**Interactivo F10: Trabajar un texto**

**\***Nombre del guión a que corresponde el ejercicio

MA\_G11\_01\_CO

**DATOS DEL RECURSO**

**\***Título del recurso (**65** caracteres máx.)

Acercándonos a los números reales

**\***Descripción del recurso

Una breve presentación acerca de cómo surgen los números reales.

**\***Palabras clave del recurso (separadas por comas ",")

Números reales

**\***Tiempo estimado (minutos)

45 min

**\***Acción didáctica (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Exposición | X | Ejercitación |  | Preguntas con respuesta libre |  | Juegos |  |
| Estudio |  | Proyecto |  | Evaluación |  | Generador de actividades |  |

**\***Competencia (indicar sólo una)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| … en comunicación lingüística |  | … matemática | X |
| … en el conocimiento y la interacción con el mundo físico |  | Tratamiento de la información y competencia digital |  |
| … social y ciudadana |  | … cultural y artística |  |
| … para aprender a aprender |  | Autonomía e iniciativa personal |  |

**\***Tipo de Media (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Secuencia de imágenes |  | Video |  | Animación |  | Interactivo | X |
| Actividad |  | Web |  | Mapa conceptual |  | Audio |  |
| Texto |  | Imagen |  | Documento |  |  |  |

**\***Nivel del ejercicio, 1-Fácil, 2-Medio ó 3-Difícil

3-Dificil

**FICHA DEL PROFESOR**

Objetivo

Con este interactivo, los estudiantes podrán conocer un poco más acerca de cómo surge el sistema de los números reales y porque su desarrollo fue de gran importancia, también se espera que el estudiante identifique cuales fueron algunos de los aspectos claves que hicieron surgir nuevos sistemas numérico y nuevos sistemas de representación.

Antes de la presentación:

No es la primera vez que los estudiantes de grado once se enfrentan a los números reales, se espera que para una mejor comprensión del texto el estudiante maneje ya algunos conceptos como número natural, numero entero, numero racional y tenga algunas ideas básicas sobre los números irracionales.

El desarrollo de la sección 1.1 de expansiones decimales puede usarse antes o después de esta presentación dependiendo si desea usarla como una manera de introducción o de refuerzo de la idea de número real como expansión decimal.

Durante la presentación:

No es necesario esperar a que el estudiante haya observado toda la animación para entablar una discusión, si lo desea en cada una de las pestañas los cuestionamientos realizados pueden servir de material de pequeñas discusiones y socializaciones con los estudiantes que pueden fortalecer la aprehensión del concepto de número real.

Después de la presentación:

Después de ver el interactivo, puede solicitar a los estudiantes un escrito sobre el concepto de número real.

**FICHA DEL ALUMNO**

Existe una relación muy estrecha entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta, esta relación esta debido a que los reales positivos solucionan uno de los problemas que fueron de vital importancia para la humanidad crear un conjunto numérico para medir. Incluyendo al sistema de los reales positivos los opuestos aditivos y el cero construimos una estructura que se corresponde de manera biunívoca con los puntos de la recta y además se encentra dotada del orden dado por la recta y de dos operaciones que fortalecen su estructura algebraica.

**DATOS DEL INTERACTIVO**

**PESTAÑA 1** (“MENÚ”)

**\***Título (**48** caracteres máx.) Acercándonos a los números reales

**\***Texto (**500** caracteres aprox.)

Cuando nos dicen que en los números reales encontramos algunos que solo se pueden escribir como una secuencia infinita de cifras como incluso si la secuencia de cifras es tan aleatorias que no podríamos cual es la cifra siguiente como , o cuando nos dicen que ya han logrado encontrar más de un millón de cifras decimales para el número ; es posible pensar que esto no tiene ningún sentido ni utilidad, sin embargo, los números reales positivos pueden llegar a tener más sentido que números como o , incluso algunos historiadores de la matemática afirman que primeros fueron aceptados los números reales positivos antes que los enteros negativos.

**PESTAÑA 2** (“COMPRENSIÓN”)

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) El problema de la medida

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.) Introducción

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Recordemos que muchos de los conceptos matemáticos surgen a partir de la necesidad de la humanidad para resolver un problema, y los números reales no son la excepción. Desde la antigüedad era necesario realizar procesos como contar, ordenar, clasificar y medir. Todas las diferentes culturas lograron construir un sistema de numeración asociado a la idea de cantidad, es decir un conjunto de números que sirviera para contar, aquellas que desarrollaron escritura también buscaron representar los números y empezaron a aparecer distintas escrituras de este conjunto numérico que actualmente conocemos como los naturales. Un problema que no todas resolvieron fue el de la construcción de un sistema numérico para “medir” ya fueran longitudes, áreas, tiempo, pesos entre otros. Al enfrentarse a esto, era claro que el conjunto de los números naturales que era suficiente para contar es insuficiente para medir de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número natural.

Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Cuando queremos medir la longitud de un objeto, inmediatamente pensamos en una regla o mejor a un en un metro, que lo podríamos describir de una manera simple como una vara recta en la que desde cierto extremo aparecen marcas que se encuentran relacionada con una unidad que sirve de referencia, el ideal sería poder medir cualquier longitud, por eso nuestra regla ideal puede ser representada por una semirrecta.

¿Pero cuantas marcas debe tener nuestra regla ideal para medir exactamente cualquier longitud? , cada punto de esta semirrecta genera una medida distinta, por lo tanto para poder medir cualquier longitud deberíamos marcar todos los puntos de la semirrecta, pero si los marcamos todos no habrían puntos que se diferencien y realmente no hubiéramos marcado ninguno. Aquí es donde nuestra regla ideal empieza a superponerse al mundo tangible y empieza a convertirse en una idea abstracta.

¿Si no podemos hacer marcas, como podemos entonces medir?

Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Retomemos la idea de medir usando una unidad de referencia, y recordemos un poco lo de lo visto en grados anteriores, si quisiéramos medir la longitud de un segmento cualquiera, vamos sobreponiendo la unidad y realizando marcas para saber cuántas veces cabe la unidad de referencia,

Unidad

Mide 3Unidades

Mide 4Unidades

Por supuesto el problema que tiene este proceso, es cuando intentemos medir un segmento que sea más pequeño que la unidad patrón, o si al intentar medir un segmento después de que hemos sobrepuesto algunas veces la unidad nos encontramos con que sobra un pedazo más pequeño que esta, no podríamos completar el proceso. Podemos pensar en una unidad más pequeña pero el problema seguiría repitiéndose al considerar segmentos aún más pequeños que esta.

Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

¿Cuáles son las que longitudes que podemos medir hasta el momento? Solo podemos medir segmentos de longitud, la unidad, o dos veces la unidad, o tres veces la unidad, y así sucesivamente, de manera general podemos medir segmentos que midan un numero natural de veces la unidad, acá empezamos a asociar conjuntos numéricos a la idea de medir, en este caso el conjunto usado para contar el **de los números naturales**.

Por supuesto si colocáramos en nuestra regla ideal solamente los puntos que representan las longitudes que podemos medir exactamente tendríamos:

Como queremos poder continuar resolviendo el problema de la medida surge la idea de fraccionar la unidad, es decir en los casos en que no podemos medir una longitud solamente con la unidad, entonces dividimos la unidad en partes iguales y medimos los pedazos que son más pequeños que la unidad con partes de la unidad, tal y como nos enseñaron en primaria pero en estos momentos vale la pena hacernos una pregunta:

¿Cómo puedo dividir la unidad en partes iguales si no puedo medir pedazos más pequeños que la unidad?

**PESTAÑA 3**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.)Dividiendo en dos

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.)Dividiendo en dos

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Seguimos atorados con el problema de la medida ya que no podemos medir la unidad para dividirla en partes iguales, sin embargo aquí es donde las construcciones geométricas empiezan a tomar fuerza, siempre es posible dividir un segmento en dos partes iguales (bisecar) sin necesidad de medir. [[VER]](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI10.html)

Por lo tanto podemos hallar sin necesidad de medir la mitad de la unidad, y la mitad de la mitad de la unidad, y la mitad de este y así sucesivamente, es decir, además ahora podemos medir segmentos que midan de la unidad, de la unidad, de la unidad, de la unidad y en general un segmento que mida de la unidad.

Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

El proceso de bisecar nos permite ampliar el conjunto numérico que asociamos a la medida, es decir consideremos

Entonces si queremos medir un segmento de longitud , primero miramos la cantidad de veces que cabe la unidad, si este es exacto con el numero de veces que cabe la unidad natural, si no es exacto entonces miramos si cabe una vez un de la unidad, (es claro que no puede caber más de una vez porque en ese caso formaría otra vez la unidad) si cabe y queda exacto ahora si sobra o no cabe, volvemos a realizar el proceso con de la unidad (nuevamente este solo puede caber una vez porque de lo contrario formaría de la unidad), si queda exacto ó ; si nuevamente sobra o no cabe volvemos a realizar el proceso, y así hasta que en algún momento el segmento se complete.

¿El proceso siempre se termina y hemos resuelto entonces el problema de la medida?

Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Si el proceso descrito siempre se termina entonces cualquier longitud la podemos escribir como una suma de elementos de

Es decir

Donde es o dependiendo si esa parte de la unidad cabe o no.

Sin embargo así como se realiza una construcción geométrica que permite dividir exactamente un segmento en dos partes iguales, existe una construcción que permite dividir un segmento en tres partes iguales, o en cuatro, o en cinco ó de manera más general podemos dividir la unidad en cualquier número natural de partes iguales que se quiera. [[VER]](http://tube.geogebra.org/student/b471281#material/471395)

Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

El segmento que es tercera parte de la unidad debe tener una longitud, si ya está solucionado el problema de la medida entonces existe una forma de escribir a la longitud de este segmento (llamemos esta longitud ), como suma de elementos de que deben cumplir que .

Claramente es menor que un medio, miremos si, cabe.

Si entonces

Cabe pero sobra debemos sumarle algo, miremos si, cabe.

Si entonces

nos pasamos luego no cabe , miremos si, cabe.

Texto5 de pestaña (**500** caracteres aprox.

Si entonces

cabe pero sobra,debemos sumarle algo más.

Podemos seguir iterando el proceso tanto como queramos y nos daremos cuenta que

Es decir que el proceso de medir usando mitades (bisecando) no siempre acaba, contrario a lo que de pronto pensaríamos, por que llegara el momento en que la diferencia entre las longitudes de los segmentos sean tan pequeñas que no podamos distinguirlas, pero apoyándonos en los procesos aritméticos vemos que esta existe. Además siempre tenemos la limitación visual para poder dividir un segmento demasiado pequeño en dos o más partes iguales, sin embargo desde el punto de vista aritmético esto siempre es posible. Cada vez más nuestra regla ideal se aleja da lo concreto y se acerca a lo abstracto.

¿Cómo solucionamos ahora el problema de la medida?

**PESTAÑA 4**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) Midiendo con fracciones

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.) Midiendo con fracciones

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Una opción para seguir atacando el problema es aprovechar que podemos dividir la unidad en tantas veces como queramos, entonces podemos asociar a la medida un conjunto numérico más grande esta vez , consideremos todas las sumas posibles es decir contemplamos que cualquier parte por pequeño que sea debe poder medirse con alguna “fracción de la unidad” o fracciones unitarias, luego todas las longitudes se podrían expresar como suma de algunos elementos del conjunto , es decir, como la suma de un natural y varias fracciones unitarias.

**\***Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Esta es idea fue desarrollada por los egipcios, no sabemos si llegaron a trabajarla como hemos descrito, pero en el Papiro Rhind, quizás uno de los más antiguos y más importantes escritos sobre matemática antigua que data hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser su mayor fuente de conocimiento; se encuentra un trabajo en el que se busca expresar todas las longitudes como una suma entre un natural y fracciones unitarias sin repetir ninguna de ellas, sin embargo, ellos mismos encuentran que esto no siempre es posible, ya que por ejemplo no puede escribirse de esta manera, e inventan un símbolo especial para esta longitud y otras de gran interés. Ahora aunque no hay evidencia de que los egipcios no hayan desarrollado aún más un sistema de numeración para medir el desarrollo que alcanzaron les dio pie para que unido a otros estudios como la astronomía lograran hacer su majestuosas construcciones arquitectónicas.

**\***Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Otra solución que no está muy lejos de la que hemos discutido (nuevamente no estamos seguros de cómo llegaron a esta), si usamos , y consideremos que todas las longitudes se pueden expresar como suma de algunos elementos del conjunto , incluso repitiéndolos.

Por ejemplo una longitud puede estar expresado por , pero a esta alturas deberíamos reconocer que entonces el conjunto que estamos describiendo es precisamente el conjunto de los números racionales Positivos.

¿Porque?

**\***Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Aunque los babilónicos y los egipcios ya conocían las fracciones y lo griegos plenamente el conjunto de los números racionales, no usaban la notación actual, y esto dificultaba su estudio, muchos siglos después los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo y este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa. Fue hasta el S.XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

**PESTAÑA 5**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.)

**¿Con racionales?**

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.)

El problema de los racionales

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Por bastante tiempo los griegos consideraron que los números racionales positivos eran los únicos que existían, pero empezaron a surgir algunos cuestionamientos como por ejemplo medir la diagonal de un cuadrado tomando uno de sus lados como unidad, por semejanza esta medida no debía depender del tamaño del cuadrado, pero siempre que creían encontrar esta, se daban cuenta que no era tan precisa cuando aumentaban de tamaño el cuadrado. Otros problemas que abordaron es lograr medir la longitud de la circunferencia tomado como unidad el radio, el problema de la cuadratura del círculo que consistía en construir un polígono regular que tuviera la misma área que el círculo, entro otros.

**\***Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Una de las historias más famosas (que tiene varias versiones) se presentó en la escuela pitagórica, cuando *Hipaso* uno de los alumnos de *Pitágoras* pregunto a su maestro quien afirmaba que no había más números que los racionales, que expresara que número racional al cuadrado tenía como resultado , al no encontrar la respuesta *Pitágoras* reacciona airadamente botando *Hipaso* por una ventana; pero ¿Porqué para *Pitágoras* era razón de enojo el no poder encontrar un número que al cuadrado diera dos?, en parte se debe al teorema que lleva su nombre.

**\***Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Usando el teorema de Pitágoras [[VER]](http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html) tenemos que si construimos un cuadrado su diagonal tiene una longitud que al cuadrado debe ser el doble del lado, es así que teniendo un cuadrado de lado la longitud de su diagonal debe ser un número que al cuadrado de , pero si este número no es racional quiere decir que **el problema de la medida aún no está solucionado**, esta diagonal es imposible de medir con los racionales. No sé, si hoy en día también botaríamos a *Hipaso* por una vetaba, pero no cabe duda que su pregunta generaba un gran inconveniente.

**\***Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

La siguiente es una prueba de que no hay un racional que al cuadrado sea . Si es una expresión ya simplificada de un número racional que al cuadrado es entonces:

Es claro que y son naturales además por lo anterior sabemos que es par, y eso necesariamente nos lleva a que debe ser par, luego es asi como:

luego,

entonces es par y por tanto es par, pero como es par y es par entonces la fracción no está simplificada lo que contradice la forma en que la elegimos, entonces no existe un número racional que al cuadrado sea par, es decir que no es racional.

**\***Texto5 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Igualmente los griegos también encontraron que la razón entre el diámetro del círculo y la circunferencia , también era un número que no se podía expresar como racional; el número denominado el número de oro o de la proporción aurea, tampoco y muchos más. A estos números que representaban longitudes pero no son racionales positivos los denominaron inconmensurables, aunque nosotros hoy en día los llamamos irracionales positivos.

¿Cómo describir los números inconmensurables como longitudes?

**PESTAÑA 5**

**\***Título botón (**20** caracteres máx.) **La solución**

**\***Título de pestaña (**48** caracteres máx.) Un conjunto numérico para medir

**\***Texto1 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Los números inconmensurables, formaban una categoría más bien imprecisa, debido a que los sistemas de numeración de la época no resultaban ser los más adecuados. Los europeos, beneficiándose del sistema de numeración posicional hindú de base 10 que habían adoptado fueron capaces de definirlos con precisión. La solución presentada no está muy alejada a la idea de bisecar: siempre podemos dividir un segmento en diez partes iguales, por lo tanto podemos hallar sin necesidad de medir la décima parte de la unidad, y la décima parte de la décima parte de la unidad es decir la centésima parte, y la décima parte de la centésima es decir la milésima parte de la unidad, mitad de este y así sucesivamente. Podemos medir segmentos de de la unidad, de la unidad, y en general un segmento que mida de la unidad, a estos números los llamaremos decimales.

**\***Texto2 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Entonces si queremos medir un segmento de longitud , primero miramos la cantidad de veces que cabe la unidad, si este es exacto con el numero de veces que cabe la unidad natural, si no es exacto entonces miramos cuantas veces cabe de la unidad, sea esta (es claro que no puede caber más veces porque en ese caso formaría otra vez la unidad) si queda exacto ahora si sobra miramos cuantas veces cabe de la unidad (nuevamente este solo puede caber a lo más veces porque de lo contario formaría de la unidad), si cabe veces y queda exacto ; si nuevamente sobra volvemos a realizar el proceso con , y así solo que ahora no contemplamos que necesariamente el proceso deba acabar sino que seguimos repitiendo indefinidamente el proceso. (Por su puesto esto es solo teórico).

**\***Texto3 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Finalmente tenemos que toda longitud se puede expresar como

Y lo escribimos de la forma

Es decir un número natural seguido de un punto que llamaremos punto decimal y de una secuencia infinita de dígitos tales que

Estas expresiones son las que llamamos expansiones decimales y coinciden con el conjunto de los números reales positivos que por fin logran consolidar un conjunto numérico que permite medir. Por supuesto la idea de medir que tenemos en este momento es muy abstracta comparada con el proceso que realizamos cuando medimos longitudes a un objeto tangible.

**\***Texto4 de pestaña (**500** caracteres aprox.)

Fue en el año 1872 cuando cinco matemáticos (Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind) dieron con la definición formal de número real. Pero tanto la definición axiomática como la de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, o cartaduras de Dedekind son laboriosas y artificiales, y buscan convencer de que expresar a los reales como expansiones decimales es correcto.

Recordemos que por encima de la construcción formal, el origen de los números reales es más sencillo, los racionales son un campo incompleto, necesitamos de otros números para representar ciertas medidas y magnitudes “no racionales”; números que, no pueden expresarse como una fracción.