[SECCIÓN 1] **1 Funciones reales**

Entre diversos conjuntos de personas, instituciones y objetos se pueden trazar múltiples formas de relación. Por ejemplo, la relación “Ser madre de” vinculará a un conjunto de personas con otro conjunto de personas, mientras que la relación “Ser proveedor de” podría vincular conjuntos mixtos de empresas, instituciones y personas. Por su parte la relación “Ser sinónimo de” vincula conjuntos de palabras y la relación “Ser componente del ecosistema marino” vincula conjuntos mixtos de sistemas, procesos y microorganismos. Finalmente la relación, “Cantidad de diagonales de” vincula un conjunto de números, con un conjunto de polígonos.

Para la relación “Ser madre de”, en el primer conjunto no necesariamente debe haber mujeres que han tenido hijos, y en el segundo conjunto podrían estar mujeres que están en el segundo conjunto. Lo que es importante para definir la relación son las “flechas” que comunican los elementos de cada conjunto. En el caso de la relación expuesta, ser madre vincula parejas madre-hijo, y no solo a las personas aisladas. Se procura que los elementos que están en los conjuntos aparezcan porque efectivamente se relacionan, según la relación descrita. Ello es lo que se especifica al definir el dominio y el rango de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Relación “Ser madre de” entre conjuntos de personas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear un par de conjuntos M (de Madres) y H (de Hijos) y una relación entre conjuntos como la que aparece en [VER](http://computacion.cs.cinvestav.mx/~acaceres/courses/estDatosCPP/relAB1.jpg), en la que  Mercedes es madre de Carlos, Laura y Mauricio, Gilma es madre de Diana, César y Rubén, mientras que Alicia es madre de Rocío. Así, en el conjunto M están Mercedes, Gilma y Alicia, mientras que en el conjunto H están todos los demás. |
| **Pie de imagen** | Ejemplo de la relación “Ser madre de” entre conjuntos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Relación “Cantidad de diagonales de” entre números y polígonos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear un par de conjuntos D (de Diagonales) y P (de Polígonos) y una relación entre conjuntos como la que aparece en [VER](http://matematica.laguia2000.com/wp-content/uploads/2013/05/15.png), en la que a cada tipo de polígono, se le asigna la cantidad de diagonales correspondiente.  NO OLVIDAR: Cambiar los nombres de los conjuntos.  NO OLVIDAR: Incluir el número 0 y el 1 en el conjunto de números.  NO OLVIDAR: Incluir polígonos cóncavos y no regulares.  Los triángulos tendrán correspondencia con el 0  Los cuadriláteros con el 2,  Los pentágonos con el 5,  Los hexágonos con el 9 y, en general, un polígono de lados con el número  El conjunto de salida siempre ponerlo en color rojo, y el llegada en color azul. |
| **Pie de imagen** | Ejemplo de la relación “Cantidad de diagonales de” entre conjuntos. |

Las **funciones** son tipos particulares de relación.

[SECCIÓN 2] **1.1 Concepto de función**

Una **función** es una relación entre dos conjuntos que satisface la condición de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno de los elementos del segundo conjunto. Aunque una función habitualmente define la relación entre los elementos de cada uno de los conjuntos, en muchas ocasiones se confunde el hecho de que dos conjuntos están relacionados, con la idea de que hay una ecuación que presenta la relación entre ellos. No necesariamente toda función ofrece una regla algorítmica para pasar de un conjunto al otro por medio de una regla, ni toda expresión que relaciona variables es una función. Las representaciones de las funciones como flechas entre conjuntos, como columnas de una tabla o como gráfica en el plano cartesiano son tan relevantes para comprender la función, como la expresión analítica .

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DesktopModules/PPP_EditorGuionesKO/RecursoProfesor.aspx?IdGuion=9819&IdRecurso=455756&Transparent=on> |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Quitar las diapositivas 1, 2 y 3  Conservar las diapositivas 4, 5, 6 y 7, pero incluyendo entre la 4 y la 5 una nueva diapositiva con los cambios señalados en la imagen:  FAVOR HACER VERDES TODAS LAS FLECHAS    Creada 1 |
| **Título** | Algunos ejemplos de función. |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones a partir de las “flechas” o correspondencias entre los conjuntos relacionados. |

La expresión representa el lugar geométrico del conjunto de los puntos que corresponden a la relación existente entre los puntos que yacen en un diámetro horizontal de una circunferencia de radio 1 y los puntos que están en la circunferencia. No se trata de una función, porque para cada número entre -1 y 1, existen dos imágenes que le corresponden:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Una relación que no es una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear una correspondencia entre conjuntos que represente la relación entre los puntos en un diámetro horizontal de una circunferencia y los puntos que están en la circunferencia. Los conjuntos se llamarán D (por ser los puntos en el diámetro horizontal) y C (por ser los puntos sobre la circunferencia)  La imagen debe quedar muy similar a:  FAVOR HACER VERDES LAS FLECHAS    Creada 2 |
| **Pie de imagen** | La expresión no representa una función, pues a cada elemento del conjunto de salida le corresponden dos elementos del conjunto de llegada. |

La expresión , representa la manera en la que se obtienen los números de Fibonacci. Este es un ejemplo de una ecuación que, aunque indica de qué manera se obtiene un número a partir de los dos números previos, no ofrece una regla específica para obtener uno de los números, haciendo operaciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Función recursiva: Aunque es una función, no ofrece una regla directa para obtener los números. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Del mismo modo que en la imagen siguiente, dejar el mismo conjunto de partida N rojo, pero en el de llegada poner los respectivos números de Fibonacci. (Es decir , el listado azul es 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 377, 610 y 196418)  No olvidar: poner en desorden los números de Fibonacci.  Hacer VERDES las flechas de asignación |
| **Pie de imagen** | Representación como correspondencia entre conjuntos para la función “Ser el número de Fibonacci de la posición \_\_\_” |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Relaciona el dominio el codominio de una función |
| **Descripción** | Interactivo para relacionar dos conjuntos mediante la relación “Ser el sucesor del cuadrado de” |

[SECCIÓN 2] **1.2 Representación de funciones**

El concepto mismo de función como *relación entre dos conjuntos que satisface la condición de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno de los elementos del segundo conjunto*, implica inicialmente una referencia en términos de representación.

Una **primera idea** que se hace del concepto de función es la de la **correspondencia entre elementos de dos conjuntos**, tal como las que aparecen a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Representación de función como correspondencia entre conjuntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear una representación entre dos conjuntos N y C, no ordenados de números naturales y cuadrados, con sus correspondencias puestas como flechas (VERDES), como:    Creada 3 |
| **Pie de imagen** | Representación como correspondencia entre conjuntos para la función “Ser cuadrado de” |

En efecto, algunos conjuntos se pueden definir por comprensión valiéndose de una regla o de un algoritmo que permita obtener la variable dependiente –es decir la del conjunto de llegada–, en función de la variable independiente –la del conjunto de salida–. El conjunto de los números cuadrados, el de los números triangulares, el de los puntos que están en una recta que no sea vertical, etc., son ejemplos de función.

Una **segunda idea** o forma de representar funciones es la que presenta una **ecuación** como correspondencia entre variables. Esta forma de representación se conoce como representación **analítica** de la función. En ese caso, los elementos del conjunto de partida varían según varíe , o variable independiente, mientras que los valores del conjunto de llegada, o valores de la variable dependiente , se obtienen mediante una regla o ecuación, que condensa en términos matemáticos la relación de correspondencia entre los conjuntos y la forma en que se obtiene a partir de . Ello se expresa diciendo que , o que está *en función* de .

Veamos algunos ejemplos:

1. La relación “Ser cuadrado de”, se puede escribir como . **Sí** es una función, ya que a cada número le corresponde un único cuadrado. Sin embargo, la relación “Ser raíz cuadrada de”, **no** es una función, ya que cada número positivo tiene dos raíces cuadradas. Lo que sí es función es “Ser raíz cuadrada positiva de” y “Ser raíz cuadrada negativa de”, que se escriben respectivamente como y .
2. La relación “Ser el -ésimo número triangular”, en el conjunto de los números naturales, asigna a cada natural la suma de los números naturales desde 1 hasta . Se puede escribir como , y **sí** es una función discreta. En este caso la variable que se usa es , en lugar de , para indicar que los valores del conjunto de salida solamente son los números naturales.
3. La relación “Ser el -ésimo número de Fibonacci”, en el conjunto de los números naturales, asigna a cada natural el resultado de la suma de los dos números de Fibonacci que lo preceden. Para describir la generación de números de Fibonacci se usa la expresión , y **sí** es una función, pero nótese que no *funciona* como una forma de obtener el -ésimo término haciendo operaciones sobre él mismo. Ya que para obtener un nuevo número de Fibonacci se requiere conocer los dos números de Fibonacci previos, ello la hace una *función recursiva*.

Una **tercera idea** que sirve como representación del concepto de función es el de **tabulación**, en el que se ubican los valores del conjunto de salida en la primera columna de una tabla, y sus valores respectivos al conjunto de llegada se ubican al frente, en la segunda columna.

Como parte de los procesos asociados a la representación de funciones, la posibilidad de *ordenar* los elementos del conjunto de salida está siempre latente. En la representación tabular habitualmente los valores en la tabla van de menor a mayor, aunque no es un requerimiento, siempre que frente a cada elemento de la primera columna esté su correspondiente. La anterior es una de las razones por las que la noción de orden es fundamental en matemáticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La recta real contiene el conjunto de los números reales, y en su ubicación horizontal suele representarse con los números ordenados de menor a mayor, de izquierda a derecha. Es decir, para saber si un número mayor que otro siempre estará a su derecha.  En el plano cartesiano, los ejes son dos rectas reales perpendiculares, en la que la recta vertical presenta los números ordenados de menor a mayor, de abajo hacia arriba. |

Veamos la descripción tabular, asociada a la función “ser cuadrado de”:

Tabla

|  |  |
| --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el cuadrado de \_\_\_” | |
| **Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | |
| **Elementos del conjunto de llegada:** Todos los números reales positivos (fíjate que no son solo los que se conocen como números cuadrados). | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.** | |
|  |  |
|  |  |
|  | 18,49 |
|  | 2 |
|  | 1 |
|  | 0,25 |
|  | 0 |
|  | 1 |
|  | 1,9999616 |
|  | 4 |
|  | 9 |
|  |  |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

Ahora, veamos el ejemplo con la relación “ser la suma de los números consecutivos desde 1 hasta \_\_\_\_”

|  |  |
| --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser la suma de los números consecutivos desde 1 hasta este” ó “Ser el respectivo número triangular” | |
| **Elementos del conjunto de partida:** Todos los números naturales | |
| **Elementos del conjunto de llegada:** Los números triangulares | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos. :** | |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  |  |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  |  |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
| 4 |  |
| 5 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Completa la representación tabular |
| **Descripción** | Completar la representación tabular para la función “Ser raíz cuadrada negativa de” |

Finalmente, una **cuarta idea** en relación con la representación de funciones es la de la **gráfica** de la función. En esta representación, los conjuntos de salida y de llegada se ubican respectivamente en los ejes y de un plano cartesiano, y se ubica un punto para la coordenada , donde el elemento pertenece al conjunto de salida, y el elemento es su correspondiente en el conjunto de llegada. Desde la representación tabular, cada punto corresponde a la pareja ordenada que aparece en cada una de las filas de la representación tabular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Representación de función como gráfica en el plano cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Hacer una captura de pantalla desde el archivo de Geogebra que indica el tránsito entre la representación conjuntista y la gráfica de la función    Creada 4 |
| **Pie de imagen** | Representación como gráfica cartesiana para la función “Ser cuadrado de” |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Pasos para obtener la representación de función desde la representación como correspondencia entre conjuntos hasta la representación gráfica de la misma función. |
| **Descripción** | Se requiere tomar los conjuntos relacionados en la imagen Creada 3, y generar una animación que contemple los siguientes pasos:   1. Partir de una representación conjuntista de una función. 2. Ubicar en horizontal los elementos del conjunto de salida. 3. Ordenar los elementos del conjunto de salida, de menor a mayor (pero que las fechas se conserven hacia los elementos de llegada). 4. Ubicar el conjunto de salida a la derecha del conjunto de llegada (para recrear la ubicación respectiva en el plano cartesiano. 5. Ubicar los elementos del conjunto de salida en una recta horizontal, es decir en el eje . 6. Ubicar los elementos del conjunto de llegada en una recta vertical, que corresponde al eje . 7. .Ubicar las flechas perpendiculares al eje horizontal o eje x, de manera que se obtengan puntos naranja con coordenadas . 8. La gráfica de la función corresponde al rastro que dejarían todos los puntos naranja, en el plano cartesiano. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Transita por las distintas representaciones de una función |
| **Descripción** | Transitar entre las representaciones para la función “Ser el costo total por hablar \_\_\_ minutos en un operador que cobra $269 pesos por minuto.” |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Identifica diferentes tipos de representación de funciones |
| **Descripción** | Agrupar diferentes tipos de representación para tres funciones diferentes |

[SECCIÓN 2] **1.3 Dominio, codominio y rango de una función**

Tanto en la representación conjuntista, como en la tabular y gráfica del concepto de función se habla del conjunto de salida, del conjunto de llegada y de las flechas entre los elementos en cada conjunto. Los nombres técnicos de este par de conjuntos son respectivamente *dominio* y *codominio* de la función, mientras que las flechas o la relación misma representa el *rango* o *imagen* de la función.

Así, en el *dominio* de una función se encuentran todos los valores que pueden estar en el conjunto de salida, mientras que, en el *codominio*, aparecen justamente los valores presentes en el conjunto de llegada. El *rango* o imagen son los vínculos entre los elementos del dominio y del codominio, y es lo que realmente captura la función.

Por ejemplo, para la función “Ser raíz cuadrada negativa de”, no se pueden incluir en el dominio los números reales negativos, pues ellos no tienen raíz cuadrada. Del mismo modo, la función “La suma de los números consecutivos desde 1 hasta \_\_” solo es aplicable sobre el conjunto de los números naturales, es decir que su dominio, es el conjunto de los números naturales.

En el caso de la función “Costo en una llamada telefónica que duró \_\_\_ minutos”, cuando el conjunto de llegada incluye los tiempos de duración de la llamada y el conjunto de llegada incluye los costos correspondientes, en pesos, el dominio de la función es el de los números reales positivos, mientras que en el codominio estarán solo los múltiplos del valor por minuto. En caso de que se esté llamando desde una cabina o lugar público el costo deberá ser múltiplo de $50, pues no hay forma de pagar con monedas, por ejemplo $269 pesos.

En la representación tabular propuesta, podemos cambiar la descripción “Elementos del conjunto de partida” por “Dominio de la función”, mientras que “Elementos del conjunto de llegada” se puede denominar “Codominio de la función”:

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio y codominio y rango de una función** |
| **Contenido** | El *dominio* de las funciones es importante para determinar cuáles de los valores aparecerán, en el conjunto de salida en la representación conjuntista, o en la primera columna de la representación tabular, o en el eje de la representación gráfica o cartesiana. Por su parte, el *codominio* de una función contiene los elementos del conjunto de llegada en la representación conjuntista, o en la segunda columna de la representación tabular, o en el eje de la representación gráfica o cartesiana. El *rango* es la imagen de la función, lo cual es evidente en su representación gráfica cartesiana; propiamente, la función es el conjunto de parejas ordenadas cuyas entradas están respectivamente en el dominio y en el codominio de la función. Tales parejas coinciden con la gráfica cartesiana y, a lo largo de la exposición se ha identificado con los colores a los puntos en el rango o imagen como . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Representación de funciones |
| **Descripción** | Agrupar diferentes tipos de representación para la misma función. |

[SECCIÓN 1] **2 Clasificación del tipo de funciones según su saturación y tránsito**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una *función* es una relación que captura la relación o correspondencia entre dos conjuntos, a saber el *dominio* y *codominio* de la función, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio. El conjunto de todas las imágenes del dominio en el codominio se llama *rango* o *imagen* de la función que se representa, bien sea de manera *conjuntista* mediante flechas del dominio al codominio, bien sea de manera *tabular* como puntos en un sistema de coordenadas, bien sea como *gráfica* en el plano cartesiano, o bien como una *ecuación* que, indica la relación entre los elementos del dominio para obtener los del codominio. |

En cada una de las representaciones de la función, bien sea la conjuntista, la tabular, la gráfica o la analítica, hay diferentes maneras en que, desde el dominio de la función, se *satura* el codominio. Según la forma de saturación, las funciones pueden ser inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

El reconocimiento de las formas de saturación de las funciones, permite identificar si las flechas son unidireccionales o bidireccionales, de manera que se pueda ir y volver de un conjunto a otro, con lo cual será posible definir luego operaciones de composición entre las funciones.

[SECCIÓN 2] **2.1 Función inyectiva**

Una noción de “inyección” que puede resultarnos familiar es la de una “jeringa” que envía sustancias químicas *a cada* célula del organismo. En ese sentido, una función *inyectiva* también toma elementos del codominio y los envía *a cada* elemento del codominio, es decir que *llena equilibradamente* el codominio, con tantos elementos como los del dominio.

En la representación conjuntista, la noción de inyectividad se asocia a que cada flecha que sale del dominio de la función, llega a un elemento distinto del codominio, es decir que los elementos del dominio saturan de manera pareja los elementos del codominio. Ello también se suele expresar diciendo que la función es 1-1, que se lee “uno a uno”.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Ejemplos de funciones inyectivas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Hacer un paso de diapositivas en el que aparezcan las imágenes:  <http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_inyectiva>: |
| **Pie de imagen** | Función inyectiva |

Desde la representación conjuntista, una forma visual de hacerse una idea de función inyectiva es que de cada elemento del dominio sale una “flecha”, que llega a elementos distintos del codominio. Nótese que puede suceder que queden elementos libres en el codominio. Esta misma idea se recoge en la representación tabular, diciendo que no pueden existir elementos diferentes del dominio, con idéntica imagen en el codominio.

En la representación gráfica de función, la inyectividad o idea de que en el dominio no puede haber dos o más elementos asociados a un mismo elemento del codominio, se asocia a una “prueba de la recta horizontal”: para que la función sea inyectiva, debe suceder que una recta horizontal paralela al eje corte a la gráfica de la función una única vez a lo largo de su codominio.

Desde la representación analítica, la noción de inyectividad se recoge diciendo que para la función , si se toman dos elementos diferentes del dominio, sus imágenes serán necesariamente diferentes. Símbólicamente se expresa diciendo que si y son elementos diferentes del dominio X, entonces también . Alternativamente, una función inyectiva es aquella en la que se puede “despejar”, de manera única, en términos de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** | Funciones inyectivas |
| **Descripción** | Determinar si una función es inyectiva, desde las diferentes representaciones  Hacer dos contenedores con imágenes de funciones inyectivas y no inyectivas, en representación tabular y gráfica |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

[SECCIÓN 2] **2.2 Función sobreyectiva**

De la misma manera que para la noción de “inyección”, el concepto de “sobreyección” para las funciones es el de saturación, pero esta vez en el codominio. Una función *sobreyectiva* es aquellaque satura **todos** los elementos del codominio.

En la representación conjuntista, la noción de sobreyectividad se asocia a que a todos los elementos del codominio llega una flecha desde el dominio; es decir que los elementos del codominio se saturan desde elementos del codominio. Ello también se suele expresar diciendo que la función es exhaustiva, pues cada elemento en el codominio proviene de, mínimo, un elemento del dominio. Nótese que puede suceder que elementos distintos del dominio tengan la misma imagen en el codominio. Lo importante de la sobreyección es que “no sobren” elementos del codominio, que a cada uno de ellos llegue al menos una flecha.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Ejemplos de funciones sobreyectivas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Hacer un paso de diapositivas en el que aparezcan las imágenes:  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6c/Surjection.svg/200px-Surjection.svg.png |
| **Pie de imagen** | Función sobreyectiva |

Desde la representación conjuntista, una forma visual de hacerse una idea de función sobreyectiva es que a todo elemento del codominio llega al menos una “flecha”, desde el dominio. No puede suceder que queden elementos libres en el codominio. Esta misma idea se recoge en la representación tabular asociada a que en la segunda columna aparecen todos los elementos del codominio.

En la representación gráfica de función, la sobreyectividad o idea de que se satura el codominio, se asocia también a una “prueba de la recta horizontal”: para que la función sea sobreyectiva, debe suceder que una recta horizontal paralela al eje corte a la gráfica de la función a lo largo de su codominio, sin que haya saltos o brechas en que la recta no corte algún elemento del codominio.

Desde la representación analítica, que una función sea sobreyectiva implica que siempre existe , tal que . Es decir, siempre existen “flechas de vuelta” entre el codominio y el dominio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** | Funciones sobreyectivas |
| **Descripción** | Determinar si una función es sobreyectiva, desde las diferentes representaciones |

[SECCIÓN 2] **2.3 Función biyectiva**

La importancia de la biyectividad entre funciones es que asegura que hay caminos de *ida y vuelta* entre los conjuntos de salida y de llegada de una función, es decir que hay flechas desde el dominio hasta el codominio –lo cual se garantiza por la inyección– y flechas desde el codominio hacia el dominio –lo cual se garantiza por la sobreyección–. Ello garantizará que se pueden realizar operaciones de composición e inversión entre las funciones.

En la representación conjuntista, la biyectividad se asocia a que entre los elementos del dominio y del codominio hay una única flecha, sin que falten o sobren elementos en cada conjunto. Es decir, hay paridad entre los elementos del dominio y los elementos del codominio. Ello también se suele expresar diciendo que la función es 1-1 y sobre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Ejemplos de funciones biyectivas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Hacer un paso de diapositivas en el que aparezcan las imágenes:  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a5/Bijection.svg/200px-Bijection.svg.png |
| **Pie de imagen** | Función biyectiva |

Desde la representación conjuntista, una forma para visualizar una función biyectiva es que hay igual cantidad de elementos en el dominio y el codominio de la función, y de cada elemento sale y a cada elemento llega una única flecha.

En la representación gráfica de función, ser biyectivo indica que al hacer una reflexión sobre la recta , el resultado obtenido es, a su vez, función. Eso significa que existe la función inversa. Visualmente, equivaldría a una prueba de la recta horizontal y vertical en cada punto de manera que no hay más cortes con la función ni en dirección arriba-abajo, ni en dirección izquierda-derecha.

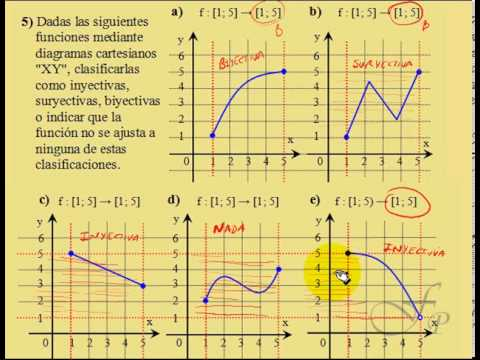
Desde la representación analítica, la biyección implica la existencia de una función inversa, es decir que la función expresada como puede escribirse, despejando, como .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** | Funciones biyectivas |
| **Descripción** | Determinar si una función es inyectiva, desde las diferentes representaciones |

En algunas ocasiones aparecen funciones que no son biyectivas, pero puede hacerse una restricción de dominio, para que lo sean. Es el caso de las funciones cuadráticas obtenidas por compresión o traslación de la función . Al restringir el dominio, pueden obtenerse funciones biyectivas.

[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

**Prueba de las rectas para identificar tipos de función**

****

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

[SECCIÓN 1] **3 Propiedades de las funciones**

La clasificación de las funciones según como se saturan mutuamente el dominio y el codominio de cada función, ayuda a tener una idea *global* de ella. Una biyección entre conjuntos permite tránsitos de ida y vuelta entre los conjuntos de salida y llegada de la función.

Para efectos de identificar el tipo de cambio *local* que tienen las funciones, se estudian los cambios entre elementos cercanos. Según los cambios de crecimiento de la función, las funciones se clasifican en crecientes, decrecientes o constantes. Por otra parte, según su simetría y regularidad, las funciones se clasifican en pares o impares. Si hay condiciones de repetibilidad o monotonía, se dirá que las funciones son periódicas.

Lograr hacer una identificación precisa de cada tipo de función permite, entre otras cosas, no repetir procesos en varios cuadrantes, tener una idea previa de la gráfica de la función, identificar qué operaciones se puede realizar con ella, identificar si tiene inversa, etc., lo que facilita argumentar y deducir propiedades desconocidas obteniendo información más rápida y fiable.

[SECCIÓN 2] **3.1 Función creciente**

El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función se realiza por intervalos, es decir, en “cercanías” de un sector a estudiar. Una función puede ser creciente en un intervalo y decreciente en otro, ser estrictamente creciente o no ser lo uno ni lo otro, en cercanías de algunos lugares que se considerarán “críticos”.

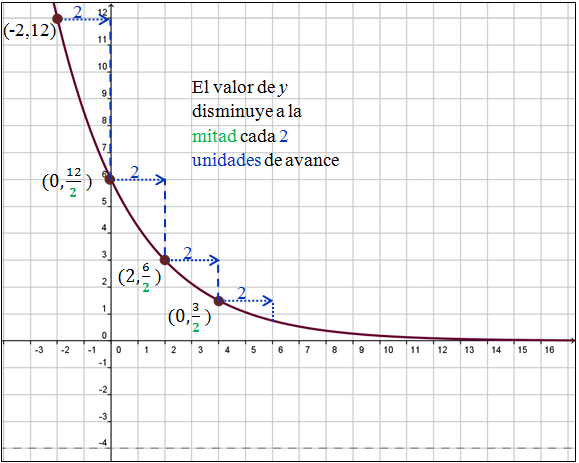
Una función es creciente, cuando los cambios ascendentes en elementos del dominio implican a su vez cambios ascendentes en los elementos del codominio. Veamos lo que ello significa en cada tipo de representación:

En la representación conjuntista, teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio y en el codominio, una función será creciente si las flechas entre los conjuntos preservan el orden. Ello será evidente en la representación tabular, pues teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio o columna , los correspondientes en el codominio o columna , resultarán ordenados a su vez de menor a mayor.

Por su parte, en la representación analítica, una función se denomina *creciente* en un intervalo si al tomar dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tales que , entonces también .

Gráficamente el crecimiento de una función se observa verificando si al tomar valores en el eje que aumentan –es decir que se mueven de izquierda a derecha–, las imágenes respectivas según la orientación del eje también aumentan, moviéndose respectivamente de abajo hacia arriba.

El crecimiento de una función continua en un intervalo puede asociarse a que la recta que une dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tiene pendiente positiva.



[SECCIÓN 2] **3.2 Función decreciente**

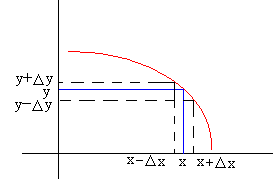
El concepto de función *decreciente* es completamente análogo al de función creciente, salvo porque los cambios ascendentes en elementos del dominio implican a su vez cambios *descendentes* en los elementos del codominio.

En la representación conjuntista, teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio y en el codominio, una función será decreciente si las flechas entre los conjuntos invierten el orden. Ello será evidente en la representación tabular, pues teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio o columna , los correspondientes en el codominio o columna , resultarán ordenados en el orden inverso, es decir de mayor a menor.

Por su parte, en la representación analítica, una función se denomina *decreciente* en un intervalo si al tomar dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tales que , entonces .

Gráficamente el decrecimiento de una función se observa verificando si al tomar valores en el eje que aumentan –es decir que me mueven de izquierda a derecha–, las imágenes respectivas según la orientación del eje disminuyen, es decir que van de arriba hacia abajo.

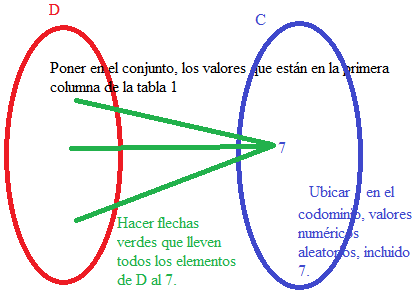
El decrecimiento de una función continua en un intervalo puede asociarse a que la recta que une dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tiene pendiente negativa.



[SECCIÓN 2] **3.3 Función constante**

Como su nombre lo indica, una función es *constante* si no cambia, es decir, si no hay variación en sus imágenes, con lo que se trata de una relación que asigna a todos los elementos del dominio, el mismo elemento en el codominio.

En la representación conjuntista, una función es constante cuando relaciona todos los elementos del dominio, con un único elemento del codominio.



Tabularmente la función constante aparece con elementos que presentan variación en la primera columna, pero con elementos constantes, es decir que no varían.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser igual a 8” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser igual a ” | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos. :** | |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

La representación gráfica de una función constante es una recta paralela al eje ,

Incluir animación en Geogebra como la que aparece en el archivo FunciónConstante.ggb

Incluir una animación de en la que se genera la tabla de datos y luego la función. FunciónconstanteTabular.ggb

**Ejercicios crecimiento, decrecimiento y constancia**

**El precio de la papa**

**Las pulsaciones del corazón llegando a la estación del SITP.**

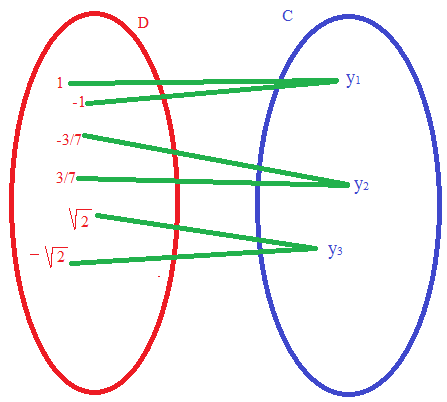
**RECUERDA**

**Creciente, decreciente, constante**

[SECCIÓN 2] **3.4 Función par**

Una función *par* es aquella cuyo comportamiento para cada número positivo y su negativo o inverso aditivo es el mismo. Otra forma de expresar esa idea es que, para obtener la parte negativa de la función (cuadrantes II y III), basta hacer simetría sobre el eje del comportamiento de la función en la parte positiva (cuadrantes I y IV).

En la representación conjuntista y en la tabular, al ubicar parejas de números opuestos (inversos para la suma, como 1 y -1, y y ), la imagen en el codominio es la misma, es decir que la flecha que sale de los opuestos llega al mismo número. Así, la organización de los elementos del dominio respecto a los elementos del codominio se hace por *pares*:



Analíticamente la característica de paridad para las funciones se expresa de la siguiente manera: Una función es par si y solo sí . Por ello, en ocasiones, para verificar si una función es o no par, desde su representación analítica, basta elegir un par de números opuestos y aplicar la función en ellos. Si los resultados son iguales, hay un indicio de que la función puede ser par.

Practica:

En la función , calcula .

¿Es ? ¿Se puede decir con certeza que la función es par?

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es par si es simétrica respecto al eje . Visualmente significaría que si la función se grafica en los cuadrantes I y IV y se pone un espejo sobre el eje y, el reflejo hacia los cuadrantes II y III generará la función completa.

Los siguientes son representaciones múltiples de funciones pares:

Graficar:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el cuadrado de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Los números reales positivos | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  | 18,49 |
|  | 2 |
|  | 1 |
|  | 0,25 |
|  | 0 |
|  | 1 |
|  | 1,9999616 |
|  | 4 |
|  | 9 |
|  |  |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el recíproco de la cuarta potencia de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Los números reales positivos | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  | 0,00391 |
|  | 0,25 |
|  | 1 |
|  | 16 |
|  | Indeterminado |
|  | 1 |
|  | 0,25001 |
|  | 0,0625 |
|  | 0,01235 |
|  |  |
| 4 | 0,003906 |
| 5 | 25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el coseno de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Los números reales entre -1 y 1 | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 1 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

Algunas funciones que

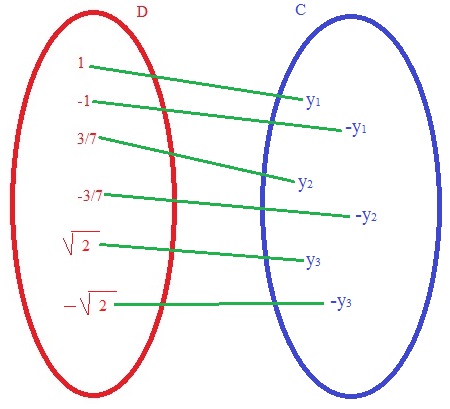
<https://www.geogebratube.org/student/m111459>

Una forma nemotécnica que se usa para identificar el signo de un producto o de un cociente

[SECCIÓN 2] **3.5 Función impar**

Una función *impar* es aquella cuyo comportamiento para cada número es el inverso aditivo al que se aplica a su inverso aditivo. Otra forma de expresar esa idea es que, para obtener la parte negativa de la función (cuadrantes II y III), se aplica una simetría sobre el origen.

En la representación conjuntista y en la tabular, al ubicar parejas de números opuestos (inversos para la suma, como 1 y -1, y y ), la imagen en el codominio resulta también en opuestos, es decir que la flecha que sale de los opuestos llega a opuestos. Así que, si es una función impar y si , entonces .



Lo anterior se generaliza en la expresión de imparidad, según la cual una función es impar si y solo sí . De la misma manera que para las funciones pares, para verificar si una función es o no impar, dada su representación analítica, basta elegir un par de números opuestos y aplicar la función en ellos. Si los resultados son también opuestos, hay un indicio de que la función puede ser impar.

Practica:

En la función, calcula .

¿Es ? ¿Se puede decir con certeza que la función es impar?

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es par si es simétrica respecto al origen. Visualmente significaría que la distancia entre cualquier imagen de la función y el origen se replica en esa misma dirección, hasta otro punto en la función.

Los siguientes son representaciones múltiples de funciones impares:

Graficar:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el cubo de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Todos los números reales | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  | -79.507 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 0 |
|  | 1 |
|  | 2,8283458 |
|  | 8 |
|  | 27 |
|  |  |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el recíproco de \_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales, excepto el cero. | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Todos los números reales, excepto el cero. | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | Indeterminado |
|  | 1 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el seno de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Los números reales entre -1 y 1 | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

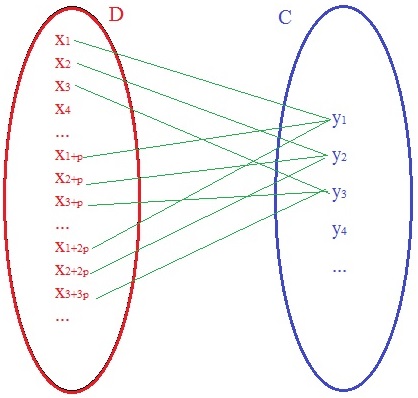
Crear una animación como la contenida en <https://www.geogebratube.org/student/m21517>, para ver la propiedad de simetría de las funciones pares e impares

Interactivo para identificar gráficamente si una función es par o impar https://www.geogebratube.org/student/m52403

[SECCIÓN 2] **3.6 Función periódica**

Algunas funciones son repetitivas o monótonas, en el sentido de que provienen de un fenónemo cuyo comportamiento cíclico se revela en la función y por ello se preserva en intervalos iguales. Una función *periódica* es aquella cuyo comportamiento en un intervalo se repite en intervalos sucesivos, que se denominarán *periodos*. Otra forma de expresar esa idea es que, para obtener toda la función, basta con repetirla en periodos iguales.

Para las funciones periódicas, la representación conjuntista y la tabular, se caracterizan porque muchos elementos en el dominio llegan al mismo elemento del codominio. Además, si se hace la ordenación de los elementos del dominio, el conjunto de llegada se repetirá cada vez. Para lograr capturar la noción de función periódica desde la expresión analítica, se dice que es una función periódica siempre que , donde P es el *período* de la función.



Para verificar si una función es o no periódica, dada su representación analítica, habrá que disponer de información acerca del período de la función y aplicar la función en y en . Si los resultados son idénticos, hay un indicio de que la función puede ser periódica.

En la función, al calcular , ¿qué obtienes?

¿Es ? ¿Se puede decir con certeza que la función es periódica?

Practica:

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es par si es simétrica respecto al origen. Visualmente significaría que la distancia entre cualquier imagen de la función y el origen se replica en esa misma dirección, hasta otro punto en la función.

Los siguientes son representaciones múltiples de funciones impares:

Graficar:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el cubo de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Todos los números reales | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  | -79.507 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 0 |
|  | 1 |
|  | 2,8283458 |
|  | 8 |
|  | 27 |
|  |  |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el recíproco de \_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales, excepto el cero. | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Todos los números reales, excepto el cero. | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | Indeterminado |
|  | 1 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “Ser el seno de \_\_\_” | | |
| **Dominio: Elementos del conjunto de partida:** Todos los números reales | | |
| **Codominio: Elementos del conjunto de llegada:** Los números reales entre -1 y 1 | | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.:** | |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

[SECCIÓN 2] **3.7 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** |  |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | XX\_G00\_00\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | [*URL*](#http://www.videosdematematicas.com/slr/01%2520Matematicas/05%2520Calculo/02%2520Funciones/slider/index.html) |
| **Web 02** | *Título* | [*URL*](http://matematicasmagdalena.blogspot.com/p/calculo.html) |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |