|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Identidades y ecuaciones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_07\_CO |
| Descripción | En este tema se deducirán las identidades trigonométricas, que implican el uso de las funciones trigonométricas, estas son usadas en cálculo, física, sociales, entre otras. Finalmente se dar a conocer las técnicas para desarrollar ecuaciones trigonométricas que involucran funciones trigonométricas. |
|  |  |

[SECCIÓN 1] **1 Identidades trigonométricas**

En matemáticas es considerada una identidad como una igualdad que es cierta para cualquier valor que tome la variable.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad trigonométrica** |
| **Contenido** | Dadas dos funciones y se dice que son idénticamente iguales si  Sin importar el valor que tome Este tipo de ecuaciones se denominan identidad, mientras las ecuaciones que no son identidad se definen como una ecuación condicional. |

Por ejemplo esta expresión es verdadera para todos los valores a excepción de aquellos valores donde ya que se genera una indeterminación.

En este capítulo se hará uso de las denominadas identidades pitagóricas, también conocidas como identidades fundamentales, estas servirán de insumo para demostrar identidades trigonométricas así mismo para resolver ecuaciones trigonométricas.

SECCIÓN 2] **1.1 Definición de identidades trigonométricas**

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre razones trigonométricas de un mismo ángulo, que es posible evidenciar dando cualquier valor al ángulo, entre ellas se encuentran, las identidades cocientes, las identidades reciprocas, las identidades pitagóricas, las identidades par o impar, las cuales se describirán a continuación.

SECCIÓN 2] **1.2** **Identidades fundamentales**

Se denominan identidades fundamentales a las identidades cocientes, reciprocas, pitagóricas, que fueron mencionadas en unidades anteriores, estas son usadas para encontrar los valores de una función trigonométrica a partir de otra función trigonométrica.

[SECCIÓN 3] **1.2.1 Identidades recíprocas**

Las identidades reciprocas son aquellas que se pueden inferir a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas, tales son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades reciprocas** |
| **Contenido** | , ,  Así mismo, se obtiene:  , ,  , , |

SECCIÓN 3] **1.2.2 Identidades que son razón de dos funciones**

Las identidades que son razón de dos funciones, también son conocidas como identidades cocientes, estas se establecen desde la definición las funciones trigonométricas pertinentes, tal es el caso de:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades que son razón de dos funciones** |
| **Contenido** | , además |

SECCIÓN 3] **1.2.3 Identidades Pitagóricas**

Las identidades pitagóricas, son consecuencia del teorema de Pitágoras, que se deducen del ángulo en posición normal, recordemos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG01 |
| **Descripción** | Aplicando el teorema de Pitágoras a este triángulo rectángulo, se obtiene la identidad pitagórica. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | *(x , y)*  *r*  *y*  *x* |
| **Pie de imagen** | Ángulo en posición estándar y triangulo rectángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **y**  **También se tiene:** |

Si a lo dividimos .

se obtiene:

Haciendo uso de lo mencionado anteriormente se infiere que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad pitagórica** |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | significa o |

Al dividir

Por

Se obtiene

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad pitagórica** |
| **Contenido** | De igual manera dividendo por , resulta: |

SECCIÓN 2] **1.3** **Expresiones que se obtienen a partir de las identidades fundamentales**

Haciendo uso de la definición de identidad es posible transformar las identidades fundamentales en otras expresiones que faciliten encontrar los valores de una función trigonométrica a partir de otra.

SECCIÓN 3] **1.3.1** **Identidades que se obtienen a partir de la identidad**

A partir de la identidad se pueden obtener las siguientes identidades

Despejando a se obtiene:

Así mismo:

Despejando ,

SECCIÓN 3] **1.3.2** **Identidades que se obtienen a partir de la identidad**

Dada la identidad se hallan otras identidades tales como:

Así mismo se puede obtener:

También es posible escribir en términos de , la función , como consecuencia

De este modo, y

Además

Escribiendo en términos de , resulta:

SECCIÓN 3] **1.3.3** **Identidades que se obtienen a partir de la identidad**

Despejando a y a respectivamente:

Con el uso de las anteriores identidades es posible estudiar y verificar si dos expresiones trigonométricas forman una identidad, tal es el caso de,

Como hemos llegado a cada lado a una misma expresión, se concluye que la identidad es válida.

SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

[SECCIÓN 1] **2 Simplificación de expresiones trigonométricas**

Para simplificar expresiones trigonométricas es necesario hacer uso de los algoritmos empleados para reducir expresiones algebraicas e identidades trigonométricas.

Este proceso permite escribir la expresión de distintas formas, ya que al encontrar una expresión en apariencia complicada se puede reformular en una mucho más simple, como se evidencia en el siguiente ejemplo,

De modo que,

Aplicando la identidad Pitagórica, se obtiene:

SECCIÓN 2] **2.1** **¿Cómo comprobar una identidad trigonométrica?**

Una identidad trigonométrica se comprueba siguiendo los siguientes pasos:

1. Se elige un lado de la ecuación y se va transformando para obtener el otro lado. Se sugiere comenzar por el lado en apariencia más complicado.
2. Se usa algebra y las identidades fundamentales para transformar el lado en el que se comenzó.
3. Se recomienda en algunas ocasiones reformular las funciones en términos de senos y cosenos.

Compruebe la siguiente identidad

Para comprobar la identidad se parte del lado izquierdo, para obtener la misma expresión al lado derecho.

Aplicando la identidad pitagórica.

Diferencia de cuadrados

Simplificando la expresión anterior.

Dejándola en términos de

Se reduce por el denominador común.

Partiendo de la expresión del lado izquierdo hemos llegado a la expresión del lado derecho, por ello concluimos que la identidad es válida.

SECCIÓN 2] **2.2** **Identidad trigonométrica para la suma de dos ángulos**

Como le sucede a la mayoría de las funciones, las funciones trigonométricos no cumplen la igualdad por tanto es necesario establecer las ecuaciones que expresen las funciones de la suma de ángulos en términos de las funciones de cada ángulo.

Para comprender la ecuación del seno de la suma de ángulos es necesario seguir el siguiente enlace [**VER**](http://tube.geogebra.org/student/m1083711)**.**

Por lo anterior se puede inferir la identidad para la suma de ángulos es

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para el seno de la suma de ángulos.** |
| **Contenido** |  |

De manera similar como se desarrolló el seno de la suma de ángulos se establece la ecuación que permite determinar el coseno de la suma de ángulos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para el coseno de la suma de ángulos** |
| **Contenido** |  |

Para establecer la tangente de la suma de ángulos es necesario remitirse a las identidades trigonométricas para la suma de ángulos mencionadas anteriormente,

Como se observa a continuación:

Utilizando las identidades del seno de la suma de ángulos y el coseno de la suma de ángulos:

Dividiendo el cociente por se obtiene:

Separando las fracciones se obtiene:

En términos de tangente y simplificando:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad de la tangente de la suma de ángulos** |
| **Contenido** |  |

Estas identidades permiten hallar el valor exacto, del seno, coseno o tangente de un ángulo, a partir de los valores del seno y del coseno de dos ángulos conocidos, sin ir más lejos, para hallar el valor exacto de las funciones trigonométricas y se procede de la siguiente manera:

Usando la identidad

Y escribiendo a

Tenemos

Por otra parte

Eescribiendo

Usando la identidad

SECCIÓN 2] **2.3 Identidades trigonométricas para la diferencia de dos ángulos:**

Las identidades trigonométricas para la diferencia de dos ángulos se comportan de manera similar como las identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos, como se establece a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad seno para la diferencia de dos ángulos** |
| **Contenido** |  |

Así mismo sucede para el coseno de la diferencia de dos ángulos, como se evidencia a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para el coseno de la suma de ángulos** |
| **Contenido** |  |

Esta última identidad se puede verificar haciendo uso de las funciones pares e impares que se mencionaron en los anteriores capítulos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Identidades impares**  **Identidades pares** |

La tangente de la diferencia se puede establecer teniendo en cuenta que,

.

Tal que,

Aplicando la identidad

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para la tangente de la diferencia de ángulos** |
| **Contenido** |  |

De manera análoga, como en los ejemplos de la sección 2.2 se obtener el valor exacto de .

Escribiendo

Usando

SECCIÓN 2] **2.4** **Identidades para ángulos dobles**

En la sección 2.2 se establecieron las identidades trigonométricas para la suma de ángulos, en esta sección se hará uso de las ecuaciones allí mencionadas pero para el caso donde como se observa en las siguientes líneas:

Se tiene a:

Dado que , se sustituye en

Luego usando algebra se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Seno de un ángulo doble** |
| **Contenido** |  |

Si tenemos se reemplaza en

Usando algebra se concluye

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Coseno de un ángulo doble** |
| **Contenido** |  |

Por otra parte para hallar la tangente de un ángulo doble, se utiliza la identidad la tangente de una suma bajo el supuesto que

Dada la tangente de la suma de ángulos

Reemplazando en se obtiene:

Usando algebra, tenemos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Tangente del ángulo doble** |
| **Contenido** |  |

Las anteriores identidades son usadas para desarrollar ejercicios como por ejemplo,

Si, ,

Hallar

De modo que

Se conoce que , pero se requiere conocer para dar solución.

Como el intervalo está ubicado en el primer cuadrante, se infiere que el valor del coseno es de signo positivo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG02 |
| **Descripción** | Se observa que el coseno del ángulo solicitado esta ubicado en el primer cudrante. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Circunferencia de la forma |

Por consiguiente

Por tanto

Ahora reemplazando en la identidad de

SECCIÓN 2] **2.5** **Identidades trigonométricas para ángulos medios**

Usando las identidades de los ángulos dobles y las identidades pitagóricas es posible obtener las identidades para ángulos medios de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Coseno de un ángulo doble: |

Se transforma a en términos de seno o de coseno únicamente, usando la identidad fundamental .

Reemplazando con seno:

En últimas palabras, al afirmar que se tiene que. Por tanto al sustituir en la última expresión se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para el seno de un ángulo medio** |
| **Contenido** |  |

Análogamente se realiza para el coseno

Realizando también la sustitución donde, se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad para el coseno de un ángulo medio.** |
| **Contenido** |  |

En consecuencia la Tangente del ángulo medio, se puede obtener usando las identidades del seno y coseno del ángulo medio de la siguiente manera:

Aplicando propiedad de los radicales se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Tangente del ángulo medio.** |
| **Contenido** |  |

Las identidades del ángulo medio se puede aplicar en ejercicios tales como, encontrar el valor exacto de las funciones trigonométricas y ,

De modo que

Por otra parte

La solución es negativa, ya que el coseno del ángulo de está ubicado en el segundo cuadrante.

SECCIÓN 2] **2.6** **Transformación de productos en sumas o diferencias**

La transformación de productos por sumas o diferencias, permiten simplificar procesos, en múltiples ocasiones, recordemos las expresiones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | (I)  (II)  (III)  (IV) |

Por ejemplo, para hallar el valor exacto de

Escribiendo la expresión como una función trigonométrica de un solo número, se lleva a cabo usando la identidad para el seno de una suma, se tiene:

Por otra parte, al plantearlas las identidades I Y III en un sistema de ecuaciones y al resolverlas por el método de eliminación se obtiene:

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Dividiendo por 2 se obtiene

De manera similar se obtienen las otras 3 identidades producto suma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidad de producto suma** |
| **Contenido** |  |

Por ejemplo, si se quiere determinar el producto en forma de suma de las funciones se procede de la siguiente manera.

Se aplica la identidad

Donde y además recordando que coseno es una función par se obtiene:

Así mismo haciendo uso de las identidades de producto suma y realizando algunas sustituciones, se pueden obtener las identidades que transforman una suma en un producto, para ello se realiza de la siguiente manera:

Nombremos la suma y la diferencia de los ángulos , respectivamente, esto es:

Aplicando el método de eliminación al anterior sistema se ecuaciones se obtiene:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Dividiendo por 2 se obtiene:

Aplicando la otra eliminación al otro sistema de ecuaciones resulta:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Dividiendo por 2 se obtiene:

Ahora si se sustituye

Además

En la identidad

Se obtiene

Multiplicaremos por 2 para llegar a la ecuación:

Las restantes 3 identidades suma producto se deducen de manera similar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Identidades suma producto** |
| **Contenido** |  |

Por ejemplo para escribir como el producto de funciones, se realiza de la siguiente forma:

Se designa y , luego estos valores se sustituyen en,

es decir,

Para profundizar en el tema de identidades trigonométricas debes seguir el siguiente enlace [VER](http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_1.html)

SECCIÓN 2] **2.7 Consolidación**

[SECCIÓN 1] **3 Ecuaciones trigonométricas**

En las anteriores secciones se desarrollaron las identidades trigonométricas. En esta sección se resolverán ecuaciones trigonométricas cas, para ver la diferencia entre estas se tomaron los siguientes ejemplos:

Ecuación 1

Ecuación 2

La primera expresión es válida para cualquier valor que tome , por tanto es una identidad, mientras la segunda expresión solamente es válida para algunos valores de . Cuando se hallan encontrado tales valores se ha resuelto la ecuación trigonométrica

SECCIÓN 2] **3.1** **Ecuaciones trigonométricas lineales**

Una ecuación trigonométrica lineal es aquella que puede ser escrita de la forma donde es una función trigonométrica.

Por ejemplo si se quiere resolver la ecuación trigonométrica , se debe realizar de la siguiente manera.

Ecuación dada

Restando en cada miembro de la ecuación

Resolviendo

Recordemos de la función coseno es una función periódica, con periodo . En esta oportunidad definiremos como un número entero, Finalmente la solución general del ejercicio planteado es:

Observando la gráfica de la función se pueden observar algunas de las soluciones de la ecuación

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_07\_IMG03 |
| **Descripción** | Soluciones de la ecuación corresponden a los puntos notados como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función , donde |

Sin embargo existen otras posibilidades de respuesta, como son aquellos valores que están dentro del cuadrante como por ejemplo:

Resolviendo

Se reconoce que

.

Así mismo, usando los ángulos de referencia, se logra identificar que existe un ángulo en el segundo cuadrante con el mismo valor para seno, para hallarlo se procede de la siguiente manera

Por lo tanto también se cumple que,

.

Para encontrar los ángulos de referencia, que son solución de una ecuación en forma rápida, es pertinente usar la tabla siguiente, que relaciona los valores de los ángulos en grados y en radianes cada cuadrante.

Para finalizar, la solución general de la ecuación es

ó

Donde es un número entero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Cuadrante** | **Ángulo en grados** | **Ángulo en radianes** | **Ángulo de referencia** | **Ángulo de referencia** | | **Cuadrante I** | **<** |  |  |  | | **Cuadrante II** | **<** |  |  |  | | **Cuadrante III** | **<** |  |  |  | | **Cuadrante**  **IV** |  |  |  |  | |

En general , Si una ecuación trigonométrica a simple vista tiene una solución, entonces tiene infinitas soluciones, para poder hallarlas es necesario determinar un intervalo y verificar si la función trigonométrica que aparece en la ecuación es periódica.

SECCIÓN 2] **3.2** **Ecuaciones trigonométricas en forma factorizada**

Recordemos como se factoriza una expresión algebraica,

La ecuación trigonométrica se pude resolver siguiendo un procedimiento similar como el anterior

Observado en la ecuación algebraica se puede afirmar que ya se ha terminado el proceso, sin embargo para la ecuación trigonométrica este no se ha finalizado, por ello es necesario encontrar los valores de que correspondan en la ecuación dada.

Ya que la función seno nunca toma valores menores que -1, no tiene solución

Dado función tangente es una función periódica, con periodo la solución general de la ecuación es:

SECCIÓN 2] **3.3 Ecuaciones trigonométricas con identidades**

Las identidades trigonométricas permiten escribir funciones en términos de otras, esto facilita el proceso de la solución de ecuaciones trigonométricas en algunas oportunidades, donde es pertinente, como sucede en el siguiente ejemplo; resuelve la ecuación trigonométrica

Por tanto la solución general de la ecuación trigonométrica presentada es:

Ó

Donde es un número entero.

SECCIÓN 2] **3.4 Ecuaciones trigonométricas con identidades de ángulos dobles y medios**

En algunas oportunidades aparecen ecuaciones que incluyen ángulos medio tal como:

,

Al resolverla se debe recordar que la función coseno es periódica y su periodo es . Se resuelve como se observa a continuación:

,

ó

Donde es un número entero

Por tanto todas sus soluciones se expresan como,

ó

Ahora, teniendo en cuenta el caso de las ecuaciones trigonométricas que incluyan funciones trigonométricas con ángulos medios, como por ejemplo,

En el intervalo

Se procede de la siguiente manera:

)

Recordemos que el periodo de la función tangente es , ademas el valor de 1 en este intervalo solo esta , como consecuencia se obtiene:

Recordemos que la solución solicitada debe estar ubicada en el intervalo , por tanto la única solución es

SECCIÓN 2] **3.5** **Ecuaciones trigonométricas con funciones inversas**

Las ecuaciones trigonométricas que presentan funciones trigonométricas inversas como por ejemplo,

Para resolver la anterior ecuación, se aplican las propiedades de las funciones trigonométricas inversas

Por tanto

Por tanto

valor del ángulo en radianes

De este modo,

Es la solución de la ecuación.

SECCIÓN 2] **3.6 Consolidación**

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_07\_REC00 | |
| **Web 01** | Seno de la suma de ángulos | *http://tube.geogebra.org/student/m1083711URL* |
| **Web 02** | Identidades trigonométricas | *http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo\_1.html* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |