|  |  |
| --- | --- |
| **Título del guion** | **Geometría analítica** |
| **Código del guion** | **MA\_10\_05\_CO** |
| **Descripción** | Cuando se usan sistemas coordenados como el cartesiano, es posible hacer un análisis de figuras geométricas a través del empleo de elementos algebraicos de forma consistente con la Geometría euclidiana; esta es la Geometría analítica. |

Desde la aparición del sistema de coordenadas rectangulares propuesto por René Descartes en el siglo XVII, se integraron la Geometría y el Álgebra en un nuevo campo de estudio llamado Geometría analítica. En este nuevo campo de estudio es posible usar herramientas algebraicas para abordar problemas geométricos y darles solución; el uso de estos elementos del Algebra permite el entendimiento del plano coordenado de una forma más completa, a la vez que objetos algebraicos pueden representarse como objetos geométricos en un plano cartesiano, como por ejemplo los sistemas de ecuaciones.

**[SECCIÓN 1] 1 Los lugares geométricos**

En un plano cartesiano se identifican los lugares geométricos como conjuntos de puntos que satisfacen cierta condición.

Objetos de la Geometría como la recta y la circunferencia son lugares geométricos:

* Una recta puede definirse a partir de dos puntos *A* y *B*, como el conjunto de puntos cuya distancia a *A* es igual a la distancia a *B*.
* La circunferencia es un conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo *C*, llamado centro.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG 01 |
| Descripción | Crear las imágenes de una recta y de una circunferencia desde la perspectiva de lugares geométricos, como el que aparece en la animación disponible en <https://www.geogebra.org/student/m913489> y en la animación en <http://www.geogebra.org/student/m253749> |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Recta y circunferencia como lugares geométricos. |

Formalmente se dice que un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisface una ecuación. Estos lugares geométricos pueden ser puntos, segmentos de curvas, curvas o superficies.

A continuación se muestra la ecuación de una recta y una circunferencia en el plano:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_001>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_002>>

La ecuación en coordenadas rectangulares de la primera ecuación, que representa una recta en el plano, es una ecuación de dos variables de primer grado; por otra parte, la segunda ecuación, que representa una la circunferencia, es una ecuación de dos variables de segundo grado. Así, hay características algebraicas de ecuaciones que definen el tipo de lugar geométrico asociado a ellas.

Es común usar elementos de Geometría analítica para encontrar la ecuación que define un lugar geométrico en el plano, por ejemplo, calcular la ecuación que define una recta que pasa por dos puntos dados. Otro ejemplo es encontrar la ecuación que define una circunferencia con centro (0, 0) y radio 4; es fácil ubicar esta figura en un plano cartesiano, pero para calcular la ecuación que la define como lugar geométrico es necesario, desde un punto de vista algebraico, estudiar cómo se calcula la distancia entre dos puntos, como se verá en la siguiente sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC10 |
| **Título** | Los lugares geométricos |
| **Descripción** | Interactivo que muestra aplicaciones de los lugares geométricos |

**[SECCIÓN 2] 1.1 La distancia entre dos puntos**

En la Geometría euclidiana se calculan distancias a partir otras medidas dadas como, por ejemplo, el tercer lado de un triángulo rectángulo cuando se conocen dos de sus lados, caso en el que se usa el teorema de Pitágoras. En otros casos se usan teoremas de proporcionalidad u otras fórmulas conocidas para calcular distancias a partir de otra información de la figura geométrica estudiada.

En la Geometría analítica, para calcular la distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas basta conocer las coordenadas de estos y operar convenientemente estos números. En el caso que los dos puntos estén sobre el eje *X*, la distancia entre los puntos será la diferencia, en valor absoluto, del valor que representa cada punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG02 |
| Descripción | Plano cartesiano sobre el que se han marcado los puntos A, B y C ubicados respectivamente en –6, 5 y 9 sobre el eje *X* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Los puntos *A*(–6, 0), *B*(5, 0) y *C*(9, 0) están sobre el eje *X* en un plano cartesiano. |

Como se observa en el gráfico, se tiene que:

* La distancia entre los puntos *A* y *B* es 11, ya que *|*(*–*6) *–* 5*| = |–*11*| =* 11.
* La distancia entre los puntos *B* y *C* es 4, ya que *|*5*–*9*| = |–*4*| =* 4*.*
* La distancia entre los puntos *A* y *C* es 15, lo que se puede verificar sumando la distancia entre *A* y *B* con la distancia entre *B* y *C*:11 + 4, o bien calculando la diferencia en valor absoluto de las posiciones de los puntos *A* y *C*: *|*(*–*6) *–* 9*| = |–*15*| =* 15.

En este caso, la distancia entre los puntos *A*, *B* y *C* está dada únicamente por la componente *X* de cada punto, ya que están a la misma altura; de hecho, la distancia equivale al valor absoluto de la diferencia entre estas componentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | En un plano cartesiano, dos puntos están sobre la misma línea horizontal si sus segundas componentes son iguales; por ejemplo, los puntos (*p*, *r*) y (*q*, *r*) están sobre la misma línea horizontal.  En un plano cartesiano, dos puntos están sobre la misma línea vertical si sus primeras componentes son iguales; por ejemplo, los puntos (*s*, *t*) y (*s*, *u*) están sobre la misma línea vertical. |

En general, si dos puntos están sobre una misma línea vertical o sobre una misma línea horizontal, la distancia entre ellos equivale al valor absoluto de la diferencia entre las componentes diferentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG03 |
| Descripción | Plano coordenado en el que se han marcado los puntos B=(5,0), C=(9,3), D=(–3,–2), F=(5,4) y G=(9,–2) |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Distancia entre puntos con primera o segunda componente igual. |

**¡IMPORTANTE!** Se notará *d*(*P*, *Q*) a la distancia entre los puntos *P* y *Q*.

A partir de los puntos en la imagen se pueden calcular las distancias entre varios de ellos:

* La distancia entre los puntos *F*(*5*, *4*) y *B*(*5*, *0*) está dada por

*d*(*F,* *B*) = *|*4 *–* 0*| =* 4.

* La distancia entre los puntos *C*(9*,* 3) y *G*(9*, –*2) está dada por *d*(*C,* *G*) = *|*3 *–* (–2)*| =* 5.
* La distancia entre los puntos *D*(–3*,–*2) y *G*(9*,–*2) está dada por *d*(*D,* *G*) = *|*(*–*3) *–* 9)*| = |–*12*|* = 12.

Se observa que la distancia *d*(*C,* *D*) no se puede calcular directamente; sin embargo, las distancias *d*(*C,* *G*) y *d*(*D,* *G*) corresponden a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo Δ*DGC*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG04 |
| Descripción | Imagen en la que se marque el triángulo rectángulo DCG con coordenadas *C=(9,3), D=(–3,–2) y G=(9,–2)* y se marquen las medidas de los catetos |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | El triángulo Δ*DGC* y las coordenadas de sus vértices*.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El teorema de Pitágoras establece la siguiente relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo:  hipotenusa2 = cateto2 + cateto2 |

Así, calcular la distancia entre los puntos *C* y *D* equivale a encontrar la medida de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo Δ*DGC*. Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_003>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_004>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_005>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_006>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_007>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_008>>

Este procedimiento se generaliza para cualquier par de puntos *P*1(*x*1*, y*1)y *P*2(*x*2*, y*2), trazando segmentos de recta que pasan por estos puntos y son paralelos a los ejes de tal forma que coincidan en el punto *Q*(*x*1*, y*2) formando el triángulo rectángulo Δ*P1QP2.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG05 |
| Descripción | Triángulo rectángulo general para el cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano coordenado rectangular |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Triángulo rectángulo general para el cálculo de la distancia entre los puntos *P1=(x1, y1)* y *P2=(x2, y2).* |

Por un razonamiento análogo al que se usó anteriormente se deduce que:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_009>>

Se observa que los puntos *P*1 y *Q* están sobre la misma línea vertical, y que los puntos *P*2 y *Q* están sobre la misma línea horizontal; por lo tanto, la fórmula anterior se convierte en:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_010>>

Es de anotar que el valor absoluto desaparece en virtud de la potencia 2 que aparece en la ecuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Fórmula para la distancia entre dos puntos** |
| **Contenido** | La distancia entre dos puntos *P*1(*x*1*, y*1)y *P*2(*x*2*, y*2) se calcula a partir de la siguiente fórmula:  <<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_010>>  Se observa que primero se calculan las diferencias entre las respectivas coordenadas, luego se elevan estos resultados al cuadrado, se suman y finalmente se calcula la raíz cuadrada. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC20 |
| **Título** | Halla la distancia entre dos puntos |
| **Descripción** | Actividad para hallar la distancia entre dos puntos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC30 |
| **Título** | Halla el perímetro de la figura |
| **Descripción** | Actividad para hallar el perímetro de figuras geométricas ubicadas en el plano cartesiano |

[**SECCIÓN 2] 1.2 El punto medio de un segmento**

En el marco de la Geometría euclidiana, sin referente coordenado, el punto medio de un segmento se construye a partir de la mediatriz del segmento, que se construye a partir de dos circunferencias con centro en los puntos extremos del segmento, que coinciden en dos puntos que hacen parte de la mediatriz, como se muestra en la ilustración.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG06 |
| Descripción | Construcción euclídea del punto medio de un segmento. Proposición 1 de libro I |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | La recta que pasa por *C* y *D* es la mediatriz que divide al segmento *AB* en el punto *E*. |

En contraste, en un sistema de coordenadas cada punto contiene información (coordenadas) que permite calcular la ubicación del punto medio sin necesidad de realizar construcciones geométricas.

Si los dos puntos se encuentran coordenados sobre el eje *X* en un plano cartesiano, el punto medio entre ellos corresponde a la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG07 |
| Descripción | Ampliación del eje *X* en un plano cartesiano en el que se han marcado los puntos A, B y M ubicados respectivamente en –6, 5 y –0,5. |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Punto medio entre el punto *A* y el punto *B*. |

Por ejemplo, a partir de la ilustración, el punto medio *MAB* entre *A* y *B* está dado por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_011>>

Para puntos que se encuentren sobre una misma recta vertical o sobre una misma recta horizontal, el punto central conservará la componente común a los dos puntos y tendrá en la otra componente coordenada el valor de la semisuma de las correspondientes componentes de los puntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG08 |
| Descripción | Plano coordenado en el que se han marcado los puntos *P1=(x1,y1)* y *P2=(x2,y2)*, así como sus puntos medios |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Punto medio entre parejas de puntos sobre la misma recta horizontal o sobre una misma recta vertical en el plano coordenado rectangular. |

A partir de los puntos que se muestran en la ilustración se infiere que el punto medio del segmento entre *P*1 *y Q* está dado por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_012>>

Por otra parte, el punto medio del segmento entre *Q* y *P2* está dado por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_013>>

En general, para encontrar la fórmula para el punto medio *M*(*xM*, *yM*) de un segmento formado por los puntos *P*1(*x*1, *y*1) y *P*2(*x*2, *y*2)es necesario visualizar estos puntos como parte de triángulos rectángulos dentro del plano cartesiano y usar propiedades geométricas y algebraicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG09 |
| Descripción | Triángulos rectángulos proporcionales para efectuar la demostración del cálculo de las coordenadas del punto medio entre dos puntos dados |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Punto medio *M* de un segmento de recta formado por los puntos *P*1 y *P*2. |

En la figura, *MQP*1 es el punto medio entre *Q* y *P*1 y *MQP*2 es el punto medio entre *Q* y *P*2. A partir del hecho de que M es el punto medio de *P*1*P*2, se sigue que los triángulos sombreados en la figura son congruentes; por lo tanto, por proporcionalidad entre los triángulos sombreados y sabiendo que *M=(xM, yM)* es punto medio entre *P1* y *P2*, se tiene la siguiente igualdad entre segmentos:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_014>>

Por lo tanto, en términos de distancias:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_015>>

de donde, despejando *xM* se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_016>>

De forma análoga, a partir de la congruencia de los segmentos:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_017>>

se sigue que la ordenada del punto medio *M* está dada por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_018>>

Así, las coordenadas del punto medio del segmento formado por *P*1 y *P*2 está dado por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_019>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG10 |
| Descripción | Triángulos rectángulos con las coordenadas completas en la deducción del punto medio entre dos puntos |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Punto medio entre dos puntos en el plano coordenado rectangular |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| Título | Punto medio de un segmento |
| Contenido | El punto medio del segmento formado por los puntos *P*1(*x*1, *y*1) y *P*2(*x*2*,y*2)está dado por:  <<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_019>>  Es decir, las coordenadas del punto medio entre dos puntos son la semisuma de las coordenadas correspondientes a los puntos dados. |

**Ejemplo**

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento formado por los puntos *A*(–8, 3) y *B*(5, 0).

Solución

Para calcular las coordenadas del punto medio *M* se calcula la semisuma de los componentes correspondientes en los puntos dados:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_020>>

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio *M* están dadas por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_021>>

[**SECCIÓN 2] 1.3 La línea recta y la ecuación general de primer grado**

Las rectas son los lugares geométricos más simples a través de los cuales se pueden realizar cálculos y aproximaciones para lugares geométricos más complejos. El análisis de estas representaciones resulta de utilidad, incluso para la representación y solución de sistemas de ecuaciones.

Las ecuaciones de rectas tienen elementos que las caracterizan; uno de estos elementos que determina el comportamiento de la recta es la **pendiente**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC40 |
| **Título** | Encuentra las coordenadas del punto medio del segmento |
| **Descripción** | Actividad para encontrar las coordenadas del punto medio de un segmento |

**[SECCIÓN 3] 1.3.1 La pendiente**

La pendiente de una recta indica la razón de cambio entre las ordenadas y las abscisas de cualquier par de puntos que se encuentren en la recta, y se denota con la letra *m*. Así, para cualquier par de puntos que estén sobre la recta, la pendiente será la misma.

Dados dos puntos *A*(*x*1, *y*1)y *B*(*x*2, *y*2) dentro de una recta, se determina la pendiente así:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_022>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG11 |
| Descripción | Pendiente como razón de cambio entre ordenadas y abscisas de una recta |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Pendiente como razón de cambio entre ordenadas y abscisas de una recta. |

Con base en lo anterior, si se conoce un punto y la pendiente de una recta es posible determinar si cierto punto está dentro de la recta o no.

Por ejemplo, una recta que pasa por el punto (–9, 2) y tiene pendiente *m* = 3, contiene al punto (–5, 14), pero no contiene al punto (7, 4). Para verificar lo anterior, basta verificar si la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas es, en efecto, igual a la pendiente. Para el punto (–5, 14) se tiene que

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_023>>

Por lo tanto, el punto (–5, 14) está en la recta. Sin embargo, al realizar el mismo cálculo para el punto (7, 4) se obtiene

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_024>>

Es decir, el punto (7, 4) no es parte de la recta que pasa por el punto (–9, 2) y tiene pendiente *m* = 3.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG12 |
| Descripción | Gráfico como en la imagen de referencia. Recordar que la letra m va en itálica. |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Relación posicional entre el punto *A* y el punto *B* en una recta de pendiente dos tercios. |

Se puede interpretar la pendiente como una fracción que relaciona las posiciones relativas un punto con otro dentro de la recta, donde el numerador indica la cantidad de unidades que se cambia la ordenada del punto, y el denominador indica la cantidad de unidades que se cambia la abscisa del punto, que en conjunto forman un nuevo punto dentro de la recta.

Por ejemplo, en la ilustración de arriba se observa cómo el punto *A*(1, 1) se transforma en el punto B a través de la pendiente como fracción: *B*(1 + 3, 1 + 2) = *B*(4, 3).

Del mismo modo, para formar una recta con pendiente *m =* –1/2 a partir de un punto cualquiera del plano cartesiano, basta elegir un nuevo punto haciendo un cambio de una unidad hacia la derecha y un cambio de media unidad hacia abajo.

Las ecuaciones constantes de la forma *y* = *a* para algún número fijo *a* tienen pendiente cero y representan una línea horizontal a la altura *a*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG13 |
| Descripción | Familia de funciones constantes. Captura de imagen del archivo FunciónConstanteGT.ggb |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Familia de funciones constantes. |

El caso de las ecuaciones de la forma *x* = *k* para algún número fijo *k* representan líneas verticales y se dice que tienen pendiente indeterminada.

Un conjunto de rectas con la misma pendiente define una familia de funciones paralelas entre sí.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG14 |
| Descripción | Familia de funciones constantes. Captura de imagen del archivo FunciónConstanteGT.ggb |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | La ecuación *x* = 4 determina una línea recta vertical cuya pendiente es indeterminada. |

La pendiente de las rectas definidas por ecuaciones de la forma *x* = *k* es indefinida dado que al calcular numéricamente la definición de pendiente dados dos puntos de la recta, se obtiene denominador cero.

Por otra parte, entre más positiva sea la pendiente de una recta, esta formará un ángulo mayor con relación al eje positivo *X*; y entre más negativa sea la pendiente, esta formará un ángulo negativo cada vez mayor con relación al eje positivo *X*. En la siguiente ilustración se observan algunos ejemplos de este hecho.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG15 |
| Descripción | Pendiente de la recta como ángulo medido desde la horizontal |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | La inclinación de la recta está dada por la magnitud de la pendiente. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC60 |
| **Título** | Halla la pendiente de la recta que pasa por dos puntos |
| **Descripción** | Actividad para hallar la pendiente de un recta a partir de dos puntos |

**SECCIÓN 3] 1.3.2 La ecuación de una recta y sus transformaciones**

Una **ecuación** de una recta es una ecuación que determina las coordenadas de todos los puntos que forman una recta en un plano de coordenadas. La ecuación de la recta está definida por la siguiente expresión:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_025>>

donde *m* es la pendiente y *b* es el valor en el que la recta corta el eje *Y*.

La forma de calcular esta ecuación depende de los datos de los que se disponga: dos puntos, o bien un punto y la pendiente.

**Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada**

Para hacer la dedución de la ecuación de la recta a partir de un punto y su pendiente se encuentra el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma pendiente. Para calcular esta ecuación es necesario recordar la forma en la que se define la pendiente a partir de dos puntos. Sea *P*1(*x*1, *y*1) un punto en la recta con pendiente *m*, para cualquier otro punto (*x*, *y*) sobre la recta se tiene la relación:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_026>>

A partir de la relación anterior se obtiene la siguiente ecuación que describe una recta que pasa por el punto *P*1(*x*1, *y*1) y tiene pendiente *m*:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_027>>

La ecuación anterior se conoce como la ecuación punto–pendiente de la recta, donde el punto dado es *P*1(*x*1, *y*1) y la pendiente es *m*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG16 |
| Descripción | Deducción de la ecuación de la recta entre dos puntos |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Los puntos (*x*, *y*) de una recta que pasa por una punto *P*1 y tiene pendiente *m* deben mantener la razón entre las diferencias de sus componentes iguales a *m*. |

Ejemplo

La ecuación de la forma punto–pendiente de la recta que pasa por el punto *P* (1, −1) y que tiene como pendiente 3/2 está dada por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_028>>

Es importante notar que la ecuación punto–pendiente puede usarse si se conocen únicamente dos puntos en la recta. De hecho, basta calcular el valor de la pendiente *m* a través de la fórmula ya conocida, y luego usar cualquiera de los dos puntos y la pendiente obtenida para calcular la ecuación de la recta.

Ejemplo

Para calcular la ecuación de la forma punto–pendiente de la recta que pasa por los puntos *A*(–3,–8)y *B*(4,–1) es necesario calcular la pendiente *m* así:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_029>>

Con el valor de la pendiente y uno de los puntos ya conocidos es posible calcular la ecuación de la recta. Tomando el punto *A* se tiene la siguiente ecuación para la recta que pasa por los puntos *A* y *B*:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_030>>

**Ecuación explícita de la recta**

A partir de la ecuación punto–pendiente, si se despeja la variable *y* se obtiene la ecuación explícita de la recta. Recibe ese nombre debido a que muestra de manera explícita tanto la pendiente como el intercepto con el eje *y* de la recta.

Tiene la forma

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_031>>

donde *m* es la pendiente y el punto (0, *b*) es el intercepto con el eje *y*. A partir de un punto *P1*(*x*1, *y*1) y de una pendiente *m* se deduce que en el intercepto es *b = –mx*1*+ y*1.

Ejemplo

La ecuación explícita de la recta que pasa por el punto *C*(1, −1) y que tiene como pendiente 3/2 está dada por: <<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_032>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG17 |
| Descripción | Recta de la recta que pasa por el punto *C =(1, −1)* y que tiene como pendiente 3/2 |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Recta de la recta que pasa por el punto *C*(1, −1) y que tiene como pendiente 3/2. |

Ejemplo

La ecuación explícita de la recta que pasa por el punto *D*(2, 4) y tiene como pendiente *m =* –3 está dada por:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_033>>

De hecho, se cumple que *b = –mx*1*+ y*1 = –(–3)2 + 4 = 6 + 4 = 10.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG18 |
| Descripción | Recta que pasa por el punto *D=(2, 4)* y tiene como pendiente *m=–3* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Recta que pasa por el punto *D*(2, 4) y tiene como pendiente *m* = –3. |

Como se observa en la gráfica de la recta, el intercepto o corte con el eje *Y* es el punto (0, 10), y la pendiente como razón de cambio es Δ*y =* –3 cuando el cambio en *x* es igual a 1, es decir Δ*x =* 1*.*

**Ecuación simétrica de la recta**

Cuando se conocen las coordenadas de los cortes de la recta con los ejes (*a*, 0) y (0*, b*), con *a* y *b* diferentes de cero, entonces se determina la ecuación de la recta como

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_035>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG19 |
| Descripción | Recta que tiene a *Ix = (a, 0)* como intercepto con el eje *x* y a *Iy = (0, b)* como intercepto con el eje *y* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Recta que tiene (*a*, 0) como intercepto con el eje *X* y (0, *b*)como intercepto con el eje *Y.* |

Para verificar la fórmula, sea(*a*, 0) el intercepto con el eje *X* y (0, *b*)el intercepto con el eje *Y*; entonces la recta tiene como pendiente:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_036>>

Al expresar la ecuación de la recta en la forma punto–pendiente con el punto (*a*, 0) se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_037>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_038>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_039>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_040>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_041>>

Como el producto ab es diferente de cero, entonces

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_042>>

Ejemplo

Si una recta corta al eje *X* en (4, 0) y el eje *Y* a cinco unidades del centro, entonces su ecuación simétrica es:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_043>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG20 |
| Descripción | Representación gráfica y ecuación canónica de una recta que determina un segmento de cuatro unidades sobre el eje *x* y otro de cinco unidades sobre el eje *y* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Representación gráfica y ecuación canónica de una recta que determina un segmento de cuatro unidades sobre el eje *x* y otro de cinco unidades sobre el eje *y.* |

**Ecuación general de la recta**

La ecuación general de la recta está dada por la expresión

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_034 >>

donde *A*, *B* y *C* son constantes. En esta forma de la ecuación de una recta se tiene que la pendiente está dada por

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_044>>

Por otra parte, el corte con el eje *Y* está dado por

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_045>>

La forma más general, aunque implícita, de expresar analíticamente cualquier recta es mediante la ecuación general.

La ecuación general puede construirse a partir de cualquiera otra forma igualada a cero.

Ejemplo

Para calcular la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (5, –1) y (2, 4), primero se calcula la pendiente de la recta:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_046>>

A partir de la pendiente y el punto (2, 4) se obtiene la ecuación:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_047>>

Así, a través de manipulación algebraica se obtiene la ecuación general, como se muestra a continuación:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_048>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_049>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_050>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_051>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC70 |
| **Título** | Relaciona diferentes representaciones de la ecuación de la recta |
| **Descripción** | Actividad para relacionar diferentes representaciones de la ecuación de la recta |

**[SECCIÓN 3] 1.3.3 Las posiciones relativas entre dos rectas**

En el plano, las **posiciones relativas** entre dos rectas son:

* **Paralelas**: cuando las dos rectas tienen la misma pendiente pero no tienen puntos en común.
* **Coincidentes**: cuando las dos rectas tienen la misma pendiente y al menos un punto en común; en este caso, las dos rectas coinciden en todos los puntos.
* **Secantes**: cuando las dos rectas no tienen la misma pendiente; en este caso, tienen un único punto en común que es el punto de corte de las rectas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG21 |
| Descripción | 4º ESO – Matemáticas – Geometría analítica – 4: Las posiciones relativas a dos rectas |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | [http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img34_small.jpg](http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img34_zoom.jpg) |
| Pie de imagen | **Posiciones relativas entre dos rectas en el plano.** |

Existen varios métodos para determinar cuál es la posición relativa entre dos rectas. El examen puede hacerse desde la representación gráfica o desde la algebraica. A partir de la representación gráfica de las rectas se puede inferir qué tipo de relación tienen las rectas, aunque este método resulta impreciso en algunos casos.

Desde la representación analítica se puede determinar si dos rectas son o no paralelas a partir de la comparación de las pendientes de las rectas.

* Si son diferentes, las rectas son secantes.
* Si las pendientes son iguales y su corte con *Y* coincide, entonces las rectas son coincidentes.
* Si las pendientes son iguales pero los cortes con *Y* son diferentes, entonces las rectas son paralelas.

Otra forma analítica de verificar la posición relativa entre las rectas es resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

* Si el sistema no tiene solución, las rectas que representan son paralelas.
* Si el sistema tiene solución única, las rectas serán secantes.
* Si el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas serán coincidentes.

En términos de la forma canónica, si dos rectas están definidas por las ecuaciones *Ax + By + C* = 0 y *A’x + B’y + C’* = 0, entonces las rectas son:

* **Paralelas** si

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_052>>

* **Coincidentes si**

**<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_053>>**

* **Secantes si no hay relac**iones de proporcionalidad entre sus elementos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG22 |
| Descripción | 4º ESO – Matemáticas – Geometría analítica – 4: Las posiciones relativas a dos rectas |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Relación entre los elementos de las formas de la recta para identificar la posición relativa entre dos rectas. |

Dos rectas se dicen perpendiculares cuando el ángulo entre las dos es un ángulo recto; en este caso son rectas secantes. Si *r* y *s* son rectas perpendiculares, *mr* y *ms* son sus respectivas pendientes; entonces

*mr* ⋅ *ms*= –1

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG23 |
| Descripción | Ángulo entre dos rectas |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Ángulo entre las rectas *r* y *s*. |

Para mostrar que el producto de las pendientes de rectas perpendiculares es siempre –1 se usarán elementos trigonométricos.

Sean dos rectas *r* y *s* y los ángulos de inclinación *α1* y *α2,* respectivamente. Con base en el gráfico se observa que *θ = α2 – α1*. Calculando la tangente del ángulo se obtiene que

tan *θ =* tan *(α2 – α1*)

Por lo tanto,

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_054>>

Dado que la tangente del ángulo de inclinación de una recta coincide con la pendiente de esta, entonces:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_055>>

Si el ángulo θ es igual a un ángulo recto, es decir, que las rectas son perpendiculares, entonces tan *θ* = tan 90º = ∞, de donde se infiere que necesariamente 1 + *mr* ⋅ *ms =* 0, así:

*mr* ⋅ *ms*= –1

Ejemplo

Para determinar la posición relativa de las rectas *r* y *s* cuyas ecuaciones se muestran a continuación, es necesario calcular sus pendientes:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_056>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_057>>

Las pendientes de estas rectas están dadas por *m*= 3 y *m* = 6/5 respectivamente; por lo tanto, las rectas son secantes, no perpendiculares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC80 |
| **Título** | La posición relativa de dos rectas en el plano |
| **Descripción** | Interactivo que muestra las posiciones relativas de dos rectas en el plano |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC90 |
| **Título** | ¿Qué tipo de cuadrilátero es? |
| **Descripción** | Actividad para reconocer el tipo de cuadrilátero representado dadas las coordenadas de los vértices de la figura |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC100 |
| **Título** | Averigua la posición relativa entre dos rectas |
| **Descripción** | Actividad para reconocer la posición relativa entre dos rectas en el plano |

**SECCIÓN 3] 1.3.4 Las aplicaciones**

Las rectas, las funciones lineales y los sistemas de ecuaciones aparecen de manera cotidiana en diversos contextos. Particularmente, la programación lineal, el análisis de señales, la optimización y otros constructos matemáticos se aplican en campos propios de la Ingeniería, las Ciencias y el Diseño.

Por ejemplo, en el diseño de construcciones se necesita por diversas razones que ciertas líneas pasen por puntos dados en un plano de coordenadas, como por ejemplo líneas eléctricas o de ventilación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG24 |
| Descripción | http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/2008946/304269113/stock-vector-abstract-d-render-of-building-wireframe-structure-vector-construction-graphic-idea-304269113.jpg |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | [304269113](http://www.shutterstock.com/pic-304269113/stock-vector-abstract-d-render-of-building-wireframe-structure-vector-construction-graphic-idea.html?src=d2wWJ6EbKmzYX8erlJlbjw-2-20) |
| Pie de imagen | Las líneas hacen parte del Diseño y la Arquitectura; conocer sus características y propiedades permite realizar diseños funcionales. |

Ejemplo

Dados los puntos (0, 6) y (2, 3) en un plano de coordenadas, se requiere verificar si los siguientes puntos están en la línea que definen estos dos puntos: *P*1(−2, 8), *P*2(5, −2), *P*3(6, −3) y *P*4(3, 1).

Para esta labor, se determina la ecuación que pasa por los puntos (0, 6) y (2, 3):

En primer lugar, se determina la ecuación de la recta que pasa por (0, 6) y (2, 3):

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_058>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_059>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_060>>

A partir de la ecuación general se evalúa cada uno de los puntos y se verifica si cumple la igualdad; en caso afirmativo, el punto pertenece a la recta.

* Los puntos *P*1, *P*2 y *P*4 no pertenecen a la recta:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_061>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_062>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_063>>

* El punto *P*3 pertenece a la recta:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_064>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC110 |
| **Título** | Resuelve situaciones problema que involucran rectas |
| **Descripción** | Actividad para resolver situaciones problema que involucran rectas |

**[SECCIÓN 2] 1.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC120 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los lugares geométricos |
| **Descripción** | Actividades sobre Los lugares geométricos |

[SECCIÓN 1] **2 Las cónicas**

Las cónicas como objeto matemático pueden definirse y representarse de diferentes formas. Se las puede ver como lugares geométricos, como el resultado de seccionar una superficie cónica de revolución mediante un plano; como resultado de una proyección de un cono sobre un plano, como conjuntos de envolventes; o –apelando a su origen– como objeto emergente, al buscar solucionar exclusivamente con regla y compás los tres problemas griegos. En todos los casos se generan curvas que se pueden representar en sistemas de coordenadas.

Las curvas que conforman las cónicas son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

**[SECCIÓN 2] 2.1 La superficie cónica de revolución**

Una manera habitual de identificar las cónicas se relaciona con su aparición como curvas que representan la intersección entre una superficie cónica de revolución con un plano.

La construcción de una superficie de revolución requiere un eje y una curva plana. El eje se llama *eje de rotación*, mientras que la curva se llama *curva generatriz*; esta curva puede ser un segmento de recta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG25 |
| Descripción | Superficies de revolución |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | Capturas de imagen tomadas de http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3\_tercero/3\_Matematicas/INTERACTIVOS/3m\_b05\_t02\_s01\_descartes/index.html |
| Pie de imagen | Generación de sólidos de revolución a partir de una curva generatriz que rota alrededor de un eje. |

Como se puede observar, las superficies de revolución surgen de una curva y forman únicamente una superficie en la que no se incluye el interior.

Así, una *superficie cónica de revolución* es una superficie de revolución tal, que la curva generatriz es una recta que se interseca con el eje de rotación. El punto en que se intersecan el eje y la generatriz se conoce como vértice del cono. Dado además que el corte entre dos rectas genera un ángulo, se llama *ángulo de inclinación* al ángulo entre el eje de rotación y la recta generatriz.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG26 |
| Descripción | Imágenes de superficies cónicas de revolución |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | Tomadas de <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Las_conicas_como_lugares_geometricos/Superficie_Conica.jpg>, [http://www.xente.mundo–r.com/ilarrosa/Cabri3D/Superficie\_conica\_html.png](http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/Cabri3D/Superficie_conica_html.png) y http://2.bp.blogspot.com/–Cd–KaU2Ntmk/UiO9IyTkc\_I/AAAAAAAAABs/SYvkls–rv8Y/s1600/CONICAS+1.png |
| Pie de imagen | Superficies cónicas de revolución. |

En resumen, los elementos que caracterizan a una superficie cónica de revolución son:

* El eje de rotación (*e*)
* La recta generatriz (*g*)
* El vértice del cono en el que se intersecan el eje y la generatriz (*v*)
* El ángulo entre el eje y la generatriz (*α*)
* La superficie cónica de revolución (*s*)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG27 |
| Descripción | Elementos de las superficies cónicas de revolución |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | Imágenes editadas, tomadas de http://image.slidesharecdn.com/conicas–111114171420–phpapp02/95/conicas–2–728.jpg?cb=1321290922 y de http://images.slideplayer.es/2/1030331/slides/slide\_6.jpg |
| Pie de imagen | Elementos de las superficies cónicas de revolución. |

**[SECCIÓN 2] 2.2 La sección cónica**

Las cónicas son curvas planas que se pueden generar como la intersección de una superficie cónica de revolución con un plano.

El tipo de cónica que se genere al cortar una superficie con un plano dependerá de la inclinación del plano que va a cortar la superficie cónica.

* Si el plano atraviesa el cono paralelo a su base, la sección resultante es una circunferencia.
* Si el plano se inclina ligeramente con respecto a la base, la sección resulta ser una elipse.
* Si el plano es paralelo a la generatriz del cono, la sección resultante es una parábola.
* Si el plano se inclina con un ángulo menor al de la generatriz, la sección resultante será una hipérbola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG28 |
| Descripción | Imágenes de secciones cónicas. Se debe mostrar los dos conos como en la imagen, el plano que los corta y resaltar la figura (que se muestra en rojo) que forma la intersección de las figuras. Eliminar los ejes que se muestran en la imagen de referencia |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | Sección circunferencia    Sección elipse    Sección parábola    Sección hipérbola |
| Pie de imagen | Las secciones cónicas. |

Pueden presentarse también algunos casos especiales en que las secciones cónicas se degeneran a un punto, una recta o dos rectas.

* Un punto, si el ángulo de inclinación del plano es mayor que el de la generatriz y el plano pasa por el vértice.
* Una recta, si la generatriz y el plano tienen la misma inclinación y el plano pasa por el vértice.
* Dos rectas, si el ángulo de inclinación del plano es menor que el de la generatriz y el plano pasa por el vértice.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG29 |
| Descripción | Casos anómalos de secciones cónicas. Mostrar los conos, el plano que corta y la figura resultante (en rojo). Se deben eliminar los ejes que se ven en la figura de referencia |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) | Sección cónica que corresponde a un punto    Sección cónica que corresponde a una recta    Sección cónica que corresponde a dos rectas |
| Pie de imagen | Casos especiales de secciones cónicas. |

Las cónicas pueden representarse como lugares geométricos, es decir, que pueden modelarse analíticamente a partir de una ecuación que depende de algunos parámetros.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC150 |
| **Título** | ¿Qué sección cónica se genera? |
| **Descripción** | Actividad para reconocer el tipo de curva que se genera a partir del corte de una superficie cónica |

**[SECCIÓN 2] 2.3 La circunferencia**

Ya que la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro, deducir la ecuación de la circunferencia equivale a encontrar el conjunto de puntos *P*(*x, y*) tales que la distancia a un punto fijo, llamado centro, *C*(*h, k*) sea una constante *r* denominada radio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG30 |
| Descripción | Circunferencia como en la imagen de referencia |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Circunferencia como lugar geométrico en coordenadas rectangulares; requiere identificar el centro como un punto de coordenadas conocidas y un radio fijo *r.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| Contenido | La distancia entre los puntos *P*1(*x*1, *y*1)y *P*2(*x*2, *y*2)está dada por:  <<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_065>> |

Sea *C*(*h, k*) y *r* el radio de una circunferencia; entonces, todo punto *P*(*x, y*) que pertenezca a la circunferencia debe cumplir que:

*d*(*C*, *P*) = *r*

Por lo tanto, por definición de distancia se sigue que

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_066>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_067>>

Los valores h, k y r son constantes. Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en *C*(*h, k*) y radio *r*.

Ejemplo

La ecuación de una circunferencia de radio 4,5 centrada en el origen es

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_068>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_069>>

cuya representación gráfica en coordenadas rectangulares se muestra en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG31 |
| Descripción | Gráfica de la ecuación x2+ y2 = 4,52 |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Gráfica de la ecuación *x*2+ *y*2 = 20,25. |

Ejemplo

La ecuación de una circunferencia está dada por

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_070>>

Para calcular el centro y el radio de la circunferencia es necesario usar elementos algebraicos sobre la expresión, agrupando los términos en *x* y en *y*, completando cuadrados y factorizando.

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_070>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_071>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_072>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_073>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_074>>

A partir de esta expresión se sigue que la circunferencia tiene centro en *C*(8, 4) y su radio es 2.

A partir de la ecuación de la circunferencia con centro en *C*(*h, k*) y radio *r* se deduce la ecuación general de la circunferencia, como se muestra a continuación.

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_075>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_076>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_077>>

Sean *D* = –2*h*, *E* = –2*k*  y *F* = *h*2 + *k*2 – *r*2; por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia está dada por:

con lo que se obtiene la ecuación general de la circunferencia:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_078>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC160 |
| **Título** | Relaciona la ecuación con la circunferencia |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la gráfica de una circunferencia con su ecuación correspondiente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC170 |
| **Título** | La posición relativa de una recta y una circunferencia en el plano |
| **Descripción** | Interactivo que muestra las posiciones relativas de la circunferencia y una recta en el plano |

**[SECCIÓN 2] 2.4 La parábola**

La parábola es el lugar geométrico formado por todos los puntos tales que la distancia a un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz, son iguales.

Para la deducción de la ecuación de la parábola con vértice en el origen se debe encontrar el conjunto de puntos *P*(*x*, *y*) tales que la distancia de ellos al foco *F* es igual a su distancia a la directriz *d*.

Sea *F* el foco de una parábola de la forma *F*(0, *a*) y la directriz dada por la ecuación *y* = *–a*; entonces, un punto sobre la directriz es de la forma *D*(*x, –a*). A partir de la definición de parábola se sigue la siguiente relación para cada punto *P*(*x*, *y*) sobre la parábola:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_079>>

En virtud de lo anterior se construye la ecuación de la parábola como sigue:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_080>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_081>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_082>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_083>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_084>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_085>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_086>>

Ejemplo

La ecuación de la parábola que tiene como foco el punto *F*(0, 2) y que pasa por el origen, es decir, que tiene vértice en el origen, es:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_087>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_088>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG32 |
| Descripción | Gráfica de la parábola que tiene como foco el punto F= (0, 2) y que pasa por el origen |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Gráfica de la parábola que tiene como foco el punto *F*(0, 2) y que pasa por el origen. |

Para la deducción de la ecuación general de parábola se considera una parábola con eje paralelo al eje *y*, de la forma *x = h*; directriz paralela al eje *x* de la forma *y = k* – *a*; con lo que tendrá vértice en (*h, k*) y foco en *F*(*h, k+a*). A su vez, todo punto sobre la directriz será de la forma *D*(*x, k – a*). Así, se sigue que

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_079>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_089>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_090>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_091>>

Al operar algebraicamente e igualar a cero se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_092>>

Si *D* = –2*h, E* = –4*k –* 2*a* y *F* = 2*ak + h*2 – *a*2, entonces se obtiene la expresión de la ecuación general de la parábola con eje paralelo al eje *Y*:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_093>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC180 |
| **Título** | Determina los elementos de la parábola |
| **Descripción** | Actividad para determinar los elementos de una parábola |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC190 |
| **Título** | Halla la ecuación de la parábola |
| **Descripción** | Actividad para determinar la ecuación de una parábola que cumple unas condiciones dadas |

**[SECCIÓN 2] 2.5 La elipse**

La elipse es el lugar geométrico formado por todos los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante mayor que la distancia entre los focos.

Para la deducción de la ecuación de la elipse se debe encontrar el conjunto de coordenadas *P*(*x, y*) tales que la suma de las distancias del punto a cada uno de los focos es constante. Supón que los focos son de la forma *F1*(*c*, 0) y *F2*(*–c*, 0), y que la constante obtenida al sumar las distancias del punto a los focos es *2a*; entonces se debe tener:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_094>>

Por lo tanto,

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_095>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_096>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_097>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_098>>

Luego de aislar el radical y realizar operaciones algebraicas se obtiene la expresión:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_099>>

Desarrollando e igualando a cero se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_100>>

Sea *b*2 = *a*2 – *c*2, entonces la expresión se convierte en

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_101>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_102>>

Ejemplo

Para calcular la ecuación de la elipse cuyos focos son *F1*(–5, 0) y *F2*(5, 0), construida con distancia común *d = 14*, se debe determinar las constantes *a*, *b* y *c* que aparecen en la ecuación.

Dado que 2*a* = 14, entonces *a* = 7; por otra parte, a partir de los focos se infiere que *c* = 5. Por definición, *b*2 = *a*2 – *c*2 = 72 – 52 = 24; por lo tanto,

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_103>>

En virtud de lo anterior, la ecuación de la elipse está dada por

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_104>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG33 |
| Descripción | Elipse con focos son *F1 = (5, 0)* y *F2 = (–5, 0)*, y distancia común *d=2a= 14* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Elipse con focos son *F1* (–5, 0) y *F2*(5, 0) y distancia común *d=* 14. |

Para la deducción de la ecuación general de elipse se puede hacer una traslación del centro de la elipse hacia el punto *C(h, k)*, con lo que la ecuación toma la forma:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_105>>

A partir de esta expresión, igualando a cero y eliminando denominadores, se obtiene la expresión:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_106>>

Así, si *A* = *b*2, *C = a*2, *D* = –2*b*2*h, E =* –2*a*2*k* y *F = b*2*h*2 *+ a*2*k*2 *– a*2*b*2, entonces la

ecuación general de la elipse con focos que se encuentran en una recta paralela al eje *X* es:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_106>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC200 |
| **Título** | Relaciona la elipse con su ecuación |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la representación gráfica de una elipse con su ecuación. |

**[SECCIÓN 2] 2.6 La hipérbola**

La hipérbola es el lugar geométrico formado por todos los puntos cuya distancia a dos puntos fijos tiene una diferencia –en valor absoluto– constante, menor que la distancia entre los puntos fijos. Los dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama centro de la hipérbola.

Dados los focos de la forma *F*1(*c,* 0) y *F*2(*–c*, 0), y la distancia común *k*, entonces para un punto *P*(*x*, *y*) que pertenece a la hipérbola se cumple que:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_108>>

Por lo tanto, se tiene que:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_109>>

Con un tratamiento algebraico similar al utilizado para la elipse, se obtiene:

Para eliminar el radical, este se despeja y se vuelve a elevar al cuadrado en ambos lados:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_110>>

Si *k =* 2*a* y *b*2 *= c*2 *– a*2*,*  entonces la ecuación se convierte en

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_111>>

De forma equivalente:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_112>>

Finalmente, al reemplazar y dividir luego por *a2b2* se obtiene la ecuación general de la hipérbola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG34 |
| Descripción | Elipse con focos son *F1 = (–3, 0)* y *F2 = (3, 0)*, y distancia común *d = 2a = 4* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Elipse con focos son *F1 = (–3, 0)* y *F2 = (3, 0)*, y distancia común *d = 2a = 4* |

Ejemplo

Para calcular la ecuación de la hipérbola cuyos focos son *F*1(–3, 0) y *F*2(3, 0) construida con distancia común *k = 4*, se deben determinar las constantes de la ecuación.

A partir de los focos se tiene que *c* = 3 y a partir de la distancia común se sigue que 2*a =* 4, es decir, *a* = 2. Por lo tanto, *b*2 *= c*2 *– a*2 = 32 – 22 = 9 – 4 = 5 implica que

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_113>>

Sustituyendo los valores a y b en la ecuación se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_114>>

Para la deducción de la ecuación general de hipérbola se puede hacer una traslación del centro de la hipérbola hacia el punto *C*(*h, k*), con lo que la ecuación toma la forma:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_115>>

Al expandir esta ecuación, igualar a cero y eliminar denominadores se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_116>>

Así, si *A* = *b*2*, C* = –*a*2*, D* = –2*b*2*h, E* = 2*a*2*k* y *F = b*2*h*2 *– a*2*k*2 *– a*2 *b*2se obtiene la ecuación general de la hipérbola con focos que se encuentran en una recta paralela al eje *X*:

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_117>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC210 |
| **Título** | Determina la ecuación de la hipérbola |
| **Descripción** | Actividad para determinar la ecuación de la hipérbola teniendo en cuenta su representación gráfica |

**[SECCIÓN 2] 3.1 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Cónicas |
| **Descripción** | Actividades sobre Cónicas |

**[SECCIÓN 1] 3 La ecuación general de segundo grado**

Todas las ecuaciones generales de las cónicas son casos particulares de la ecuación general de segundo grado dada por

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_118>>

El coeficiente *B* aparece en los casos en que la cónica está rotada con relación a los ejes del plano cartesiano.

A partir de una ecuación general de segundo grado es posible determinar el tipo de cónica que esta representa, en virtud de relaciones entre sus coeficientes:

* Si *B*2 – 4*AC* < 0 con *A = C*, la cónica es una circunferencia.
* Si *B*2– 4*AC* = 0, la cónica es una parábola.
* Si *B*2– 4*AC* < 0 con *A ≠ C*, entonces la cónica es una elipse.
* Si *B*2– 4*AC* > 0, entonces la cónica es una hipérbola.

El término *B2–4AC* se conoce como el discriminante de la ecuación.

Ejemplo

A partir de la ecuación general, determina el tipo de gráfica y calcula sus componentes.

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_119>>

Solución. La expresión es una hipérbola, ya que *B2–4AC* = 0 – 4⋅25⋅(–4) = 400 > 0. Para identificar su centro se agrupan los términos con *x* y los términos con *y* en la ecuación general, luego se completan cuadrados y se factoriza como se muestra a continuación.

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_120>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_121>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_122>>

<<FQ\_MA\_10\_05\_CO\_123>>

Por lo tanto, el centro de la hipérbola está en (2,–3).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| Código | MA\_10\_05\_IMG35 |
| Descripción | Elipse con focos son *F1 = (–3, 0)* y *F2 = (3, 0)*, y distancia común *d = 2a = 4* |
| Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta) |  |
| Pie de imagen | Gráfico de la ecuación cuadrática 25*x*2 – 4*y*2 – 100*x* – 24*y* – 36 = 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC230 |
| **Título** | La excentricidad |
| **Descripción** | Interactivo que muestra el concepto de excentricidad |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC240 |
| **Título** | Identifica la cónica que representa cada ecuación |
| **Descripción** | Actividad para identificar la cónica que representa cada ecuación |

**[SECCIÓN 2] 3.1 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC250 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La ecuación general de segundo grado |
| **Descripción** | Actividades sobre La ecuación general de segundo grado |

[SECCIÓN 1] Competencias

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC260 |
| **Título** | Competencias: Ecuación polar de una cónica |
| **Descripción** | Actividad que propone la representación de ecuaciones polares de las cónicas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_05\_REC270 |
| **Título** | Proyecto: Las órbitas elípticas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se propone un proyecto sobre las órbitas elípticas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| Código | MA\_10\_05\_REC280 |
| Título | Mapa conceptual |
| Descripción | Mapa conceptual del tema Geometría analítica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| Código | MA\_10\_05\_REC290 |
| Título | Evaluación |
| Descripción | Actividad para evaluar tus conocimientos sobre Geometría analítica |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| Código |  | |
| Web 01 | Las cónicas | [URL](http://www.cepazahar.org/recursos/pluginfile.php/2980/mod_resource/content/0/Proyectos/coni/las_secciones_conicas.html) |
| Web 02 | Matemáticas previas al cálculo | [URL](http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/images/Libros/Calculo/Leithold%20-%20El%20Calculo%20-%20espa%C3%B1ol%20-%207a.Ed..pdf) |
| Web 03 | Geometría analítica | [URL](http://www.cecytebc.edu.mx/HD/archivos/antologias/geometria_analitica.pdf) |
| Web 04 | Interactivo para el estudio de secciones cónicas | https://tube.geogebra.org/m/447031 |
| Web 05 | Animación sobre secciones cónicas | https://tube.geogebra.org/m/594027 |
| Web 06 | Construcción de lugares geométricos a partir de sus ecuaciones | http://gc.initelabs.com/recursos/files/r147r/w2370w/tip-mat4-42.swf |