|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Los Números Reales, propiedades y operaciones** |
| Código del guion | MA\_11\_01\_CO |
| Descripción | El conjunto de los Números Reales es una extensión del conjunto de los números racionales que da solución a los problemas de medición de magnitudes no conmensurables con la unidad. El conjunto numérico de los Números Reales posee propiedades de orden, y las propiedades de sus operaciones que dotan a estos de una estructura que permite dar solución a multitud de situaciones, entre estas la resolución de ecuaciones e inecuaciones. |

[SECCIÓN 1]**1 El sistema de los números reales**

El conjunto de los Números Reales que se representa por el símbolo , está conformado por los números racionales e irracionales, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Números Reales | Los números racionales :  Son aquellos números que se pueden expresar como una fracción de enteros, tienen la forma , donde *a* y *b* son números enteros.  Por ejemplo: , , 7 son números racionales. | Los números naturales :  Son aquellos números que se utilizan para contar, por ejemplo: 1, 2, 3, 30, 108…  Los números enteros :  Es la unión del conjunto de los números naturales, {0} y el conjunto de los opuestos aditivos de los números naturales, por ejemplo:  …-3, -2, 1, 0, 1, 2, 3… |
| **Los números irracionales:**  Son aquellos números que no se pueden expresar como una fracción de enteros, por ejemplo:  , e, . | |

En ocasiones, algunos conjuntos numéricos como los números enteros o los números racionales no permiten medir con exactitud algunas longitudes, áreas o volúmenes, por lo que es necesario recurrir al conjunto de los Números Reales. Este conjunto está dotado de una estructura algebraica (operaciones y orden) que ha sido tema de interés para la humanidad por sus diferentes aplicaciones en las ciencias.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG01 |
| **Descripción** | La medida |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://static0.planetasaber.com/encyclopedia/Data/Imagenes/FOTOS/001UHB01.jpg> |
| **Pie de imagen** | Los Números Reales: un sistema numérico para medir. |

Para comprender con mayor profundidad el conjunto de los Números Reales y los conjuntos numéricos que lo componen, a continuación se estudia su forma de escritura decimal denominada: expansión decimal.

[SECCIÓN 2]**1.1 Las expansiones decimales**

Una expansión decimal es una expresión de la forma , donde son dígitos, es decir, pertenecen al conjunto , por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El conjunto de Números Reales** |
| **Contenido** | **El conjunto de los Números Reales**  es el conjunto de todas las expansiones decimales.  Las cifras después del punto decimal, es decir, se llaman cifras decimales del número real. |

Los Números Reales se clasifican en aquellos que tienen expansión decimal periódica y los que no la tienen.

* Un número tiene **expansión decimal periódica**, si en sus cifras decimales se identifica una secuencia de cifras que se repiten infinitamente. Esta secuencia recibe el nombre de **periodo**. En estos casos, se escribe la expansión decimal hasta que la cifra o cifras que forman el periodo, aparezcan por primera vez. Para identificar esas cifras se coloca una barra horizontal encima. Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | La barra horizontal indica que 9 es el periodo del Número Real. |
|  | La barra horizontal indica que el periodo del Número Real es 0. |
|  | La barra horizontal indica que 341 es el periodo del Número Real. |

Un Número Real tiene **expansión decimal finita** si es periódico y su periodo está conformado solo por el cero o solo por nueve, por ejemplo:

**Si su periodo está formado únicamente por ceros (0**), se eliminan los ceros y se deja la parte no periódica; por ejemplo, la expansión decimal es

**Si su periodo está conformado únicamente por nueves (9)**, se eliminan los nueves y a la cifra anterior al periodo se le agrega una unidad. Por ejemplo:

Consideremos la diferencia entre y , si aumentamos en uno, cualquiera de las cifras decimales de , tendríamos una expansión decimal mayor que uno de la forma , luego la diferencia de , debe ser cero, es decir, que . Lo mismo para el caso .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Números Reales con expansión decimal finita** |
| **Contenido** | Los Números Reales con expansión decimal finita se pueden expresar con expansión decimal periódica con periodo 9 y con periodo 0, como se muestra en los siguientes ejemplos: |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC10 |
| **Título** | Una aproximación a los Números Reales |
| **Descripción** | Interactivo que presenta una breve descripción acerca del surgimiento de los Números Reales. |

Otros Números Reales tienen una expansión **decimal finita no periódica,** por ejemplo:

* 0.12345678910111213…
* 3.14159265358793284…
* 1.4141356237309504…

Esta clasificación de los Números Reales en su expansión decimal periódica o no periódica es la que permite estudiar los distintos subconjuntos del conjunto de los números reales, conocidos como números racionales y números irracionales.

[SECCIÓN 3]**1.1.1 Los números racionales.**

El conjunto de los **números racionales** está conformado por todos los Números Reales que tienen expansión decimal periódica, por ejemplo:

Como un subconjunto del conjunto de los números racionales se encuentra el conjunto de los **números enteros,** que son aquellos números cuyas cifras decimales son solo ceros o solo nueves, por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Representación de racionales como fracción de números enteros** |
| **Contenido** | Todo número racional puede ser expresado de la forma con y números enteros.  El numerador de la fracción está dado por la diferencia entre el número entero que se obtiene al escribir sin el punto decimal las cifras del número, incluyendo una sola vez el periodo y el número entero que se obtiene al escribir las cifras del número sin el periodo y sin el punto decimal.  El denominador de la fracción se obtiene al escribir un nueve por cada una de las cifras del periodo, seguido de un cero por cada cifra decimal que no pertenezca al periodo. |

Por ejemplo,observa cómo escribir los números racionales -6.231, , , , como fracción de números enteros.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_REC20 |
| **Título** | El número racional como fracción de enteros |
| **Descripción** | Práctica de las conversiones entre la expansión decimal de un número racional a su expresión como fracción de números enteros y viceversa. |

[SECCIÓN 3]**1.1.2 Los números irracionales.**

El conjunto de los números irracionales está conformado por todos los Números Reales que tienen expansión decimal no periódica. Por ejemplo:

Entre los números irracionales se destacan aquellos que son solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros, estos son conocidos como **números irracionales algebraicos** y pueden ser expresados por medio de radicales, por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Polinomio asociado a un irracional expresado con radicales** |
| **Contenido** | Para encontrar un polinomio asociado a un número real expresado con radicales, se establece una equivalencia entre el número y una variable. Luego, se elevan ambos lados de la igualdad al número que indique la raíz del número real para suprimir los radicales y obtener una ecuación. Finalmente, se iguala la ecuación a cero. |

**Ejemplo 1.** Encontremos la ecuación polinómica para :

Sea

La ecuación asociada es

**Ejemplo 2.** Encontremos el polinomio del cual es raíz :

Sea

La ecuación asociada es

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Con el proceso anterior, es posible encontrar una ecuación polinómica de la cual el número irracional es solución; no obstante, existe más de una ecuación polinómica asociada al mismo número irracional. |

Los números irracionales que no son algebraicos, no pueden ser expresados como resultado de operaciones con números racionales, por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_REC30 |
| **Título** | Importancia de los números irracionales |
| **Descripción** | Interactivo que presenta ejemplos del surgimiento y uso de algunos números irracionales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC40 |
| **Título** | Polinomios algebraicos de números con radicales |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar la forma en que se puede encontrar el polinomio asociado a una expresión con radicales. |

[SECCIÓN 2]**1.2 La recta real**

Es posible establecer una correspondencia entre los Números Reales y la recta numérica, de tal manera que a cada punto de la recta le corresponda un único número Real y a cada número Real le corresponda un único punto de la recta (esto es lo que se conoce como una relación biunívoca). A la representación gráfica de esta recta se denomina **recta real.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG02 |
| **Descripción** | Correspondencia entre los Números Reales y los puntos de una recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | **Representación gráfica de números Reales.** El número puede ser representado en la recta real con diferentes aproximaciones que pueden tener un error de una unidad, una décima o una centésima según se tomen los segmentos entre 3 y 4, entre 3,1 y 3,2 o entre 3,14 y 3,15, respectivamente. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas para ubicar los Reales en la recta** |
| **Contenido** | Todo Número Real puede ser ubicado en la recta numérica a través de su expansión decimal. |

Para ubicar los números en la recta de manera usual, se escoge arbitrariamente un punto de la recta y a ese punto de le asigna el número cero (, se verifica que los puntos correspondientes a números negativos siempre estén al lado izquierdo de 0 y los que corresponden a números positivos estén ubicados a la derecha.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Elaborada por el autor |
| **Pie de imagen** | Números Reales negativos y Números Reales positivos. |

* Si hay dos números positivos, se ubica a la derecha el número cuya parte entera es mayor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Elaborada por el autor. |
| **Pie de imagen** | Ubicación en la recta numérica de Números Reales positivos con distinta parte entera. |

* Si hay dos números positivos, cuya parte entera es igual, se comparan una a una las cifras decimales de izquierda a derecha, se ubica a la derecha el número cuya primera cifra decimal sea mayor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG05 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Elaborada por el autor. |
| **Pie de imagen** | Ubicación en la recta numérica de Números Reales positivos con cifras no decimales iguales. |

* Si dos números son Reales negativos, el número cuyo valor absoluto de sus cifras no decimales sea mayor se ubica a la izquierda del otro Número Real.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Elaborada por el autor. |
| **Pie de imagen** | Ubicación en la recta numérica de Números Reales con cifras no decimales iguales. |

* Si hay dos números negativos, cuya parte entera es igual, se compara una a una las cifras decimales de izquierda a derecha, y se ubica a la izquierda el número cuya primera cifra decimal sea mayor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG07 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Elaborada por el autor. |
| **Pie de imagen** | Ubicación en la recta numérica de Números Reales con cifras no decimales iguales. |

No siempre es posible ubicar exactamente un número real, generalmente se ubica una aproximación del número, ya sea por truncamiento o redondeo [[VER](http://aulaplaneta.planetasaber.com/encyclopedia/default.asp?idreg=8630&ruta=Buscador)]; es posible ubicar con precisión los números racionales y algunos números irracionales realizando algunas construcciones geométricas.

Para realizar este proceso, en el caso de los números racionales se ubican los números enteros, esto se hace escogiendo una unidad de medida y a partir del cero se hacen mediciones de una unidad tanto a la derecha como a la izquierda; para ubicar los racionales no enteros, se encuentra la expresión como fracción de sus cifras decimales, se divide la unidad como indique el denominador y se toman tantas como indique el numerador [[VER](http://tube.geogebra.org/student/b161352#material/161346)].

Para ubicar los números irracionales se realizan algunas construcciones geométricas usando las propiedades de la media geométrica que se presentan en la circunferencia. [[VER](http://tube.geogebra.org/student/b161352#material/161362)] O a través de la construcción de la diagonal de un rectángulo sobre la recta numérica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG08 |
| **Descripción** | Ubicación de números irracionales con regla y compás sobre la recta real. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de números irracionales algebraicos. |

[SECCIÓN 2]**1.3 Operaciones de los números reales**

En cursos anteriores ya se han estudiado las operaciones de los números reales y cómo se efectúan. Algunas veces simplemente se aproximan las cantidades para operar y otras se dejan indicadas las operaciones.

En este conjunto numérico se realizan las operaciones de estructura aditiva (adición y sustracción) y de estructura multiplicativa (multiplicación y división). Además de la potenciación, radicación y logaritmación.

A continuación recordaremos las propiedades más importantes de estas operaciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC50 |
| **Título** | Propiedades de la adición y la multiplicación de los números reales |
| **Descripción** | Interactivo que presenta las propiedades de los números reales y algunos ejemplos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | * Si se suma dos números racionales el resultado es un número racional. * Si se suma un irracional con un racional el resultado es un número irracional. * Si se suma dos números irracionales, el resultado puede ser un número irracional o racional. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | * Si se multiplica dos números racionales el resultado es un número racional. * Si se multiplica un irracional con un racional distinto de cero el resultado es un número irracional. * Si se multiplica dos números irracionales, el resultado puede ser un número irracional o racional. |

En el siguiente ejemplo se muestra el uso de las propiedades de las operaciones de los números reales, para la resolución de ecuaciones.

Hallar el conjunto solución de la ecuación

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | Ecuación dada. |
|  | | Existencia de opuestos aditivos. |
|  | | Propiedad asociativa de la adición. |
|  | | Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (factor común). |
|  | | Existencia de elementos inversos para la multiplicación. |
|  | | Propiedad asociativa de la multiplicación. |
|  | | Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (factorización). |
|  |  | Inexistencia de divisores de cero. |
|  |  | Existencia de opuestos aditivos y propiedad asociativa de la adición. |

El conjunto solución de la ecuación es .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC60 |
| **Título** | Las propiedades de las operaciones de los Números Reales |
| **Descripción** | Actividad que propone justificar algunos procedimientos algebraicos a través de las propiedades de las operaciones de los números reales |

[SECCIÓN 2]**1.4 Orden de los números reales**

Aunque la forma en que se ubican los Números Reales en la recta real nos presentan un orden para el conjunto, es necesario formalizar el concepto de orden de los números reales a partir de la adición definida en el conjunto de Números Reales positivos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de orden en los números reales** |
| **Contenido** | * Para cualquier par de números reales *x* y *y*, es menor que () o es mayor que ( si y solo si es un número real positivo. * Para los números reales *x* y *y*, es menor o igual a () o mayor o igual a , si y solo si o . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_REC70 |
| **Título** | Propiedades del orden de los números reales |
| **Descripción** | Interactivo que presenta las propiedades del orden de los Números Reales y menciona algunos ejemplos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC80 |
| **Título** | Las propiedades de orden de los números reales |
| **Descripción** | Actividad que aplica las propiedades de las operaciones y el orden de los Números Reales en algunos procedimientos algebraicos. |

[SECCIÓN 2]**1.5. Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC90 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: la estructura algebraica y el orden de los Números Reales |
| **Descripción** | Actividad para reconocer la estructura algebraica y el orden de los números reales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Números Reales equivalentes |
| **Descripción** | Actividad para reconocer expresiones equivalentes de números reales. |

[SECCIÓN 1]**2 Intervalos**

Se denomina **intervalo** al conjunto de puntos de la recta real correspondientes a una semirrecta o a un segmento.

Un intervalo es **acotado superiormente** si es posible encontrar por lo menos un punto a su derecha que no pertenezca al intervalo; de la misma forma, un intervalo es **acotado inferiormente** si a su izquierda existen puntos que no pertenecen al intervalo. Un intervalo es **acotado**, si es acotado superior e inferiormente. Claramente, los segmentos son acotados mientras que las semirrectas solamente son acotadas superior o inferiormente.

[SECCIÓN 2]**2.1 Intervalos abiertos**

Sean con entonces:

Se define el intervalo abierto de extremos y como el conjunto de todos los números reales mayores que y menores que , así:

Es decir, el intervalo abierto no incluye a los números reales y como se muestra en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG09 |
| **Descripción** | Segmento abierto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matemáticas/Intervalos/Intervalos Acotados Abiertos/primera imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo abierto . |

Se define, el intervalo abierto con extremos y como el conjunto de los números reales mayores que :

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG10 |
| **Descripción** | Semirrecta abierta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matematicas/Intervalos/Intervalos Acotados Abiertos/segunda imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo abierto . |

Asimismo, el intervalo abierto con extremos y es el conjunto de los números reales menores que :

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG11 |
| **Descripción** | Semirrecta abierta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matematicas/Intervalos/Intervalos Acotados Abiertos/tercera imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo . |

[SECCIÓN 2]**2.2 Intervalos cerrados**

Sean con entonces:

El intervalo cerrado de extremos y se define como el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que y menores o iguales que :

Es decir, en el intervalo cerrado los números reales y son elementos del intervalo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG12 |
| **Descripción** | Segmento cerrado |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matematicas/Intervalos/Intervalos Acotados Cerrados |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo . |

[SECCIÓN 2]**2.3 Intervalos semiabiertos**

Sean con entonces:

* El intervalo semiabierto de extremo cerrado en y abierto en ) es el conjunto de todos los Números Reales mayores o iguales que y menores que :

Es decir, se cumple que ; sin embargo,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG13 |
| **Descripción** | Segmento semiabierto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matematicas/Intervalos/Intervalos Semiabiertos/primera imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo . |

* El intervalo semiabierto como el conjunto de todos los Números Reales mayores que y menores o iguales que :

Es decir, se cumple que , pero

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG14 |
| **Descripción** | Segmento semiabierto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matematicas/Intervalos/Intervalos Semiabiertos/segunda imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo . |

* El intervalo semiabierto como el conjunto de los números reales mayores o iguales que :

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG15 |
| **Descripción** | Semirrecta cerrada |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matemáticas/Intervalos/Intervalos Semiabiertos/tercera imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo [. |

* El intervalo semiabierto (como el conjunto de los números reales menores o iguales que :

(

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG16 |
| **Descripción** | Semirrecta cerrada |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 4 Eso/Matemáticas/Intervalos/Intervalos Semiabiertos/cuarta imagen |
| **Pie de imagen** | Representación del intervalo . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Intervalos Acotados y no acotados** |
| **Contenido** | Observa que:   * es acotado. * es acotado. * es acotado. * es acotado superiormente. * es acotado inferiormente. * es acotado superiormente. * es acotado inferiormente. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Al conjunto de los Números Reales lo podemos expresar como el intervalo |

[SECCIÓN 2]**2.4 Operaciones con intervalos**

Como los intervalos son conjuntos de números reales es posible realizar entre ellos las operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección y complemento. El resultado de realizar una operación conjuntista entre intervalos se puede escribir como un intervalo o como la unión de intervalos, además la representación gráfica ayuda a determinarlo.

[SECCIÓN 3]**2.4.1 Unión de intervalos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Unión de intervalos** |
| **Contenido** | La unión de dos intervalos es el conjunto de números reales que pertenece a un intervalo o al otro. |

**Ejemplo 1.** Sean los intervalos y , encontrar:

Solución.

Al representar los intervalos en la recta numérica se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG17 |
| **Descripción** | Unión de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c6/Intervalo_real_22.svg/120px-Intervalo_real_22.svg.png> |
| **Pie de imagen** | . |

Luego

**Ejemplo 2.** Determinar , a través de su representación gráfica.

Solución.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG18 |
| **Descripción** | Unión de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a9/Intervalo_real_20.svg/120px-Intervalo_real_20.svg.png> |
| **Pie de imagen** | . |

En este caso se obtiene ; por lo tanto, simplemente se deja la operación indicada.

[SECCIÓN 3]**2.4.2 Intersección de intervalos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Intersección de intervalos** |
| **Contenido** | La intersección de dos intervalos es el conjunto de números reales que pertenece a ambos intervalos. |

**Ejemplo 1**. Determinar , a través de su representación en la recta numérica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG19 |
| **Descripción** | Intersección de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f6/Intervalo_real_23.svg/120px-Intervalo_real_23.svg.png> |
| **Pie de imagen** | . |

Luego

**Ejemplo 2**. Hallar un intervalo equivalente a

La representación gráfica de se muestra en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG20 |
| **Descripción** | Intersección de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/8e/Intervalo_real_21.svg/120px-Intervalo_real_21.svg.png> |
| **Pie de imagen** | . |

Puesto que no hay un número real que pertenezca a ambos intervalos se puede concluir que:

.

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Complemento de un intervalo**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Complemento de un intervalo** |
| **Contenido** | El complemento de un intervalo está conformado por todos los números reales que no pertenecen al intervalo. |

Para encontrar se representa gráficamente

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG21 |
| **Descripción** | Complemento de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en Aulaplaneta)** | <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d2/Intervalo_03.svg/300px-Intervalo_03.svg.png> |
| **Pie de imagen** | . |

Por lo tanto, los números reales que NO pertenecen a, son los elementos del conjunto

Luego, .

Para determinar se representa gráficamente

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG22 |
| **Descripción** | Complemento de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Dibujar el intervalo . |
| **Pie de imagen** | . |

Luego, .

[SECCIÓN 2]**2.5 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC110 |
| **Título** | Los intervalos y sus operaciones |
| **Descripción** | Actividad para reconocer los intervalos, sus características y realizar sus operaciones. |

[SECCIÓN 1]**3. Valor absoluto**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Valor absoluto** |
| **Contenido** | El valor absoluto de un número real que denotaremos por se define como: |

Observa que el valor absoluto de un número es siempre un número real no negativo.

Ten en cuenta que, si es un número real, puede ser un número real negativo o positivo, puesto que representa el opuesto de ; por lo tanto, si es negativo es positivo. Luego:

[SECCIÓN 2]**3.1 Propiedades del absoluto**

Las principales propiedades del valor absoluto son:

* si y solo si
* si y solo si
* si y solo si ó

Debido a que la distancia entre dos puntos es un número real no negativo, la distancia entre dos números y en la recta real se puede escribir mediante el valor absoluto como .

Por ejemplo, la distancia entre yesta dado por y la distancia entre y esta dada por

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG23 |
| **Descripción** | Distancia en la recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://aulaplaneta.planetasaber.com/encyclopedia/default.asp?idpack=11&idpil=0015EF01&ruta=Buscador> |
| **Pie de imagen** | La primera recta real muestra la distancia entre y y la segunda recta real muestra la distancia entre y . |

[SECCIÓN 2]3**.2 Ecuaciones de una variable con valor absoluto**

Ecuaciones de una variable con valor absoluto son aquellas ecuaciones en la que la variable aparece una o más veces dentro de un valor absoluto, por ejemplo:

Para resolver una ecuación con valor absoluto es necesario plantear la definición del valor absoluto en términos de la ecuación que se requiere resolver. Por ejemplo, respecto a la ecuación , el valor absoluto se define como:

En la ecuación se tiene que:

En los siguientes ejemplos se muestra cómo resolver una ecuación que contiene un valor absoluto:

**Ejemplo 1.** Encuentra el conjunto solución de la ecuación

De acuerdo con la definición de valor absoluto se tiene que:

Por lo tanto, se deben considerar los valores de *x* para los cuales y los valores de *x* para los cuales . Por eso, se presentan las ecuaciones y . Finalmente, se procede a averiguar el valor de *x* en cada una de ellas como se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

El conjunto solución de la ecuación es

**Ejemplo 2.** Halla el conjunto solución de la ecuación

Primero, se despeja la expresión con valor absoluto:

Con el fin de sintetizar algunos pasos en el procedimiento del ejemplo anterior, se consideran los valores de *x* para los cuales el valor absoluto de 2*x*+6 es 2, estos casos son:

y . Resolviendo cada uno:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Luego, el conjunto solución de la ecuación es .

**Ejemplo 3.** Determina el conjunto solución de la ecuación

Para dar solución a esta ecuación, se consideran los dos casos: y . Resolviendo cada uno:

|  |  |
| --- | --- |
| Con el uso de formula cuadrática, se obtiene:  ó  ó  ó | con factorización, se obtiene:  Luego,  ó  ó  ó |

Posterior, el conjunto solución de la ecuación , es

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_REC120 |
| **Título** | Ecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Interactivo que muestra la resolución de ecuaciones con valor absoluto, donde la variable aparece más de una vez y no sólo al interior del valor absoluto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC130 |
| **Título** | Resolución de ecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Actividad que te ejercita para encontrar el conjunto solución de ecuaciones con valor absoluto. |

[SECCIÓN 2]**3.3 Inecuaciones de una variable con valor absoluto**

Una inecuación con valor absoluto es una inecuación en que la variable aparece una o más veces al interior de un valor absoluto, por ejemplo:

Antes de estudiar los procesos de solución de algunas inecuaciones lineales es necesario resaltar los siguientes casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Inecuaciones con valor absoluto con respuesta trivial** |
| **Contenido** | Sea , y y una expresión algebraica que contiene a como variable entonces la inecuación:   * tiene por conjunto solución todos los reales donde tiene sentido. * tiene por conjunto solución todos los reales donde tiene sentido. * tiene por conjunto solución todos los reales donde tiene sentido y . * tiene por conjunto solución el conjunto vacío. * tiene por conjunto solución el conjunto vacío. * tiene por conjunto solución el mismo que la ecuación |

[SECCIÓN 3]**3.3.1 Inecuaciones donde la expresión en valor absoluto es menor que un número real positivo.**

La inecuación donde es un número real positivo, equivale a la inecuación , esta inecuación se interpreta gráficamente como los números reales cuya distancia a cero es menor que .

Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG24 |
| **Descripción** | Dibujar intervalo abierto (-2,2) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Por diseñar |
| **Pie de imagen** | Interpretación de la inecuación como un problema de distancia. |

Tiene solución

Se concluye que el conjunto solución de la inecuación está dado por el intervalo que son los números reales tales que , luego tal y como se expresa en la propiedad 4 de valor absoluto, el conjunto solución es la intersección entre los valores reales que satisfacen las inecuaciones y .

Entonces, cuando se tiene una expresión del tipo

Donde es una expresión que contiene únicamente la variable , entonces el conjunto solución se obtiene hallando la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones y .

**Ejemplo 1.** Halla el conjunto solución de la inecuación

De la inecuación se obtienen las desigualdades y que se pueden escribir como . Esta inecuación se resuelve al despejar *x* en la expresión central, así:

En conclusión, el conjunto solución de la inecuación es el intervalo cerrado .

**Ejemplo 2.** Encuentra el conjunto solución de la inecuación .

La inecuación debe cumplir las desigualdades y , que se pueden escribir simultáneamente mediante la expresión .

Sin embargo, las inecuaciones cuadráticas se resuelven comparando el polinomio de segundo grado con cero (0); por lo tanto, no conviene resolverlas simultáneamente, de esta forma se aconseja resolver las dos inecuaciones e intersecar las soluciones.

Se factoriza para hallar los ceros de la inecuación:

Como el producto de dos números es mayor que cero, si y solo si, ambos números son mayores que cero o ambos números son menores que cero, se determinan los números reales para los cuales y , que son y respectivamente. Estos números particionan al conjunto de los números reales en los intervalos , y .

Se determina el valor relativo del número real, que obtienen los factores y al ser remplazado *x* por un número real de cada intervalo, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Factores |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

La inecuación tiene conjunto solución en el conjunto .

Se resuelve la segunda inecuación:

Se aplica la factorización:

Como el producto de dos números reales es menor que cero, si y solo si, uno de los factores es positivo y el otro factor es negativo; se compara el valor relativo de los factores en cada intervalo, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Factores |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Luego, la inecuación tiene conjunto solución .

En ocasiones, la representación de estos intervalos en la recta real permite interpretar la solución de una inecuación, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica en la recta real de la solución de la inecuación. |

Concluimos que la inecuación con valor absoluto tiene por conjunto solución:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC140 |
| **Título** | Inecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Actividad pensada para practicar los procedimientos de resolución de inecuaciones con valor absoluto. |

[SECCIÓN 3]**3.3.2 Inecuaciones donde la expresión en valor absoluto es mayor que un real positivo.**

La inecuación donde es un número real positivo; es equivalente a la desigualdad que se puede interpretar gráficamente el conjunto de números reales cuya distancia a cero es mayor que .

Por ejemplo .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_IMG26 |
| **Descripción** | Dibujar la unión de intervalos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Por diseñar |
| **Pie de imagen** | Interpretación de la inecuación como un problema de distancia. |

Tiene solución .

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación está dado por que son los números reales tales que ó , como se expresa en la propiedad 5 de valor absoluto. A diferencia del caso anterior estas inecuaciones no pueden resolverse simultáneamente y el conjunto solución es la unión entre los valores reales que satisfacen las inecuaciones y .

Así, las inecuaciones de la forma , donde p(x) es una expresión que contiene únicamente la variable , el conjunto solución de la inecuación se obtiene al hallar la unión de los conjuntos solución de las inecuaciones y .

**Ejemplo 1.** Determina el conjunto solución de la inecuación .

El conjunto solución de la desigualdad debe cumplir la condición o la condición . Al resolver cada una de las inecuaciones se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| Conjunto solución | Conjunto solución |

En conclusión, el conjunto solución de la inecuación es el intervalo abierto .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC150 |
| **Título** | Resolución de inecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Actividad que pone en práctica los procedimientos para resolver inecuaciones con valor absoluto. |

[SECCIÓN 2]**3.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: las soluciones de ecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Actividad sobre los diferentes casos asociados a las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto |
| **Descripción** | Actividad sobre diferentes técnicas de resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. |

[SECCIÓN 1]**4. Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC180 |
| **Título** | Competencias: pon a prueba tu conocimiento sobre Números Reales |
| **Descripción** | Maneja correctamente los Números Reales y aplica sus propiedades en la resolución de inecuaciones. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC190 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_01\_CO\_REC200 |
| **Título** | Pon a prueba tu conocimiento sobre las propiedades de los Números Reales |
| **Descripción** | Identifica las propiedades de orden y de las operaciones entre Números Reales. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC210 | |
| **Web 01** | *Representación de números en la recta real.* | [*http://tube.geogebra.org/student/b161352#*](http://tube.geogebra.org/student/b161352) |
| **Web 02** | *Inecuaciones con Valor Absoluto* | [*http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/images/ejercicios\_resueltos/ecuaciones\_inecuaciones/Inecuaciones-con-valor-absoluto.pdf*](http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/images/ejercicios_resueltos/ecuaciones_inecuaciones/Inecuaciones-con-valor-absoluto.pdf) |
| **Web 03** | *Evolución Histórica del Concepto de Número* | [*http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta\_archivos/numero\_1\_archivos/r\_m\_hernandez\_feb10.pdf*](http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf) |
| **Web 04** | *Desigualdades e Intervalos* | [*https://lacasadegauss.files.wordpress.com/2010/10/desigualdades-e-intervalos.pdf*](https://lacasadegauss.files.wordpress.com/2010/10/desigualdades-e-intervalos.pdf) |
| **Web 05** | *Sistemas Numéricos* | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |