|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones trigonométricas inversas. |
| Código del guion | MA\_10\_05\_CO |
| Descripción | En la unidad anterior se realizó el estudio de las funciones trigonométricas, en lo que sigue, se enfatizará en sus funciones inversas para tal fin es necesario desarrollar la mera definición de función inversa para luego profundizar en las funciones trigonométricas inversas; este proceso se lleva a cabo con el uso de gráficas, conceptos geométricos y algebraicos. |
|  |  |

SECCIÓN 1] **1 Arcoseno, arcocoseno y arcotangente**

Para abordar los contenidos de esta unidad es necesario recordar la definición de función inyectiva, luego la definición de función inversa para finalmente profundizar en las funciones trigonométricas inversas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Una función es inyectiva o uno a uno, si cada elemento del rango tiene un único valor en el dominio. Es decir dada la pareja ordenada que pertenece a la función los valores de no se repiten.** |

Dada la función

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | **13** | **4** | **1** | **4** | **13** |

Observando la tabla se puede afirmar que en la función los valores de se repiten por tanto no es una función inyectiva, otra manera de identificar si una función es uno a uno es a través de su gráfica con el uso de la prueba de la línea horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Observa que las líneas rojas cortan a la gráfica en dos lugares, esto quiere decir que esta función no es inyectiva. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG02 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Esta grafica corresponde a la función , presta atención que al trazar las líneas rojas se interseca con la gráfica en un solo punto, es decir esta es una función inyectiva. |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | De manera que una función es inyectiva o uno a uno si entonces . |

**EJEMPLO 1**

Verificar si es una función inyectiva

Por tanto es una función inyectiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Sea una función inversa con dominio y rango . Si existe una función con dominio y rango , tal que:   * para toda * para toda   Entonces decimos que las funciones y son inversas la una de la otra.  denota la función inversa de |

Además se debe de recordar que para cada par ordenado de la función existe una pareja ordenada que pertenece a la función así mismo se establecen las siguientes propiedades entre las funciones y .

* El dominio de es el rango de .
* El rango de es el dominio de .
* Las funciones son reflexivas entre sí, con respecto a la recta
* La función inversa de se escribe .

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **no significa**  **Pero** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **No todas las funciones tienen inversa** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Si una función tiene inversa se debe cumplir que cada elemento del rango le debe corresponder uno y solo uno del dominio.** |

**EJEMPLO 1**

Verificar si la función es inyectiva, luego encontremos su función inversa.

Por tanto es inyectiva.

Ahora encontraremos su función inversa

Despejamos a en términos de

Para denotar en términos de una función inversa es necesario cambiar las variables de la siguiente manera:

Por otra parte, con respecto a las funciones trigonométricas que ya han sido estudiadas, se observa que debido a su periodicidad estas solo pueden ser funciones inversas en un intervalo especifico, que se empezará a profundizar en las siguientes secciones.

Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente corresponden a las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente, cuyo estudio se ampliará a continuación.

SECCIÓN 2] **2.1 Función arcoseno**

Se reconoce la función seno como una función periódica por tanto no es una función inyectiva para todo su dominio, sin embargo al limitarlo en el intervalose obtiene una función inyectiva y creciente.

Además en ese intervalo están definidos los valores del seno una sola vez.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | Aquí se resalta en color rosa la función arcoseno., sobre la grafica de la función seno. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función seno delimitado su dominio en el intervalo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcoseno** |
| **Contenido** | Se da el nombre de función arcoseno a la función inversa del seno y está definida    Por  si y solo si  Donde y . El dominio de es y el rango es . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

Sin ir mas lejos, es un número real (radianes o ángulo) en cuyo el seno es

De tal manera que Esto nos lleva a usar la definición función inversa estudiada en la sección 1, donde se tienen las siguientes relaciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Descripción grafica de la función arcoseno, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función arcoseno |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Puedes hallar los valores de las función arco seno de la siguiente manera:**   1. **Observa que la parte superior de tu calculadora científica este una R, esto significa que esta en radianes.** 2. **Oprime la tecla SHIFT** 3. **Oprime la tecla sin** 4. **Finalmente ingresa el valor a calcular.** |

**EJEMPLO**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, es .
3. El número en el intervalo del rango, es .

SECCIÓN 2] **2.1 Función arcocoseno**

Se reconoce la función coseno al igual que la función seno, como una función periódica de manera que no es una función inyectiva para todo su dominio, sin embargo al limitarlo en el intervalose obtiene una función inyectiva y decreciente.

De igual modo, en este intervalo están definidos los valores del coseno una sola vez.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Aquí se resalta en color verde función arco coseno, sobre la gráfica de la función coseno. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función coseno delimitado su dominio en el intervalo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcocoseno** |
| **Contenido** | Se denomina de función arco coseno o arcocoseno a la función inversa del coseno y está definida  como  si y solo si  Donde y . El dominio de es y el rango es . |

De hecho es un número real (radianes o ángulo) en cuyo el coseno es

De tal manera que Usando la definición función inversa estudiada en la sección 1, donde se tienen las siguientes relaciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG06 |
| **Descripción** | Descripción grafica de la función arco coseno, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función arco coseno |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Puedes hallar los valores de las función arco coseno de la siguiente manera:**   1. **Observa que la parte superior de tu calculadora científica este una R, esto significa que esta en radianes.** 2. **Oprime la tecla SHIFT** 3. **Oprime la tecla cos** 4. **Finalmente ingresa el valor a calcular.** |

**EJEMPLO 1.**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, cuando es .
3. El número en el intervalo del rango, cuando , se halla el valor de usando una calculadora, ya que no existe un múltiplo racional de cuyo coseno sea . Se obtiene

SECCIÓN 2] **1.3 Función arcotangente**

Dado que se requiere que la función sea inyectiva, se restringe el dominio de la función tangente en el intervalo .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Aquí se resalta en color rojo el intervalo delimitado en la función tangente, con el fin de definir la función arcotangente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función tangente delimitado su dominio en el intervalo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcotangente** |
| **Contenido** | Se denomina de función arcotangente a la función tangente inversa    como  si y solo si  El dominio de es el conjunto de los números reales y el rango es. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

De igual manera es un número real (radianes o ángulo) en .cuya tangente es

Además Como se señaló en las anteriores funciones trigonométricas inversas, se tienen las siguientes relaciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG08 |
| **Descripción** | Grafica de la función arcotangente, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función arcotangente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Puedes hallar los valores de las función arco tangente de la siguiente manera:**   1. **Observa que la parte superior de tu calculadora científica este una R, esto significa que esta en radianes.** 2. **Oprime la tecla SHIFT** 3. **Oprime la tecla tan** 4. **Finalmente ingresa el valor a calcular.** |

**EJEMPLO 1.**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, donde es .
3. El número en el intervalo del rango, usando la calculadora se obtiene

SECCIÓN 2] **1.1Consolidación**

[SECCIÓN 1] **2 Arcocotangente, arcosecante y arcocosecante**

Consideremos ahora las funciones trigonométricas inversas de las funciones cotangente, secante y cosecante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hallar los valores de las funciones arcotangente, arcosecante y arcocosecante en la calculadora científica recuerda usar las siguientes relaciones: |

SECCIÓN 2] **2.1 Función arcocotangente**

La función cotangente no es una función inyectiva como se puede observar en la IMAG09, sin embargo restringiendo la función en el intervalo de se obtiene una función uno a uno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG09 |
| **Descripción** | La curva en color violeta corresponde a la gráfica de la función arco cotangente, sobre la gráfica de la función cotangente. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función cotangente restringida en su dominio en el intervalo . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcocotangente** |
| **Contenido** | Se denomina función arco cotangente a la función inversa de la cotangente y está definida  así  si y solo si  El dominio de es el conjunto de los números reales y el rango es |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

Además Según la definición función inversa ya estudiada, permite interpretar las siguientes propiedades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG10 |
| **Descripción** | Grafica de la función arcocotangente, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://es.wikipedia.org/wiki/Arcocotangente#/media/File:Arccotangent.svg  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/55/Arccotangent.svg/350px-Arccotangent.svg.png |
| **Pie de imagen** | Función arco cotangente |

**EJEMPLO 1.**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, donde es .
3. El número en el intervalo del rango, , se halla el valor de usando una calculadora, ya que no existe un múltiplo racional de cuyo cotangente sea . Se obtiene

SECCIÓN 2] **2.1 Función arcosecante**

Considerando ahora la función secante, al observar su grafica se puede establecer

que no es una función uno a uno en todo su dominio; a pesar de ello, se obtiene una función inyectiva, restringiendo el dominio en el lugar donde no se repiten los valores, tal condición se ubica en el intervalo a excepción del punto , es decir es inyectiva en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG11 |
| **Descripción** | Como en las imágenes anteriores se resalta en color rojo la función arco secante, sobre la gráfica de la función secante. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función secante delimitado su dominio en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcosecante** |
| **Contenido** | Se denomina de función arco secante a la función inversa de la secante y está definida  como  o si y solo si  El dominio de es y el rango es . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

Al igual que es un número real (radianes o ángulo) en cuya secante es Además cumple con las siguientes propiedades:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG12 |
| **Descripción** | Grafica de la función arco secante, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Se requiere una imagen como la anterior se encuentra en  <http://academics.triton.edu/faculty/mlarosa/ltrig9eCh6.pdf> página 28. |
| **Pie de imagen** | Función arcosecante |

**EJEMPLO 1.**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, es .
3. Usando una calculadora, se obtiene 1,40334824

SECCIÓN 2] **2.1 Función arcocosecante**

Para la función cosecante se tienen características semejantes a la función secante ya que su dominio esta dado en y su rango es tal como se puede visualizar en la IMG13.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG13 |
| **Descripción** | Función arco cosecante sobre la gráfica de la función cosecante. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función cosecante delimitado su dominio en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función arcocosecante** |
| **Contenido** | Se denomina función arco cosecante o arcocosecante a la función inversa del cosecante y está definida    como  si y solo si  El dominio de es y el rango es |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **también se denota como** |

A su ves es un número real (radianes o ángulo) en cuyo el coseno es

De tal manera que Usando la definición función inversa estudiada en la sección 1, donde se tienen las siguientes relaciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG14 |
| **Descripción** | Descripción grafica de la función arco cosecante, dada su definición. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Solicito una imagen como esta que se encuentra en  <http://academics.triton.edu/faculty/mlarosa/ltrig9eCh6.pdf>  página 29. |
| **Pie de imagen** | Función arco cosecante |

**EJEMPLO 1.**

Determine:

**SOLUCIÓN:**

1. El número en el intervalo del rango, donde es .
2. El número en el intervalo del rango, es .
3. El número en el intervalo del rango, donde , se halla el valor de usando una calculadora, ya que no existe un múltiplo racional de cuyo cosecante sea 3,5. Se obtiene

Si quieres ampliar tus conocimientos sobre las funciones trigonométricas inversas consulta estas construcciones publicadas en la web [VER](http://tube.geogebra.org/student/m176873) asi mismo en [VER](http://tube.geogebra.org/student/m610157)

[SECCIÓN 1] **3 Funciones trigonométricas de funciones trigonométricas inversas**

Las funciones trigonométricas de funciones trigonométricas inversas se pueden calcular y/o escribirlas como una expresión algebraica, tal como aparece a continuación.

**EJEMPLO**

1. Calcule

**SOLUCIÓN**

Supongamos que

Por tanto sustituyendo se tendría que

Además por definición de la función arcoseno se sabe que

Además se debe de recordar que en este intervalo la función coseno es positiva y se puede escribir de la siguiente manera:

Sustituyendo se tiene:

Aplicando la propiedad , se tiene

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG00 |
| **Descripción** | El ejercicio anterior se puede describir con el siguiente dibujo, donde la medida de la hipotenusa es 2, mientras la medida del cateto adyacente es y la medida del cateto opuesto es 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 1  2 |
| **Pie de imagen** | Triangulo rectángulo dadas sus medidas laterales. |

Se puede calcular inmediatamente los valores de la función trigonométrica de . A partir del anterior dibujo, tal como:

Por otra parte es posible escribir una función trigonométrica en términos de una expresión algebraica de para tal fin es necesario reconocer la **relación Pitagórica** como sigue en el siguiente ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Relación Pitagórica** |
| **Contenido** | Se denomina relación pitagórica a la siguiente expresión: |

**EJEMPLO:**

Escriba como una expresión algebraica de

**SOLUCIÓN:**

Como en el ejercicio anterior sustituiremos

Con el objetivo de plasmar a en términos de usando la relación Pitagórica.

De modo que implica

Por tanto

**EJEMPLO:**

Escriba como una expresión algebraica de

**SOLUCIÓN**

Continuando con el proceso de sustitución se tiene

Con el objetivo de escribir a en términos de usando la relación Pitagórica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** |  |

Se obtiene

De modo que implica

Por tanto

SECCIÓN 2] **3.1 Consolidación**

[

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_IMG00 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC00 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** |  |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Ubicación en Aula Planeta** |  |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

[SECCIÓN 2] **1.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 1] **2 Título**

[SECCIÓN 2] **2.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 3] **2.1.1 Sub-subtítulo sección**

(No es posible tener una Sección 4)

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC00 | |
| **Web 01** | Función inversa #1 | *http://tube.gegebra.org/student/m176873* |
| **Web 02** | *Funciones trigonométricas inversas* | *http://tube.geogebra.org/student/m610157* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |