|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Razones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_03\_CO |
| Descripción | Ninguna nave espacial creada por el hombre ha llegado a ninguna estrella en el universo ¿cómo pueden los astrónomos calcular las distancias entre objetos en el espacio sin salir de la tierra? Usan razones trigonométricas. |

[SECCIÓN 1] 1. **Razones trigonométricas**

Las razones trigonométricas son la base con la que se analizan triángulos, que reseultan útiles en aplicaciones en ingeniería, astronomía, arquitectura, telecomunicaciones entre otros muchos campos científicos y técnicos.

En esta sección aprenderás qué son y cuáles son las grandes propiedades de las razones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La razón es el cociente indicado entre dos cantidades a y b con b≠0, se puede escribir *a:b*  o *a/b* y se lee “*a* es a *b*”. |

Puedes encontrar razones entre número de estudiantes, computadores, ángulos, áreas, pesos, y entre infinidad de magnitudes; sin embargo, para enfocar el trabajo aquí desarrollado nos centraremos *únicamente* en longitudes de lados de triángulos, de hecho en una clase particular de estos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Trigonometría** |
| **Contenido** | La palabra *trigonometría* tiene raíces griegas en dos palabras que significan triángulo y medida, palabras que coinciden con la definición de trigonometría como el estudio de las relaciones matemáticas entre las lados y ángulos de un triángulo. |

Así, razones trigonométricas indicará relaciones entre magnitudes dentro de un triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Uno de las aplicaciones de la trigonometría. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profejosedavid.blogspot.com/2011/09/problema-aplicado-resuelto-1.html>  http://2.bp.blogspot.com/-uVyDVr2ML1w/TnehG1QcLuI/AAAAAAAAAFY/WOGr7ryhFJg/s1600/FaroBarco02.jpg |
| **Pie de imagen** | La identificación de distancias para los antiguos navegantes requirió el uso de la trigonometría y el método de triangulación. |

La importancia de las razones trigonométricas se fundamenta en el hecho que si se encuentran estas razones para un triánuglo, estas son iguales para todos los triángulos semejantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos triángulos son semejantes entre sí cuando sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales |

[SECCIÓN 2] **1.1 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos**

Para definir las razones trigonométricas se parte de una clase particular de triángulos: los triángulos rectángulos.

En el caso de los triángulos rectángulos, puedes observar que para verificar si dos de ellos son semejantes, basta verificar que tengan uno de sus ángulos agudos de la misma medida.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°. |

Supongamos que se tienen dos triángulos rectángulos con un par de ángulos agudos congruentes como los que se presentan en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Sin importar su tamaño la medida de estos triángulos entre si es proporcional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos de los triángulos dados son iguales y sus lados serán proporcionales |

Por semejanza de triángulos se tiene la siguiente relación de equivalencia

<<FQ\_MA\_10\_03\_001.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La propiedad fundamental de las proporciones indica que, para toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.  Equivalentemente, puedes decir que  Si a:b::c:d entonces a∙d=b∙c  O bien expresando las razones como fracciones, puedes decir que  <<FQ\_MA\_10\_03\_002.gif>>    Debes recordar que en estos casos tanto b como d deben ser diferentes de cero. |

De estas igualdades se deducen las siguientes equivalencias:

<<FQ\_MA\_10\_03\_003.gif>>

Observa que estas igualdades son independientes de las longitudes de los lados de cada triángulo.

Los catetos reciben nombres particulares cuando se relacionan con uno de los ángulos agudos:

* Cateto adyacente, cuando el cateto es uno de los lados que forma el ángulo agudo.
* Cateto opuesto, cuando el cateto es opuesto al ángulo dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es llamado *hipotenusa* y los lados que forman el ángulo recto son llamados *catetos*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Triangulo rectángulo, con el nombre que se otorga a cada uno de sus lados. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los lados del triángulo rectángulo se nombran en función de su ubicación respecto al ángulo α. |

En el triángulo de la gráfica, para el ángulo α, se tiene que

* Cateto adyacente es c.
* Cateto opuesto es b.

Observa que si no determinamos de cuál ángulo agudo estamos hablando, las palabras adyacente y opuesto pierden sentido.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Las razones trigonométricas en un triángulo** |
| **Contenido** | Las razones trigonométricas de un ángulo son seis:   * Seno * Coseno * Tangente * Cotangente * Secante * Cosecante   Para definirlas es necesario determinar el ángulo α que se usará en un triángulo rectángulo. |

Con base en el triángulo de la gráfica anterior, definiremos las razones trigonométricas para el ángulo α:

* El **seno** del ángulo *α ,* escrito sen α, se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_004.gif>>

.

* El **coseno** del ángulo, escrito cos *α*,se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_005.gif>>

* La **tangente** del ángulo *α,* escrita tan *α,*se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_006.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Cuando encuentres las palabras cateto (opuesto o adyacente) e hipotenusa, siempre se están indicando longitudes de lado de un triángulo rectángulo. |

Las siguientes tres razones trigonométricas se denominan **razones inversas** y se definen como sigue:

* La **cotangente** del ángulo *α,* escrita cot *α,*se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_007.gif>>

* La **secante** del ángulo *α,* escrita sec *α,*se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_008.gif>>

* La **cosecante** del ángulo *α,* escrita csc *α,*se define como

<<FQ\_MA\_10\_03\_009.gif>>

Observa que la palabra razón inversa indica los inversos multiplicatios, como puedes verificar, la cosecante es el inverso del seno, la secante es el inverso del coseno y la cotangente es el inverso de la tangente.

Es necesario que tengas en cuenta la siguiente precisión: Las **razones inversas** no serán las **funciones inversas** que se definirán posteriormente.

Veamos un ejemplo numérico de razones trigonométricas de los ángulos agudos *α* y *β*, a partir del triángulo rectángulo *ABC* en el siguiente gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Triángulo rectángulo con la medida de sus catetos e hipotenusa. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo rectángulo con las medidas de sus catetos e hipotenusa. |

Las razones trigonométricas para *α* y *β* son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Descripción numérica de los valores de las razones trigonométricas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Nota:   * cambiar 4/3=1,33 por 4/3≈ 1,33 * cambiar cos α =6/10=3/5=0,6 por cos α =8/10=4/5=0,8 |
| **Pie de imagen** | Valores de las razones trigonométricas en el triángulo *ABC*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre menores que 1. Esto sucede porque la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de sus catetos. |

Debes tener en cuenta que, mientras que el cateto opuesto al ángulo *α* es el lado *a*, el cateto opuesto al ángulo *β* es *b*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Razón trigonométrica** |
| **Contenido** | Una razón trigonométrica es el cociente entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. |

Como has podido observar, podemos calcular las razones trigonométricas si conocemos las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, pero ¿cómo calcular estas razones si tenemos un ángulo?

En general no es una tarea sencilla calcular sin uso de calculadoras las razones trigonométricas de un ángulo dado, sin embargo, para algunos ángulos hay métodos simples que permiten calcular con precisión las razonestrigonométricas, estos son llamados *ángulos notables*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **ÁNGULOS NOTABLES** |
| **Contenido** | Los ángulos notables son los ángulos de 30°, 45° y 60°. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Razones trigonométricas para ángulos de 30°**

Puedes calcular las razones trigonométricas para el ángulo notable de 30° de forma simple, para esto es necesario realizar una construcción geométrica y hacer uso del teorema de Pitágoras, en esta sección verás cómo.

Considera un triángulo equilátero, que en principio puede ser de cualquier longitud de lado, pero para hacer los cálculos más simples, haremos que la longitud de lado sea 2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces un triángulo equilátero siempre tiene sus ángulos iguales a 60°. |

Si bisecas uno de los ángulos del triángulo equilátero, este se divide en dos triángulos rectángulos iguales, cada uno de ellos con ángulos agudos de 30° y 60°, como puedes observar en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | Uso del triángulo rectángulo en el uso de las razones trigonométricas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Nota: en el triángulo de la izquierda identificar los tres ángulos como de 60° y los tres lados con longitud 2. |
| **Pie de imagen** | Observa que la altura de este triángulo equilátero divide al mismo en dos triángulos rectángulos iguales. |

Se observa que el triángulo rectángulo tiene hipotenusa 2 y uno de sus catetos es 1, en virtud del teorema de Pitágoras podemos calcular el valor de *h*:

<<FQ\_MA\_10\_03\_010.gif>>

Así, hemos encontrado el valor de los lados del triángulo rectángulo de 30°, como se muestra en el siguiente gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** | Uso del triángulo rectángulo en el uso de las razones trigonométricas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Longitudes de los lados para un triángulo de ángulos 30°, 60° y 90° |

Ahora podemos realizar el cálculo de las razones trigonométricas del ángulo de 30°:

<<FQ\_MA\_10\_03\_011.gif>>

Observa que sen 30° multiplicado por csc 30° es 1, esto dado que la cosecante es inversa de la función seno, también cabe resaltar que lo propio pasa con coseno-secante y tangente-cotangente.

[SECCIÓN 3] **1.1.2 Razones trigonométricas para ángulos de 45°**

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 45° realizamos una construcción geométrica que genere un triángulo rectángulo con el ángulo agudo deseado, y con el uso del teorema de Pitágoras tendremos todos sus lados.

Construye un cuadrado de lado 1 y traza una de sus diagnoales, con esto obtendrás dos triángulso rectángulos de catetos iguales a 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Relación del cuadrado con el triángulo rectángulo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img16_zoom.jpg  Nota: nombrar la diagonal con la letra d. |
| **Pie de imagen** | Los triángulos obtenidos al dividir el cuadrado de lado 1 son isósceles con sus ángulos agudos de 45°. |

Ahora, usa el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa *d* de uno de los triángulos obtenidos y obtendrás

<<FQ\_MA\_10\_03\_012.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | Longitudes del triángulo 45-45-90 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de 45°. |

Así, con las longitudes de los catetos y de la hipotenusa podemos calcular las razones trigonométricas para 45°:

<<FQ\_MA\_10\_03\_013.gif>>

Ten en cuenta que el triángulo rectángulo construido es el único en el que los catetos son iguales, por lo que 45° será el único ángulo para el que las razones seno y coseno son iguales.

SECCIÓN 3] **1.1.3 Razones trigonométricas para ángulos de 60°**

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 60° puedes realizar la misma construcción que para el ángulo de 30°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Con base en el triángulo de ángulos 30-60-90, construido anteriormente, puedes observar que:   * Cateto adyacente a 60° es 1. * Cateto opuesto a 60° es √3 * La hipotenusa es 2 |

Con esta información, puedes calcular fácilmente las razones trigonométricas para el ángulo de 60°:

<<FQ\_MA\_10\_03\_014.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Razones trigonométricas inversas del ángulo de 60° |
| **Descripción** | Relaciona las razones inversas del ángulo de medida con sus respectivos valores |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Razones trigonométricas de angulos notables** |
| **Contenido** | La siguiente tabla resume los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables 30°, 45° y 60°   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | α | 30° | 45° | 60° | | sen α | 1/2 | √2/2 | √3/2 | | cos α | √3/2 | √2/2 | 1/2 | | tan α | √3/3 | 1 | √3 | | cot α | √3 | 1 | √3/3 | | sec⁡α | 2√3/3 | √2 | 2 | | csc α | 2 | √2 | 2√3/3 | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC20 |
| **Título** | Definición de razones trigonométricas |
| **Descripción** | Relacionar como se definen cada una de las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC30 |
| **Título** | Razones trigonométricas |
| **Descripción** | Determina las razones trigonométricas de algunos triángulos rectángulos |

[SECCIÓN 2] **1.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC40 |
| **Título** | Razones trigonométricas |
| **Descripción** | Determina las razones trigonométricas de algunos triángulos rectángulos |

SECCIÓN 1] **2 Resolución de triángulos rectángulos**

Como ya sabes, un triángulo tiene tres ángulos y tres lados, encontrar las medidas de todos estos elementos es llamado *resolver un triángulo*.

La resolución de un triángulo parte de ciertos elemetos conocidos (medidas de lados o ángulos) y busca los elementos desconocidos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para resolver **triángulos rectángulos** debes tener en cuenta que:   * Siempre se conoce uno de sus ángulos: el *ángulo recto***.** * Las longitudes de los lados se relacionan mediante el *teorema de Pitágoras*. * Los dos ángulos agudos son *complementarios.* |

Para poder resolver triángulos rectángulos, es necesario conocer al menos uno de los siguientes conjuntos de datos

* **dos lados** del triángulo o bien,
* **un lado y un ángulo agudo**.

Para estas dos posibilidades debes distinguir los procedimientos de resolución, en términos de los elementos conocidos, estos procedimientos serán descritos en las siguientes secciones.

[SECCIÓN 2] **2.1 Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen un lado y un ángulo agudo**

El procedimiento para resolver un triángulo rectángulo, conociendo un lado y un ángulo requiere conocer las razones trigonométricas de los ángulos notables (30°, 45° y 60°).

Observa cómo se resuelve un triángulo rectángulo a partir del siguiente ejemplo: si se quiere calcular la altura de una torre, sabiendo que a una distancia de 30 metros de su base vemos la punta del campanario a un ángulo de 60°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | Triangulación. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img27_zoom.jpg  Nota: colocar la letra h como altura del triángulo ABC |
| **Pie de imagen** | Representación del ejercicio planteado. |

Lo primero que tienes que hacer es hacer un esquema o representación del problema, como en la ilustración.

En el triángulo rectángulo que representa el problema puedes observar que tienes uno de los lados (el cateto adyacente a 60°) y uno de los ángulos agudos, y debes encontrar la altura *h*, que es el cateto opuesto de 60°, por lo tanto podemos relacionar los catetos y el ángulo a través de la razón tangente de 60° así

<<FQ\_MA\_10\_03\_015.gif>>

Así, podemos despejar *h* y obtener

<<FQ\_MA\_10\_03\_016.gif>>

Aquí es donde puedes ver la utilidad de los ángulos notables, dado que ya conoces el valor de tan 60°, y por lo tanto se tiene que

<<FQ\_MA\_10\_03\_017.gif>>

El resultado es que la torre tiene una altura aproximada de 51,96 m.

Hasta aquí, hemos encontrado dos de los lados del triángulo rectángulo, por lo que será necesario calcular el tercero, para lo cual usamos el teorema de Pitágoras y obtenemos que la hipotenusa es 60 m.

Finalmente, calculamos el ángulo faltante recordando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, el ángulo será de 30°; así, el triángulo quedará resuelto como se muestra en la ilustración.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** | Triangulo resuelto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Triángulo rectángulo resuelto |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC50 |
| **Título** | Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conoce un cateto y la hipotenusa |
| **Descripción** | Usando las razones trigonométricas pertinentes es posible hallar el valor de la incógnita |

SECCIÓN 2] **2.2 Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen dos lados**

En el caso de tener dos de los lados de un triángulo rectángulo se presentan dos casos:

* Se conocen los catetos.
* Se conoce un cateto y la hipotenusa.

En cualquiera de los anteriores casos, para encontrar el tercer lado basta con usar el teorema de Pitágoras.

En cuanto a encontrar los ángulos agudos es necesario tener presentes las razones de los ángulos notables 30°, 45° y 60°, el método lo verás a través de ejemplos.

Para el rectángulo *ABC* del cual se conoce la longitud de los catetos *b* = 4 cm y *c* = 4 cm, podemos encontrar el lado *a* usando el teorema de Pitágoras.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** | Triangulo rectángulo dada la medida de sus catetos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el triángulo rectángulo un cateto mide 4 cm y el otro 4 cm. |

La hipotenusa será

<<FQ\_MA\_10\_03\_017.gif>>

Con esto encontramos todos los lados del triángulo.

Dado que ya conocemos los lados del triángulo, podemos relacionar dos de ellos a través de una razón trigonométrica, usemos tangente del ángulo C.

<<FQ\_MA\_10\_03\_018.gif>>

De forma equivalente tenemos

<<FQ\_MA\_10\_03\_019.gif>>

Ahora, debes preguntarte ¿qué ángulo debe ser C para que la tangente sea 1? Revisando los ángulos notables encontrarás que C=45°, por lo tanto los ángulos del triángulo serán 45°, 45° y 90°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** | Triangulo rectángulo resuelto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Resolución del triángulo ABC |

Veamos con otro ejemplo el caso en el que se conoce la hipotenusa y un cateto.

Si una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre la pared y el pie de la escalera dista de la base de la pared 2 m ¿A qué altura se encuentra apoyada la escalera? ¿Cuál es el valor del ángulo que forma la escalera con la pared?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** | Triangulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de la situación planteada usando triángulos rectángulos. |

Para resolver el problema, comenzaremos calculando la altura de la escalera sobre la pared. Como puedes observar, usando el teorema de Pitágoras es posible encontrar el valor del lado *b*.

<<FQ\_MA\_10\_03\_020.gif>>

Así, respondemos a la primera pregunta, la altura sobre la pared es aproximadamente 3,46 m.

Por otra parte, para calcular los ángulos es necesario hacer uso de la información que tenemos, en este caso los lados, y una razón trigonométrica conveniente; en este caso usaremos el coseno del ángulo B.

<<FQ\_MA\_10\_03\_021.gif>>

De forma equivalente tenemos

<<FQ\_MA\_10\_03\_022.gif>>

Ahora, es necesario verificar qué ángulo debe ser B para que el coseno sea ½. Revisando los ángulos notables encontrarás que B=60°, por lo tanto los ángulos del triángulo serán 30°, 60° y 90° (con lo que resolvemos el triángulo). Para responder la pregunta de qué ángulo forma la escalera con la pared, observamos que este ángulo es A y por lo tanto debe ser de 30°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Resolución de un triángulo rectángulo** |
| **Contenido** | Puedes usar el siguiente esquema de tres pasos para resolver triángulos rectángulo cuando conoces un lado y un ángulo agudo:  1. Se identifican los datos.  2. Se identifican las incógnitas.  3. Se utiliza una de las razones trigonométricas para calcular uno de los lados del triángulo rectángulo.  **Para la resolución de triángulos rectángulos en los que se conocen dos lados, pueses usar el siguiente esquema:**  1. Se identifican los datos.  2. Se usa el teorema de Pitágoras para hallar el lado desconocido en el triángulo rectángulo.  3. Se utiliza una de las razones trigonométricas para calcular los ángulos agudos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Ten en cuenta que para resolver triángulos cuyos ángulos son diferentes a los ángulos notables será necesario definir las funciones trigonométricas inversas, que serán desarrolladas en otra sección. |

[SECCIÓN 2] **2.3 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC60 |
| **Título** | Resolución de triángulos rectángulos |
| **Descripción** | Determinar la medida de los lados y los ángulos desconocidos del triángulo dado, usando las razones trigonométricas |

[SECCIÓN 1] **3.** **Circunferencia unitaria**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La circunferencia con *centro P* y *radio r* es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia *r* del punto P. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** | Circunferencia , con punto centro y radio |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La circunferencia C. |

En un plano cartesiano, definimos la **circunferencia unitaria** como aquella cuyo centro está en el origen y su radio es la unidad. La representación analítica de la circunferencia unitaria está dada por la ecuación es x2+y2=1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** | La circunferencia unitaria ubicada en el plano cartesiano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Circunferencia Unitaria. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Si un punto (r,s) está en la circunferencia unitaria, entonces debe cumplir que**  r2+s2=1 |

Para verificar que el punto *M* de coordenadas (-1,0) está en la circunferencia unitaria, verificamos que se cumpla la igualdad

(-1)2+02=1

Que en este caso resulta cierta y por lo tanto el punto M está en la circunferencia unitaria.

Por otra parte, observa que el punto Q de coordenadas (1,2) no está en la circunferencia unitaria, dado que

12+22≠1

La circunferencia unitaria tiene muchas aplicaciones en los temas que verás a lo largo del curso.

SECCIÓN 2] **3.1 Ángulos en posición normal y coterminales**

Un ángulo en posición normal o estándares aquel cuyo vértice está en el origen, es decir su lado inicial coincide con el eje positivo de las *X* y su lado final se encuentra en cualquiera de los cuadrantes del sistema de coordenadas cartesianas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** | Ángulo en posición normal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La ubicación del ángulo en posición normal sobre el plano cartesiano |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Signo de los ángulos** |
| **Contenido** | Al medir los ángulos sobre una circunferencia, se considera como un ángulo positivo aquel cuya dirección es contraria a las manecillas del reloj. Si lo medimos en misma dirección, diremos que es un ángulo negativo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** | Ángulo positivo y ángulo negativo respectivamente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Nota: extender los segmentos de línea AC indefinidamente. En los dos gráficos eliminar la circunferencia. |
| **Pie de imagen** | El ángulo positivo (izquierda) y ángulo negativo en el plano cartesiano. |

Los ángulos es posición normal o estándar en los que coinciden sus lados finales, se denominan **ángulos coterminales.** Por ejemplo los ángulos de medidas 60° y 420°, -90° y 270°, son ángulos terminales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Ángulos coterminales** |
| **Contenido** | Para un ángulo dado, existen infinitos ángulos coterminales, debes tener en cuenta que lado final es el mismo, aun cuando la medida del ángulo es diferente. |

Si se quiere encontrar ángulos coterminales al ángulo de 45° es posible calcularlos al sumar cualquier múltiplo de 360°, por ejemplo, los siguientes ángulos son coterminales al ángulo de 45°:

* 45° + 360°⋅1 = 45°+ 360°= 405°
* 45° + 360°⋅5 = 45°+ 1800°= 1845°

También puedes encontrar ángulos coterminales restando cualquier múltiplo de 360°, por ejemplo, los siguientes ánguos son coterminales de 45°:

* 45° - 360°⋅1 = 45°-360°=- 315°
* 45° - 360°⋅2 =45° - 720° = -675°

En el sistema cíclico (que tiene como unidad los radianes), cuando busques encontrar ángulos coterminales a un ángulo dado, puedes sumar o restar múltiplos de 2π (equivalente a 360°). Por ejemplo, algunos ángulos coterminales al ángulo π/6 están dados a continuación:

<<FQ\_MA\_10\_03\_023.gif>>

Observa que los ángulos coterminales se diferencian por cierta cantidad de giros completos (360°).

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC70 |
| **Título** | Ángulos coterminales |
| **Descripción** | Se relacionan tanto ángulos positivos como ángulos negativos que son coterminales con el ángulo dado |

SECCIÓN 2] **3.2 Razones trigonométricas para un ángulo cualquiera**

Las razones trigonométricas se definieron a partir de triángulos rectángulos, por lo que se limitan a ángulos entre 0° y 90° sin embargo, las razones trigonométricas se pueden extender a todos los ángulos, tanto negativos como positovos, veamos cómo se calculan las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Sobre un sistema de coordenadas cartesianas, trazamos una circunferencia de radio igual a 1 y centro *O* en el origen de coordenadas, al dibujar un ángulo *α* en posición normal, encontrarás que el lado que lo define corta a la circunferencia en un punto *P*.

Es importante notar que cada punto de la circunferencia untaria forma un único ángulo normal el el plano cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** | .Relación de la circunferencia trigonométrica con el triángulo rectángulo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img20_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Cada ángulo α queda determinado por las coordenadas del punto *P(a, b)* sobre la circunferencia de radio igual a la unidad. |

Observa que a partir de un punto en la circunferencia es posible formar un triángulo rectángulo cuya base está sobre el eje horizontal, como se ve en la figura. La altura de este triángulo será el *seno* del ángulo y su base será el *coseno* del ángulo.

Para justificar el hecho que la altura del triángulo rectángulo, generado por un punto en la circunferencia unitaria, sea el seno del ángulo y su base sea el coseno del ángulo, observa que (con base en la figura):

<<FQ\_MA\_10\_03\_024.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La razón trigonométrica tanα puede escribirse como  <<FQ\_MA\_10\_03\_025.gif>>  Por lo tanto si se tienen los valores de seno y coseno, es posible calcular el valor de la tangente |

De finimos entonces las razones trigonométricas seno y coseno, de un ángulo α, como las coordenadas del punto *P* que lo define en la circunferencia unitaria:

*P*(*a*, *b*) = (cos *α*, sen *α*)

En particular, para los ángulos: 0°, 90°, 180° y 270°, los valores del seno y coseno resultan ser iguales a 0, 1 o ‒1.

Por ejemplo, para un ángulo de 0°, el punto que lo define sobre la circunferencia unitaria es *P*(1, 0) y por lo tanto, dado que *P*(*a*, *b*) = (cos *α*, sen *α*), se deduce que

* Sen 0° = 0
* Cos 0° = 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** | Ángulos formados sobre los ejes del plano cartesiano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img21_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Los valores de las razones trigonométricas seno y coseno para los ángulos de 0°, 90°, 180° y 270° se calculan fácilmente a partir de la circunferencia unitaria. |

Los resultados exactos de las razones trigonométricas para ángulos múltiplos de 90° están en la siguiente tabla.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Las razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270° | | | |
| Ángulo | Seno (sen) | Coseno (cos) | Tangente (tan) |
| 0° | 0 | 1 | 0 |
| 90° | 1 | 0 | No está definido |
| 180° | 0 | -1 | 0 |
| 270° | -1 | 0 | No está definido |

Nota que tan 90° no está definido, dado que el denominador de este es cero; al igual que tan 270°.

[SECCIÓN 3] **3.2.1 Signo de las razones trigonométricas**

Los signos de las razones trigonométricas de un ángulo varían en función del cuadrante en que se encuentre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El **seno** y el **coseno** de un ángulo *α* cualquiera coinciden con la ordenada (*y*) y la abscisa (*x*) de un punto *P* de la circunferencia unitaria.  La **tangente** de un ángulo *α* es el cociente entre el sen α y cos α. |

Según el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo, los signos de la ordenada y de la abscisa del punto *P* cambian. Por tanto, también cambia el signo de las razones trigonométricas del ángulo asociado a dicho punto.

Por ejemplo, para el punto (-√3/2 ,1/2) que corresponde al ángulo de 150° corresponderá

<<FQ\_MA\_10\_03\_026.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | Signo de los valores de las razones trigonométricas seno y coseno. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img22_zoom.jpg |
| **Pie de imagen** | El signo del **seno** de *α* se corresponde con el de la **ordenada**, y el signo del **coseno** de *α*, con el de la **abscisa**. |

El siguiente gráfico resume los signos de los puntos de la circunferencia unitaria, de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentran.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | Signos de los senos y cosenos de los ángulos según su cuadrante. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img23_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Signos de las razones trigonométricas según el cuadrante del ángulo que las define. |

Teniendo en cuenta que la tangente de un ángulo es el cociente entre seno y coseno del ángulo, podemos calcular también el signo que tendrán todas las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo. La siguiente tabla resume los signos por cuadrantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG22 |
| **Descripción** | Tabla con imágenes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **CUADRANTE** | **SENO** | **COSENO** | **TANGENTE** | **ILUSTRACIÓN** | | I | + | + | + |  | | II | + |  |  |  | | III |  |  |  |  | | IV |  |  |  |  | |
| **Pie de imagen** | Los signos de las razones seno, coseno, tangente en cada uno de los cuadrantes de la circunferencia unitaria. |

Por ejemplo, para el ángulo de 300°, dado que está en el cuarto cuadrante, se debe tener que seno y tangente son negativas, mientras que coseno será positivo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC80 |
| **Título** | Signo de las razones trigonométricas |
| **Descripción** | Permite señalar el signo de las diferentes razones trigonométricas. |

SECCIÓN 2] **3.3 Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas**

Como ya sabes, calcular las razones trigonométricas para un ángulo entre 0° y 90° es sencillo a partir de un triángulo rectángulo, por lo tanto será conveniente, para ángulos θ > 90° encontrar una relación para las razones trigonométricas en términos de triángulos rectángulos, o bien relacionarlos con ángulos en el primer cuadrante. Esto es precisamente lo que se desarrollará en esta sección

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El signo de las razones trigonométricas de un ángulo dado depende del cuadrante donde está ubicado el ángulo original. |

[SECCIÓN 3] **3.3.1 Ángulos en el segundo cuadrante**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Todas las razones trigonométricas son positivas en el primer cuadrante. |

**S**i θ es un ángulo que pertenece al segundo cuadrante entones su medida está comprendida entre 90° y 180°, en este caso se calcula el valor de las razones trigonométricas se calculará a partir de su ángulo complementario (que siempre es menor a 90°).

Las razones trigonométricas en el segundo cuadrante se definirá como el valor de la razón trigonométrica del ángulo complementario, con el signo correspondiente para el segundo cuadrante (función seno positiva, funciones coseno y tangente negativas)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** | Reducción al primer cuadrante de razones trigonométricas del segundo cuadrante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las razones trigonométricas de ángulos en el segundo cuadrante se pueden calcular a partir del ángulo suplementario. |

Por ejemplo, para encontrar el valor de seno, coseno y tangente para un ángulo de 120° calculamos las razones para el ángulo complementario (60°), teniendo en cuenta los signos de las razones trigonométricas en el segundo cuadrante:

<<FQ\_MA\_10\_03\_027.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC90 |
| **Título** | Ángulos del segundo cuadrante |
| **Descripción** | Se relacionan las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes del segundo cuadrante |

[SECCIÓN 3] **3.3.2 Ángulos en el tercer cuadrante**

**S**i θ es un ángulo que pertenece al tercer cuadrante entones su medida está comprendida entre 180° y 270°, para reducirlo a un ángulo agudo (primer cuadrante) sus razones trigonométricas estarán definidas de la siguiente manera:

±Razon trigonométrica(θ-180°)

Donde el signo ± indica que se debe tener presente el signo de cada razón trigonométrica en el tercer cuadrante.

Observa en la gráfica e identifica el ángulo agudo α-180° sobre el que se calcularán las razones trigonométricas, este ángulos es denominado *ángulo de referencia*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** | Ángulo de referencia tercer cuadrante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El ángulo de referencia para ángulos en el tercer cuadrante. |

Por ejemplo, para hallar las razones trigonométricas para el ángulo de 210°, puedes observar que el ángulo de referencia es 30° y por lo tanto se tiene que:

<<FQ\_MA\_10\_03\_028.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Recuerda siempre tener en cuenta los signos que corresponden a cada razón según su cuadrante. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC100 |
| **Título** | Ángulos en el tercer cuadrante |
| **Descripción** | Encontrar las razones trigonométricas del ángulo 240° |

SECCIÓN 3] **3.3.3 Ángulos en el cuarto cuadrante**

**S**i θ es un ángulo que pertenece al cuarto cuadrante entones su medida está comprendida entre 270° y 360°. Para usar ángulos en el primer cuadrante debes usar el *ángulo de referencia*, que para este cuadrante será 360°- θ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El ángulo de referencia es siempre un ángulo agudo.  El ángulo de referencia permite calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°. |

Las razones trigonométricas para el ángulo θ estarán definidas de la siguiente manera:

±Razon trigonométrica(360°-θ)

Donde el signo ± indica que se debe tener presente el signo de cada razón trigonométrica en el cuarto cuadrante, de forma análoga a como lo hiciste para ángulos en el segundo y tercer cuadrante.

Por ejemplo, para calcular las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para 315° debes observar que su ángulo de referencia es 45°, por lo tanto:

<<FQ\_MA\_10\_03\_029.gif>>

Observa en el gráfico el ángulo de referencia para el cuarto cuadrante

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** | Ángulo de referencia para el cuarto cuadrante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo α y su ángulo de referencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC110 |
| **Título** | Ángulos en el cuarto cuadrante |
| **Descripción** | Vincula cada uno de los valores de las razones trigonométricas definidas para un ángulo de medida 330°. |

SECCIÓN 2] **3.4 Razones trigonométricas para ángulos negativos, complementarios y coterminales**

Ya has visto cómo se calculan razones trigonométricas de cualquier ángulo, incluso si es mayor a 90°, una pregunta natural que surge es ¿cómo se relacionan las razones trigonométricas de ángulos negativos, complementarios y coterminales? En esta sección encontrarás respuesta a esta pregunta.

[SECCIÓN 3] **3.4.1 Ángulos negativos**

Para encontrar las razones trigonométricas de un ángulo negativo es necesario reconocer un ángulo opuesto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Ángulos opuestos** |
| **Contenido** | Dos ángulos son opuestos si al sumarse su resultado es 0°. En general el opuesto de θ es -θ.  Como puedes observar, opuesto en este contexto se refiere a opuesto aditivo. |

Se tienen el siguiente el ángulo β en el cuadrante I y su opuesto en el cuadrante IV.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** | Ángulos opuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Nota: al ángulo que va hacia abajo cambiar β por -β |
| **Pie de imagen** | Ángulo positivo y ángulo negativo |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_REC120 |
| **Título** | Ángulos negativos |
| **Descripción** | Dado la medida de un ángulo, ubica el cuadrante donde está ubicado la medida de su ángulo opuesto |

Observa los triángulos *BAC* y *HKF*, son triángulos rectángulos congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos triángulos son congruentes si tienen los mismos ángulos y las mismas medidas para cada uno de sus lados. |

Es posible afirmar que los triángulos *BAC* y *HKF* son congruentes, dado que:

Primero. Al ser ambos rectángulos y compartir uno de sus ángulos agudos, el tercer ángulo debe ser igual en ambos triángulos.

Segundo. Los segmentos de recta AC y KF tienen la misma medida ya que son radios de la circunferencia

Tercero. En virtud del criterio de congruencia entre triángulos A.L.A (Ángulo-Lado-Ángulo), el triángulo BAC y el triángulo HDF son congruentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El criterio de congruencia A.L.A establece que:  Si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, en un triángulo, son congruentes con las partes correspondientes de un segundo triangulo, entonces los triángulos son congruentes. |

Así, dado que los triángulos son congruentes, en particular se tiene que *KH=AD*, en otras palabras la abscisa (coordenada *x*) del punto F es igual a la abscisa del punto C. Lo anterior, en términos de razones trigonométricas implica que

<<FQ\_MA\_10\_03\_030.gif>>

Con un razonamiento similar, se concluye que *HF=CD* y por lo tanto la ordenada del punto *F* es igual al opuesto de la ordenada en el punto *C*, por tanto

<<FQ\_MA\_10\_03\_031.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La tangente de un ángulo puede representarse como el cociente de seno y coseno del ángulo.  Las funciones cotangente, secante y cosecante son inversas multiplicativas de las demás razones trigonométricas, por lo que los signos de cada una de estas con su correspondiente inversa serán iguales. |

En virtud de lo anterior, puedes relacionar las razones trigonométricas de cada ángulo *β* con su correspondiente opuesto *–β*:

<<FQ\_MA\_10\_03\_032.gif>>

Con esto, puedes calcular ángulos negativos en términos de su correspondiente ángulo positivo. Por ejemplo:

<<FQ\_MA\_10\_03\_033.gif>>

SECCIÓN 3] **3.4.2 Ángulos complementarios**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Dos ángulos son complementarios si la suma de ellos es igual a 90°.** |

En esta sección encontrarás las relaciones que hay entre razones trigonométricas de ángulos complementarios, para comenzar, observamos que para un ángulo *α* en el primer cuadrante tiene su complemento en el mismo cuadrante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos complementarios en la circunferencia unitaria. |

Los triángulos rectágulos *DHG* y *DAC* son congruentes. Para ver que lo anterior es cierto, realizamos las siguientes observaciones:

* Los segmentos *HD* y *AC* son radios de la circunferencia unitaria por tanto *HD=AC*.
* Los ángulos *α* y *β* son complementarios, es decir 90°-*α*=*β* , por lo tanto, los dos triángulos tienen los mismos ángulos.

A partir de lo anterior usamos el criterio de congruencia A.L.A para concluir que el triángulo y el triángulo son congruentes.

Dado que los triángulos son congruentes, encontramos que *CD=HG* y así la ordenada del punto *C* es igual a la abscisa del punto *D*, en términos de razones trigonométricas

<<FQ\_MA\_10\_03\_034.gif>>

Además, *AD=DG*  y por lo tanto la abscisa del punto *C* es igual es igual a la ordenada del punto *D*, de donde

<<FQ\_MA\_10\_03\_035.gif>>

De las ecuaciones anteriores se pueden deducir todas las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios:

<<FQ\_MA\_10\_03\_036.gif>>

Por ejemplo, sen 30°=cos 60° como puedes comprobar fácilmente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC160 |
| **Título** | Ángulos complementarios |
| **Descripción** | Relaciona cada razón trigonométrica con su equivalente. |

SECCIÓN 3] **3.4.3 Ángulos coterminales**

Los ángulos coterminales a un ángulo dado son, en general, mayores a 360°, por lo que en esta sección verás cómo se calculan sus razones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los ángulos coterminales se relacionan a través de adición o sustracción de múltiplos de 360°, en otras palabras, adicionando *giros*, positivos o negativos, a un ángulo dado. |

Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos cuya medida es superior a 360°, buscamos reducir el ángulo a uno menor, para esto sencillamente “eliminamos” los giros necesarios para convertir el ángulo inicial en uno menor a 360°.

Analíticamente, dado un ángulo θ cuya medida es superior a 360°, dividimos el valor de θ entre 360 obteniendo un cociente y un residuo. El cociente de la división corresponde al número de giros del ángulo dado, mientras que el valor que se obtenga en el residuo corresponderá a un ángulo menor que 360° que tendrá las mismas razones trigonométricas que el ángulo .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** | Ubicación de ángulos coterminales de medida y en el plano cartesiano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://hotmath.com/hotmath\_help/spanish/topics/coterminal-angles.html  los ángulos de medida 120° y 480° son ángulos coterminales. |
| **Pie de imagen** | Los ángulos de medida 120° y 480° son ángulos coterminales, por ello poseen los mismos valores en sus razones trigonométricas. |

Por ejemplo, para el ángulo 480° se tiene que al realizar la operación 480÷360 se obtiene cociente 1 y residuo 120, por lo tanto el ángulo que debes usar para las razones trigonométricas será 120°. Observa las razones trigonométricas del ángulo dado:

<<FQ\_MA\_10\_03\_037.gif>>

Así, es posible calcular las razones trigonométricas de todos los ángulos de amplitud mayor a 360°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC180 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | La circunferencia unitaria o goniocentrica |
| **Descripción** | Es un interactivo donde se mencionan los signos de las razones trigonométricas seno y coseno en la circunferencia trigonométrica. |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC190 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | Ángulos coterminales |
| **Descripción** | Ampliacion de la definición de ángulos coterminales |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC200 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | Razones trigonométricas de ángulos complementarios. |
| **Descripción** | Actividad que sirve para aprender las razones trigonométricas de ángulos complementarios. |
|  |  |

[SECCIÓN 2] **3.5 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC170 |
| **Título** | Razones trigonométricas ángulos terminales. |
| **Descripción** | Dada una razón trigonométrica definida en un ángulo determine su valor. |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

[SECCIÓN 1]**Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC210 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC220 |
| **Título** | EVALUACION |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC230 | | |
| **Web 01** | *Razones trigonométricas.* | | *URL* *http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\_didacticos/Razones\_trigonometricas/Indice\_razones\_trigonometricas.htm* |
| **Web 02** | *Funciones trigonométricas.* | *http://www.colombiaaprende.edu.co/recursos/skoool/matematica\_y\_geometria/funciones\_trigonometricas/index.html* | |

Para profundizar más en el tema te puedes dirigir [Ver](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas/Indice_razones_trigonometricas.htm).