,9,11,13,15,17,19…..]*

El término generar de esta sucesión es:

*bn  = 2n-1*

Donde n es la posición que se quiere buscar en la sucesión por ejemplo la posición 6 de la sucesión, se puede encontrar remplazando a: *n* por *6* en la formula *2n-1, 2.6 – 1* que es igual a *11,* es decir que la posición 6 de la sucesión *2n – 1* es *11*.

1. La sucesión :

[1,4,9,16,25,36,49……]

El término generar de esta sucesión es:

*cn = n2*

Donde n es la posición que se quiere buscar en la sucesión por ejemplo la posición 3 de la sucesión, se puede encontrar remplazando a: *n* por *3* en la formula *n2, 32* que es igual a *9,* es decir que la posición 6 de la sucesión *n2* es *9*.

Pero no es posible encontrar el **término general** de todas las sucesiones,  algunas sucesiones no tiene una regla matemática que permita encontrar sus termino en función a su posición, ya sea porque la forma de asignación de las posiciones de los términos es arbitraria, o está dada por un enunciado verbal que no es posible llevarlo a una expresión matemática que lo puede describir, ejemplo de ello son los ejemplos de sucesión de la carrera y el de la registradora.

Pero existen otras sucesiones que para encontrar un término *n* es necesario conocer el o los términos anteriores, esto se desarrollara en la siguiente sesión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| **Contenido** | Una de las sucesiones más importantes y más utilizadas a lo largo de la historia es la sucesión fibonacci, la cual no fue creada por Leonardo de Pisa conocido como fibonacci, si no que él fue el que la introdujo en Europa, se atribuye que uno de los primeros que la trabajo fue pingale (año 200), la sucesión concite en que cada termino es resultado de sumar los dos términos anteriores, de modo general se puede describir como: an = an-1 + an-2 |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las sucesiones recurrentes**

Existen algunas sucesiones que para encontrar el término *n* es necesario utilizar la **ley de recurrencia de una sucesión**  la cual dice: “la expresión algébrica que define a cada uno de los términos de la sucesión en función a los términos anteriores”, es decir que para poder determinar el termino de la posición *n* es necesario conocer el o los términos anteriores a *n*, además se debe conocer la expresión algebraica donde intervienen el o los términos anteriores de la sucesión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | La espirar de Fibonacci |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/187645/155767601/stock-vector-golden-proportion-155767601.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/187645/155767601/stock-vector-golden-proportion-155767601.jpg> |
| **Pie de imagen** | *La sucesión de fibonacci es un ejemplo de las sucesiones recurrentes ya que se necesitan los dos termino anteriores para encontrar el termino n* |

Para que sea más claro observa lo siguientes ejemplos:

1. Encuentre los 5 primeros términos de la sucesión dada por la siguiente ley de recurrencia: an = an-1 + 2, el primer termino es a1 = 5

Ya se tiene el primer término de la sucesión y se aplica la ley de recurrencia para encontrar los demás:

a1 = 5

a2 = a2-1 + 2 = a1 +2 = 5+2= 7

a3 = a3-1 + 2 = a2 +2 = 7+2= 9

a4 = a4-1 + 2 = a3 +2 = 9+2= 11

a5 = a5-1 + 2 = a4 +2 = 11+2= 13

Los 5 primeros términos de esta sucesión son [5,7,9,11,13].

1. Encuentre los 6 primeros términos de la sucesión dada por la siguiente ley de recurrencia: an = an-2 + an-1, el primer termino es a1 = 3 y el segundo termino es a2 = 7.

Ya se tiene el primer término y el segundo término de la sucesión y se aplica la ley de recurrencia para encontrar los demás:

a1 = 3

a2 = 5

a3 = a3-2 + a3-1 = a1 + a2 = 3 + 5 = 8

a4 = a4-2 + a4-1 = a2 + a3 = 5 + 8 = 13

a5 = a5-2 + a5-1 = a3 + a4 = 8 + 13 = 21

a6 = a6-2 + a6-1 = a4 + a5 = 13 + 21 = 34

Los primeros términos de esta sucesión son [3,5,8,13,21,34]

1. Encuentre la ley de recurrencia de la siguiente sucesión:

*[3,8,13,18,23,28…..]*

Como se puede observar la variación de una posición a otra es de más *5* y *a1 = 3* es decir que la ley de recurrencia es:

*an = an-1 + 5, a1 = 3.*

1. Encuentre la ley de recurrencia de la siguiente sucesión:

[2,3,6,18,108,1944…]

En este caso la variación de una posición a otra no se genera sumando una cantidad determinada, si no que se genera por medio del producto de los dos términos anteriores, por tal motivo es necesario conocer los dos primeros términos de la sucesión, es decir que la ley de recurrencia es:

an = an-2 . an-1 , a1 = 2, a2 = 3.

Como se te puedes dar cuenta no existe una receta como tal para encontrar la ley de recurrencia de una sucesión dada, lo que se debe hacer es observar muy bien la variación de una posición otra y deducir que es lo que sucede, en la siguiente sesiones se mostrara algunas operaciones internas y otra externa que se pueden realizar con las sucesiones.

[SECCIÓN 2] **1.3 Producto de una sucesión por un número**

El **producto** de las **sucesiones** por **un número real** se denomina una operación externaal conjunto de las sucesiones se puede definir como

Sea *p* un número real y *(an*) una sucesión de números reales, el producto se denota como  *p. (an) = (p.an):*

*an = a1,a2,a3,a4,a5,a6……*

*p.an =p.a1,p.a2,p.a3,p.a4,p.a5,p.a6……*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | *Una operación es binaria externa si:*   * *interviene un elemento del conjunto en el cual se está trabajando y se opera con un elemento que no pertenecen al conjunto.* * *El resultado es un elemento del conjunto donde se está trabajando* |

Por ejemplo:

1. Multiplicar la sucesión *an=n+3* por *-2*, genera una nueva sucesión que se puede definir como: *-2.(n + 3) = -2n + (-6)*, a continuación se encontrando los 10 primeros términos de las dos sucesiones se obtiene:

*an = n+3 = [4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]*

*-2. an = -2n + (-6) = [-8,-10,-12,-14,-16,-18,-20,-22,-24,-26,-28]*

1. Multiplicar la sucesión *an = 2n – 1* por 5, genera una nueva sucesión que se puede definir como *5. (2n -1) = 10n - 5,* a continuación se encontrando los 10 primeros términos de las dos sucesiones se obtiene:

*an = 2n – 1 = [1,3,5,7,9,11,13,15,17,19]*

*5.an = 10n – 5 = [5,15,25,35,45,55,65,75,85,95]*

Esta operación cumple las siguientes propiedades:

Siendo *p* y *r* números reales, *an y bn* sucesiones de números reales:

**Propiedad 1:** *1.(an) = (a*n*)*

**Propiedad 2:** *(p+r).(an) = p.(an) + r (an)*

**Propiedad 3:** *p.[(an) + (bn)] = p.(an) + p.(bn)*

**Propiedad 4:** *(p.r).(an) = p.(r.an)*

Pero esta no es la única operación que se puede definir con las sucesiones de números reales, en la siguiente sesión se mostrara una operación que se puede definir como **cerrada,** como lo es la suma de sucesiones.

[SECCIÓN 2] **1.4 suma de sucesiones**

La **suma de sucesiones** es una operación cerrada, es decir que si se suman dos sucesiones de números reales el resultado será otra sucesión de números reales, pero como se puede definir esta suma entre sucesiones, a continuación se explicara utilizando un ejemplo:

Se tiene dos sucesiones de finidas como an = 3n y bn = 2n-1, se encontraran los 6 primeros términos de cada una de las sucesiones:

*an = [3, 6, 9, 12, 15, 18]*

*bn = [1, 3, 5, 7, 9, 11]*

Ahora se sumara las sucesiones componente a componente para generar una nueva sucesión

*an = [3, 6, 9, 12, 15, 18…..]*

*bn = [1, 3, 5, 7, 9, 11…]*

*an+bn = [4, 9, 14, 19, 24, 29 …]*

Esta es la forma como se pueden suman las sucesiones, componente a componente en cada una de las posiciones, es decir de manera general:

*an = [a1, a2, a3, a4, a5, a6…..an]*

*bn = [b1, b2, b3, b4, b5, b6…..bn]*

*an+bn = [a1+b1, a2+b2, a3+b3, a4+b4, a5+b5, a6+b6…..an+bn]*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | *Una operación es cerrada en el conjunto A, si cada vez que se tomes dos elementos del conjunto A y se operen el resultado será un elemento del conjunto A.* |

Pero este método se puede simplificar si se encuentra el término general de la suma de las dos sucesiones, es decir el término que determina la sucesión an+bn, para encontrar el término generar de esta nueva sucesión se sumar los dos términos generales que determinan las sucesiones observa el ejemplo:

*an+bn = 3n + 2n-1 = 5n – 1*

Es decir que la nueva sucesión está determinada por el término general

cn = *5n – 1* , a continuación se comprobara si el termino general encontrado genera la suma de las dos sucesiones:

cn = *5n – 1 = [4, 9, 14, 19, 24, 29…..]*

Como se puede observar con este ejemplo la forma general para encontrar la suma de dos sucesiones es buscar su término generar, este término general se consigue sumando los dos términos generales de las sucesiones, observa los siguientes ejemplos:

1. Encontrar el termino general de la suma de las siguientes sucesiones, *an = -2n+1* y *bn = 4n+1,* posteriormente encuentra los 10 primeros términos de la nueva sucesión.

* *an + bn = -2n+1 + 4n+1 = 2n +2, cn = 2n + 2*
* *cn = 2n + 2 = [4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21]*

1. Encontrar el termino general de la suma de las siguientes sucesiones, *an = -3n-2* y *bn = 2n-1*, posteriormente encuentra los 5 primeros términos de la nueva sucesión.

* *an + bn = -3n-2 + 2n-1 = -n - 3, cn = -n - 3*
* *cn = -n – 3 = [-4, -5, -6, -7, -8]*

Las propiedades que cumple la suma de sucesiones son las siguientes, para todo *(an), (-an), (bn), (cn), (0),*  sucesiones de número reales:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Nombre propiedad** | **propiedad** | **ejemplo** |
| **elemento neutro** | *(0)= [0, 0, 0, 0, 0, 0……]*  *(an) + (0)= (an)* | *an = 2n + 5*  *2n+5 + (0) = 2n +5* |
| **Conmutativa** | *an+bn = bn+an* | *an = 3n-1, bn = -7n+1*  *(3n-1) + (-7n+1) = (-7n+1) +( 3n – 1)*  *-4n = -4n* |
| **Asociativa** | *(an+bn)+cn = an+(bn+cn )* | *an = -12n+3, bn = 2n-5, cn = 6n*  *[(-12n+3)+(2n – 5)]+(6n) = (-12n+3)+[( 2n – 5)+ (6n)]*  *(-10n – 2) + (6n) = (-12n + 3) + (8n - 5)*  *-4n – 2 = -4n – 2* |
| **Inversa** | *(-an)= [-a1, -a2, -a3, -a4…..] (an) + (-an) = (0)* | *an = 5n-2, -an = -5n+2*  *(5n-2) +( -5n + 2) = 0 = (0)* |

Estas son las propiedades que cumple la suma de sucesiones, en la siguiente sesión se realizara el estudio de otra operación entre sucesiones, la multiplicación.

[SECCIÓN 2] **1.4 Producto de sucesiones**

El **producto entre sucesiones** es una operación cerrada, ya que si se multiplican dos sucesiones el resultado es otra sucesión, la forma como se define el producto entre sucesiones es la siguiente:

Sean:

*an* y *bn* sucesiones de números reales definidas como:

*an = [a1, a2, a3, a4, a5, a6…….an]*

*bn = [b1, b2, b3, b4, b5, b6…….bn]*

La multiplicación se define componente a componente de acuerdo a su posición:

*(an ).( bn) = [a1.b1, a2.b2, a3.b3, a4.b4, a5.b5, a6.b6…….an.bn]*

Si se tiene los dos términos generales, que definen las dos sucesiones y se quiere encontrar el término general que define el producto de las dos sucesiones, simplemente se debe multiplicar los dos términos generales es decir que, *(an ).( bn) = (an.bn),* observa el siguiente ejemplo:

1. Se tiene las siguientes sucesiones *an = 2n-1 y bn = 3n + 1* encuentre el termino general que define la sucesión *an .bn* y los 10 primeros términos:

* *an .bn  = (2n – 1).(3n+1)=6n2 + 2n – 3n -1 = 6n2 –n – 1*
* *cn = 6n2 – n – 1 = [4, 21, 50, 91, 144, 209, 289, 400, 532, 682]*

Las propiedades que cumple la multiplicación de sucesiones son las siguientes, para todo *(an), (bn), (cn), (1),*  sucesiones de número reales:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Nombre propiedad** | **propiedad** | **ejemplo** |
| **elemento neutro** | (1)= [1, 1, 1, 1, 1, 1……] *(an)+(1) = (an)* | *an = -2n + 1*  *-2n+1 + (1) = -2n +1* |
| **Conmutativa** | *an.bn = bn.an* | *an = 5n+2, bn = n+3*  *(5n+2).(n+3) = (n +3).(5n+2)*  *5n2+15n+2n+6 = 5n2+2n+15n+6*  *5n2+17n+6 =5n2+17n+6* |
| **Asociativa** | *(an.bn).cn = an .(bn.cn)* | *an = 5n-1, bn = 2n-5, cn = 3n*  *[(5n-1).( 2n – 5)].(3n) = (5n - 1).[( 2n – 5) .(3n)]*  *(10n2 – 25n-2n+5). (3n) = (5n - 1). (6n2 – 15n)*  *(10n2 – 27n+5).(3n) = (5n - 1).(6n2 – 15n)*  *30n3- 81n2 +15n = 30n2-75n2 – 6n2 +15n*  *30n3- 81n2 +15n = 30n2-81n2 +15n* |
| **Distributiva respecto a la suma** | *an.(bn + cn) = (an.bn) + (an.cn)* | *an = n-1, bn = n-5, cn = 2n+2*  *(n-1).[(n-5)+(2n+2)]=[(n-1).(n-5)]+[(n-1).(2n+2)]*  *(n-1)(3n-3)=(n2-5n-n+5)+(2n2+2n-2n-2)*  *3n2-3n-3n+3=(n2-6n+5)+(2n2-2)*  *3n2-6n+3 = 3n2-6n+3* |

Estas son las propiedades que cumple la multiplicación de sucesiones, en la siguiente sesiones en trabajo girara en torno a una clase especial de sucesión que recibe el nombre de progresión aritmética.

[SECCIÓN 1] **2 progresiones aritméticas**

Las **progresiones aritméticas** son un tipo especial de sucesiones, en las cuales todos sus términos excepto el primero se obtiene a partir de la suma del terminó anterior con una cantidad fija, que se denomina **diferencia,** por lo general se representa con la letra ***d***, a continuación se presentaran algunos ejemplos de progresiones aritméticas:

*an = 1, 4, 7, 10,13, 16, 19…., d = 3*

*bn = 10, 15, 20, 25, 30, 35…. , d = 5*

<<MA\_09\_08\_01.gif>>

*dn = 1, -101, -203, -304, -405…., d = -102*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Edificio construcción |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/2078930/234264481/stock-photo-apartment-building-on-a-sunny-summer-day-in-hellerup-a-suburb-of-copenhagen-denmark-234264481.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/2078930/234264481/stock-photo-apartment-building-on-a-sunny-summer-day-in-hellerup-a-suburb-of-copenhagen-denmark-234264481.jpg> |
| **Pie de imagen** | *La sucesión aritméticas se pueden ver en las construcciones por ejemplo la cantidad de algún material determina a medida que se aumenta los pisos.* |

Las progresiones aritméticas pueden ser crecientes o decrecientes, las sucesiones *an* y *bn* son crecientes porque su *d* es mayor que cero, mientras que *cn* y *dn* son decrecientes porque su *d*  es menor que cero, en la siguientes sesión se definirá y se trabajara con el termino generar de las progresiones aritméticas.

[SECCIÓN 2] **2.1 termino general de una progresión aritmética**

El **término general de una progresión aritmética** es la expresión que permite encontrar cualquiera de sus términos, conociendo alguno de los términos de la progresión con su posición en la sucesión y además se debe conocer la diferencia de la progresión es decir a *d*.

Para encontrar la expresión que determina el término general de una progresión aritmética se partirá de lo que hasta el momento se conoce:

* si se restan dos términos consecutivos de la progresión el resultado será *d:*

*an - an-1 = d*

* se despeja el término *an-1 :*

*an = d+ an-1*

* se aplica la ley de recurrencia es decir para encontrar el termino 2 de la sucesión es necesario utilizar el termino 1 de la sucesión y así sucesivamente hasta n:

*a2 = a1 + d*

*a3 = a2 + d = (a1 + d) + d = a1 + 2d*

*a4 = a3 + d = (a1 + 2d) + d = a1 + 3d*

*a5 = a4 + d = (a1 + 3d) + d = a1 + 4d*

*.*

*.*

*.*

*an = an-1 + d = (a1 + (n-2).d) + d = a1 + (n-1)d*

*an  = a1 + (n-1)d*

La fórmula del término general es:

*an = a1+(n-1).d*

Donde *an* es el término general, *a1* el primer termino de la sucesión, n la posición del término y *d*  la diferencia.

La formula se puede generalizar cambiando el primer término por cualquiera la formula quedaría:

*an = ak+(k-1).d*

Donde *an* es el término general, *ak* cualquier término de la sucesión, n la posición del término que se quiere encontrar, *k* la posición del término que se conoce y *d*  la diferencia.

Ejemplo:

1. calcule la fórmula del término general de la siguiente progresión y encuentre el termino 30 de la sucesión:

*an = 5,9,13,17*

* *a1 = 5, d = 4 → an = 5+(n-1).4 = 5+4n-4 = 4n+1*

La fórmula del término general es *an = 5+(n-1).4 = 4n + 1*

* *a30 = 5+(30-1).4 = 5+(29.4) = 5 + 116 = 121*

el termino 30 de la sucesión es 121.

1. Encuentre los primeros 10 términos de la siguiente progresión aritmética:

*an = 3 + (n-1).-2 = 3-2n+2 = -2n+5*

* *3, -1, -3, -5, -7, -8, -9, -11, -13, -14*

Ya sabes que es una progresión aritmética, además cómo se pueden encontrar los *n* términos que pertenecen a ella, en la siguiente sesión se mostrara como se puede sumar los n términos consecutivos que hacen parte de una progresión aritmética.

[SECCIÓN 2] **2.2 Suma de *n* términos consecutivos de una progresión aritmética**

Existe un método muy sencillo que permite encontrar la **suma de *n*  términos consecutivos de una progresión aritmética**, el método consiste en utilizar la siguiente fórmula que permite encontrar la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética:

<<MA\_09\_08\_02.gif>>

Donde Sn  es el resultado de la suma de los *n* primerostérminos de la progresión aritmética, a1 es el primer termino de la progresión aritmética, an es el termino es el ultimo termino de la sucesión que se quieres sumar, y *n* es la cantidad de elementos que se quieren sumar.

Un ejemplo de una progresión aritmética en la cual se aplica esta fórmula son los numeroso naturales, [1,2,3,4,5,6,7,8,9…..], encuentre la suma de los primeros 9 números naturales, para ello se utilizara la formula:

<<MA\_09\_08\_03.gif>>

Comprobando la suma 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45.

Pero recuerda que lo que se quiere es sumar los *n* términos consecutivos de una progresión aritmética, y la formula anterior permite encontrar la suma de los primeros *n* términos de la progresión aritmética, por ese motivo se deben realizar unas pequeñas modificaciones a la formula de los primeros *n* término de una progresión aritmética, las modificaciones son las siguientes:

En lugar a1 que es el primer tremido de la sucesión se deberá colocar el termino de donde se quiere comience la suma y se denotara como ak, *n* que es la cantidad de términos que se pretende sumar de la progresión contando desde el primer termino se deberá cambiar por (n +1-k), que determina la cantidad de términos que se quieren sumar, el resto de la formula se dejara igual:

<<MA\_09\_08\_04.gif>>

Ejemplos:

1. Encontrar el resultado de la suma de los números naturales desde 5 hasta 15, para ello se utilizara la formula:

* <<MA\_09\_08\_05gif>>

Comprobando la suma de: 5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = 110.

1. se tiene la siguiente progresión aritmética, *2n-1* , ¿cuál será el resultado de sumar los términos desde la posición 7 hasta la posición 45?

* Se encuentran los numero que están ubicados en la posición 7 y 45

*a7 = 2.7-1 = 13*

*a45 = 2.45 -1 = 89*

* Se remplazan en la formula:

<<MA\_09\_08\_06gif>>

La suma de los términos de la progresión aritmética *2n-1*  de la posición 7 a la 45 es 2091.

Esta es una de las formas como se puede encontrar la suma de n términos consecutivos de cualquier progresión aritmética, en la siguiente sesión se mostrara un método para construir una sucesión aritmética finita entre dos términos dados.

SECCIÓN 2] **2.2 Interpolación de k términos diferenciales entre a y b**

La palabra interpolar se puede interpretar como introducir entre otros dos, si se lleva esta idea a las progresiones aritméticas **Interpolación de k términos diferenciales entre a y b,** se puede interpretar como; colocar *k* términos entre dos términos dados, el termino inicial *a* y el termino final *b*, con la condición que a, los k términos y b se encuentren en progresión aritmética.

Para lograr la interpolación de k términos entre a y b lo primero que se debe definir es que la cantidad de términos de la progresión aritmética será k + 2, k los términos que se deben encontrar y el 2 los términos dados a y b, lo segundo que se debe definir es que se debe encontrar la diferencia de la progresión es decir a *d* , para ello se partirá de la expresión que define el término general de una progresión aritmética despejando a d y cambiando a *n* por *n* + 2 siendo n la cantidad de los interpolados:

<<MA\_09\_08\_07gif>>

Se remplaza a *n* por *n + 2*

<<MA\_09\_08\_08gif>>

Con esta fórmula se encuentra a d y se construye la progresión aritmética que se pide, interpolación con k términos entre a y b, que se encuentren en progresión aritmética observa los siguientes ejemplos:

1. Construya una progresión aritmética Entre 10 y 20 interpolar 5 términos.

* Remplazar en la fórmula para encontrar d identificando *an = 22, a1 = 10 n = 5:*

<<MA\_09\_08\_09gif>>

* Construcción de la progresión sabiendo de *d = 2 y a1 = 10*:

[10,12,14,16,18,20,22]

1. Entre -18 y 12 se quiere interpolar 9 calcular la progresión aritmética

* Remplazar en la fórmula para encontrar *d* identificando *an = 12, a1 = -18, n = 9:*

<<MA\_09\_08\_10gif>>

* Construcción de la progresión sabiendo de *d = 3 y a1 = -18*:

[-18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12]

En las sesiones anteriores el trabajo se centró en las progresiones aritméticas, en las siguientes sesiones el trabajo girara en torno a las progresiones geométricas.

SECCIÓN 1] **3 Progresiones geométricas**

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la cual cada término se genera multiplicándole al anterior por una cantidad fija llamada razón, que por lo general se simboliza con la letra *r,*  y se puede encontrar dividiendo un término an entre an-1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Monedas en progresión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1899230/244948201/stock-vector-vector-financial-growth-concept-with-stacks-of-golden-coins-244948201.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1899230/244948201/stock-vector-vector-financial-growth-concept-with-stacks-of-golden-coins-244948201.jpg> |
| **Pie de imagen** | *Los intereses bancarios se pueden modelar por medio de progresiones geométricas.* |

observa los siguientes ejemplos:

*an = 2, 4, 8, 16, 32, 64…* *r = 2*

*bn = 1, 3, 9, 27, 81, 243…. r = 3*

*cn = -2, -10, -50, -250, -1225……* *r = 5*

<<MA\_09\_08\_11gif>>

Las progresiones geométricas pueden ser crecientes o decrecientes, las sucesiones *an* y *bn* son crecientes, mientras que *cn* y *dn* son decrecientes en la siguiente sesión se definirá y se trabajara con el termino generar de las progresiones geométricas.

SECCIÓN 2] **3.1 Termino general de una progresiones geométricas**

El **término general de una progresión geométrica** es la expresión que permite encontrar cualquiera de sus términos, conociendo alguno de los términos de la progresión y su posición en la sucesión, además se debe conocer la razón de la progresión es decir a *r*.

Para encontrar la expresión que determina el término general de una progresión aritmética se partirá de lo que hasta el momento se conoce:

*a2 = a1 .r*

*a3 = a2 .r = (a1 .r).r = a1 r2*

*a4 = a3.r = (a1 .r2).r = a1 + r3*

*a5 = a4 .r = (a1.r3).r = a1 .r4*

*.*

*.*

*.*

*an = an-1 .r = (a1.rn-2).r = a1 .r n-1*

*an  = a1.rn-1*

La fórmula del término general de cualquier progresión geométrica es:

*an = a1.rn-1*

Donde *an* es el término general, *a1* el primer término de la sucesión, *n* la posición del término y *r*  es la razón.

La fórmula se puede generalizar cambiando el primer término por cualquiera la formula quedaría:

*an = ak.rn-k*

Donde *an* es el término general, *ak* cualquier término de la sucesión, *n* la posición del término que se quiere encontrar, *k* la posición del término que se conoce y *r* es  la razón.

Ejemplo:

1. calcule la fórmula del término general de la siguiente progresión geométrica y encuentre el termino 12 de la sucesión:

*an = 7,21, 63, 189, 567………*

* *a1 = 7, r = 3 → an = 7.3n-1*

La fórmula del término general es *an =7.3n-1*

*a12 = 7.312-1 = 7.311= 1240029*

* el termino 30 de la sucesión es *1240029.*

1. Encuentre los primeros 12 términos de la siguiente progresión geométrica:

*an = 5.2n-1*

* *5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560*

Ya sabes cómo encontrar el termino generar de una progresión geométrica, además cómo se pueden encontrar los *n* términos utilizando la expresión del término general, en la siguiente sesión se mostrara como se puede sumar los *n* términos consecutivos que hacen parte de una progresión geométrica.

SECCIÓN 2] **3.2 Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica**

Existe un método muy sencillo que permite encontrar la **suma de *n*  términos consecutivos de una progresión geométrica**, el método consiste en utilizar la siguiente fórmula que permite encontrar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica:

<<MA\_09\_08\_12gif>>

Donde Sn es la suma de los primeros *n* elementos de la sucesión geométrica, a1 es el primer término de la sucesión geométrica, *n* es la cantidad de elementos consecutivos que se quieren sumar y *r* es la razón de la progresión, observa el siguiente ejemplo:

1. Encuentre la suma de los primeros 10 términos de la siguiente progresión *an = 4, 12, 36, 108….…..*

* El termino *a1 = 4* y *r = 3* , se remplazan en la formula:

<<MA\_09\_08\_13gif>>

La suma de los 10 primeros términos de la sucesión *an = 4.3n-1*  es 118096.

Pero recuerda que lo que se quiere es sumar los *n* términos consecutivos de una progresión geométrica, la formula anterior permite encontrar la suma de los primeros *n* términos de la progresión geométrica, por ese motivo se deben realizar unas modificaciones a la fórmula que permite sumar los primeros *n* término de una progresión geométrica, para que la suma sea desde un término arbitrare ak  hasta otro termino an, las modificaciones son las siguientes:

En lugar a1 que es el primer termino de la sucesión se deberá colocar el termino de donde se quiere comenzar la suma y se denotara como ak, *n* que es la cantidad de términos que se pretende sumar de la progresión contando desde el primer termino hasta el término *n* se deberá cambiar por (n +1-k), que determina la cantidad de términos que se quieren sumar desde la posición *ak* hasta la posición *an*, el resto de la formula se dejara igual:

<<MA\_09\_08\_14gif>>

Ejemplo:

1. Encuentra la suma desde el termino que ocupa la posición 4 hasta el término que ocupa la posición 12 de la siguiente progresión geométrica:

*an = 4.2n-1.*

* Se debe encontrar el términos que ocupa la posición 4 en la progresión:

*an = 4.2n-1 → a4 = 4.24-1 = 4.23 = 4.8 = 32*

* Se remplazan ak por *32,* *n* por *12*, *k* por *4,* *r* por *2* en la formula:

<<MA\_09\_08\_15.gif>>

La suma de los términos de la progresión geométrica  *an = 4.2n-1*  desde la posición 4 hasta la posición 12 es igual a 16352.

1. Cuál será el resultado de sumar los términos que se encuentran desde la posición 11 hasta la posición 18 de la siguiente progresión geométrica:

*an = 2, 6, 18, 54…….*

* Se encuentra el termino general de la progresión, donde *a1 = 2 y r = 3:*

*an = 2.3n-1*

* Se debe encontrar el termino que ocupa la posición 11 en la sucesión:

*an = 2.3n-1 → a11 = 2.311-1= 2.310 = 2.59049 = 118098*

* Se remplazan ak por *118098,* *n* por *18*, *k* por *11 y r* por *3* en la formula:

<<MA\_09\_08\_16.gif>>

El resultado de sumar los términos de la progresión geométrica *an = 2.3n-1* desde la posición *11* hasta la posición *18* es *387361440.*

Ya conocemos la fórmula para sumar n términos consecutivos de una progresión geométrica, pero existen una clase especial de progresiones geométricas en las cuales es posible encontrar el resultado de la suma de todos sus términos, a pesar que sus términos son infinitos, esta clase de progresiones serán trabajadas en la próxima sesión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| **Contenido** | *Existe una historia que relaciona al ajedrez con las progresiones, el rey Sirham quería premiar al inventor del ajedrez, Dahir, él le pido al rey un grano de trigo para colorarlo en la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera y así sucesivamente, solo le pidió que le duplicara los granos para cada casilla, lo que le estaba pidiendo al rey se modela con la suma de los términos de una progresión geométrica que se define como:*  *S63 = 1 + 21 + 22 + 23+………..263 = 18.344.674.420.737.091.551.615 granos de trigo, el rey no pudo darle todo lo que pidió Dahir* |

SECCIÓN 2] **3.4 Suma de todos los términos de una progresión geométrica *│r│<1***

Las únicas progresiones geométricas en las cuales se pueden calcular la suma de todos sus términos son aquellas en las cuales la razón está entre -1 y 1, en otras palabras el valor absoluto de la razón es mayor a uno, *│r│<1* esto se debe a que si se eleva *r ∞*  tiende a convertirse en cero, teniendo en cuenta este resultado se remplazara en la fórmula que permite encontrar el resultado de la suma de los *n* términos:

<<MA\_09\_08\_17.gif>>

Es decir que la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas cuya razón cumple que *│r│<1* es:

<<MA\_09\_08\_18.gif>>

Observa los siguientes ejemplos:

1. Encuentre la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

<<MA\_09\_08\_19.gif>>

* Donde:

*a1 = 1*

<<MA\_09\_08\_20.gif>>

* Se remplaza estos valores en la formula y se desarrolla:

<<MA\_09\_08\_21.gif>>

La suma de los infinitos términos de la progresión geométrica es igual a:

<<MA\_09\_08\_22.gif>>

1. Encuentre la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica.

<<MA\_09\_08\_23.gif>>

* Donde:

*a1 = 3*

<<MA\_09\_08\_24.gif>>

* Se remplazan estos valores en la formula:

<<MA\_09\_08\_25.gif>>

La suma de los infinitos términos de la progresión geométrica es igual a:

*S∞ = 6.*

Cómo se pudo observar es posible encontrar la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas, solo cuando su razón está entre -1 y 1, utilizando su fórmula, en la siguiente sesión el trabajo se centrara en el producto de los términos de una progresión geométrica.

SECCIÓN 2] **3.5 Producto de *n*  términos de una progresión geométrica**

Al igual que es posible encontrar el resultado de **sumar *n* primeros  términos consecutivos de una progresión geométrica** utilizando una formula, existe una fórmula que permite encontrar el resultado de multiplicar ***n* primeros  términos consecutivos de una progresión geométrica,** la formula es la siguiente:

<<MA\_09\_08\_26.gif>>

Donde:

*P* es el resultado de multiplicar los *n* primeros términos consecutivos de la progresión geométrica.

*a1*,el primer término de la progresión.

an, el termino que ocupa la posición n en la progresión

*n*, la cantidad de términos que se quieren multiplicar.

Esta fórmula se deduce sabiendo que: el producto del término ubicado en la posición uno con el ubicado en la posición n es igual al producto del término ubicado en la posición dos por el término ubicado en la posición n-1, y así sucesivamente y que el orden de los factores no altera el resultado:

*(1)P= a1.a2.a3………an-1.an*

*(2)P=an.an-1.an-2…..…a2. a1*

Si se multiplican los términos de la ecuación *(1)* con los de la ecuación *(2)* de para abajo asociando término a término se obtiene:

*P2 = (a1.an).(a2.an-1).(a3.an-2)…….(an-1.a2).(an.a1)*

Hay *n* productos entre paréntesis, además todos estos productos que se encuentran entre paréntesis son iguales a (a1.an), es decir que

*P2 = (a1.an).(a2.an-1).(a3.an-2)…….(an-1.a2).(an.a1) = P2=(a1.an)n*

Se despeja a P y se obtiene la fórmula para multiplicar los primeros n términos consecutivos de una progresión geométrica:

<<MA\_09\_08\_27.gif>>

Observa el siguiente ejemplo:

1. Encuentre el producto de los primeros 8 términos de la siguiente progresión geométrica:

*an = 1,5,25,125…..*

* se deben encontrar los valore de a1  y a8 :

*a1 = 1, r = 5 , a8  = 1.58-1= 1.57 = 1.78125 = 71825.*

* Se remplazan en la formula:

<<MA\_09\_08\_28.gif>>

El resultado de multiplicar los primeros 8 términos de la progresión es 718254.

Pero lo que originalmente se quería era obtener el resultado multiplicar *n* términos consecutivos de una progresión geométrica, y lo que hasta el momento se obtuvo fue la multiplicación de los primeros *n* termino de la progresión, realizando unos cambios a la formula de los primeros n términos se obtiene la fórmula para obtener el resultado del **producto de *n*  términos de una progresión geométrica,** los cambios que se deben realizar son:

a1 se remplaza por ak que seré el término desde donde se quiere comenzar a realizar el producto.

*n* se remplaza por (n-k+1).

El resto de la formula se deja igual con los cambios la formula es:

<<MA\_09\_08\_29.gif>>

Observa el siguiente ejemplo:

1. Encontrar el producto de la siguiente progresión geométrica, desde el termino 5 hasta el termino 10:

<<MA\_09\_08\_30.gif>>

* para ello se debe encontrar el termino general de la progresión:

<<MA\_09\_08\_31.gif>>

El término general es:

<<MA\_09\_08\_32.gif>>

* Se deben encontrar los término a5 y a10 de la progresión:

<<MA\_09\_08\_33.gif>>

<<MA\_09\_08\_34.gif>>

* Se remplaza en la fórmula para encontrar el producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica:

<<MA\_09\_08\_35.gif>>

El resultado de multiplicar desde el término a5 hasta el término a10 de la progresión es:

<<MA\_09\_08\_36.gif>>

Ya se sabe cómo encontrar el resultado de multiplicar *n* términos de una progresión geométrica utilizando, en la siguiente sesión se trabajara en la forma de construir una progresión geométrica cuando se da el término inicial y el término final.

SECCIÓN 2] **3.5 Interpolación de *k*  términos proporcionales entre a y b**

Recuerda que interpolar es introducir entre otros dos, en este caso **Interpolar k términos proporcionales entre a y b,** se puede interpretar como; colocar *k* términos entre los términos a y b donde *a* es el termino inicial y *b* el termino final , con la condición que los términos *a*, los *k* términos y *b* se encuentren en progresión geométrica.

Para lograr la interpolación de *k* términos proporcionales entre *a* y *b* lo primero que se debe definir es que la cantidad de términos de la progresión geométrica será *k + 2*, k los términos que se deben encontrar y 2 los términos dados *a* y *b*, lo segundo es encontrar a *r* la razón de la progresión geométrica, para ello se partirá de la expresión que define el término general de una progresión geométrica, despejando a *r* y cambiando a:  *an = b, a1 = a, n* por *n + 2* siendo *n* la cantidad de los interpolados:

<<MA\_09\_08\_37.gif>>

Es decir que la razón *r* cuando se quiere interpolar términos proporcionales entre a y b se determina por la siguiente fórmula:

<<MA\_09\_08\_38.gif>>

Teniendo la razón r y el término inicial de la progresión geométrica se encuentra su término general, para posteriormente encontrar lo n términos que estarán interpolados entre a y b, observa el siguiente ejemplo:

1. Interpole 3 términos entre:

<<MA\_09\_08\_39.gif>>

* Se debe encontrar *r* utilizando la formula:

<<MA\_09\_08\_40.gif>>

En esta sucesión:

<<MA\_09\_08\_41.gif>>

* Ahora se debe encontrar el termino generar de la progresión geométrica, remplazando los valores en la formula general:

<<MA\_09\_08\_42.gif>>

* Y ahora se encuentran los términos de la progresión:

<<MA\_09\_08\_43.gif>>

<<MA\_09\_08\_44.gif>>

<<MA\_09\_08\_45.gif>>

Es decir que la progresión con sus 3 términos interpolados es:

<<MA\_09\_08\_45.gif>>

Ya sabes cómo interpolar términos *k* términos entre dos términos dados y crear una progresión geométrica, en la siguiente sesión el trabajo a desarrollar girara en torno a resolver problemas que involucran a las sucesiones y a las progresiones.

SECCIÓN 1] **4 Resolución de problemas de sucesiones y progresiones**

Las sucesiones y las progresiones pueden ser utilizadas como herramienta para resolver problemas o ejercicios, de las mismas matemáticas o de otros campos del pensamiento humano, a continuación se presentaran algunos ejemplos de problemas y la forma como se pueden resolver:

1. Una costurera se plantea una meta de trabajo de 10 días, el primer día quiere coser 10 pantalones y cada día que pasa coser dos más que el día anterior, ¿Cuántos pantalones cosera en el 12día? y ¿cuántos pantalones cosera en total?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG06 |
| **Descripción** | Costurera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/84610/153453917/stock-photo-asian-seamstress-or-worker-in-a-indonesian-factory-sewing-with-a-industrial-sewing-machine-she-is-153453917.jpg  <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/84610/153453917/stock-photo-asian-seamstress-or-worker-in-a-indonesian-factory-sewing-with-a-industrial-sewing-machine-she-is-153453917.jpg> |
| **Pie de imagen** | *El trabajo realizado puede ser medido en algunas ocasiones por medio de progresiones* |

* Para saber cuántos pantalones cosió se determina el termino general de la progresión aritmética y se encuentra el termino de que ocupa la posición 12 donde:

*a1 = 10*

*d = 3*

*an = a1 + (n - 1).d → an = 10 +(n - 1).3 → a12 = 10 + (12-1).3 = 10 + 33 = 43*

En el día 12 la costurera deberá coser 43 pantalones.

* Para determinar cuántos pantalones sosera en los 12 días se debe utilizar la fórmula para sumar *n* términos de una progresión aritmética partiendo desde la posición 1 hasta la posición 12 donde:

*a1 = 10*

*a12= 43*

*n = 12*

<<MA\_09\_08\_47.gif>>

En total deberá coser 318 pantalones.

1. Se sabe que el término a1 de una progresión aritmética es 3, y el termino a10 es 48, encuentra el termino general de esta progresión.

* Se parte de la expresión que determina el termino generar de las progresiones aritméticas remplazando *an* por 48, a1 por 3, *n* por 10, y se despeja *d :*

<<MA\_09\_08\_48.gif>>

Donde *d = 5*.

* Se remplaza a1 por 3 y d por 5 en la expresión que determina el termino general y se desarrollan las operaciones indicadas:

*an = a1 + (n - 1).d → an = 3 +(n - 1).5 = 3 + 5n – 5 = 5n-2*

El termino general de la progresión es an = 5n – 2

1. Una máquina para estampar fue comprada por 12380000 de pesos, esta máquina se devalúa cada año a la mitad, ¿Qué precio tendrá la maquina cuando pasen 5 años, 15 años, 20 años?

Este problema se puede resolver planteando el término general que determina la progresión geométrica que modela la situación done:

*a1 = 12380000*

<<MA\_09\_08\_49.gif>>

<<MA\_09\_08\_50.gif>>

* Ya teniendo el termino general que determina la progresión geométrica, se remplazar los valores dados es decir 5 años, 10 años y 15 años respectivamente:

<<MA\_09\_08\_51.gif>>

Pasados 5 años el valor de la maquina será de 773750 pesos.

<<MA\_09\_08\_52.gif>>

Pasados 10 años el valor de la maquina es de 241790

<<MA\_09\_08\_53.gif>>

Pasados 15 años el valor de la maquina será de 755 pesos

Problemas como los anteriores pueden ser modelados por las sucesiones y las progresiones, te invitamos a que investigues mas sombre el maravilloso mundo de las sucesiones y progresiones.