|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las funciones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_03\_CO |
| Descripción | Desarrollos tecnológicos en las telecomunicaciones, particularmente los teléfonos celulares, se basan en el análisis de ondas, estas a su vez se describen a partir de ciertos elementos matemáticos muy importantes: las funciones trigonométricas. |

[SECCIÓN 1] **1 Las funciones trigonométricas y sus recíprocas**

La trigonometría tiene aplicación en diferentes disciplinas del conocimiento tan diversas como la óptica, la astronomía, la arquitectura, la ingeniería, la geología, entre muchas más; y nace del análisis de triángulos rectángulos, pero se extiende a un tipo especial de funciones: Las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas son la extensión de las **razones trigonométricas** a todos los números reales que permiten el uso de herramientas características de las funciones para el análisis de problemas en contextos particulares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Shutterstock: 83915149  image of speakerphones and sound against white background |
| **Pie de imagen** | La rama de la física que se encarga de estudiar el sonido se denomina acústica. Las ondas acústicas son modeladas con funciones trigonométricas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC10 |
| **Título** | Construcción de Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |
| **Descripción** | Interactivo que expone las características de las funciones trigonométricas y sus recíprocas a partir de su construcción |

[SECCIÓN 2] **1.1 Las funciones trigonométricas**

Para definir las funciones trigonométricas de un ángulo *α* (alpha) partimos de la circunferencia unitaria, donde el ángulo está en posición estándar, es decir, su lado inicial coincide con el eje *x* y sobre el círculo unitario identificamos un único punto *P* (*x*, *y*)que identifica al ∡*α*, como puedes observar en la siguiente gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Ilustrar una circunferencia sobre el plano cartesiano, con radio 1 y el triángulo sobre ella como se ve en la imagen. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para cualquier ángulo *α* existe un único punto *P* (*x*, *y*)sobre la circunferencia unitaria que lo caracteriza. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

El triángulo rectángulo *APC* tiene dimensiones:

* **Base**: *x*.
* **Altura**: *y*.
* Al tratarse de una circunferencia unitaria tiene como **hipotenusa** la unidad, que es el mismo **radio**, es decir 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo se definen como:  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20opuesto%7D%7D%7B%5Ctext%7Bhipotenusa%7D%7D  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20adyacente%7D%7D%7B%5Ctext%7Bhipotenusa%7D%7D  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20opuesto%7D%7D%7B%5Ctext%7Bcateto%20adyacente%7D%7D |

Al encontrar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ∡*α* para el Δ*APC* tenemos:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7By%7D%7B1%7D%3Dy

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7Bx%7D%7B1%7D%3Dx

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7By%7D%7Bx%7D

Las definiciones de seno, coseno y tangente como coordenadas del punto que identifica un ∡*α* son válidas para cualquier ángulo y no solo para los ángulos agudos o positivos, con la restricción *x* ≠ 0 para la tangente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Signos de las funciones trigonométricas** |
| **Contenido** | Los signos de las coordenadas de un punto *P* sobre la circunferencia unitaria varían dependiendo del cuadrante en que se encuentre. Así, los signos de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo, definidos como las coordenadas de éste, cambian de signo de acuerdo al cuadrante en el que se encuentre. |

Teniendo en cuenta la relación que encontramos anteriormente, podemos concluir que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | El signo de sen *α* corresponde al de la ordenada, el signo de la abscisa al de cos *α* y el signo de tan *α* corresponde al respectivo cociente entre la ordenada y la abscisa. |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Así, para determinar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo en específico, por ejemplo, para hallar el signo de sen 120°, cos 230° y tan 330°, debemos:

1. Representar gráficamente los ángulos en la circunferencia unitaria

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos.  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img24_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | La representación gráfica de los ángulos en la circunferencia unitaria indica en qué cuadrante se halla cada uno de ellos. |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

1. Observar los signos, de la ordenada para sen 120°, de la abscisa para cos 230° y el respectivo cociente para tan 330°, con lo que podemos determinar que:

* Como el ángulo 120° se encuentra en el II cuadrante, el seno es positivo.
* Como el ángulo 230° se encuentra en el III cuadrante, el coseno es negativo.
* Como el ángulo 330° se encuentra en el IV cuadrante, la tangente es el resultado del cociente entre la ordenada (negativa) y la abscisa (positiva), es decir, que la tangente es negativa.

Tomando como punto de partida las características básicas de las funciones trigonométricas que hemos visto, podemos hacer una aproximación a la construcción general de las funciones, analizando particularidades como su dominio, rango, periodo, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc.

[SECCIÓN 3] **1.1.1 La función seno**

Se define la función seno como sen *α*, siendo *α* un número real, como el valor correspondiente a la ordenada del punto *P* sobre la circunferencia unitaria, que identifica el ángulo ***α* medido en radianes***.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hallar la equivalencia entre la medida de un ángulo dado en grados sexagesimales (°) y su medida en radianes (rad), debes aplicar:  180 ° = π rad |

Por ejemplo, sen 2 equivale a calcular la ordenada del punto *P* que identifica un ángulo de 2 radianes.

Para hacerlo más claro, se tiene que:

2 rads ≈ 114,6 °

Por lo tanto el valor de sen 2, es el valor de la ordenada del punto *P* que puedes observar en la siguiente imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Expresar 2 rad en grados sexagesimales, nos permite construir la representación gráfica de sen 2. |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para hallar el valor numérico de sen 2, hacemos uso de la calculadora teniendo en cuenta que estamos trabajando con 2 rad, de donde podemos concluir que:

sen 2 ≈ 0,9092

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hacer cálculos numéricos de funciones trigonométricas en la calculadora, debes tener en cuenta que   * Si usas radianes, la calculadora debe estar configurada para calcular esta unidad, es decir en modo *Radianes*, que por lo general aparece como *RAD* o con la letra *R* * Si usas grados sexagesimales, la calculadora debe estar en modo *Degrees,* que en general está representado por una letra *D* o *DEG* en la parte superior de la pantalla. |

Para conocer cómo cambiar el modo de tu calculadora, puedes observar el siguiente video [[VER](https://www.youtube.com/watch?v=TlTlq6p_TI0)]

Una ventaja adicional de definir las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria es la relación directa que hay entre el valor de *α* y la longitud de arco que describe *α* como ángulo.

Observa que la medida de *α* en radianes cumple, por definición, la siguiente relación:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7Bs%7D%7Br%7D

Donde *s* es la longitud del arco sobre la circunferencia, y *r* es igual al radio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG06 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Representación gráfica de la relación entre el arco de circunferencia unitaria y el ∡*α* que lo determina. |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Como estamos trabajando sobre la circunferencia unitaria su radio es *r* = 1, lo que nos lleva a tener:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cdpi%7B300%7D%20%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3Ds

Es decir que el valor de *α* para la función sen *α* equivale a la longitud del arco, sobre la circunferencia unitaria, que genera el ángulo de *α* radianes.

Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, podemos identificar algunas propiedades del gráfico de la función seno:

* La función seno tiene como **dominio** todos los números reales, dado que se puede calcular para cualquier valor que adquiera el ∡*α* sin restricciones.
* Los valores que toma la función seno, es decir el **rango**, se encuentran entre –1 y 1, ya que está representado por la la componente *y* o altura del triángulo rectángulo que cualquier ∡*α* determine sobre la circunferencia unitaria.
* Dado que la función seno toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *α* y para *α* + 2*π*, puesto que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo, podemos deducir que es una **función periódica** con un periodo de 2π.

Por otra parte, evaluando la función seno para varios valores de *α*, tenemos que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función sen *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |

Usando la relación sexagesimal para el valor del ∡*α* de la función seno se tiene la siguiente tabla equivalente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función sen *α* calculada en diferentes valores de *α* en grados sexagesimales | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sen *α* | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |

A partir de las tablas y teniendo en cuenta las características que hemos hallado, podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función seno [[VER](http://www.geogebra.org/m/favB7TTW?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bseno%2Fmaterials%2F)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Ilustrar la gráfica con los datos propuestos.  http://matematicaspr.com/image/l2dj/blog/graficas-funciones-trigonometricas/grafica-funcion-seno.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Esquema general de la función seno en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Como la función seno es periódica con periodo de 2π, y con base en la gráfica obtenida para sen *α*, con 0 ≤ *α* ≤ 2π, podemos inferir que el gráfico de toda la función seno será como se muestra en la siguiente imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *y* = sen *α*, teniendo en cuenta que su dominio son todos los números reales y su periodo es 2π. |

Para analizar la gráfica de la función sen *α* puedes observar interactuar con el siguiente link [[VER](http://tube.geogebra.org/student/m15858)], donde moviendo el punto *P* puedes observar los diferentes valores que la función adquiere en todo su dominio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La función *y* = sen *α* cumple con las siguientes características:   * El **dominio** es el conjunto de todos los números reales **ℛ**. * El **rango** es el intervalo [–1, 1], es decir, **–1 < sen *α* < 1**. * La **amplitud** es 1. * El **periodo** es 2π * Los **puntos de corte** con el eje X suceden en *n*π, para *n* ∈ ℤ |

[SECCIÓN 3] **1.1.2 La función coseno**

La función coseno se determina a partir de la circunferencia unitaria teniendo en cuenta que la función *y* = cos *α*  se define como el valor de la abscisa del punto *P* (sobre la circunferencia unitaria) al que corresponde un ángulo de *α* radianes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La circunferencia unitaria está definida por la ecuación  *x*² + *y*² = 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en la circunferencia unitaria de cos *α* |

De acuerdo con lo que podemos deducir de la gráfica, la función *y* = cos *α* y los valores que puede tomar cumplen con las siguientes características:

* La función coseno tiene como dominio todos los números reales **ℛ**.
* Los valores que toma la función están entre –1 y 1, dado que los valores son coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria.
* La función toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *α* y para *α +* 2π, dado que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo, sobre la circunferencia unitaria, por lo tanto la función coseno tiene periodo 2π.

Como puedes observar, cumple con características similares a la función seno. Veamos algunos puntos que pertenecen a la gráfica, en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función cos *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |

Y usando la relación sexagesimal para el valor del ∡*α* de la función coseno se tiene la siguiente tabla equivalente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función cos *α* calculada en diferentes valores de *α* en grados sexagesimales | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sen *α* | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los ángulos π/6, π/3 y π/4 son ángulos notables, por lo que podemos calcular fácilmente los valores de las razones trigonométricas seno y coseno, valores con los que, teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el ángulo *α*, hemos completado la tabla anterior. |

Con los datos que hemos recolectado sobre la función coseno, podemos generar un primer bosquejo de su gráfica, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** | Grafica Funcion Coseno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función *y* = cos *α* en el intervalo [0, 2π]. |

Dado que es una función periódica, podemos extender el gráfico de la función a su dominio completo: todos los reales ℛ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *y* = cos *α*, teniendo en cuenta que su dominio son todos los números reales y su periodo es 2π. |

Para analizar la construcción de la función *y* = cos *α* puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/dpqu7MAN?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bcoseno%2Fmaterials%2F)] donde moviendo el punto *P* puedes observar su comportamiento.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La función *y* = cos *α* cumple con las siguientes características:   * El **dominio** es el conjunto de todos los números reales **ℛ**. * El **rango** es el intervalo [–1, 1], es decir, **–1 < cos *α* < 1**. * La **amplitud** es 1. * El **periodo** es 2π * Los **puntos de corte** con el eje X suceden en , para *n* ∈ ℤ |

[SECCIÓN 3] **1.1.3 La función tangente**

Para definir la función *y* = tan *α*, utilizamos la relación entre las razones trigonométricas de sen *α* y cos *α* que dan origen a tan *α*, así:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%20%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%7D%7B%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%7D

Al determinar la función tangente en función del seno y el coseno del mismo ángulo, debemos tener presente la indeterminación para cos *α =* 0; al observar la gráfica de la función *y* = cos *α* podemos ver que los valores en los que la función es igual a cero, es decir sus puntos de corte con el eje X son cuando el ángulo *α* toma los valores:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B3%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B5%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B7%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C...

En general, podemos decir que cos *α =* 0 cuando:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B2n&plus;1%7D%7B2%7D%5Cpi

Para *n* ∈ ℤ.

Dado que para estos valores, la función tangente no está definida, podemos afirmar que en dichos puntos, la función *y* = tan *α* presenta asíntotas verticales.

Para construir la gráfica de la función tangente es necesario analizar su comportamiento al tomar valores cercanos a las asíntotas, para ello, hallaremos algunos valores para el ángulo *α* utilizando la calculadora. Tú puedes hallar algunos valores más, recuerda que debes trabajar en radianes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función tan *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 0 | 0,57 | 1 | 1,73 | NE | –1,73 | –1 | –0,57 | 0 | 0,57 | 1 | 1,73 | NE | –1,73 | –1 | –0,57 | 0 |

Una aproximación de la gráfica para *y* = tan *α* es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = tan *α* en el intervalo [0, 2π]. |

Al observar el bosquejo de la gráfica, podemos determinar algunas de las características que la función *y* = tan *α* cumple:

* El dominio está definido para todos los valores *α* que pertenecen al conjunto de los números reales sin incluir aquellos de la forma:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B2n&plus;1%7D%7B2%7D%5Cpi

* El rango son los números reales.
* Los valores donde se interseca *y* = tan *α* con el eje X, es decir, los ceros de la función, son los mismos de la función seno: *α* = 0, *α* = π, *α* = 2π,…, *α* = *n*π, para *n* ∈ ℤ.
* La función *y* = tan *α* es periódica, con periodo π.
* La función no posee puntos máximos ni mínimos.

Así, al construir la gráfica de la función *y* = tan *α* en todo su dominio, tenemos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = tan *α* teniendo en cuenta su dominio. |

Puedes analizar la relación que hay entre las funciones trigonométricas sen *α*, cos *α* y tan *α* observando sus comportamientos en el siguiente link [[VER](http://www.geogebra.org/m/upkH6BAv?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fconstrucci%25C3%25B3n%2Bfunci%25C3%25B3n%2Btangente%2Fmaterials%2F)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC30 |
| **Título** | Caracteriza las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente |
| **Descripción** | Actividad para caracterizar el comportamiento de las funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las funciones trigonométricas recíprocas**

La función recíproca *g* (*x*) de una función *f* (*x*) cumple que:

*f* (*x*) · *g* (*x*) = 1

Así, el producto entre la función y su recíproca es el elemento neutro de la multiplicación, es decir 1.

La función recíproca se puede definir como:



Ya que:



Para las funciones trigonométricas también se determinan funciones recíprocas, de tal manera que cumplen con la anterior definición, sin embargo, se debe analizar características básicas como su dominio, rango, periodo, asíntotas, etc.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | *g*(*x*) es la función recíproca de *f*(*x*) si y solo sí:  (*f* · *g*) (*x*) = *f* (*x*) · *g* (*x*) = 1; ∀ *x* |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La función cotangente**

Al determinar la función *y* = cot *α* como la función trigonométrica recíproca de la función *y* = tan *α*, tenemos:



Ya que cumple que:



Teniendo en cuenta las razones trigonométricas donde:



Tenemos que:



Y por la ley de extremos y medios llegamos a:



Así, la función *y* = cot *α* la podemos representar como:



Al iniciar el análisis de la función cotangente, podemos observar que es indeterminada para sen *α* = 0, es decir, para valores de *α* = *n*π, con *n* ∈ ℤ, así que hemos determinado que en estos valores, la función *y* = cot *α* tiene asíntotas verticales.

Teniendo en cuenta la relación de la función cotangente con el coseno y el seno del ángulo *α*, podemos construir un bosquejo de la gráfica, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = cot *α* en el intervalo [0, 2π]. |

Analizando la gráfica de la función *y* = cot *α* en el intervalo [0, 2π], podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los números reales, excepto los valores de la forma *n*π, con *n* ∈ ℤ.
* El rango es el conjunto de los números reales ℛ.
* Los puntos de corte con el eje X corresponden a los valores donde cos *α* = 0.
* No interseca al eje Y*.*
* Tiene periodo igual a π.
* No posee valores máximos ni mínimos.

Al construir la gráfica de la función cotangente para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = cot *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |

Para analizar con mayor profundidad la función cotangente y su construcción, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/CxMQK9Ap?doneurl=%2Fsearch%2Fperform)].

[SECCIÓN 3] **1.2.2 La función secante**

La función *y* = sec *α* se define como la función recíproca de la función cos *α*, así, la función secante cumple que:



Porque:



El primer análisis que debemos hacer de la función secante son sus indeterminaciones, esto sucede cuando cos *α* = 0, es decir, cuando el ∡*α* toma valores como:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B3%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B5%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B7%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C...%2C%20%5Cfrac%7B%5Cleft%20%28%202n&plus;1%20%5Cright%20%29%5Cpi%20%7D%7B2%7D

Con *n* ∈ ℤ.

De esta forma tenemos que el dominio de la función secante son todos los números reales, excepto los que anulan la función coseno, es decir, cuando cos *α* = 0. En estos valores encontramos asíntotas verticales para *y* = sec *α*.

Tomando algunos valores de la función cos *α*, podemos construir un bosquejo de la gráfica de la función secante, observa la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = sec *α* en relación con la función cos *α*, en el intervalo [0, 2π]. |

Analizando la gráfica de la función *y* = sec *α* en el intervalo [0, 2π], podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los números reales, excepto los valores donde la función cos *α* = 0.
* El rango es el conjunto (–∞, –1] ∪ [1, ∞).
* No tiene puntos de corte con el eje X, en ningún valor de su dominio.
* La grafica interseca al eje Y en el punto de coordenadas (0, 1)*.*
* Tiene periodo igual a 2π.

Al construir la gráfica de la función secante para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = sec *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |

Para analizar con mayor profundidad la función secante, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/aMkHS28W?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fcoseno%2By%2Bsecante%2Fmaterials%2F%2Fpage%2F1%2Fr%2F0)].

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La función cosecante**

Al definir la función cosecante (csc) como la función recíproca de seno, tenemos:



Porque al multiplicar la función *y* = csc *α* por la función sen *α* tenemos:



Ahora, para empezar el análisis de la función cosecante, debemos tener en cuenta las indeterminaciones que presenta, es decir, donde sen *α* = 0 y para ello, debemos descartar de su dominio los valores para *α* = 0, ±π, ±2π, ±3π, ±4π,… , *n*π, para *n* ∈ ℤ. En estos valores del ∡*α* encontramos asíntotas verticales.

Teniendo en cuenta las asíntotas, el dominio y algunos valores para la función sen *α*, podemos trazar un bosquejo de la gráfica de la función cosecante, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = csc *α* en relación con la función sen *α*, en el intervalo [0, 2π]. |

Al analizar el segmento de gráfica de la función *y* = csc *α*, podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los reales menos los múltiplos de π.
* El rango de es el conjunto (–∞, –1] ∪ [1, ∞)
* No tiene puntos de corte con los ejes X o Y en ningún valor de su dominio.
* Es una función periódica, cuyo periodo es 2π.

Al construir la gráfica de la función cosecante para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMGXX |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = csc *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |

Para analizar con mayor profundidad la función secante, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/Y3cfGC5Z?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bcosecante%2Fmaterials%2F%2Fpage%2F3%2Fr%2F0)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC40 |
| **Título** | Determina valores de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para hallar valores de ángulos teniendo en cuenta las gráficas de las funciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC50 |
| **Título** | Analiza graficas de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para analizar gráficas y características de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** |  |
| **Contenido** |  |

[SECCIÓN 2] **1.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 1] **2 Título**

[SECCIÓN 2] **2.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 3] **2.1.1 Sub-subtítulo sección**

(No es posible tener una Sección 4)

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |