|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | Probabilidad |
| **Código de guion** | MA\_G09\_13\_CO |
| **Descripción** | Expresiones como “probablemente llueva mañana” o “es probable que nuestro equipo gane el juego” son comunes en nuestro lenguaje cotidiano, pero sabias que las matemáticas se encargan de medir la posibilidad de que dichos sucesos ocurran, te invitamos a que conozcas esta rama de las matemáticas que se denomina probabilidad. |

[SECCIÓN 1] **1. Experimentos aleatorios**

Se denominan **experimentos aleatorios** aquellas situaciones en las que no se puede determinar o predecir el resultado, ya que éste depende solamente del azar.

Extraer de una baraja de naipes una carta, lanzar un dado o una moneda al aire, son algunos ejemplos de experimentos aleatorios ya que no se puede determinar anticipadamente el resultado que se va a obtener.

La **probabilidad** es una rama de las matemáticas que estudia cuantitativamente la posibilidad que un hecho ocurra o no.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG01 |
| **Descripción** | Ruleta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/540268/250540969/stock-photo-high-contrast-image-of-casino-roulette-250540969.jpg  <http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/540268/250540969/stock-photo-high-contrast-image-of-casino-roulette-250540969.jpg> |
| **Pie de imagen** | La ruleta es un juego de azar, que consiste en lanzar una bola a la ruleta, mientras ésta gira. También considerada un experimento aleatorio, pues el azar, es el que determina en que casillero de la ruleta va a caer la bola. |

La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1, entre más se acerque a 1 es más probable que suceso y entre más se acerque a 0 es menos probable que suceda, también puede ser expresada en porcentajes, es decir entre 0% y 100%.

[SECCIÓN 2] **1.1 Espacio muestral**

El **espacio muestral** es el conjunto de **todos** los posibles resultados que se pueden obtener de un experimento aleatorio. Generalmente, los espacios muestrales se denotan con la letra ***S***

Los siguientes son ejemplos de espacios muestrales de algunos experimentos aleatorios:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG02 |
| **Descripción** | Espacio muestral al lanzar una moneda al aire |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/602809/246126172/stock-photo--colombian-pesos-coin-isolated-on-white-background-246126172.jpg  <http://thumb9.shutterstock.com/display_pic_with_logo/602809/246126172/stock-photo--colombian-pesos-coin-isolated-on-white-background-246126172.jpg> |
| **Pie de imagen** | Al lanzar una moneda al aire y anotar sus resultados, dado que  c: cara  s: sello  El espacio muestral es  *S* = {c, s } |

* El lanzamiento de un dado al aire, tiene como espacio muestral:

*S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

* El espacio muestral de lanzar un dado y una moneda al aire dado que *c* representa cara y *s* sello es

*S* = {(c, 1); (c, 2); (c, 3); (c, 4); (c, 5); (c, 6); (s, 1); (s ,2); (s, 3); (s, 4 ); (s, 5 ); (s , 6)}

* Entre Jorge, Maria, Diana, Cristian y Andres seleccionar una persona al azar como ganadora de una rifa

*S* = {Jorge, Maria, Diana, Cristian y Andrés}

[SECCIÓN 2] **1.2 Suceso**

**Los sucesos** son los posibles resultados de un experimento aleatorio. En general se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Suceso aleatorio** |
|  | Un subconjunto del espacio muestral se denomina **suceso** y se denota con letras mayúsculas como *A*, *B*, *C*. |

Algunos **sucesos** que se pueden determinar al lanzar un dado, son: obtener un número impar, obtener un número menor a 3, sacar el número 4, entre otros.

Por ejemplo, dado el experimento aleatorio de lanzar al aire un dado y anotar el resultado, tiene como espacio muestral al conjunto *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

* Sea *A* el suceso de obtener un número impar, por lo tanto *A* = {1, 3, 5}
* Sea *B* el suceso de obtener un número menor que 3, así *B* = {1, 2, 3}
* Sea *C* el suceso de obtener 4, de esta manera *C* = {4}

Un suceso aleatorio se clasifica en suceso elemental o simple, suceso compuesto, suceso seguro y suceso imposible como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Tipos de sucesos** | **Definición** | **Ejemplo:** |
| **Suceso elemental o simple** | Es aquel suceso conformado por un elemento del espacio muestral. | *A*: obtener el número 3 al lanzar el dado  *A* = {3} |
| **Suceso compuesto** | Es un subconjunto del espacio muestral que está conformado por dos o más elementos de este. | *B*: obtener un número par al lanzar un dado  *B* = {2, 4, 6} |
| **Suceso seguro** | Está formado por todos los posibles resultados del espacio muestral | *C*: obtener un número menor que 7 al lanzar el dado.  *C* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = *S* |
| **Suceso imposible** | Es aquel que no tiene posibilidad de ocurrencia, es decir, es el subconjunto vacío del espacio muestral. | *D:* obtener cara al lanzar un dado  *D* = ∅ |

[SECCIÓN 2] **1.3 Operaciones con sucesos**

Dado que los sucesos aleatorios son subconjuntos del espacio muestral, sobre ellos se pueden definir las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos. Así

**Unión entre sucesos aleatorios:** dados los sucesos aleatorios A y B, la unión ***A* ∪ *B*** se define como el conjunto de todos los elementos de A, de B o ambos.

Por ejemplo, observa la siguiente ruleta

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG05 |
| **Descripción** | Ruleta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Al hacer girar la ruleta una vez y anotar el número de puntos obtenidos tiene como espacio muestral  *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} |

Se consideran los siguientes eventos:

*A*: obtener un múltiplo de 3 en la ruleta

*B*: obtener un mayor que 5

Para determinar *A* ∪ *B*, primero se determinan los sucesos aleatorios *A* y *B*

*A* = {3, 6, 9}

*B* = {6, 7, 8, 9}

**Intersección entre sucesos aleatorios:** dados dos sucesos aleatorios, la intersección *A* ∩ *B* se define el conjunto de elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

En el ejemplo de la ruleta, cuyo espacio muestral es *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y sus eventos son

*A*: obtener un múltiplo de 3 en la ruleta

*B*: obtener un mayor que 5

Dado que,

*A* = {3, 6, 9}

*B* = {6, 7, 8, 9}

Se obtiene la intersección

*A* ∩ *B* = {6, 9}

De acuerdo con la intersección entre conjuntos, los sucesos aleatorios si tienen el mismo espacio muestral, se clasifican en compatibles o incompatibles.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Tipos de sucesos** | **Definición** | **Ejemplo:** |
| **Sucesos compatibles** | Dos sucesos aleatorios son compatibles si su intersección tiene uno o más elementos del espacio muestral | Al lanzar un dado al aire y anotar su resultado, los sucesos son  *A*: obtener un múltiplo de 3.  *B*: obtener un número impar  Por lo tanto  *A* = {3, 6}  *B* = {1, 3, 5}  Los sucesos *A* y *B* son compatibles, puesto que su intersección no es vacía.  *A* ∩ *B* = {3} |
| **Suceso incompatibles** | Dos sucesos aleatorios son incompatibles si la intersección entre los sucesos es vacía | Al lanzar un dado al aire y anotar su resultado, los sucesos son  *C*: obtener 5 al lanzar el dado  *D*: obtener un número par  Así  *C* = {5}  *D* = {2, 4, 6}  Los sucesos C y D son incompatibles, puesto que la intersección es vacía  *C* ∩ *D* = ∅ |

**Suceso contrario:** dado un suceso aleatorio A el suceso contrario de A que se denota como *AC* se define como el conjunto de elementos del espacio muestral que no pertenecen al conjunto *A*

En el ejemplo de la ruleta *AC* = {1, 2, 4, 5, 7, 8} y *BC* = {1, 2, 3, 4, 5}

**Diferencia entre sucesos aleatorios:** dados dos sucesos aleatorios A y B, la diferencia A – B se define como el conjunto de elementos que pertenecen al suceso A, pero que no pertenecen al suceso B.

En el ejemplo de la ruleta, dado que *A* = {3, 6, 9} y *B* = {6, 7, 8, 9}

El único elemento que está en A y que no está en B es 3 por lo tanto

A – B = {3}

Asimismo, para determinar *B* – *A* es necesario identificar cuales elementos están en *B* y no pertenecen a *A*. Así

*B* – *A* = {7, 8}

Mediante el diagrama de Venn las operaciones entre sucesos aleatorios se representan a continuación

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG08 |
| **Descripción** | ***Operaciones entre sucesos aleatorios*** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La imagen presenta las operaciones entre sucesos aleatorios de acuerdo con la situación de la ruleta cuyo espacio muestral es  *S* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}  Y los sucesos aleatorios son  *A* = {3, 6, 9}  *B* = {6, 7, 8, 9} |

En la siguiente sección, enfocaremos nuestra atención en las frecuencias de un suceso probabilístico.

[SECCIÓN 1] **2 Frecuencia de un suceso**

Cuando un experimento aleatorio se lleva a cabo, es necesario registrar dos datos importantes que permiten calcular la probabilidad de que el suceso ocurra, esos son la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Frecuencia absoluta y frecuencia relativa** |
|  | La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que ocurre este suceso cuando se repite un experimento aleatorio. Se representa por ***fa***.  La **frecuencia relativa** es el cociente de la frecuencia absoluta *fa* por el número de veces *n* que se repite el experimento aleatorio. Se representa:  <<MA\_09\_12\_02.gif>> |

La siguiente situación ejemplifica como determinar las frecuencias absoluta y relativa de un suceso:

En una urna hay 7 balotas rojas, 5 azules y 9 verdes. Se extrae una balota y se anota el color, regresándola nuevamente a la urna, esta acción se realiza 35 veces. Los resultados, del experimento fueron:

19 veces salió balota roja

10 veces salió balota azul

6 veces salió balota verde

A continuación, se construye la tabla de frecuencias

¿Cuántas veces se sacó una balota de la urna? 35 veces, por lo tanto, ***n*** = 35

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Color de la Balota** | **Roja** | **Azul** | **Verde** | **Total** |
| ***fa***  **(Frecuencia absoluta)** | 19 | 10 | 6 | 35 |
| ***fr (A)***  **(Frecuencia**  **relativa)** <<MA\_09\_12\_03.gif>> | <<MA\_09\_12\_04.gif>> | <<MA\_09\_12\_05.gif>> | <<MA\_09\_12\_06.gif>> | 0,99 ~ 1 |

[SECCIÓN 1] **3 Probabilidad de un suceso**

Cuando todos los resultados de un experimento aleatorio, tienen la misma posibilidad de ocurrir se dice que son **equiprobables**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La probabilidad que ocurra un suceso *A*** |
|  | se determina hallando el cociente (división) entre el número de sucesos favorables que componen a ***A***y el número de sucesos del espacio muestral. Se representa *como* ***P(A).***  **P(A) =** (número de sucesos favorable de A) / (número de suceso del espacio muestral**)**  Este resultado es conocido como Regla de Laplace y solamente se aplica cuando todos los casos tienen la misma probabilidad de ocurrir. |

Algunos ejemplos:

***A****:* Martín, tiene en su bolsillo 5 monedas de $500 y 3 de $ 200. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de $200?

<<MA\_09\_12\_07.gif>>

La probabilidad de sacar una moneda de $200, es 3 de 8; 0,375 o el 37,5 %

***B****:* Extraer una carta de ases de una baraja de 40.

<<MA\_09\_12\_08.gif>>

En una baraja de 40 cartas, hay 4 ases, por lo tanto, la probabilidad de sacar un as, es 4 de 40; 0,1 o el 10%

***C****:* Obtener un número par al lanzar un dado

<<MA\_09\_12\_09.gif>>

Al lanzar un dado, hay 3 posibilidades de obtener un número par de un total de 6, es decir sacar 2, 4 o 6. Entonces, la probabilidad de obtener un número par es 3 de 6; 0,5 o el 50%

[SECCIÓN 2] **3.1 Propiedades de la probabilidad**

Sea ***S*** el espacio muestral de un experimento aleatorio, ***A*** y ***B*** sucesos del mismo.

En el cálculo de probabilidades se cumplen las siguientes propiedades:

1. <<MA\_09\_12\_10.gif>>

Ejemplo:

La probabilidad de sacar un as de una baraja es de *0,1* Por lo tanto, la probabilidad de no sacar un as será de:

*1 – 0,1 = 0,9* o del 90%.

En los ejemplos de las propiedades 2 a la 7, consideraremos el experimento de lanzar un dado

1. *P(S) = 1*

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número menor a 7 es igual a:

<<MA\_09\_12\_11.gif>> o del 100 %

1. *P(∅)= 0*

Ejemplo:

La probabilidad de obtener el número 8 es igual a:

<<MA\_09\_12\_12.gif>>

1. Si *A⊂ B→P(A) ≤ P(B)*

Sea , el suceso de obtener un número mayor que 4, y obtener un número mayor que 2. La probabilidad que:

<<MA\_09\_12\_13.gif>>

<<MA\_09\_12\_14.gif>>

Como todos los elementos de *A∈B,* entonces *A⊂ B,* entonces 0,33 0,66.

1. *P(A-B)= P(A)-P(A∩B)*

Sea ***A***, el suceso de obtener un número menor que 6, y ***B*** obtener un número par

*A= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }, B={ 2 , 4 , 6 }, A-B = { 1 , 3 , 5 }, A∩B = { 2 , 4 }*

<<MA\_09\_12\_15.gif>>

Es decir que la probabilidad es de 0,5

1. La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es *P(A∪B)= P(A)+P(B)-P(A∩B)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos sucesos, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental en común. |

Sea *A*, el suceso de obtener un número impar, y *B* obtener un múltiplo de 3.

*A= { 1 , 3 , 5 }, B={ 3 , 6 }, A∩B = { 3 }*

<<MA\_09\_12\_16.gif>>

la probabilidad es de 0,66

1. La probabilidad de la unión dos sucesos incompatibles es *P(A∪B)= P(A)+P(B)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común. Es decir, que *A∩B = ∅* |

Sea *A,* el suceso de obtener un número par menor a 6, y *B* obtener un múltiplo de 5.

*A= { 2 , 4 }, B={ 5 }, A∩B = ∅*

<<MA\_09\_12\_17.gif>>

La probabilidad es de 0,5

[SECCIÓN 1] **4 Experimentos aleatorios compuestos**

Un **experimento aleatorio compuesto** es el que está formado por dos o más experimentos aleatorios simples, realizados consecutivamente.

Es decir, si se lanza una moneda o un dado, son experimentos aleatorios simples, pero si se realiza el experimento de lanzar un dado y posteriormente una moneda, se estaría realizando un experimento compuesto, cuyo espacio muestral es:

c: cara s: sello

**S** = { ( c , 1) ; ( c , 2 ) ; ( c , 3 ) ; ( c , 4 ) ; ( c , 5 ) ; ( c , 6 ) ; ( s , 1 ) ; ( s , 2 ) ; ( s , 3 ) ; ( s , 4 ) ; ( s , 5 ) ; ( s , 6 ) }

[SECCIÓN 2] **4.1 Diagrama de árbol**

El **diagrama de árbol**, es una técnica que permite obtener los posibles resultados de un experimento cuando se produce en pocas etapas. Cada paso del experimento se representa en una ramificación del árbol. Se puede determinar el total de resultados posibles de un experimento y el número de resultados favorable de cualquier suceso del experimento compuesto.

Los siguientes son algunas ejemplificaciones de diagramas de árbol resultantes al realizar un experimento aleatorio compuesto

* Lanzar una moneda al aire 2 veces y sacar una balota, de una urna que contiene una balota roja, una morada y una amarilla:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG10 |
| **Descripción** | Diagrama de árbol |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Diagrama de árbol del experimento lanzar una moneda al aire 2 veces y sacar una balota, de una urna que contiene una balota roja, una morada y una amarilla: |

* Samuel, tiene 4 pantalones, 4 camisas y 2 pares de zapatos. ¿De cuantas maneras diferentes se puede vestir?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_13\_IMG11 |
| **Descripción** | Diagrama de arbolo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | P1: pantalón 1, P2: pantalón, P3: pantalón 3, P4: pantalón 4  C1: camisa 1, C2: camisa 2, C3: camisa 3, C4: camisa 4  Z1: zapatos 1, Z2: zapatos |

En total tiene 32 forma distintas de vestirse.

[SECCIÓN 1] **5 Probabilidad condicionada**

Sean A y B sucesos de un mismo experimento aleatorio. Se denomina **probabilidad condicionada** a la probabilidad de que ocurra el suceso A si ha ocurrido el suceso B.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La probabilidad condicional se define como:** |
|  | <<MA\_09\_12\_18.gif>> |

El siguiente ejemplo, ayudará a aclarar un poco más el concepto y su aplicación.

Una persona lanza una moneda 3 veces. Se debe Determinarla probabilidad de obtener 3 caras, teniendo en cuenta que salió por lo menos una vez cara.

**S :** Espacio muestral

**S** = { ccc , ccs , csc , css , scc , scs , ssc , sss }

**B**: Suceso que por lo menos salió una vez cara

**B** = { ccc , ccs , csc , css , scc , scs , ssc }

<<MA\_09\_12\_19.gif>>

**A**: Suceso que se obtengan 3 caras

**A** = { ccc }

<<MA\_09\_12\_20.gif>>

Por lo tanto,

<<MA\_09\_12\_21.gif>>

La probabilidad es de 0,14

[SECCIÓN 2] **5.1 Sucesos dependientes**

Sean *A* y *B* sucesos de un mismo experimento aleatorio, son **sucesos dependientes** si la realización de *A* condiciona la realización de *B*, es decir, P(B|A) ≠ P(B), lo que indica que *B* se ve afectada porque el suceso *A* haya sucedido o no, Se determina mediante:

<<MA\_09\_12\_22.gif>>

Extraer 1 carta de una baraja de 40, sin hacer reposición de ella y extraer una segunda carta, es un ejemplo de **suceso dependiente**, ya que el tamaño del espacio muestral para la primera es de 40, al no reponerse en la baraja la primera carta, se reduce a 39 para la segunda. Es decir, que un suceso se ve afectado por que ocurra o no el otro.

[SECCIÓN 1] **6 Resolución de problemas probabilísticos**

Con la finalidad que los conceptos y su aplicación sean claros, se profundizan los contenidos, implementando resolución de problemas

1. Determina la probabilidad de obtener un múltiplo de 5, conociendo que el número es impar. Es un caso de probabilidad condicionada.

*A={ 5 }, B= { 1 , 3 , 5 }, A∩B = { 5 }*

<<MA\_09\_12\_23.gif>>

La probabilidad es de 0,33

1. Extraer de una urna, que contiene 3 esferas azules y 2 verdes, 2 esferas sin hacer devolución de esferas. Vamos a determinar la probabilidad de obtener en la primera extracción una esfera verde y en la segunda una azul.

Si en la primera extracción se saca una esfera verde, en la segunda se tienen en la urna las 3 azules.

La probabilidad de sacar 1 esfera verde en la primera extracción

<<MA\_09\_12\_24.gif>>

La probabilidad de sacar 1 esfera verde en la segunda extracción, siguen quedando las 3

<<MA\_09\_12\_25.gif>>

Por lo tanto,

<<MA\_09\_12\_26.gif>>

La probabilidad es del 0,3

[SECCIÓN 1] **7 competencias**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** |  | |
| **Web 01** | Es una página donde se presenta de una manera muy clara que es la probabilidad y los conceptos que la componente. | <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html> |
| **Web 02** | Es una página donde se trabaja el concepto de probabilidad y los conceptos que lo componente de una manera interactiva por medio de ejemplos sencillos | <http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/probabilidad/index.html> |
| **Web 03** | Es una página donde se muestra la historia de la probabilidad | <http://datateca.unad.edu.co/contenidos/100402/moduloexe/anexo_1_resea_histrica_sobre_la_probabilidad.html> |