|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_04\_CO |
| Descripción | Desarrollos tecnológicos en las telecomunicaciones, particularmente los teléfonos celulares, se basan en el análisis de ondas, estas a su vez se describen a partir de ciertos elementos matemáticos muy importantes: las funciones trigonométricas. |

[SECCIÓN 1] **1 Funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente**

La trigonometría hace parte de discilinas del conocimiento tan diversas como óptica, astronomía, arquitectura, ingeniería, medicina, geología, solo para mencionar algunas. La trigonometría nace del análisis de triángulos rectángulos, pero se extiende a un tipo especial de funciones: Las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas permiten el uso de herramientas características de funciones reales, no solo de razones entre números, para el análisis de problemas en contextos particulares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | El argumento de las funciones trigonométricas |
| **Contenido** | Las funciones trigonométricas se basan en el concepto de razón trigonométrica, que relaciona un ángulo agudo con las razones entre los lados del triángulo rectángulo en el que se encuentra. Así, las funciones trigonométricas tendrán como argumento un ángulo *θ.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Shutterstock: 191724428 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | A closeup of a polygraph lie detector test needle drawing a red line on graph paper on an isolated white background |
| **Pie de imagen** | Las funciones trigonométricas permiten modelar movimientos ondulatorios, como las ondas sísmicas que producen los terremotos. |

Para definir las funciones trigonométricas de un ángulo *θ* partimos de la circunferencia unitaria.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Circunferencia unitaria. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El ángulo *θ* está en posición estándar, es decir, su lado inicial coincide con el semieje positivo *x*. |

Sobre el círculo unitario identificamos un único punto *P(x,y)* que identifica el ángulo *θ*, como puedes observar en la gráfica. Debes observar que para cualquier ángulo existe uno y solo un punto sobre la circunferencia unitaria que lo caracteriza.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Se define circunferencia unitaria analíticamente a través de la ecuación  *x2 + y2 =* 1 |

El triángulo rectángulo ΔAPC tiene:

* altura *x,* que se denominará seno de *θ.*
* base *y*, que se denominará coseno de *θ*.
* Hipotenusa es 1.

Esta definición de seno y coseno para un ángulo *θ* es coherente con las definiciones de seno y coseno como razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, en este caso el triángulo ΔAPC.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las razones trigonométricas seno y coseno se definen de la siguiente manera:  **<<**FQ\_MA\_10\_04\_001.gif**>>** |

Observa que en el triángulo ΔAPC, como se mencionó anteriormente, tiene hipotenusa 1, por lo tanto, como esperábamos:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_002.gif**>>**

Las definiciones de seno y coseno como coordenadas del punto que identifica un ángulo *θ* es válida para cualquier ángulo, no solo los ángulos agudos o positivos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los signos de las coordenadas de un punto P sobre la circunferencia unitaria varían dependiendo del cuadrante en que se encuentre. Así, los signos de seno y coseno de un ángulo, definidos como las coordenadas de este cambian de signo de acuerdo al cuadrante en el que se encuentre. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/#/cuaderno-estudio?UnidadID=644>    Cambiar por |
| **Pie de imagen** | El signo del seno de α se corresponde con el de la ordenada, y el signo del coseno de α, con el de la abscisa. |

Por ejemplo para determinar el signo del seno de 120° y el coseno de 230° puedes seguir los siguientes pasos:

1. Se representan los ángulos en la circunferencia unitaria:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/#/cuaderno-estudio?UnidadID=644>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img24_small.jpg  Cambiar α por θ |
| **Pie de imagen** | La representación de los ángulos en la circunferencia unitaria indica en qué cuadrante se halla cada uno de ellos. |

1. Se observan los signos de la ordenada para 120° y de la abscisa para 230° y se identifica que:

* El ángulo de 120° se encuentra en el segundo cuadrante, por tanto el seno es positivo.
* El ángulo de 230° se encuentra en el tercer cuadrante, por tanto el coseno es negativo

[SECCIÓN 2] **1.1 La función seno**

Analizaremos en esta sección la función seno y su gráfico en el plano cartesiano, en esta última parte podrás evidenciar el porqué las funciones trigonométricas son utilizadas para analizar ondas (electromagnéticas, acústicas, etc).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Shutterstock: 83915149 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | image of speakerphones and sound against white background |
| **Pie de imagen** | Ondas acústicas son modeladas con funciones trigonométricas. |

Se define la función seno sen(*x*), para *x* un número real, como el valor correspondiente a la ordenada del punto P sobre la circunferencia unitaria, que identifica el ángulo *x* medido en radianes*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para cambiar de unidad de medida de un ángulo dado se debe tener en cuenta que  180°=π radianes |

Por ejemplo, sen (2) equivale a calcular la ordendad del punto P que identifica un ángulo de 2 radianes. Para hacerlo más claro, se tiene que 2 radianes ≈ 114,6°, por lo tanto el valor de sen (2) será el valor de la ordenada del punto que se muestra en el siguiente gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de sen (2) |

Para el cálculo numérico de sen (2) hacemos uso de la calculadora y obtenemos que

sen (2)≈0,9092

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hacer cálculos numéricos de funciones trigonométricas en la calculadora, debes tener en cuenta que   * Si usas radianes, la calculadora debe estar configurada para calcular esta unidad. * Si usas grados, la calculadora debe esar en modo *Degrees,* que en general está representado por una letra D en la parte superior de la pantalla. |

Como puedes ver, calcular cualquier valor de sen (*x*) se reduce, en términos gráficos, a encontrar la ordenada del ángulo que *x* representa (en radianes).

Una ventaja adicional de definir funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria es la relación directa que hay entre el valor del argumento *x* y la longitud de arco que describe *x* como ángulo.

Para mayor claridad, observa que la medida de θ en radianes cumple (por definición) la siguiente relación :

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_003.gif**>>**

Donde *s* es la longitud del arco sobre la circunferencia, y *r* es igual al radio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Cambiar θ por *x* |
| **Pie de imagen** | Relación entre el arco de la circunferencia unitaria y el ángulo *x*. |

Así, para la circunferencia unitaria, *r* = 1 y se tiene que

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_004.gif**>>**

Es decir, el argumento *x* para la función sen (*x*) equivale a la longitud del arco, sobre la circunferencia unitaria, que genera el ángulo de *x* radianes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El valor del argumento *x* de la función seno representa un ángulo de *x* radianes en la circunferencia unitaria. |

Con base en los razonamientos anteriores, podemos identificar algunas propiedades del gráfico de la función seno:

* La función seno tiene como dominio todos los números reales, dado que puedes calcular la altura de cualquier ángulo *x*, sobre la circunferencia unitaria.
* Los valores que toma la función están entre -1 y 1, esto se puede observar al recordar que sen (*x*) equivale a una altura de un punto sobre la circunferencia unitaria.
* La función toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *x* y para *x+*2*π*, dado que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo.

Con lo anterior podemos decir que

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Colocar las líneas horizontales a la altura -1 y 1 punteadas. |
| **Pie de imagen** | La función seno está entre -1 y 1, y es periódica con un periodo de 2π. En azul un segmento dentro del que estará una parte de la gráfica y que se repetirá en virtud de la periodicidad |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si deseas interpretar el valor *x* del argumento de la función seno en términos de grados sexagesimales, debes recordar que  π→180° |

Evaluando en la función seno varios valores de *x* obtenemos la siguiente tabla de valores:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2Π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
| sen(*x*) | 0 | 1/2 | √2/2 | √3/2 | 1 | √3/2 | √2/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -√2/2 | -√3/2 | -1 | -√3/2 | -√2/2 | -1/2 | 0 |

Usando la relación sexagesimal para el argumento de la función seno se tiene la siguiente tabla equivalente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sen (*x*) | 0 | 1/2 | √2/2 | √3/2 | 1 | √3/2 | √2/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -√2/2 | -√3/2 | -1 | -√3/2 | -√2/2 | -1/2 | 0 |

A partir de esta tabla, podemos hacer un bosquejo del gráfico de la función seno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Colocar los nombres de los ejes: *X* y *Y* respectivamente. |
| **Pie de imagen** | Esquema de la función seno entre 0 y 2π. |

Como se mencionó anteriormente, puedes considerar valores negativos o superiores a 2π en la función seno, como se puedes observar en [VER](http://tube.geogebra.org/student/m15858)

Como la función seno es periódica con periodo de 2π, con base en el gráfico anterior, podemos inferir que el gráfico de toda la función seno será como se muestra en la siguiente figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG010 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Colocar el nombre a la función *y =* sen (*x)* |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función seno. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función es periódica cuando su comportamiento se repite en intervalos regulares.  En términos matemáticos, *f*(*x*) es una función periódica si existe un número real *p >* 0 tal que *f*(*x + p*) *= f*(*x*)*,* para todo *x* que pertenezca al dominio de la función. Al menor número *p* que tiene la propiedad anterior se llama el período de *f.* |

La definición de función periódica en las funciones trigonométricas se puede ampliar siguiendo el enlace [VER](http://tube.geogebra.org/student/m106334)

[SECCIÓN 2] **1.2 La función coseno**

Esta sección expondrá la definición de la función coseno y su gráfico, que como se ha mencionado previamente, es ampliamente utilizada (junto con la función seno) para modelar fenómenos ondulatorios.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La circunferencia unitaria está definida por la ecuación  x2+y2=1 |

Se define la función coseno, de una forma similar a como se definió la función seno, a partir de la circunferencia unitaria. La función coseno de un valor *x* se define como el valor de la abscisa del punto (sobre la circunferencia unitaria) al que corresponde un ángulo de *x* radianes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG011 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Coseno de un ángulo *x*. |

Como puedes observar, la función cos(*x*) y los valores que puede tomar tienen las siguientes características:

* La función coseno tiene como dominio todos los números reales.
* Los valores que toma la función están entre -1 y 1, dado que los valores son coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria.
* La función toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *x* y para *x+*2*π*, dado que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo (sobre la circunferencia unitaria).

Como puedes observar, tiene características similares a la función seno. Veamos algunos puntos que pertenecen a la gráfica, en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
| cos(*x*) | 1 | √3/2 | √2/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -√2/2 | -√3/2 | -1 | -√3/2 | -√2/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | √2/2 | √3/2 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los ángulos de π/6, π/3 y π/4 son ángulos notables, por lo que podemos calcular fácilmente los valores de las razones trigonométricas seno y coseno, valores con los que (teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el ángulo *x*) hemos completado la tabla anterior. |

Así, podemos hacer un bosquejo de una parte la gráfica de la función coseno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG012 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar el nombre de los ejes: *y =* cos *x.* y *x.* |
| **Pie de imagen** | Función coseno en el intervalo [0, 2π]. |

Dado que es una función periódica, podemos extender el gráfico de la función a su dominio completo: todos los reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG013 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes.    Incluir el nombre de la función: cos(*x*) |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función coseno. |

[SECCIÓN 2] **1.3 La función tangente**

En esta sección veremos cómo se puede definir la función tangente y cuál es su representación gráfica, para esto haremos uso de las funciones ya definidas: seno y coseno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para un ángulo θ, se tiene que la siguiente relación entre razones trigonométricas  **<<**FQ\_MA\_10\_04\_005.gif**>>** |

Definiremos la función tangente de *x* como el cociente entre la función seno de *x* y la función coseno evaluada en *x*, en notación de funciones:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_006.gif**>>**

Observa que con esta definición, la función tangente no está definida para si cos(*x*)*=*0*.* Si observas la gráfica de la función coseno observarás que los valores en los que esta toma el valor cero son:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_007.gif**>>**

Donde *n* es un entero positivo.

Por lo tanto, en estos valores la función tangente tendrá asíntotas verticales. Ubicando sus asíntotas se obtiene la siguiente gráfica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG014 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agrgar los nombres de los ejes y el nombre de la gráfica: *y =* tan (*x*) |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función tangente en el intervalo [0, 2π] |

A partir del gráfico de la función tangente se pueden observar las siguientes características:

* El dominio de la función tangente está definido para todos los valores *x* que pertenezcan al conjunto de los números reales sin incluir aquellos de la forma

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_008.gif**>>**

Donde *n* es un número entero.

* El rango de la función tangente son los números reales.
* Los valores donde se interseca *y* = tan *x* con el eje *X* (los ceros de la función) son los mismos de la función seno (*x =* 0 *x* = π*,* x = 2π,…).
* La función *y =* tan (*x*) es periódica, con periodo π.
* Se observa que esta función no posee puntos máximos ni mínimos.

SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC10 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Características de la gráfica de la función coseno |
| **Descripción** | Actividad para identificar las propiedades graficas de la función coseno |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC20 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Funciones trigonométricas: coseno, seno y tangente |
| **Descripción** | Recurso para identificar la gráfica de las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente |

**[SECCIÓN 1] 2 Funciones trigonométricas: cotangente, secante y cosecante**

En esta sección se estudiaran las funciones reciprocas (inversas multiplicativas) de las estudiadas en la sección anterior, se identificarán algunas propiedades de estas.

[SECCIÓN 2] **2.1 La función cotangente**

Para definir la función cotangente haremos uso de las funciones seno y coseno, a la vez que usaremos una relación entre razones trigonométricas:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_009.gif**>>**

Observa que esta función está indeterminada cuando sen *x* = 0. A partir de la gráfica de la función seno puedes determinar que los valores que anulan al seno son:

π, 2π, … , *nπ.*

Donde *n* pertenece a los números enteros. Así, el gráfico de la función cotangente tendrá asíntotas verticales en estos valores de *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_IMG015 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar le nombre de los ejes e indicar que es la gráfica de la función cot(*x*) |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función cotangente en el intervalo [0, 2π]. |

Observando el segmento de la gráfica de la función cotangente, a partir de este se pueden inferir las siguientes características:

* El dominio de la función cotangente corresponde a todos los reales menos los múltiplos de π.
* El rango de *y =* cot(*x*) el conjunto de los números reales.
* Los valores que intersecan al eje *X* corresponden a los valores que anulan la función coseno.
* La grafica de la función cotangente no interseca al eje *Y.*
* La función es periódica con periodo π.
* La función no posee valores máximos ni mínimos.

[SECCIÓN 2] **2.3 La función secante**

Recurriendo a las relaciones entre razones trigonométricas, se define la secante de un valor *x* como

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_0.gif**>>**

Observa que la función no está definida para aquellos valores donde cos *x =* 0, como se apuntó anteriormente, estos valores son:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_007.gif**>>**

Donde *n* es un entero positivo. A partir de estos valores identificamos las asíntotas verticales de la gráfica de la función secante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG016 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes e identificar que la gráfica corresponde a *y* = sec *x.* |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función secante en el intervalo [0, 2π] |

A partir del segmento de gráfica que se muestra, podemos inferir algunas características de la función secante.

* El dominio de la función secante corresponde a todos los reales menos los valores en los que coseno es cero.
* El rango de la secante es (-∞, -1] ∪ [1, ∞).
* La grafica de la función secante no interseca al eje *X* en algún punto.
* La grafica de la función secante interseca al eje *Y* en el punto de coordenadas (0, 1).
* La función *y* = sec *x* es periódica con periodo 2π.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG017 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar la periodicidad de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes e identificar la gráfica como *y* = sec *x.* |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función secante. |

[SECCIÓN 2] **2.3 La función cosecante**

Se define la función cosecante a través de la función seno:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_0.gif**>>**

A partir de esta definición, podemos observar que la cosecante es indeterminada en aquellos valores donde sen *x* = 0, como se mostró anteriormente, tales valores son:

π, 2π, … , *nπ*

Donde *n* pertenece a los números enteros, valores en los que encontraremos asíntotas verticales de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG018 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes e identificar la gráfica con la función *y* = csc *x* |
| **Pie de imagen** | Función cosecante en el intervalo [0, 2π] |

A partir del segmento de gráfico de la función cosecante, podemos observar que

* El dominio de la función cosecante corresponde a todos los reales menos los múltiplos de π.
* El rango de csc(*x*) es (-∞, -1]∪ [1, ∞)
* La grafica de la función secante no interseca al eje *X* en algún punto.
* La grafica de la función secante no interseca al eje *Y*.
* La función csc(*x*) es periódica con periodo 2π.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG019 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar la periodicidad de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes e identificar la gráfica con la función *y* = csc *x* |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función cosecante. |

SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC30 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Funciones trigonométricas, cotangente, secante y cosecante |
| **Descripción** | Actividad para identificar la gráfica de la función correspondiente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC 40 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Uso de la calculadora científica para las funciones reciprocas |
| **Descripción** | Recurso para ampliar el uso de la calculadora científica, con las funciones trigonométricas reciprocas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Ceros de las funciones tangente y cotangente |
| **Descripción** | Recurso para reconocer otras características de la gráfica de la función tangente y cotangente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Funciones reciprocas |
| **Descripción** | Este recurso permite relacionar cada función con su reciproca asociada |

[SECCIÓN 1] **3Análisis de gráficas**

Las funciones trigonométricas permiten modelar, entre otras aplicaciones, el comportamiento de ondas de radio, sin embargo estas no se representan directamente con las funciones trigonométricas, sino como transformaciones de estas: traslaciones, compresiones, alargamientos, solo para mencionar algunas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG020 |
| **Descripción** | Shutterstock: [157764617](http://www.shutterstock.com/pic-157764617/stock-vector-frequency-wave-shapes-object.html?src=wzP-9MDzPrnQtH9x4Fw_4A-1-1) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1033249/157764617/stock-vector-frequency-wave-shapes-object-157764617.jpg  Dejar únicamente las cuatro primeras ondas. |
| **Pie de imagen** | Diferentes ondas de radio |

En esta seccion aprenderás algunas de las transformaciones básicas que se utilizan en gráficos de funciones trigonométricas.

[SECCIÓN 2] **3.1 Traslación de funciones**

De acuerdo al diccionario de la RAE (Real Academia Española) define el verbo trasladar como “Llevar a alguien o algo de un lugar a otro”, es precisamente este el significado matemático de traslación, un “movimiento” en el que se lleva de un lugar a otro una función, se debe resaltar que estos movimientos *no cambian la forma* del objeto.

Hay dos tipos de traslaciones que podemos describir tanto en forma gráfica como en forma analítica: traslaciones verticales y traslaciones horizontales.

[SECCIÓN 3] **3.1.1 Translaciones verticales**

Trasladar verticalmente una función equivale a cambiar la altura de todos los puntos que la componen.

Analíticamente, para una función trigonométrica *f*(*x*)podemos trasladarla verticalmente C unidades sumando *C* a la función:

*f*(*x*) *+ C*

Si el valor *C* es positivo, el gráfico de la función se trasladará verticalmente hacia arriba, si el valor *C* es negativo, el gráfico bajará *C* unidades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG021 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar el traslado de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes, indicar con color verde que la gráfica en verde corresponde a la función: *y =* sen*x +* 1.  En rojo indicar que la gráfica roja corresponde a *y =* sen*x*.  En morado escribir la función *y =* sen*x –* 1 para indica que corresponde a la gráfica morada. |
| **Pie de imagen** | Traslado vertical de *y =* sen(*x*) |

A partir del gráfico, puedes observar que

* La función sen(*x*)+1 es un desplazamiento de una unidad hacia arriba de la función sen(*x*).
* La función sen(*x*)-1 es un desplazamiento de una unidad hacia abajo de la función sen(*x*).

Observa que las traslaciones verticales están modificando las segundas componentes (ordenadas) de los puntos que del gráfico de *f*(*x*).

SECCIÓN 3] **3.1.2 Traslaciones horizontales**

Las traslaciones horizontales de una función *f*(*x*) deberán modificar la primera componente (abscisa) de los puntos que forman el gráfico de esta función, por lo tanto una traslación horizontal será, analíticamente, de la forma

*f*(*x+D*)

En este caso, si *D* es un número positivo, la traslación será hacia la izquierda y si *D* es un número negativo, la traslación será *D* unidades a la derecha.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG022 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar el traslado de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes y escribir en azul *y =* cos *x* y en rojo |
| **Pie de imagen** | Traslado horizontal de *y =* cos *x* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Sumar un número positivo a toda la función hace que el gráfico suba, mientras que sumar *un número positivo al argumento x* hace que el gráfico se mueva a *izquierda*. |

[SECCIÓN 2] **3.2 Reflexión de funciones**

Una refelexión es una transformación que, teniendo en cuenta una línea recta llamada *línea de reflexión* (que hará las veces de *espejo*), cambia los puntos con sus imágenes “opuestas” con relación a la línea de reflexión.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG023 |
| **Descripción** | Shutterstock: [70255390](http://www.shutterstock.com/pic-70255390/stock-photo-young-modern-looking-girl-reflected-on-mirror.html?src=5oCDydgDhs0UdXXIxog5Sg-2-45) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/126010/126010,1296579699,1/stock-photo-young-modern-looking-girl-reflected-on-mirror-70255390.jpg  Incluir una línea vertical que separe las dos imágenes reflejadas y nombrarla *línea de reflexión* |
| **Pie de imagen** | Reflexión de imágenes a través de un espejo. |

En matemáticas, hay una reflexión con relación al eje Y, cuando a la función *f*(*x*) le a plicamos la transformación -*f*(*x*). Observa el ejemplo en el siguiente gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG024 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar la reflexión de  *y = -* sen *x* con respecto al eje *X.* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes, escribir las funciones: *y = -* sen *x* en rojo y *y =* sen *x* en negro*.*  *Cambiar la altura de la función a 1.* |
| **Pie de imagen** | La reflexión de la función seno. |

Una reflexión con relación al eje *X* , para la función *f*(*x*), se describe analíticamente como *f*(-*x*).

Las reflexiones con relación a los ejes están directamente relacionadas con cierto tipo de funciones: funciones pares e impares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función es par si solo si *f*(*x*)= *f*(-*x*) para todo x ∈ Dom f.  Una función es impar si solo si *f*(-*x*)=- *f*(*x*) para todo x ∈ Dom f |

Las funciones pares, en términos de la reflexión con relación al eje *Y*, son aquellas que al ser reflejadas se obtiene de nuevo el mismo gráfico de la función original.

Las funciones impares, en términos de la reflexión con relación al eje *Y*, son aquellas que al ser reflejadas se obtiene un gráfico equivalente al obtenido de una reflexión con relación al eje X.

En el caso de las funciones trigonométricas, puedes observar a partir de sus gráficos que

|  |  |
| --- | --- |
| Funciones pares | Funciones impares |
| cos(*x*) | sen(*x*) |
| tan(*x*) |
| sec(*x*) | csc(*x*) |
| cot(*x*) |

[SECCIÓN 2] **3.3 Compresión y alargamiento de funciones**

Las traslaciones y reflexiones no hacen cambios en la forma de una figura. La compresión o alargamiento sí produce una *deformación* de la figura inicial, que a su vez puede ser descrita en forma analítica, para el caso de las funciones.

SECCIÓN 3] **3.3.1 Compresión y alargamiento vertical de funciones**

Cuando se contrae o alarga verticalmente el gráfico de una función, se está modificando la altura de los puntos que la forman.

En el caso de la función *f*(*x*), la nueva función *B f*(*x*) resultará ser una elongación *(alargamiento) vertical* de la función original, por un factor *B* en el caso en el que *B*>1. (siendo *B* > 0 una constante). Si el valor de B es menor que 1, entonces el gráfico resultante será una *compresión* vertical del gráfico original.

Observa el siguiente ejemplo, usando funciones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG025 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar el alargamiento y la comprensión vertical de *y =* sen *x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar los nombres de los ejes y escribir en rojo *y =* sen *x*, y en azul *y =* 3 sen *x,* y en negro *y = 1/3* sen *x* |
| **Pie de imagen** | Compresión y alargamiento vertical de la función *y* =sen *x.* |

SECCIÓN 3] **3.3.2 Compresión y alargamiento horizontal de funciones**

Cuando se toma un gráfico y se produce una compresión o un alargamiento horizontal, se está produciendo un cambio en la primera componente (abscisas) de todos los puntos que la conforman.

En el caso de una función *f*(*x*), un alargamiento o una compresión se presenta en la forma *f*(*Ax*) para *A*>0, de la siguiente forma:

* Si *A*>1, entonces la gráfica se contrae horizontalmente por un factor de 1/*A.*
* Si *A<*1, entonces la gráfica se alarga horizontalmente por un factor de 1/*A.*

Observa cómo funcionan estas transformaciones con los gráficos de una función trigonométrica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG026 |
| **Descripción** | Los colores asignados permiten identificar el alargamiento a la comprensión horizontal de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Agregar el nombre de los ejes, en negro debe aparecer la función: *y* = sen (1/2)*x;* en rojo la función: *y* = sen *x;* en verde debe aparecer la función: *y* = sen 2*x;* los colores de las gráficas también se deben mantener. |
| **Pie de imagen** | Compresión y alargamiento horizontal de *y* = sen *x.* |

[SECCIÓN 2] **3.4 La amplitud**

La amplitud es una característica de movimientos ondulatorios (oscilatorios), la amplitud describe la magnitud de la oscilación, y por lo tanto la amplitud de una curva que se construye a partir de la función seno o la función coseno.

Analíticamente, la amplitud es el valor │*B*│ del factor por el que se multiplica una función seno o coseno, o alguna de sus variaciones a través de transformaciones:

*B⋅*sen(*Ax+D*)+*C* , *B⋅*cos(*Ax+D*)+*C*

Observa el siguiente gráfico de amplitud 3.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG027 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función *y* = 3sen *x* + 1. |

En la gráfica de la función *y* = 3sen *x* + 1, podemos observar que su máximo valor es 4 y su valor mínimo es -2, por tanto la amplitud también puede definirse como la mitad de la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la función:

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_012.gif**>>**

Así, puedes determinar la amplitud haciendo la diferencia entre el máximo y el mínimo a partir del gráfico, o bien determinar este valor a partir de la expresión analítica de la función.

[SECCIÓN 2] **3.5 Periodo**

El periodo de una función periódica es el número que indica qué tan grande es el intervalo que se repite en el gráfico.

Para las funciones trigonométricas seno y coseno se puede dar una fórmula que nos permite calcular su periodo. Si *f*(*x*) es la función seno o la función coseno y se tiene una transformación dada por *B f(Ax* + *D*) + *C,* entonces su periodo está dado por

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_013.gif**>>**

Ten presente que las funciones tangente y cotangente no están incluidas en esta fórmula, de hecho, su periodo estará determinado por π/|A| si las consideramos a través de transformaciones de la forma *B f(Ax* + *D*) + *C.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG028 |
| **Descripción** | Gráfico de la función -4cos(x) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función 4cos(*x*) tiene un periodo de π/ 2. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función es periódica cuando su comportamiento se repite en intervalos regulares, es decir *f(x)* es una función periódica, si existe un número real *p >* 0 tal que *f*(*x* + *p*) = *f(x),* para todo *x* que pertenece a los números reales. Al menor número *p* que tiene la propiedad anterior se llama el período de *f.* |

[SECCIÓN 2] **3.6 Desfase**

Como has podido observar en estas secciones, hemos mencionado transformaciones de las funciones trigonométricas, que en forma general podemos enunciar como *Bf*(*Ax*+*C*)*,*  donde *f*(*x*) es una función trigonométrica y A,B,C son constantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dependiendo de los valores que tomen *A*, *B*, *C*, la función sufrirá traslaciones, ampliaciones o alargamientos. |

Como has podido evidenciar, estas constantes modifican de diferentes maneras el gráfico de la función *f*(*x*), una pregunta natural que surge es: si conozco los valores de las constantes A, B, C ¿cómo puedo saber qué tanto se ha *desplazado* horizontalmente la función *Bf*(*Ax*+*C*) resultante con relación a la función *Bf*(*Ax*)? La respuesta a esta pregunta es precisamente lo que se denomina *desfase*.

El desfase de una función trigonométrica de la forma *Bf*(*Ax*+C), con relación a la función *Bf*(*Ax*), es el número C/A.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El desfase de una función trigonométrica de la forma *Bf*(*Ax*+*C*) depende de dos parámetros: A y C; es decir, depende de una ampliación (o contracción) y de una traslación.  El valor C/A representa la cantidad de unidades que se desplazó (desfasó) la función horizontalmente con relación a la función *Bf*(*Ax*) en la que solo hay ampliaciones (o contracciones) pero no hay traslaciones. |

El desfase de la función *Bf*(*Ax+C*) *no es* el valor C como podría pensar un lector desprevenido, observa el porqué con la siguiente forma de re-escribir la función

**<<**FQ\_MA\_10\_04\_014.gif**>>**

Observa que con esta presentación, es claro que primero hay una traslación de *C/A* y luego una ampliación (contracción) de *A* unidades

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El desfase para el desfase se aplican las mismas reglas de un desplazamiento, en este caso:   * Si C/A>0, la traslación (el desfase) es a izquierda. * Si C/A<0, la traslación (el desfase) es a derecha. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_IMG029 |
| **Descripción** | Gráfico de las funciones 2sen(4*x*-π) y la función 2sen(4*x*), marcando el desplazamiento de fase desde el origen al punto π/4 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función 2sen(4*x*-π) tiene un desplazamiento de fase de π/4, como puedes observar al comparar las dos gráficas. |

[SECCIÓN 2] **3.8 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_CO\_REC70 |
| **Título** | Transformaciones de las funciones seno y coseno |
| **Descripción** | Ejercicio de arrastrar imágenes de graficas al contenedor que corresponda. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC80 |
| **Título** | Transformaciones de las funciones tangente y cotangente |
| **Descripción** | Ejercicio de arrastrar imágenes de graficas al contenedor que corresponda. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC90 |
| **Título** | Transformaciones de las funciones secante y cosecante. |
| **Descripción** | Ejercicio de arrastrar imágenes de graficas al contenedor que corresponda. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC100 |
| **Título** | Periodo y amplitud de funciones trigonométricas. |
| **Descripción** | Selecciona el valor del periodo o amplitud de la función dada. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC110 |
| **Título** | Transformación de la función trigonométrica coseno. |
| **Descripción** | Dada una secuencia de imágenes es posible determinar la ecuación de una función trigonométrica transformada. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC120 |
| **Título** | Transformación de la función trigonométrica tangente. |
| **Descripción** | Dada una secuencia de imágenes es posible determinar la ecuación de una función trigonométrica transformada. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC130 |
| **Título** | Desfase de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Este recurso permite al estudiante encontrar el desfase de la gráfica dada su ecuación. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC140 |
| **Título** | Periodo de las funciones trigonométricas tangentes, cotangente, secante, cosecante. |
| **Descripción** | Este recurso permite al estudiante encontrar el periodo de la gráfica dada su ecuación. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC150 |
| **Título** | Desfase de las funciones trigonométricas tangentes, cotangente, secante, cosecante. |
| **Descripción** | Este recurso permite al estudiante encontrar el desfase de la gráfica dada su ecuación. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC160 |
| **Título** | Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas. |
| **Descripción** | Este recurso permite al estudiante encontrar el desplazamiento vertical de la gráfica dada su ecuación |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC170 |
| **Título** | Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas. |
| **Descripción** | Este recurso permite al estudiante encontrar el desplazamiento horizontal de la gráfica dada su ecuación |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC180 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** | Instalación de Geogebra. |
| **Descripción** | Este recurso te permitirá descargar el software Geogebra. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC190 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** | Construcción de las funciones trigonometrías, seno,coseno, tangente. |
| **Descripción** | Esta actividad debe asignarse como tarea ya sea para entregarse a mano o enviarse por correo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC200 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** | Construcción de las funciones trigonometrías, cotangente,secante, cosecante. |
| **Descripción** | Esta actividad debe asignarse como tarea ya sea para entregarse a mano o enviarse por correo. |

[SECCIÓN 1]**Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC210 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Describe las funciones trigonométricas y sus transformaciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_04\_RE220 |
| **Título** | EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS |
| **Descripción** | Este recurso permite evaluar que tanto has aprendido sobre las funciones trigonométricas. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_04\_REC230 | |
| **Web 01** | *Función seno* | *http://tube.geogebra.org/student/m15858URL* |
| **Web 02** | *Funciones periodicas* | *http://tube.geogebra.org/student/m106334URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |