|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | La circunferencia y la relación entre sus elementos |
| **Código de guion** | MA\_G09\_10\_CO |
| **Descripción** | El desarrollo de la humanidad se ha visto influenciado por los descubrimientos o inventos del hombre, algunos de estos inventos tienen ideas matemáticas, por ejemplo de la idea de circunferencia surge muchos elementos que hoy en día son usados uno de ello es la rueda, considerada como uno de los inventos más importantes de la historia, pero ¿qué es la circunferencia? te invitamos a que conozcas que es la circunferencia, cuáles son sus principales elementos y como se relacionan. |

Se puede definir a la circunferencia como: Una línea cerrada, en la cual todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Rueda de bicicleta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/74146/139684957/stock-photo-bicycle-wheel-isolated-on-white-background-139684957.jpg  <http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/74146/139684957/stock-photo-bicycle-wheel-isolated-on-white-background-139684957.jpg> |
| **Pie de imagen** | *La rueda es considerado uno de los inventos mas importantes de la humanidad y su forma es el de una circunferencia, donde su eje es el punto centrar y los rayos son sus radios.* |

Geométricamente es importante definir las tres clases de puntos que se pueden establecer con respecto a la circunferencia los cuales son:

1. Punto exterior: que se encuentra fuera de la circunferencia.
2. Punto sobre: que se encuentra sobre la línea de la circunferencia.
3. Punto interior: que se encuentra en el interior de la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Circunferencia y sus puntos relativos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\1.JPG |
| **Pie de imagen** | *Representación grafica de la circunferencia y la posición relativa de las tres clases de puntos que existen: punto A exterior, punto B sobre y punto C interior.* |

Existen algunos elementos que se relacionan con la circunferencia como lo son: las rectas, los ángulos, los segmentos, entre otros, a continuación se mostraran algunas de las relaciones más importantes entre estos elementos y la circunferencia.

[SECCIÓN 1] **1 Recta tangente a una circunferencia**

Una **recta es tangente a una circunferencia** cuando la recta toca en un punto que se encuentra sobre la circunferencia, la recta tangente también es llamada recta exterior a la circunferencia, observa el siguiente ejemplo grafico de una recta tangente a una circunferencia:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | Circunferencia y una recta tangente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\2.JPG |
| **Pie de imagen** | *La recta b es tangente a la circunferencia c en el punto H* |

Como se puede observar esta es una de las relaciones entre la recta y la circunferencia, pero de esta relación recta tangente y circunferencia surge otra relación entre la recta tangente a una circunferencia y el radio de la circunferencia, la cual será desarrollada en la siguiente sesión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Nota histórica** |
| Contenido | *Euclides (325 a. C., 265 a. C.) las dos propiedades que definían la recta tangente a una circunferencia son:*   1. *La recta sólo tiene en común un punto con la circunferencia.* 2. *Es imposible interponer otra línea entre esa recta y la circunferencia.* |

[SECCIÓN 2] **1.1 Relación tangente radio**

En el punto donde la **recta es tangente** a la circunferencia se puede determinar el **radio** de la circunferencia, debido a que el segmento que determina el radio forma un ángulo recto con la recta tangente en el punto de tangencia, observa el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Circunferencia, recta tangente y radio al punto tangente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\3.JPG |
| **Pie de imagen** | *La recta c es tangente a la circunferencia p en el punto Z, el radio AZ es perpendicular a la recta tangente c.* |

Es decir que esta relación permite determinar si una recta es tangente a una circunferencia, se debe mirando si el ángulo que forma el radio y la recta tangente en el punto tangente forma un ángulo de 90 grados, en la siguiente sesión el trabajo se centrara en los segmentos que se pueden construir al interior de la circunferencia, los ángulos que se pueden determinar con dichos segmentos y los pedazos de circunferencia que se pueden determinar con dichos ángulos.

[SECCIÓN 1] **2 cuerdas, arcos y ángulos centrales**

Existen tres elementos que se pueden establecer al interior de la circunferencia los cuales son:

* **Las** **cuerdas**: Segmentos que unen dos puntos distintos de la circunferencia, se denota con los dos puntos que define el segmento, observa el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Circunferencia, con algunas cuerdas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\4.JPG |
| **Pie de imagen** | *Circunferencia c con cuerdas FG, JK, HI, LM* |

* **Los arcos:** son las secciones de la circunferencia que está entre dos puntos que pertenecen a la circunferencia, dos puntos distintos que estén sobre la circunferencia la dividen en dos arcos, el que tiene mayor dimensión se denomina arco mayor y el que tiene menor dimensión arco menor, los arcos se denotan con las dos letras que nombran a los dos puntos y colocándole un semi arco pequeño en la parte superior, las letras se escriben de forma anti horario, observa el siguiente ejemplo grafico de dos arcos y la forma como se deben nombrar:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Circunferencia, con su arco mayor y su arco menor |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\5.JPG |
| **Pie de imagen** | *Circunferencia con el arco mayor JG y el arco menor GJ.* |

* **Ángulos centrales**: Son los ángulos cuyo vértice es el punto centro de la circunferencia, sus lados son dos radios de la circunferencia, la forma como se denotan es utilizando el símbolo de los ángulos, los dos punto de la circunferencia y el punto centrar de la circunferencia, observa el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Circunferencia y un ángulo centrado |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\6.JPG |
| **Pie de imagen** | *Circunferencia c con* ∡ *GAF. un ángulo centrado* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Formula que relaciona el radio, el ángulo centrar y la longitud de arco** |
| Contenido | *Existe una fórmula que relaciona el radio, la longitud del arco de la circunferencia y el ángulo central, donde:*  *L: la longitud de arco.*  *r: es el radio.*  *α: es el ángulo central.*  *<<MA\_09\_10\_01.gif>>*  *Donde el ángulo centrar estará en grados, es decir que teniendo dos de los tres datos se puede encontrar el otro dato* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG08 |
| **Descripción** | Circunferencia con un ángulo central, el radio y la longitud de arco. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\8.jpg |
| **Pie de imagen** | L: la longitud de arco.  r: es el radio.  α: es el ángulo central. |

En la siguiente sección el trabajo girara en torno a los ángulos cuyo vértice es un punto que hacen parte de la circunferencia.

[SECCIÓN 1] **3** **Ángulos inscritos**

Los **ángulos inscritos** en una circunferencia son todos los ángulos cuyo vértice se encuentra sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de la circunferencia, observa el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG09 |
| **Descripción** | Circunferencia con un ángulo inscrito |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\7.jpg |
| **Pie de imagen** | *Circunferencia h con el* ∡ *CBD inscrito.* |

En la siguiente sección se desarrollara un repaso de los diferentes elementos de la circunferencia que se han visto hasta este momento, vinculando un nuevo elemento como lo son las rectas secantes, mostrando algunas de las relaciones que se pueden establecer entre dichos elementos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema del ángulo centrar y el ángulo inscrito** |
| Contenido | *El ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito subtendido por esos dos puntos.* |

[SECCIÓN 1] **3 Cuerdas, tangentes, secantes y Ángulos**

En las secciones anteriores el trabajo se centró en algunos elementos de la circunferencia como lo son las **cuerdas**, las **rectas tangentes**, los **ángulos centrales** y **ángulos inscritos**, en esta sección se mostrara que son **las rectas secantes** a la circunferencia, posteriormente se profundizará un poco más en cada uno de los elementos que hacen parte o se relacionan con la circunferencia, por último se mostraran algunas de las relaciones que se pueden establecer entre dichos elementos.

**Secantes:** las rectas secantes son aquellas que tocan a la circunferencia en dos puntos, observa el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG10 |
| **Descripción** | Recta secante a la circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | J:\guion 10\imagenes\9.jpg |
| **Pie de imagen** | *Recta l secante a la circunferencia h en los puntos C y B.* |

Ahora se profundizara en cada uno de los elementos de la circunferencia y se mostraran algunas relaciones entre ellos.

**Cuerdas:** recuerda que son segmentos que unen dos puntos de circunferencia, algunas de sus características y propiedades son:

* .la **cuerda** de mayor dimensión que se puede crear es el diámetro de la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG011 |
| **Descripción** | Cuerda de mayor dimensión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\10.JPG |
| **Pie de imagen** | *La cuerda ED es el diámetro de la circunferencia c y es la cuerda de mayor dimensión que se puede construir sobre la circunferencia c* |

* Toda **cuerda** está contenida en una recta que es **secante** a la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG12 |
| **Descripción** | Recta secante a la circunferencia que contiene una cuerda que pertenece a la circunferencia. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\11.JPG |
| **Pie de imagen** | *La recta b es secante a la circunferencia c en los puntos E y D que forman la cuerda ED.* |

* Dos cuerdas equidistan del centro de la circunferencia si y solo si las cuerdas tiene la misma medida.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG13 |
| **Descripción** | Dos cuerdas de la circunferencia que equidistan del centro |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\12.JPG |
| **Pie de imagen** | *AB y A´B´ son cuerdas de la circunferencia h qur tiene la misma medida, por tal razón los segmentos FC ≅ F´C son congruente.* |

**Tangentes:** recuerda que una recta es tangente a una circunferencia si y solo si la toca en un punto.

* El punto de intersección de la recta y la circunferencia se denomina punto de tangencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG14 |
| **Descripción** | Recta tangente a una circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\14.jpg |
| **Pie de imagen** | *Recta l es tangente a la circunferencia c en el punto B, B se denomina punto de tangencia.* |

* La recta **tangente** a una circunferencia en el punto P es perpendicular al radio que tiene como extremo el centro de la circunferencia y el punto P.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG15 |
| **Descripción** | Recta tangente a una circunferencia y radio PA perpendicular a la recta tangente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\15.jpg |
| **Pie de imagen** | *Recta b es tangente a la circunferencia c con centro en A, en el punto P, el segmento AP es el radio de la circunferencia c y es perpendicular a la recta b.* |

* Dado un punto D que se es exterior a la circunferencia j, se pueden trazar dos rectas *l* y *m***tangentes** a la circunferencia cuyos puntos de tangencia son respectivamente B y C se cumple que, los triángulos ∆ DBA y ∆DCA son triángulos rectángulos

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG16 |
| **Descripción** | Dos rectas con un punto en común son tangentes a una circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\16.jpg |
| **Pie de imagen** | *Rectas l y m tangentes a la circunferencia j respectivamente en los puntos B y C,* ∆  *DBA*  ∆  *DCA son triángulos rectángulos* |

**Ángulos:** recuerda que un ángulo se puede definir como la unión de dos segmentos o dos semi rectas o un segmento y una semi recta, que tiene un punto en común que se llama vértice.

Además de los **ángulos centrales** y los **ángulos inscritos** con los cuales se trabajo en las secciones anteriores, también se encuentran los siguientes ángulos que se relacionan con la circunferencia.

* **Angulo semiinscrito:** son los ángulos cuyo vértice es un punto que se encuentra sobre la circunferencia, un lado es **secante** a la circunferencia y el otro es **tangente** a ella.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG17 |
| **Descripción** | Angulo semiinscrito en una circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\17.jpg |
| **Pie de imagen** | *El ∡EBG es un ángulo semiinscrito en la circunferencia j* |

* **Angulo interior:** son los ángulos cuyo vértice es un punto que se encuentra al interior de la circunferencia y sus lados son segmentos o semirectas **secantes** a la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG18 |
| **Descripción** | Angulo interior de una circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | **F:\guion 10\imagenes\18.jpg** |
| **Pie de imagen** | *El ∡BHD es un ángulo interior de la circunferencia j* |

* **Ángulos Exteriores:** son ángulos cuyo vértice es un punto que se encuentra en el exterior de la circunferencia y sus lados son o **secantes** a ella, o uno **tangente** y otro **secante**, o **tangentes** a ella.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG19 |
| **Descripción** | Angulo exterior a una circunferencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\19.jpg |
| **Pie de imagen** | *El ∡BHD es un ángulo exterior de la circunferencia j* |

Como se puede observar existen muchas formas de relacionan los ángulos, las cuerdas, las rectas secantes, las rectas tangentes en torno a la circunferencia, en la siguiente sesión el trabajo se centrara en la forma como se pueden medir los diferentes segmentos que hacen parto o se relacionan con la circunferencia.

[SECCIÓN 1] **3 Medidas de segmentos de la circunferencia.**

Los segmentos que se relacionan con la circunferencia son: el **radio**, el **Diámetro** y las **cuerdas**, a continuación se mostraran algunos métodos que se pueden utilizar para encontrar las mediadas de estos segmentos, cabe recordar que se deben cumplir ciertas condiciones para utilizar cada una de estos métodos.

Para encontrar la medida del **radio** de una circunferencia, en esta ocasión se utilizaran dos métodos cada uno con su fórmula, en la primera fórmula es necesario conocer la longitud del arco de la circunferencia, en la segunda fórmula es necesario conocer el área de la circunferencia:

* <<MA\_09\_10\_02.gif>>

Don de L es la longitud de arco de la circunferencia y r el radio.

* <<MA\_09\_10\_03.gif>>

Donde A es el área de la circunferencia y r el radio.

Observa los siguientes ejemplos:

1. Se tiene una llanta cuya longitud de arco es de 220 cm calcule su radio.

Utilizando la fórmula:

<<MA\_09\_10\_04.gif>>

El radio de la circunferencia de la llanta es de *35 cm*

1. Se tiene una rueda de la fortuna cuya área es de 28mt2, calcular su radio.

Utilizando la fórmula:

<<MA\_09\_10\_05.gif>>

El radio de la rueda de la fortuna es *97,3mt*

Para encontrar la medida del **diámetro** el procedimiento que se debe hacer es encontrar la medida del **radio** y multiplicarla por dos, observa los siguientes ejemplos:

1. Se tiene una llanta cuya longitud de arco es de 220 cm calcule su perímetro.

El radio de la llanta es de 35cm, se multiplica por dos y se encuentra el diámetro que es de 70 cm.

1. Se tiene una rueda de la fortuna cuya área es de 28mt2, calcular su perímetro.

El radio de la rueda de la fortuna es de 97,3 cm, se multiplica por dos y se encuentra el diámetro que es de 194,6 cm.

Para encontrar la medida de las **cuerda** de una circunferencia no se puede establecer un procedimiento como tal con los conocimientos que se han adquirido hasta este momento, es decir que no se puede encontrar su medida, más adelante cuando se trabaje con la trigonometría en grado decimo si será posible establecer un procedimiento para encontrar la longitud de cualquier cuerda, si se tiene el valor del radio, lo que se puede establecer en este momento son algunas relaciones entre las longitudes de las **cuerdas** apoyándose de algunos teoremas, los teoremas son los siguientes:

* Si dos **cuerdas** se intersecan, el producto de las medidas de los segmentos determinados en una **cuerda** es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados en la otra **cuerda**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG20 |
| **Descripción** | Dos cuerdas intersecadas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 10\imagenes\13.JPG |
| **Pie de imagen** | *Dos cuerdas intersecadas donde AH.HB = DH.HG* |

* Si se traza un segmento **secante** y otro que sea **tangente** desde un punto exterior a la circunferencia, el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de la longitud del segmento secante y de su segmento secante externo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG21 |
| **Descripción** | Segmento secante y segmento tangente desde un punto externo a la circunferencia. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\20.jpg |
| **Pie de imagen** | *CB2=CD.CE* |

* Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos segmentos que sean secantes entonces el producto de las medidas de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las medidas del otro segmento secante y su segmento secante externo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_05\_IMG22 |
| **Descripción** | Segmento secantes desde un punto externo a la circunferencia. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | F:\guion 10\imagenes\21.jpg |
| **Pie de imagen** | *EF.EB=EG.EH* |

Estos son los teoremas métricos que relacionan de una forma directa o indirecta las medidas de las cuerdas de una circunferencia.