|  |  |
| --- | --- |
| **Título del guion** | Los métodos de razonamiento y la semejanza |
| **Código de guion** | MA\_G09\_09\_CO |
| **Descripción** | En matemáticas todo tiene que ser demostrado, por tanto, la geometría, como una rama de las matemáticas, no es la excepción. Para demostrar una afirmación en geometría existen algunos métodos de demostración; te invitamos a que los conozcas y los desarrolles por medio de algunos conceptos básicos de la geometría, incluyendo la semejanza de figuras y la semejanza de triángulos. |

[SECCIÓN 1] **1 Los métodos de demostración**

La **demostración** en matemáticas se puede definir como una estructura organizada de argumentos deductivos para asegurar que una proposición es verdadera; estos argumentos deben basarse en definiciones, axiomas (postulados) y teoremas que han sido demostrados previamente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Elementos del método axiomático de demostración** |
| Contenido | Los elementos de un sistema axiomático son las definiciones, axiomas y teoremas.  **Una definición:** es el conjunto de términos que menciona las características y propiedades esenciales del objeto sobre el cual se plantea la definición.  **Un axioma:** es una proposición que se considera evidente, por tanto, se acepta su veracidad sin una demostración.  **Un teorema:** es una proposición matemática que se puede demostrar utilizando algunas definiciones, axiomas o algunas proposiciones demostradas previamente. |

Las demostraciones se basan en la lógica matemática y se complementan con el lenguaje natural; existen varios métodos de demostración y en las siguientes secciones se presentan algunos de ellos como son:

* Método directo.
* Método indirecto.
* Contraejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Euclides |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/302155/103104938/stock-photo-euclid-103104938.jpg |
| **Pie de imagen** | Euclides es considerado el padre de las demostraciones en matemáticas, ya que introdujo el método axiomático. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC10 |
| **Título** | Los métodos de demostración |
| **Descripción** | Interactivo mediante el cual se explican los distintos métodos de demostración |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC20 |
| **Título** | Identifica el método de demostración |
| **Descripción** | Actividad para determinar el método de demostración que se aplica para comprobar una proposición |

[SECCIÓN 2] **1.1 El método directo**

Este método consiste en plantear una proposición de la forma *p → q*, donde *p* es la **hipótesis** y *q* es la**tesis**. Se parte suponiendo la verdad de *p* para llegar a la verdad de *q*; esto se logra encadenando algunos axiomas, definiciones y proposiciones que ya han sido demostradas previamente. De manera general, una demostración directa está compuesta por:

* **Hipótesis:** es el supuesto de donde se parte y que se acepta como verdadero. Es la base para desarrollar el razonamiento.
* **Tesis:** es lo que se quiere demostrar.
* **Razonamiento:** es el conjunto de razones y afirmaciones que permiten partir de la hipótesis y llegar a la tesis, los cuales deben estar ordenados de una manera lógica.
* **Conclusión:** es la veracidad de la tesis deducida mediante el razonamiento lógico.

El procedimiento utilizado cuando se realiza una demostración de forma directa, se puede resumir en los siguientes pasos:

**Paso 1:** identificar la proposición de la forma *p → q*.

**Paso 2:** en algunas ocasiones, es útil elaborar un gráfico donde se relacionen las condiciones iniciales de la proposición que se pretende demostrar.

**Paso 3:** identificar la hipótesis y la tesis de la proposición.

**Paso 4:** identificar lo que se quiere probar e idear un plan para lograrlo.

**Paso 5:** crear la demostración en el esquema a dos columnas, afirmación - razón.

Por ejemplo:

El ∡*EAD* es congruente con el ∡*JCK* y el ∡*EAD* es congruente con el ∡*FBG*; demostrar que el ángulo ∡*JCK* es congruente con el ∡*FBG*.

**Paso 1:** ∡*EAD* ≅∡*JCK* y ∡*EAD* ≅∡*FBG* → ∡*JCK* ≅ ∡*FBG*

**Paso 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Tres ángulos congruentes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\1.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfico de tres ángulos congruentes. |

**Paso 3:**

**Hipótesis:** el ∡*EAD* es congruente con el ∡*JCK* y el ∡*EAD* es congruente con el ∡*FBG.*

**Tesis**: ∡*JCK* es congruente con el ∡*FBG.*

**Paso 4:** se quiere probar que dos ángulos son congruentes sabiendo que cada uno de ellos es congruente con el mismo ángulo. Como la medida de los ángulos son números reales, se puede utilizar la ley de transitividad y llegar a que los ángulos son congruentes.

**Paso 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. ∡*EAD* ≅ ∡*JCK* y ∡*EAD* ≅ ∡*FBG* | Hipótesis. |
| 1. m *∡EAD* =m *∡JCK* ym *∡EAD* =m *∡FBG* | Definición de ángulos congruentes. |
| 1. m *∡JCK* =m *∡FBG* | Propiedad transitiva de la igualdad en paso 2. |
| 1. ∡*JCK* ≅∡*FBG* | Definición de ángulos congruentes. |

Por lo tanto, los ángulos ∡*JCK* y ∡*FBG* son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC30 |
| **Título** | Completa demostraciones |
| **Descripción** | Actividad para determinar datos faltantes en una demostración |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC40 |
| **Título** | Identifica hipótesis y tesis |
| **Descripción** | Actividad para asociar construcciones con su posible hipótesis y tesis en una demostración |

[SECCIÓN 2] **1.2 El método indirecto**

Este método consiste en suponer que la hipótesis *p* es verdadera y la tesis *q* es falsa. A partir de la tesis falsa se obtiene una hipótesis falsa, hecho que genera una contradicción, lo que permite concluir que la tesis debe ser verdadera, es decir que demostrar *¬q → ¬p* es equivalente a demostrar *p → q.*

El procedimiento utilizado cuando se realiza una demostración de forma indirecta, se puede resumir en los siguientes pasos:

**Paso 1:** identificar la hipótesis y la tesis.

**Paso 2:** suponer que la tesis es falsa.

**Paso 3:** elaborar un plan para mostrar que lo que se supuso conduce a una contradicción de la hipótesis.

**Paso 4:** crear la demostración en el esquema a dos columnas, afirmación - razón.

Observa el siguiente ejemplo en el cual se utiliza el método de demostración indirecta:

Mostrar que para todo número entero *n*, si *n2* es par, entonces *n* es par.

**Paso 1:**

Hipótesis: *n*2 es par.

Tesis: *n* es par.

**Paso 2:** se niega la tesis suponiendo que *n* es impar.

**Paso 3:** se parte de que *n*2 es un número par, por tanto, se supone que *n* es un número impar para llegar a una contradicción.

**Paso 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. *n2* es par | Hipótesis. |
| 1. *n* es impar | Hipótesis. |
| 1. *n2 + n* es impar | Suma de un número par más un número impar es impar. |
| 1. *n2 + n = n*(*n +* 1) | Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. |
| 1. *n* + 1es par | Por la afirmación 2, la suma de dos números impares es un número par. |
| 1. *n*(*n* + 1)es par | Por la afirmación 5. El producto de un número entero por un número par es un número par. |
| 1. *n2* + *n* es par | Por la afirmación 6. Aplicando la propiedad distributiva. |
| 1. *n2 + n* es impar y *n2 + n* es par | Por las afirmaciones 3 y 7 se obtiene una contradicción. |
| 1. *n* es par | Por contradicción, la afirmación 2 es falsa. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC50 |
| **Título** | Reconoce proposiciones contrarrecíprocas |
| **Descripción** | Actividad para determinar la proposición contrarrecíproca a una afirmación |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC60 |
| **Título** | Completa demostraciones indirectas |
| **Descripción** | Actividad para completar demostraciones haciendo uso de la afirmación contrarrecíproca |

[SECCIÓN 2] **1.3 El contraejemplo**

Este método de demostración es utilizado cuando se quiere demostrar la falsedad de un enunciado cuya hipótesis tiene el cuantificador universal “para todos”, es decir que se utiliza cuando la tesis se refiere a todos los elementos de un conjunto; observa el siguiente ejemplo.

Todo número natural elevado al cuadrado da como resultado un número par.

* Para demostrar la falsedad de este enunciado se debe buscar un número natural que elevado al cuadrado dé como resultado un número impar. Por ejemplo,

32 = 9

Así, el contraejemplo anterior demuestra la falsedad de la proposición todo número natural elevado al cuadrado da como resultado un número par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC70 |
| **Título** | Contraejemplos |
| **Descripción** | Actividad para indicar el contraejemplo a una proposición |

[SECCIÓN 2] **1.4 Las demostraciones**

En esta sección se presentan algunas demostraciones que hacen uso de los métodos de demostración anteriores.

1. Dados los triángulos rectángulos *∆ABC* y *∆DEF*, donde *AB* ≅ *DE* y *BC* ≅ *EF*,entonces *∆ABC* *≅ ∆DEF*.

**Paso 1:** *∆ABC* y *∆DEF* rectángulos, *AB* ≅ *DE* y *BC ≅ EF* → *∆ABC* ≅ *∆DEF*

**Paso 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | Dos triángulos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\2.JPG |
| **Pie de imagen** | Representación de la hipótesis de la proposición, donde dos triángulos rectángulos presentan las relaciones *AB ≅ DE* y *BC ≅ EF*. |

**Paso 3:**

Hipótesis: *∆ABC* y *∆DEF* triángulos rectángulos, donde *AB ≅ DE* y *BC ≅ EF.*

Tesis: *∆ABC* ≅ *∆DEF*.

**Paso 4:** se quiere probar que dos triángulos rectángulos son congruentes sabiendo que dos pares de lados consecutivos son congruentes, para ello se utiliza el criterio de congruencia LAL.

**Paso 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. *AB* ≅ *DE* | Hipótesis. |
| 1. *BC* ≅ *EF* | Hipótesis. |
| 1. *∡ABC* y *∡DEF* ángulos rectos | Hipótesis. |
| 1. m *∡ABC* = 90° y m *∡DEF* = 90° | Por la afirmación 3. |
| 1. *∡ABC* ≅ *∡DEF* | Por la afirmación 4. |
| 1. *∆ABC* ≅ *∆DEF* | Por las afirmaciones 1, 2 y 5, y el criterio de congruencia de triángulos LAL. |

Se demostró de forma directa que *∆ABC* *≅ ∆DEF.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos triángulos son congruentes si cumplen alguno de los siguientes criterios:  **Criterio lado, lado, lado (LLL):** dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes.  **Criterio lado, ángulo, lado (LAL):** dos triángulos son congruentes si dos de sus lados correspondientes son congruentes y los ángulos formados por estos lados también son congruentes.  **Criterio ángulo, lado, ángulo (ALA):** dos triángulos son congruentes si dos de sus ángulos correspondientes son congruentes y los lados entre ellos también son congruentes.  **Criterio lado, lado, ángulo (LLA):** dos triángulos son congruentes si dos de sus lados correspondientes consecutivos son congruentes y los ángulos que le siguen en el triángulo también son congruentes. |

Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección es un solo punto.

**Paso 1:**

Hipótesis: dos rectas diferentes se intersecan.

Tesis: la intersección de las dos rectas es un solo punto.

**Paso 2:** como se pretende demostrar la proposición con el método indirecto, se niega la tesis:

dos rectas se intersecan en dos puntos diferentes.

**Paso 3:** se puede hacer uso del postulado “*Dos puntos distintos determinan una recta y solo una a la cual pertenecen. Por un punto pasa al menos una recta*”.



**Paso 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. Sean las rectas *l* y *m* diferentes, que se intersecan en el punto *A* | Hipótesis. |
| 1. Sea *C* otro punto de intersección entre las rectas *l y m,* con *A* ≠ *C* | Se niega la tesis suponiendo que las rectas se cortan en dos puntos diferentes. |
| 1. *l contiene a los puntos A y C* | Por la afirmación 2. |
| 1. *m contiene a los puntos A y C* | Por la afirmación 2. |
| 1. La recta *l* y la recta *m* corresponden a la misma recta | Por las afirmaciones 3 y 4 y por el postulado “Dos puntos distintos determinan una recta y solo una a la cual pertenecen”*.* |
| 1. Existe un único punto de intersección de las rectas *l* y *m* | Existe una contradicción entre las afirmaciones 1 y 5. |

Por lo tanto, queda demostrado que dos rectas distintas se intersecan máximo en un solo punto.

1. Todos los cuadriláteros cuyos lados sean congruentes, tienen cuatro ángulos congruentes.

* Para demostrar la falsedad de este enunciado se debe buscar un cuadrilátero en el cual sus lados sean congruentes, pero que sus ángulos no lo sean.
* Contraejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Paralelogramo con sus cuatro lados congruentes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El cuadrilátero *ACBD* tiene sus lados congruentes, pero sus ángulos no, como se observa en el gráfico:  *∡ACB* ≇∡*CBD, ∡ADB* ≇ *∡DAC* |

Por lo tanto, existe por lo menos un cuadrilátero que no cumple la condición; este contraejemplo demuestra la falsedad de la proposición: todos los cuadriláteros cuyos lados sean congruentes, tienen cuatro ángulos congruentes.

1. Los ángulos opuestos por el vértice son ángulos congruentes.

**Paso 1:** los *∡BAC* y *∡DAE* son opuestos por el vértice, entonces *∡BAC* ≅ *∡DAE*.

**Paso 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Ángulos opuestos por el vértice |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∡*BAC* y ∡*DAE* son opuestos por el vértice. |

**Paso 3:**

Hipótesis: *∡BAC* y *∡DAE* son opuestos por el vértice*.*

Tesis: *∡BAC* ≅ *∡DAE*

**Paso 4:** para desarrollar esta demostración, es necesario usar la definición de ángulos suplementarios que establece que: “dos ángulos son suplementarios si suman 180°”.

**Paso 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. ∡*BAC* y ∡*DAE* son opuestos por el vértice. | Hipótesis. |
| 1. m *∡BAC* +m *∡CAE =* 180º | Definición de ángulos suplementarios. |
| 1. m *∡DAE +* m *∡CAE =* 180º | Definición de ángulos suplementarios. |
| 1. m *∡BAC* +m *∡CAE =* m *∡DAE +* m *∡CAE* | Ley transitividad, afirmaciones 2 y 3. |
| 1. m *∡BAC +* m *∡CAE –* m *∡CAE =* m *∡DAE +* m *∡CAE –* m *∡CAE* | Propiedad uniforme de la igualdad. |
| 1. m *∡BAC =* m *∡DAE* | Afirmación 5. |
| 1. *∡BAC* ≅ *∡DAF* | Afirmación 6. |

Se demostró que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC80 |
| **Título** | ¿Cómo realizar demostraciones? |
| **Descripción** | Interactivo para profundizar en las estrategias para realizar demostraciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC90 |
| **Título** | Demuestra teoremas |
| **Descripción** | Actividad para demostrar afirmaciones dadas |

Como puedes observar, para realizar una demostración existen diferentes caminos; es necesario practicar para poder escoger el camino adecuado. En las siguientes secciones el trabajo se centra en la semejanza de triángulos.

[SECCIÓN 2] **1.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los métodos de demostración |
| **Descripción** | Actividad sobre Los métodos de demostración |

[SECCIÓN 1] **2 La semejanza de triángulos**

En geometría dos figuras son **semejantes** si poseen la misma forma, aunque su tamaño puede ser diferente. Para que dos figuras conserven una relación de semejanza es obligatorio que todas las medidas de las dos figuras guarden una relación de proporcionalidad.

Un ejemplo de semejanza se puede observar en un modelo a escala de un auto y el carro real, donde todas las medidas del modelo a escala son proporcionales con sus respectivas medidas del carro real. Observa la siguiente imagen que muestra más claramente la idea de semejanza:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG06 |
| **Descripción** | Carro escarabajo real y a escala |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/384199/384199,1242833840,1/stock-vector-top-view-on-the-blue-retro-beetle-car-vector-icon-30590491.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/384199/384199,1242833840,1/stock-vector-top-view-on-the-blue-retro-beetle-car-vector-icon-30590491.jpg> |
| **Pie de imagen** | En la figura, ambos vehículos guardan una relación de proporcionalidad entre sus medidas, por esta razón conservan su forma, luego se puede afirmar que ambas figuras son semejantes. |

Se ha mostrado una idea global sobre la semejanza, pero para profundizar en esta es necesario estudiar cómo son las relaciones proporcionales en figuras que conservan su semejanza.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC110 |
| **Título** | Los segmentos proporcionales |
| **Descripción** | Interactivo que explica el planteamiento de razones y proporciones entre segmentos |

[SECCIÓN 2] **2.1 La proporcionalidad y la relación de semejanza**

Cuando se quiere abordar la semejanza de figuras geométricas o no geométricas de una manera más formal, es necesario conocer y manejar adecuadamente las **proporciones** entre magnitudes, para posteriormente poder plantear el concepto de semejanza. ¿Conoces qué es la proporcionalidad entre magnitudes? En el siguiente apartado se desarrolla la definición de proporcionalidad entre magnitudes

SECCIÓN 3] **2.1.1 La proporcionalidad**

Para poder definir la **proporcionalidad** es necesario comprender el concepto de razón entre dos magnitudes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Razón entre dos magnitudes** |
| Contenido | Una razón es una relación que compara el tamaño de dos magnitudes. Es decir, una **razón** entre dos magnitudes *a* y *b* es el cociente entre *a* y *b*.  Se representa como *a* : *b* o mediante la fracción  <<MA\_09\_09\_11.gif>>  que se lee como: la razón *a* es a *b*. |

Observa las siguientes situaciones que ejemplifican el concepto de razón.

**Situación 1:** para preparar 1 taza de arroz se necesitan 2 tazas de agua.

Las magnitudes involucradas en esta situación son: número de tazas de arroz y número de tazas de agua; la razón entre tazas de arroz y tazas de agua es 1 : 2 y se expresa mediante la fracción

<<MA\_09\_09\_01.gif>>

**Situación 2**: si ahora se quieren preparar 5 tazas de arroz, ¿cuántas tazas de agua se necesitan?

Las magnitudes siguen siendo el número de tazas arroz y el número de taza de agua; se puede deducir que por cada 5 tazas de arroz se necesitarán 10 tazas de agua y la razón es 5 : 10 que se representa también mediante la fracción

<<MA\_09\_09\_02.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las magnitudes en matemáticas se pueden definir como todo lo que se puede medir asociándole a dicha medida un número real positivo; algunos ejemplos de magnitudes son: la distancia, el peso, la cantidad de objetos, el tiempo, entre otros. |

Teniendo en cuenta el concepto de razón, se puede definir la proporción entre magnitudes como sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Concepto de proporcionalidad** |
| Contenido | La proporcionalidad es la relación de igualdad entre dos razones.  Dadas dos razones *a* : *b* y *c* : *d*, la proporción entre estas magnitudes se representa como *a* : *b* :: *c* : *d*, o mediante la igualdad de fracciones:  <<MA\_09\_09\_12.gif>> |

De acuerdo con los ejemplos anteriores de razón, ambas situaciones relacionan las mismas dos magnitudes, tazas de arroz y tazas de agua: 1 taza de arroz y 2 tazas de agua, 5 tazas de arroz y 10 de agua; además, las dos razones representan la misma relación, que se expresa mediante la proporción:

<<MA\_09\_09\_03.gif>>

Se sabe que estas dos razones son iguales porque ambas representan la misma razón; para comprobarlo, basta simplificar o amplificar las fracciones que representan cada razón.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Comprobación de una proporción** |
| Contenido | Matemáticamente, dada una relación de **proporcionalidad:**  *a* : *b* :: *c* : *d*  el producto de medios es igual al producto de extremos. *a, d* son los extremos y *b, c* son los medios de la proporción.  De esta manera,  *a* · *d* = *b* · *c*  Al expresar la relación mediante fracciones se tiene que  <<MA\_09\_09\_05.gif>> |

Observa los siguientes ejemplos de proporcionalidad:

1. Un televisor cuesta $ 250 000, 20 televisores cuestan $ 5 000 000. Expresar esta relación mediante una proporción.

Se establecen las dos razones y se comprueba la proporción:

<<MA\_09\_09\_06.gif>>

Como se observa, las magnitudes están en proporción, ya que se cumple que el producto de medios es igual al producto de extremos.

1. Para hacer un postre para 10 personas se necesitan 3 libras de harina; si se quiere hacer el mismo postre para 50 personas, ¿cuántas libras de harina son necesarias?

En esta situación, el dato desconocido se representa con la letra *x*, se establece la proporción y se despeja la incógnita, así:

<<MA\_09\_09\_07.gif>>

Es decir, para hacer el postre para 50 personas se necesitan 15 libras de harina.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| Contenido | Pitágoras (siglo VI. a. C.) mediante un experimento musical, dividió una cuerda en 12 partes iguales; tensionó la cuerda hasta la división 6, hasta la división 8 y hasta la división 9, observando que producía sonidos distintos al hacerla vibrar; posteriormente, le asignó un número fraccionario a cada una de las divisiones de la cuerda y apareció que la octava era igual a ½, la cuarta a ¾, es decir, Pitágoras estableció una relación entre la música, la proporcionalidad geométrica y la proporcionalidad numérica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC120 |
| **Título** | Determina la razón entre pares de segmentos |
| **Descripción** | Actividad para establecer la razón entre segmentos proporcionales |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC130 |
| **Título** | Determina la medida de segmentos |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la proporcionalidad de segmentos para calcular medidas |

A continuación se presenta la relación de semejanza entre dos figuras, en la que se aplican relaciones proporcionales.

[SECCIÓN 3] **2.1.2 Los segmentos proporcionales**

Para construir una relación de proporcionalidad entre segmentos se debe, primero, establecer las **razones** entre estos. De esta forma, la razón entre dos segmentos es la razón entre las medidas de ellos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Razón entre segmentos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | E:\ecuaciones tema 9\imagenes\15.jpg |
| **Pie de imagen** | La razón entre los segmentos *AB* y *CD* es *r*. |

La relación de proporcionalidad entre segmentos, se define de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Proporcionalidad entre segmentos** |
| Contenido | Los segmentos *AB* y *CD* son proporcionales a los segmentos *EF* y *GH*, si *AB* es a *CD* como *EF* es a *GH*; matemáticamente esta relación se representa como  <<MA\_09\_09\_07.gif>> |

Las propiedades que cumple la proporcionalidad entre segmentos son:

1. El producto de medios es igual al producto de extremos.
2. Cuando se cambia el orden de los medios se obtiene la misma razón de proporcionalidad.
3. Cuando se cambia el orden de los extremos se obtiene la misma razón de proporcionalidad.

Esta relación proporcional se puede expresar geométricamente a través del teorema de Tales, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema de Tales** |
| Contenido | Si dos o más rectas paralelas son intersecadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados que están entre las mismas paralelas son proporcionales. |

Gráficamente el teorema de tales se representa de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG08 |
| **Descripción** | Gráfico teorema fundamental de proporcionalidad |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la figura, las rectas que determinan los segmentos *AB*, *CD* y *EF* son paralelas y de acuerdo con el teorema de Tales, se presenta la siguiente relación de proporcionalidad:  <<MA\_09\_09\_14.gif>> |

Existen muchas aplicaciones que utilizan la proporcionalidad entre segmentos; te invitamos a que las investigues para que las manejes y las entiendas, basándote en los conocimientos adquiridos hasta este momento en torno a las demostraciones, la semejanza y la proporcionalidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC140 |
| **Título** | Teorema de Tales y teorema fundamental de la semejanza de triángulos |
| **Descripción** | Interactivo que explica el planteamiento de razones y proporciones entre segmentos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC150 |
| **Título** | Aplica el teorema de Tales |
| **Descripción** | Ejercicios que permiten la aplicación del teorema de Tales para calcular distancias |

[SECCIÓN 2] **2.3 La semejanza**

En esta sección se enfatiza en la **semejanza** de figuras planas, de manera general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Semejanza de figuras planas** |
| Contenido | Dos figuras planas son semejantes si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:   1. Tienen la misma forma. 2. Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales. 3. Si las figuras tienen ángulos, sus ángulos correspondientes deben ser congruentes.   Para representar que dos figuras son semejantes, se utiliza el símbolo ∼; por ejemplo  Δ*ABC* ∼ Δ*DEF*  representa que los Δ*ABC* y Δ*DEF* son semejantes. |

Por ejemplo:

Determinar si los cuadriláteros *ABCD* y *A’B’C’D’* son semejantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG09 |
| **Descripción** | Cuadriláteros semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Imagen de los cuadriláteros *ABCD* y *A’B’C’D*’. |

Los cuadriláteros son semejantes porque cumplen las condiciones que definen cuándo dos figuras son semejantes:

1. Tienen la misma forma.
2. Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.

<<MA\_09\_09\_08.gif>>

1. Sus ángulos correspondientes son congruentes.

*∡DAB* ≅ *∡D’A’B’, ∡ABC* ≅ *∡A’B’C’, ∡BCD* ≅ *∡B’C’D’, ∡CDA* ≅ *∡C’D’A’*

Identificar si es cierta la relación entre los pentágonos: *ABCDE* ∼ *A’B’C’D’E’*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG10 |
| **Descripción** | Pentágonos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\6.JPG |
| **Pie de imagen** | Imagen de los pentágonos *ABCDE* y *A’B’C’D’E’*. |

Se cumple la relación *ABCDE* ∼ *A’B’C’D’E’,* porque satisfacen las siguientes condiciones:

1. Tienen la misma forma.
2. Sus lados correspondientes son proporcionales:

<<MA\_09\_09\_09.gif>>

1. *∡EAB* ≅ *∡E’A’B’, ∡ABC* ≅ *∡A’B’C’, ∡BCD* ≅ *∡B’C’D’, ∡CDE* ≅ *∡C’D’E’, ∡DEA* ≅ *∡D’E’A’*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC160 |
| **Título** | La semejanza de polígonos |
| **Descripción** | Actividad para practicar la semejanza de polígonos |

En la siguiente sesión el trabajo se centra en la semejanza de los triángulos.

[SECCIÓN 3] **2.3.1 La semejanza de triángulos**

La semejanza de triángulos es un caso específico de la semejanza de figuras planas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Semejanza de figuras planas** |
| Contenido | Dos **triángulos son semejantes** si se cumple cualquiera de las las siguientes condiciones:   1. Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales. 2. Los ángulos correspondientes son congruentes. |

Observa el siguiente ejemplo:

* Determinar la semejanza de los triángulos *∆ABC* y *∆A’B’C’*:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG11 |
| **Descripción** | Triángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\7.JPG |
| **Pie de imagen** | Imagen de los triángulos *∆ABC* y *∆A’B’C’*. |

Son semejantes porque sus lados son proporcionales y sus ángulos son congruentes, como se muestra a continuación:

1. Sus lados correspondientes son proporcionales:

<<MA\_09\_09\_10.gif>>

1. *∡CAB* ≅ *∡C’A’B’, ∡ABC* ≅ *∡A’B’C’, ∡BCA* ≅ *∡B’C’A’*

Por lo anterior, se puede concluir que *∆ABC* ∼ *∆A’B’C’.*

A simple vista es sencillo determinar cuándo dos triángulos son semejantes, si se tienen todas las medidas de los lados y de los ángulos de los dos triángulos, pero cuando no se conocen todas esas medidas, se pueden aplicar, en algunas ocasiones, unos criterios para determinar la semejanza de triángulos.

A continuación se presentan los **criterios de semejanza entre triángulos**:

**Criterio ángulo, ángulo (AA):** dos triángulos son semejantes si tiene dos ángulos congruentes.

Esto se debe a que el tercer ángulo también es congruente, puesto que la suma de sus ángulos es 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG12 |
| **Descripción** | Triángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\8.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆ABC* ∼ *∆A’B’C’* por el criterio AA. |

**Criterio lado, lado, lado (LLL):** dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG13 |
| **Descripción** | Triángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\9.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆ABC* ∼ *∆A’B’C’* por el criterio LLL. |

**Criterio lado, ángulo, lado (LAL)**: dos triángulos son semejantes si dos de sus lados correspondientes son proporcionales y el ángulo que se encuentra entre ellos es congruente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG14 |
| **Descripción** | Triángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\10.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆ABC* ∼ *∆A’B’C’* por el criterio LAL. |

Los anteriores criterios son los que nos permiten determinar cuándo dos triángulos son semejantes. La semejanza de triángulos se utiliza en geometría para realizar demostraciones de teoremas. En la siguiente sesión se trabaja con una clase especial de triángulos, los triángulos rectángulos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC170 |
| **Título** | Criterios de semejanza de triángulos |
| **Descripción** | Interactivo para reconocer los criterios de semejanza de triángulos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC180 |
| **Título** | Aplica los criterios de semejanza de triángulos |
| **Descripción** | Actividad para reconocer los criterios de semejanza en un par de triángulos |

[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los métodos de demostración |
| **Descripción** | Actividades sobre La semejanza de triángulos |

[SECCIÓN 2] **3 La semejanza de triángulos rectángulos**

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando se cumple alguno de los criterios anteriormente vistos, pero además por tener un ángulo congruente al ángulo recto, también se aplican los siguientes criterios:

**Criterio 1:** dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG15 |
| **Descripción** | Triángulos rectángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\11.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆ABC* ∼ *∆A*’*B*’*C*’ porque son triángulos rectángulos y, además, se cumple que *∡ACB* ≅ *∡A’C’B’*. |

**Criterio 2:** dos triángulos rectángulos son semejantes si los catetos son proporcionales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Triángulos rectángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\12.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆DEF* ∼ *∆D’E’F’*; como ambos triángulos tienen un ángulo recto, cumplen con el criterio de semejanza LAL, por tanto, solo se requiere establecer la proporción de sus lados para comprobar que son semejantes. |

**Criterio 3:** dos triángulos rectángulos son semejantes si la hipotenusa y un cateto son proporcionales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG17 |
| **Descripción** | Triángulos rectángulos semejantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\ecuaciones tema 9\imagenes\13.JPG |
| **Pie de imagen** | *∆DEF ∼* *∆D’E’F’* porque son triángulos rectángulos cuyas hipotenusas y catetos se relacionan proporcionalmente. |

Estos son los criterios que permiten determinar cuándo dos triángulos rectángulos son semejantes. En la siguiente sesión el trabajo se centrará en los segmentos proporcionales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las siguientes son algunas aplicaciones de la semejanza en diferentes actividades humanas:   * Medición de distancias inaccesibles. * Manejo de imágenes a escala en la fotografía y la pintura. * Uso de los retroproyectores y la misma fotocopiadora. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC200 |
| **Título** | Determina semejanza entre triángulos rectángulos |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la semejanza de triángulos rectángulos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC210 |
| **Título** | Los triángulos rectángulos y las razones trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo que explica la relación entre los triángulos rectángulos y las razones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC220 |
| **Título** | Calcula razones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para aplicar razones trigonométricas y calcular datos desconocidos en un triángulo |

[SECCIÓN 2] **3.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC230 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La semejanza de triángulos rectángulos |
| **Descripción** | Actividad sobre La semejanza de triángulos rectángulos |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Semejanza de polígonos |
| **Descripción** | Actividad para trabajar los números poligonales como la suma de los términos de una progresión |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC250 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre el tema Los métodos de razonamiento y la semejanza |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema Los métodos de razonamiento y la semejanza |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_09\_09\_CO\_REC280 | |
| **Web 01** | Eratóstenes y la medición de la tierra | <http://www.geociencias.unam.mx/geociencias/experimentos/serie/libro6_medicion_tierra.pdf> |
| **Web 02** | Los elementos de Euclides | <http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm> |
| **Web 03** | El teorema de Tales y geogebra | <http://tube.geogebra.org/student/m50592> |