|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | Probabilidad |
| **Código de guion** | MA\_G09\_13\_CO |
| **Descripción** | Expresiones como “probablemente llueva mañana” o “es probable que nuestro equipo gane el juego” son comunes en nuestro lenguaje cotidiano, pero sabias que las matemáticas se encargan de medir la posibilidad de que dichos sucesos ocurran, te invitamos a que conozcas esta rama de las matemáticas que se denomina probabilidad. |

La **probabilidad** es una rama de las matemáticas que mide cuantitativamente la posibilidad que un hecho o suceso ocurra. La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1, entre más se acerque a 1 es más probable que suceso y entre más se acerque a 0 es menos probable que suceda, también puede ser expresada en porcentajes, es decir entre 0% y 100%.

[SECCIÓN 1] **1 Experimentos aleatorios**

Son **experimentos aleatorios**, aquellos en los que no se puede determinar o predecir el resultado, ya que éste depende solamente del azar.

Extraer de una baraja de naipes una carta, lanzar un dado o una moneda al aire, son algunos ejemplos de experimento aleatorio ya que no se puede determinar anticipadamente el resultado que se va a obtener.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG01 |
| **Descripción** | Ruleta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/540268/250540969/stock-photo-high-contrast-image-of-casino-roulette-250540969.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/540268/250540969/stock-photo-high-contrast-image-of-casino-roulette-250540969.jpg> |
| **Pie de imagen** | *La ruleta es un juego de azar, que consiste en lanzar una bola a la ruleta, mientras ésta gira. También considerada un experimento aleatorio, pues el azar, es el que determina en que casillero de la ruleta va a caer la bola.* |

[SECCIÓN 2] **1.1 Espacio muestral y sucesos**

El **espacio muestral** es el conjunto de **todos** los posibles resultados que se puedan obtener de un experimento aleatorio. Generalmente, los espacios muestrales se denotan con la letra

Los siguientes son ejemplos de espacios muestrales de algunos experimentos aleatorios:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG02 |
| **Descripción** | Espacio muestral al lanzar una moneda al aire |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/602809/246126172/stock-photo--colombian-pesos-coin-isolated-on-white-background-246126172.jpg  <http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/602809/246126172/stock-photo--colombian-pesos-coin-isolated-on-white-background-246126172.jpg> |
| **Pie de imagen** | c: cara s: sello  = { c , s } |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG03 |
| **Descripción** | Espacio muestral al lanzar un dado |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1374529/165520058/stock-photo-red-dice-isolated-on-a-white-background-165520058.jpg  <http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1374529/165520058/stock-photo-red-dice-isolated-on-a-white-background-165520058.jpg> |
| **Pie de imagen** | ***S*** *= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG04 |
| **Descripción** | Espacio muestral al lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/858871/858871,1328047554,1/stock-photo-one-red-dice-on-pile-of-euro-coin-on-white-background-94028947.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/858871/858871,1328047554,1/stock-photo-one-red-dice-on-pile-of-euro-coin-on-white-background-94028947.jpg> |
| **Pie de imagen** | c: cara s: sello  = { ( c , 1) ; ( c , 2 ) ; ( c , 3 ) ; ( c , 4 ) ; ( c , 5 ) ; ( c , 6 ) ; ( s , 1 ) ; ( s , 2 ) ; ( s , 3 ) ; ( s , 4 ) ; ( s , 5 ) ; ( s , 6 ) } |

Un subconjunto del espacio muestral se denomina **suceso** y se denotan con letras mayúsculas como A. B, C.

Algunos **sucesos** que se pueden determinar al lanzar un dado, son: obtener un número impar, obtener un número menor a 3, sacar el número 4, entre otros.

Ya se han estudiados algunos conceptos básicos probabilísticos, en la siguiente sección profundizaremos en los **tipos de sucesos**.

[SECCIÓN 2] **1.2 Tipos de sucesos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **tipos de sucesos** |
|  | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Tipos de sucesos** | **Definición** | **Ejemplo:**  Al lanzar un dado al aire | | **Elemental o simple** | Es cada uno de los posibles resultados que forman el espacio muestral | **A:** Sacar el número 3  **A** = { 3 } | | **Compuesto** | Es un subconjunto del espacio muestral, que está determinado por dos o más resultados de éste | **B:** Obtener un número impar  **B** = { 1 , 3 , 5 } | | **Seguro** | Está formado por todos los posibles resultados del espacio muestral | **C:** Obtener una puntuación menor que 7  **C** = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } | | **Imposible** | Es aquel que no tiene posibilidad de ocurrir, es decir, no tiene ningún elemento. Se representa con la letra | **D:** Sacar el número 8  **D** = ∅ | | **Compatibles** | Dos sucesos, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental en común | **F:** Obtener un numero par  **F =** { 2 , 4 , 6 }  **G:** Sacar un múltiplo de 6  **G =** { 6 }  Por lo tanto,  **F** y **G** son sucesos compatibles porque 6 es un suceso elemental común a ambos sucesos | | **Incompatibles** | Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común | **H:** Obtener un número impar  **H =** { 1 , 3 , 5 }  **J:** Sacar un múltiplo de 2  **J =** { 2 , 4 , 6 }  Por lo tanto,  **H** y **J** son sucesos incompatibles porque no tienen elementos comunes | |

[SECCIÓN 2] **1.3 Operaciones con sucesos**

Se pueden realizar distintas operaciones con los sucesos de un experimento aleatorio:

Dados dos sucesos ***A*** *y* ***B****:*

**Unión A*∪ B*** Es el suceso formado por todos los sucesos elementales de **A**, de **B** o de ambos.

Ejemplo:

Sean **A** y **B**, sucesos del experimento aleatorio, ***lanzar un dado***:

|  |  |
| --- | --- |
| **A:** Obtener un número par | ***A =*** { 2 , 4 , 6 } |
| **B:** Obtener un número menor a 4 | ***B =*** { 1 , 2 , 3 } |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG05 |
| **Descripción** | ***A ∪ B*** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 13\imagenes\MA_09_13_IMG05.JPG |
| **Pie de imagen** | ***A ∪ B =*** { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 } |

**Intersección *A ∩ B***

Es el suceso formado por todos los sucesos elementales, que son a la vez, de **A** y de **B**

Ejemplo:

Sean **A** y **B**, sucesos del experimento aleatorio, ***lanzar un dado***:

|  |  |
| --- | --- |
| **A:** Obtener un número impar | ***A*** *=**{ 1 , 3 , 5 }* |
| **B:** Obtener un múltiplo de 5 | ***B*** *= { 5 }* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG06 |
| **Descripción** | ***A ∩ B*** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 13\imagenes\MA_09_13_IMG06.bmp |
| **Pie de imagen** | ***A ∩ B =*** { 5 } |

**Diferencia *A-B***

Es el suceso formado por todos los sucesos elementales que son de **A**, que no son de***B***

Ejemplo:

Sean ***A*** *y* ***B***, sucesos del experimento aleatorio, **lanzar un dado**:

|  |  |
| --- | --- |
| **A:** Obtener un número par | **A =** { 2 , 4 , 6 } |
| **B:** Obtener un múltiplo de 6 | **B =** { 3 , 6 } |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG07 |
| **Descripción** | **A – B** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 13\imagenes\MA_09_13_IMG07.JPG |
| **Pie de imagen** | ***A - B =*** *{ 2 , 4 }* |

Cabe aclarar que el suceso **A-B** es diferente a **B- A.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG08 |
| **Descripción** | ***B – A*** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 13\imagenes\MA_09_13_IMG08.JPG |
| **Pie de imagen** | ***B - A =*** *{ 3 }* |

**Suceso contrario**

Es el suceso formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral, que no están en **A**, se denota con la A mayúscula y una línea sobre ella.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El *espacio muestral* es el conjunto de todos los posibles resultados que se puedan obtener de un experimento aleatorio. se denota con la letra ***S*** |

Ejemplo:

Sea ***A***, suceso del experimento aleatorio, ***lanzar un dado***:

|  |  |
| --- | --- |
| **S:** Espacio muestral del experimento | ***S*** *=* { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } |
| ***A:*** Obtener un número impar | ***A*** *= { 1 , 3 , 5 }* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG09 |
| **Descripción** | Suceso contrario |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | I:\guion 13\imagenes\MA_09_13_IMG09.JPG |
| **Pie de imagen** | <<MA\_09\_12\_01.gif>> |

En la siguiente sección, enfocaremos nuestra atención en las frecuencias de un suceso probabilístico.

[SECCIÓN 1] **2 Frecuencia de un suceso**

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, determinada cantidad de veces (*n* veces). Se representa por ***fa***.

La **frecuencia relativa** es el cociente (división) de la frecuencia absoluta *fa* por el número de veces *n,* que se repite el experimento aleatorio. Se representa:

<<MA\_09\_12\_02.gif>>

La siguiente situación ejemplifica como determinar las frecuencias absoluta y relativa de un suceso:

: En una urna hay 7 balotas rojas, 5 azules y 9 verdes. Se extrae una balota y se anota el color, regresándola nuevamente a la urna, esta acción se realiza 35 veces. Los resultados, del experimento fueron:

19 veces salió balota roja

10 veces salió balota azul

6 veces salió balota verde

A continuación, se construye la tabla de frecuencias

¿Cuántas veces se sacó una balota de la urna? 35 veces, por lo tanto, ***n*** = 35

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Color de la Balota** | **Roja** | **Azul** | **Verde** | **Total** |
| ***fa***  **(Frecuencia absoluta)** | 19 | 10 | 6 | 35 |
| ***fr (A)***  **(Frecuencia**  **relativa)** <<MA\_09\_12\_03.gif>> | <<MA\_09\_12\_04.gif>> | <<MA\_09\_12\_05.gif>> | <<MA\_09\_12\_06.gif>> | 0,99 ~ 1 |

[SECCIÓN 1] **3 Probabilidad de un suceso**

Cuando todos los resultados de un experimento aleatorio, tienen la misma posibilidad de ocurrir se dice que son **equiprobables**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La probabilidad que ocurra un suceso *A*** |
|  | se determina hallando el cociente (división) entre el número de sucesos favorables que componen a ***A***y el número de sucesos del espacio muestral. Se representa *como* ***P(A).***  **P(A) =** (número de sucesos favorable de A) / (número de suceso del espacio muestral**)**  Este resultado es conocido como Regla de Laplace y solamente se aplica cuando todos los casos tienen la misma probabilidad de ocurrir. |

Algunos ejemplos:

***A****:* Martín, tiene en su bolsillo 5 monedas de $500 y 3 de $ 200. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de $200?

<<MA\_09\_12\_07.gif>>

La probabilidad de sacar una moneda de $200, es 3 de 8; 0,375 o el 37,5 %

***B****:* Extraer una carta de ases de una baraja de 40.

<<MA\_09\_12\_08.gif>>

En una baraja de 40 cartas, hay 4 ases, por lo tanto, la probabilidad de sacar un as, es 4 de 40; 0,1 o el 10%

***C****:* Obtener un número par al lanzar un dado

<<MA\_09\_12\_09.gif>>

Al lanzar un dado, hay 3 posibilidades de obtener un número par de un total de 6, es decir sacar 2, 4 o 6. Entonces, la probabilidad de obtener un número par es 3 de 6; 0,5 o el 50%

[SECCIÓN 2] **3.1 Propiedades de la probabilidad**

Sea ***S*** el espacio muestral de un experimento aleatorio, ***A*** y ***B*** sucesos del mismo.

En el cálculo de probabilidades se cumplen las siguientes propiedades:

1. <<MA\_09\_12\_10.gif>>

Ejemplo:

La probabilidad de sacar un as de una baraja es de *0,1* Por lo tanto, la probabilidad de no sacar un as será de:

*1 – 0,1 = 0,9* o del 90%.

En los ejemplos de las propiedades 2 a la 7, consideraremos el experimento de lanzar un dado

1. *P(S) = 1*

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número menor a 7 es igual a:

<<MA\_09\_12\_11.gif>> o del 100 %

1. *P(∅)= 0*

Ejemplo:

La probabilidad de obtener el número 8 es igual a:

<<MA\_09\_12\_12.gif>>

1. Si *A⊂ B→P(A) ≤ P(B)*

Sea , el suceso de obtener un número mayor que 4, y obtener un número mayor que 2. La probabilidad que:

<<MA\_09\_12\_13.gif>>

<<MA\_09\_12\_14.gif>>

Como todos los elementos de *A∈B,* entonces *A⊂ B,* entonces 0,33 0,66.

1. *P(A-B)= P(A)-P(A∩B)*

Sea ***A***, el suceso de obtener un número menor que 6, y ***B*** obtener un número par

*A= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }, B={ 2 , 4 , 6 }, A-B = { 1 , 3 , 5 }, A∩B = { 2 , 4 }*

<<MA\_09\_12\_15.gif>>

Es decir que la probabilidad es de 0,5

1. La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es *P(A∪B)= P(A)+P(B)-P(A∩B)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos sucesos, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental en común. |

Sea *A*, el suceso de obtener un número impar, y *B* obtener un múltiplo de 3.

*A= { 1 , 3 , 5 }, B={ 3 , 6 }, A∩B = { 3 }*

<<MA\_09\_12\_16.gif>>

la probabilidad es de 0,66

1. La probabilidad de la unión dos sucesos incompatibles es *P(A∪B)= P(A)+P(B)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común. Es decir, que *A∩B = ∅* |

Sea *A,* el suceso de obtener un número par menor a 6, y *B* obtener un múltiplo de 5.

*A= { 2 , 4 }, B={ 5 }, A∩B = ∅*

<<MA\_09\_12\_17.gif>>

La probabilidad es de 0,5

[SECCIÓN 1] **4 Experimentos aleatorios compuestos**

Un **experimento aleatorio compuesto** es el que está formado por dos o más experimentos aleatorios simples, realizados consecutivamente.

Es decir, si se lanza una moneda o un dado, son experimentos aleatorios simples, pero si se realiza el experimento de lanzar un dado y posteriormente una moneda, se estaría realizando un experimento compuesto, cuyo espacio muestral es:

c: cara s: sello

**S** = { ( c , 1) ; ( c , 2 ) ; ( c , 3 ) ; ( c , 4 ) ; ( c , 5 ) ; ( c , 6 ) ; ( s , 1 ) ; ( s , 2 ) ; ( s , 3 ) ; ( s , 4 ) ; ( s , 5 ) ; ( s , 6 ) }

[SECCIÓN 2] **4.1 Diagrama de árbol**

El **diagrama de árbol**, es una técnica que permite obtener los posibles resultados de un experimento cuando se produce en pocas etapas. Cada paso del experimento se representa en una ramificación del árbol. Se puede determinar el total de resultados posibles de un experimento y el número de resultados favorable de cualquier suceso del experimento compuesto.

Los siguientes son algunas ejemplificaciones de diagramas de árbol resultantes al realizar un experimento aleatorio compuesto

* Lanzar una moneda al aire 2 veces y sacar una balota, de una urna que contiene una balota roja, una morada y una amarilla:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG10 |
| **Descripción** | Diagrama de árbol |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Diagrama de árbol del experimento lanzar una moneda al aire 2 veces y sacar una balota, de una urna que contiene una balota roja, una morada y una amarilla: |

* Samuel, tiene 4 pantalones, 4 camisas y 2 pares de zapatos. ¿De cuantas maneras diferentes se puede vestir?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG11 |
| **Descripción** | Diagrama de arbolo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | P1: pantalón 1, P2: pantalón, P3: pantalón 3, P4: pantalón 4  C1: camisa 1, C2: camisa 2, C3: camisa 3, C4: camisa 4  Z1: zapatos 1, Z2: zapatos |

En total tiene 32 forma distintas de vestirse.

[SECCIÓN 1] **5 Probabilidad condicionada**

Sean A y B sucesos de un mismo experimento aleatorio. Se denomina **probabilidad condicionada** a la probabilidad de que ocurra el suceso A si ha ocurrido el suceso B.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La probabilidad condicional se define como:** |
|  | <<MA\_09\_12\_18.gif>> |

El siguiente ejemplo, ayudará a aclarar un poco más el concepto y su aplicación.

Una persona lanza una moneda 3 veces. Se debe Determinarla probabilidad de obtener 3 caras, teniendo en cuenta que salió por lo menos una vez cara.

**S :** Espacio muestral

**S** = { ccc , ccs , csc , css , scc , scs , ssc , sss }

**B**: Suceso que por lo menos salió una vez cara

**B** = { ccc , ccs , csc , css , scc , scs , ssc }

<<MA\_09\_12\_19.gif>>

**A**: Suceso que se obtengan 3 caras

**A** = { ccc }

<<MA\_09\_12\_20.gif>>

Por lo tanto,

<<MA\_09\_12\_21.gif>>

La probabilidad es de 0,14

[SECCIÓN 2] **5.1 Sucesos dependientes**

Sean *A* y *B* sucesos de un mismo experimento aleatorio, son **sucesos dependientes** si la realización de *A* condiciona la realización de *B*, es decir, P(B|A) ≠ P(B), lo que indica que *B* se ve afectada porque el suceso *A* haya sucedido o no, Se determina mediante:

<<MA\_09\_12\_22.gif>>

Extraer 1 carta de una baraja de 40, sin hacer reposición de ella y extraer una segunda carta, es un ejemplo de **suceso dependiente**, ya que el tamaño del espacio muestral para la primera es de 40, al no reponerse en la baraja la primera carta, se reduce a 39 para la segunda. Es decir, que un suceso se ve afectado por que ocurra o no el otro.

[SECCIÓN 1] **6 Resolución de problemas probabilísticos**

Con la finalidad que los conceptos y su aplicación sean claros, se profundizan los contenidos, implementando resolución de problemas

1. Determina la probabilidad de obtener un múltiplo de 5, conociendo que el número es impar. Es un caso de probabilidad condicionada.

*A={ 5 }, B= { 1 , 3 , 5 }, A∩B = { 5 }*

<<MA\_09\_12\_23.gif>>

La probabilidad es de 0,33

1. Extraer de una urna, que contiene 3 esferas azules y 2 verdes, 2 esferas sin hacer devolución de esferas. Vamos a determinar la probabilidad de obtener en la primera extracción una esfera verde y en la segunda una azul.

Si en la primera extracción se saca una esfera verde, en la segunda se tienen en la urna las 3 azules.

La probabilidad de sacar 1 esfera verde en la primera extracción

<<MA\_09\_12\_24.gif>>

La probabilidad de sacar 1 esfera verde en la segunda extracción, siguen quedando las 3

<<MA\_09\_12\_25.gif>>

Por lo tanto,

<<MA\_09\_12\_26.gif>>

La probabilidad es del 0,3

[SECCIÓN 1] **7 competencias**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** |  | |
| **Web 01** | Es una página donde se presenta de una manera muy clara que es la probabilidad y los conceptos que la componente. | <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html> |
| **Web 02** | Es una página donde se trabaja el concepto de probabilidad y los conceptos que lo componente de una manera interactiva por medio de ejemplos sencillos | <http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/probabilidad/index.html> |
| **Web 03** | Es una página donde se muestra la historia de la probabilidad | <http://datateca.unad.edu.co/contenidos/100402/moduloexe/anexo_1_resea_histrica_sobre_la_probabilidad.html> |