**Interactivo F10: Trabajar un texto**

**\***Nombre del guión a que corresponde el ejercicio

MA\_11\_01\_CO

**DATOS DEL RECURSO**

**\***Título del recurso (**65** caracteres máx.)

Una aproximación a los Números Reales

**\***Descripción del recurso

Interactivo que presenta una breve descripción acerca del surgimiento de los Números Reales.

**\***Palabras clave del recurso (separadas por comas ",")

Números Reales, números racionales, números irracionales, medir.

**\***Tiempo estimado (minutos)

60 minutos.

**\***Acción didáctica (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Exposición | X | Ejercitación |  | Preguntas con respuesta libre |  | Juegos |  |
| Estudio |  | Proyecto |  | Evaluación |  | Generador de actividades |  |

**\***Competencia (indicar sólo una)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| … en comunicación lingüística |  | … matemática | X |
| … en el conocimiento y la interacción con el mundo físico |  | Tratamiento de la información y competencia digital |  |
| … social y ciudadana |  | … cultural y artística |  |
| … para aprender a aprender |  | Autonomía e iniciativa personal |  |

**\***Tipo de Media (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Secuencia de imágenes |  | Video |  | Animación |  | Interactivo | X |
| Actividad |  | Web |  | Mapa conceptual |  | Audio |  |
| Texto |  | Imagen |  | Documento |  |  |  |

**\***Nivel del ejercicio, 1-Fácil, 2-Medio ó 3-Difícil

3-Dificil

**FICHA DEL PROFESOR**

**Objetivo**

Con este interactivo, los estudiantes podrán conocer un poco más acerca del surgimiento del sistema de los Números Reales y la importancia de su desarrollo; asimismo se espera que el estudiante identifique algunos de los aspectos claves que hicieron surgir nuevos sistemas numéricos y nuevos sistemas de representación.

Antes de la presentación:

No es la primera vez que los estudiantes de grado undécimo se enfrentan al concepto de número real, se espera que el estudiante maneje ya algunos conceptos como número natural, número entero, número racional y tenga ideas básicas sobre los números irracionales.

El desarrollo de la sección 1.1 de expansiones decimales puede usarse antes o después de esta presentación dependiendo si desea usarla como una manera de introducción o de refuerzo de la idea de Número Real como expansión decimal.

Durante la presentación:

Si el profesor considera pertinente, en cada una de las pestañas realice los cuestionamientos descritos a sus estudiantes, estos pueden servir de material para pequeñas discusiones y socializaciones con los estudiantes que fortalezcan la aprehensión del concepto de Número Real.

Después de la presentación:

Después de ver el interactivo, puede solicitar a los estudiantes un escrito sobre el concepto de Número Real.

**FICHA DEL ALUMNO**

Existe una relación muy estrecha entre el conjunto de los Números Reales y los puntos de una recta, esta relación se debe a que los números reales positivos solucionan uno de los problemas que fueron de vital importancia para la humanidad: crear un conjunto numérico para medir. Este conjunto numérico está conformado por los números reales positivos, sus opuestos aditivos y el cero.

**DATOS DEL INTERACTIVO**

**PESTAÑA 1** (“MENÚ”)

**\***Título (**48** caracteres máx.)

Una aproximación a los Números Reales

**\***Texto (**500** caracteres aprox.)

|  |  |
| --- | --- |
| ¿Qué sentido tiene un numero con infinitas cifras decimales?  Muchos de los conceptos matemáticos surgen a partir de la necesidad de la humanidad para resolver un problema, los Números Reales no son la excepción. | http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/1047346/189851069/stock-vector-pi-spiral-circumference-mathematics-189851069.jpg  Expansión numérica de . |

189851069

**PESTAÑA 2** (“COMPRENSIÓN”)

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) El problema de la medida

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.) Introducción

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Desde la antigüedad era necesario realizar procesos como contar, ordenar, clasificar y medir. Diferentes culturas lograron construir un sistema de numeración asociado a la idea de cantidad, es decir, un conjunto de números que sirviera para contar; aquellas culturas que desarrollaron escritura buscaron representar los números y empezaron a aparecer distintas formas de escribir este conjunto numérico –actualmente se conocen como los números naturales–. Un problema que no todas las culturas resolvieron fue construir un sistema numérico para “medir”.

Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Claramente, el conjunto de los números naturales es suficiente para contar; sin embargo, es insuficiente para medir de manera exacta, puesto que con ellos era imposible medir magnitudes más pequeñas a la unidad.

Una regla o un metro son los instrumentos que se emplean para realizar las mediciones de longitud de un objeto. La regla se puede describir como una vara recta en la que desde cierto extremo aparecen marcas que se encuentran relacionadas con una unidad que sirve de referencia; el ideal sería poder medir cualquier longitud. Por eso, una regla ideal puede ser representada por una semirrecta.

Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

¿Cuántas marcas debe tener una regla ideal para medir exactamente cualquier longitud?

Cada punto de esta semirrecta genera una medida distinta, por lo tanto, para medir cualquier longitud se debería marcar todos los puntos de la semirrecta, pero si los llegamos a marcar todos, no habría puntos que se diferencien; por tanto, no se habría marcado ninguno. En ese sentido, la regla ideal se convierte en una idea abstracta.

¿Si no podemos hacer marcas, cómo podemos entonces medir?

Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Establecer una unidad patrón de medida, permite calcular la longitud de algunos segmentos, reiterando la unidad varias veces, con el fin de establecer el número de veces que cabe la unidad de referencia en el segmento que se requiere medir.

Unidad

Mide 3 Unidades

Mide 4 Unidades

Mediante este método no es posible medir cualquier segmento, puesto que si se requiere medir un segmento más pequeño que la unidad, o un segmento en el que la unidad se ha reiterado varias veces y sobra un pedazo más pequeño que esta, no es posible finalizar el proceso de medición.

Texto5 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

¿Cuáles son las que longitudes que se pueden medir hasta el momento?

Solo se pueden medir segmentos de longitud igual a la unidad, dos veces la unidad, tres veces la unidad, y así sucesivamente. De manera general, se pueden medir segmentos que midan un número natural de veces la unidad.

Mediante este proceso se comienzan a asociar conjuntos numéricos a la idea de medir, en este caso, **el conjunto de los números naturales**. Por supuesto, si se colocan en una regla ideal solamente los puntos, no se podrían medir exactamente longitudes más pequeñas que la unidad, como se muestra en la imagen.

**PESTAÑA 3**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) Construcción de los números racionales

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.)

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Para medir segmentos más pequeños que la unidad, surge la idea de fraccionar la unidad en partes iguales, este proceso permite medir pedazos que son más pequeños que la unidad con partes de la misma unidad.

En este proceso de medición, surge la pregunta: ¿Cómo se puede dividir la unidad en partes iguales, si no se pueden medir pedazos más pequeños que la unidad?

Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Mediante una construcción geométrica es posible dividir un segmento en dos partes iguales (bisecar) sin necesidad de medir. [[VER]](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI10.html)

Entonces, mediante este proceso, se puede hallar la mitad de la unidad, y la mitad de la mitad de la unidad, y la mitad de esta y así sucesivamente; es decir, es posible medir segmentos que midan de la unidad, de la unidad, de la unidad, de la unidad y en general un segmento que mida de la unidad.

El proceso de bisecar permite ampliar el conjunto numérico asociado a la medida, que se considera el conjunto .

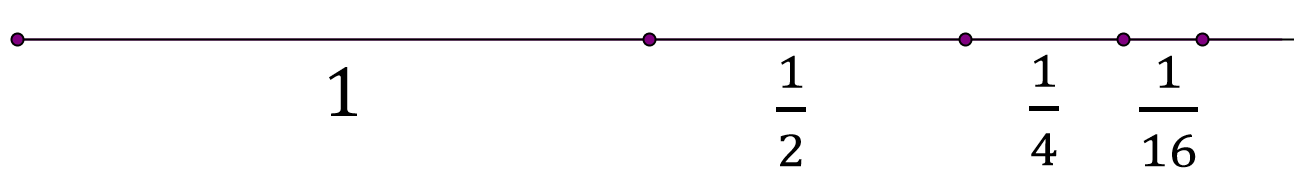
Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Si se requiere medir un segmento de longitud , se realizan los siguientes pasos:

Se determina la cantidad de veces que cabe la unidad en el segmento, si este número de veces es exacto, entonces con el número de veces que cabe la unidad natural.

Si por el contrario, no es exacto, entonces se calcula el número de veces que cabe de la unidad en la parte sobrante del segmento (no puede caber más de una vez porque en ese caso formaría la unidad), si cabe y queda exacto , ahora si sobra una porción del segmento, se repite el proceso con de la unidad, si es exacto o ; se continua con este proceso hasta completar la longitud del segmento.

Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)



Si el proceso descrito anteriormente siempre termina, entonces cualquier longitud se podría expresar como una suma de elementos de .

Es decir:

Donde es o dependiendo si esa parte de la unidad cabe o no en la porción de segmento que se está midiendo.

Texto5 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Estas ideas de medición, fueron desarrolladas por los egipcios en el *Papiro* *Rhind*, quizás uno de los más antiguos e importantes escritos sobre matemáticas antiguas que data hacia el 1.650 a.C. y que se reconoce como una de sus mayores fuentes de conocimiento. En este escrito, se encuentra un trabajo que intenta expresar todas las longitudes como la suma entre un natural y fracciones unitarias; sin embargo, se muestra que esto no siempre es posible, porque por ejemplo no puede escribirse de esta manera, ya que requiere de un proceso de sumas infinitas, razón por la cual, inventan un símbolo especial para esta longitud y otras de gran interés. Aunque actualmente, no hay evidencia de que los egipcios, hayan desarrollado aún más el sistema de numeración para medir, este desarrollo fue de gran importancia para que lograran elaborar sus majestuosas construcciones arquitectónicas.

**\***Texto6 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Así como se realiza una construcción geométrica que permite dividir exactamente un segmento en dos partes iguales, existe una construcción, que permite dividir un segmento en tres partes iguales, en cuatro, en cinco o de manera general se puede dividir la unidad en cualquier número natural de partes iguales que se requiera. [[VER]](http://tube.geogebra.org/student/b471281#material/471395)

De esta forma, el conjunto numérico asociado a la medida, se puede ampliar al conjunto las sumas de elementos de .

Por ejemplo, una longitud puede estar expresada por .

Esta ecuación permite ampliar el conjunto numérico que sirve para medir al conjunto de números racionales positivos, es decir: .

**\***Texto7 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Aunque los babilónicos y los egipcios ya conocían las fracciones y los griegos plenamente el conjunto de los números racionales positivos, ellos no usaron la notación actual y esto dificultó su estudio. Muchos siglos después los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo y este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa. Fue hasta el siglo XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

**PESTAÑA 5**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.)

Los números irracionales

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.)

Los números irracionales

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Por bastante tiempo los griegos consideraron que los números racionales positivos eran los únicos que existían, pero surgieron algunos cuestionamientos como por ejemplo, medir la diagonal de un cuadrado tomando uno de sus lados como unidad; sin embargo, no fue posible encontrar una unidad de medida común que midiera exactamente el lado del cuadrado y su diagonal.

Cuando creían haber encontrado esta unidad de medida, se dieron cuenta que no era tan precisa al aumentar de tamaño el cuadrado. Otro problema que abordaron fue lograr medir la longitud de la circunferencia tomado como unidad su diámetro, la dificultad de la cuadratura del círculo consistía en construir un polígono regular que tuviera la misma área que el círculo. Y problemas similares a estos tuvieron los griegos con respecto a la medida.

**\***Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Una de las historias más famosas (que tiene varias versiones) se presentó en la escuela pitagórica, cuando Hipasouno de los alumnos de Pitágorasle pidió a su maestro que expresara qué número racional al cuadrado tenía como resultado , Pitágoras que creía que los únicos números que existían eran los racionales, al no encontrar la respuesta reaccionó airadamente botando a Hipasopor una ventana.

**\***Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Usando el teorema de Pitágoras [[VER]](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html) se puede determinar que si se construye un cuadrado, su diagonal tiene una longitud que al cuadrado debe ser el doble del lado, de esta forma, si el lado de un cuadrado es de unidad, la longitud de su diagonal debe ser un número que su cuadrado sea , pero si este número no es racional quiere decir que **el problema de la medida aún no está solucionado**, esta diagonal es imposible de medir con los racionales.

**\***Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

La siguiente es una demostración de que no hay un número racional cuyo cuadrado sea .

Si *x* es un número racional cuyo cuadrado es 2, luego *x* se puede expresar como la fracción irreductible , donde y son números enteros, por lo tanto:

Es claro, que, y son naturales, es par, y eso necesariamente nos lleva a que debe ser par, entonces, , es así como:

Por lo tanto:

De la expresión anterior se puede concluir que es par, asimismo es par.

Luego, *a* y *b* son números pares, de esta forma la fracción no es irreductible, lo que contradice la hipótesis inicial, es decir, no existe un número racional que al cuadrado sea 2, es decir que no es un número racional.

**\***Texto5 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Los griegos también encontraron que la razón entre el diámetro del círculo y la circunferencia no se podía expresar como un número racional. A estos números que representaban longitudes, pero que no se podían expresar como números racionales positivos los denominaron: inconmensurables, actualmente los llamamos números irracionales positivos.

**PESTAÑA 5**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) Un conjunto numérico para medir

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.) Un conjunto numérico para medir

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Los números inconmensurables, formaban una categoría bastante imprecisa, debido a que los sistemas de numeración de la época no resultaban ser los más adecuados. Los europeos, beneficiándose del sistema de numeración posicional hindú de base 10 que habían adoptado fueron capaces de definirlos con precisión.

La solución presentada no está muy distanciada a la idea de bisecar, debido a que siempre es posible dividir un segmento en diez partes iguales, así se puede determinar la décima parte de la unidad; la décima parte de la décima parte de la unidad, es decir, la centésima parte; la décima parte de la centésima parte de la unidad, es decir, la milésima parte de la unidad, y así sucesivamente.

**\***Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

En este sentido, toda longitud *l* puede ser expresada como:

Que en nuestro sistema de numeración, se escribe como

Es decir, el número *l* un número natural seguido de un punto que se denomina punto decimal y de una secuencia infinita de dígitos tales que

Estas expresiones son las que se llaman expansiones decimales y coinciden con el conjunto de los números reales positivos, que consolidan un conjunto numérico que permite medir cualquier longitud. Por supuesto, la idea de medir que se presenta en este interactivo es muy abstracta comparada con el proceso que realizamos cuando medimos longitudes a un objeto tangible.