|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | Las funciones, vistas a partir de la modelación de situaciones de variación, ofrecen un amplio campo de uso no solo en las matemáticas, sino también en la mayoría de las ciencias. El estudio de su clasificación, las diferentes operaciones y aplicaciones se estudian en este tema. |

[SECCIÓN 1] **1 Las funciones**

El concepto de **función** es uno de los más importantes en el desarrollo de las matemáticas. Las funciones expresan una relación de **dependencia** entre dos magnitudes, por ejemplo:

* Altura y tiempo: cuando se lanza un balón al aire, la altura a la que se encuentra depende del tiempo transcurrido desde su lanzamiento.
* Área y radio: el área de un círculo depende de su radio.
* Costo y peso: el costo de enviar un paquete depende de su peso.

En los ejemplos anteriores se puede decir que: *la altura es una función del tiempo*; *el área es una función del radio* y *el costo es una función del peso*.

La representación de estas y otras situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a otra, hacen parte del estudio del concepto de función y es posible plantear expresiones algebraicas que muestran estas relaciones; por ejemplo, en el caso del área y el radio de un círculo la expresión algebraica que representa esta relación de dependencia es:

MA\_11\_02\_CO\_001

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Los modelos a partir de funciones** |
| **Contenido** | La posibilidad de presentar situaciones de la vida cotidiana a través de expresiones que pueden ser analizadas desde la mirada de las matemáticas, muestra que el concepto de función y su estudio son una herramienta clave en la modelación y análisis de fenómenos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | Las funciones en la economía |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 142778230 |
| **Pie de imagen** | Algunas aplicaciones del concepto de función en la economía se establecen a través de la relación de dependencia entre el capital adquirido y el tiempo transcurrido para obtenerlo. |

[SECCIÓN 2] **1.1 El concepto de función**

En términos informales, una función es una regla que permite relacionar dos magnitudes o dos variables; para nombrar una función se usan las letras *f*, *g*, *h*, entre otras.

Así, la expresión para determinar el área del círculo en función de su radio se puede escribir como:

MA\_11\_02\_CO\_002

donde *f*(*x*) representa el área y *x* el radio del círculo.

La expresión anterior se lee “efe de equis es igual a pi por el radio al cuadrado” y se denomina **expresión algebraica** de la función.

Es importante anotar que la expresión *f*(*x*) es equivalente a la variable *y*, de esta manera:

MA\_11\_02\_CO\_003

Ejemplo:

Encontrar el área de los círculos cuyos radios se presentan a continuación. Completar la tabla con los valores respectivos.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Radio (*x*) | 2 cm | 3,5 cm | 0,05 cm | 4 cm | 1 cm | 1,7 cm |
| Área *f*(*x*) |  |  |  |  |  |  |

En este caso, se debe reemplazar cada valor de *x* en la función definida por la expresión algebraica dada para el área:

MA\_11\_02\_CO\_004

MA\_11\_02\_CO\_005

Dichos cálculos se muestran a continuación:

MA\_11\_02\_CO\_006

MA\_11\_02\_CO\_007

MA\_11\_02\_CO\_008

MA\_11\_02\_CO\_009

MA\_11\_02\_CO\_010

MA\_11\_02\_CO\_011

Los resultados decimales se aproximaron a la centésima (excepto para el valor *x* = 0,05).

La tabla que muestra los valores de *x* y *f*(*x*) para el caso del área de los diferentes círculos es:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Radio (*x*) | 2 cm | 3,5 cm | 0,05 cm | 4 cm | 1 cm | 1,7 cm |
| Área *f*(*x*) | 12,57 cm2 | 38,48 cm2 | 0,0079 cm2 | 50,27 cm2 | 3,14 cm2 | 9,08 cm2 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición formal de función** |
| **Contenido** | En términos formales, una función *f* es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento *x* en un conjunto, que es llamado **dominio**, un único valor *f*(*x*) en un segundo conjunto, denominado **codominio o recorrido**; todos los valores que se obtienen en el segundo conjunto reciben el nombre de **rango**. |

La definición anterior no limita de ninguna manera la descripción de los conjuntos dominio y rango; por ejemplo, el dominio puede ser el conjunto de clientes que acostumbran consumir un tipo específico de lácteo y el rango podría ser los diferentes productos lácteos que ofrece un punto de venta. Sin embargo, para las funciones que se plantean en este tema se partirá del hecho de que el dominio y el rango serán los números reales o subconjuntos de estos.

Teniendo en cuenta el dominio y el codominio de una función es posible plantear una nueva notación para las funciones:

*f: A → B*

*x →f*(*x*)

donde *A* es el dominio y *B* es el codominio o recorrido.

Esta notación se lee “la función efe de *A* en *B* tal que a cada equis le asigna efe de equis”.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Aspectos en la notación de función** |
| **Contenido** | En la notación  *f: A → B*   * *A* es el **conjunto de salida** o **dominio.** Se denota *Dom f*. * *B* es el **conjunto de llegada**, **codominio** o **recorrido**. Se denota como *Codm f*. * *f*(*x*) es la **imagen** de *x* bajo *f*. * *x* es la **preimagen** de *f*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC10 |
| **Título** | Las características básicas de las funciones |
| **Descripción** | Interactivo que expone el concepto de función y sus características |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 El dominio de una función**

El **dominio** de una función es el conjunto formado por los posibles valores que toma la variable en dicha función. Muchas veces, cuando se escribe únicamente la expresión algebraica de una función, se entiende que el dominio es el conjunto de los números reales.

Ejemplo:

Determinar el dominio de la función definida a continuación:

*g:* **R** *→* **R**

*x → g*(*x*) = 2*x* + 1.

Teniendo en cuenta la notación anterior el dominio de la función es el conjunto de los números reales (**R**) y se escribe:

*Dom g* = **R**

La función *g*(*x*) = 2*x* + 1 se puede escribir como *y* = 2*x* + 1 y gráficamente representa una línea recta con pendiente 2 y corte con el eje *Y* en 1.

[SECCIÓN 3] **1.1.2 El codominio y el rango de una función**

El **codominio** de una función es el conjunto de llegada, pero es importante tener en cuenta que dentro de este conjunto se forma un subconjunto en el cual están todas las imágenes de la función; este subconjunto se denomina el **rango** de la función y se denota *Ran f*. En algunas funciones el rango y el codominio son el mismo conjunto.

Por ejemplo, en la función:

*g:* **R** *→* **R**

*x → g*(*x*) = 2*x* + 1

el codominio es el conjunto de los números reales y se escribe *Cod g* = **R**; el rango de la función también es el conjunto de los números reales y se escribe *Ran g* = **R**.

Gráficamente, el dominio y el rango de una función se encuentran observando los valores que toma la gráfica sobre el eje *X* (para el dominio) y los valores que toma la gráfica sobre el eje *Y* (para el rango).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Dominio y rango de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | Al analizar la gráfica de la función *y* = 2*x* + 1 se observa que el dominio es el conjunto de los números reales y el rango también es el conjunto de los números reales. |

[SECCIÓN 3] **1.1.3 El dominio y el rango de algunas funciones**

Para hallar el dominio de una función se utiliza una estrategia consistente en analizar la expresión algebraica de la función y revisar si existe alguna restricción matemática para la variable *x* en dicha expresión. En el caso del rango, es necesario despejar *x* para analizar si existe alguna restricción para la variable *y* en la expresión algebraica que se genera.

Ejemplo:

Hallar el dominio y el rango de la función:

MA\_11\_02\_CO\_012

.

Para hallar el dominio se analiza la siguiente expresión:

MA\_11\_02\_CO\_013

Se observa que *x* puede tomar cualquier valor en los números reales, por lo tanto, *Dom h* = **R***.*

Para encontrar el rango se escribe la función como:

MA\_11\_02\_CO\_014

En esta expresión se despeja *x* de la siguiente manera:

MA\_11\_02\_CO\_015

MA\_11\_02\_CO\_016

MA\_11\_02\_CO\_017

MA\_11\_02\_CO\_018

Luego, se analiza la expresión:

MA\_11\_02\_CO\_019

En este caso, la variable *y* puede tomar cualquier valor en los números reales, por lo tanto, *Ran h* = **R**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hallar el dominio de una función se analiza la expresión algebraica dada y se determina si existe alguna restricción para la variable *x*.  Para encontrar el rango de una función se despeja la variable *x* para escribir una expresión algebraica para la variable *y*. Se determina si existe alguna restricción para *y*. |

Ejemplo:

Hallar el dominio y el rango de la función *f*(*x*) = *x*2.

Al analizar la expresión se observa que *x* puede tomar cualquier valor en los números reales. Por lo tanto, *Dom f* = **R**.

Para encontrar el rango se debe despejar *x* en la expresión *y* = *x*2.

MA\_11\_02\_CO\_020

MA\_11\_02\_CO\_021

Como la variable *y* está dentro de un radical, entonces se extrae la raíz cuadrada, la cual debe ser mayor o igual a cero; de esta forma, el rango de la función es el conjunto de los números reales positivos y el cero, luego *Ran f* = **R**+ U {0}.

Gráficamente se puede observar que el trazo de *y* = *x*2 está, en el eje *Y*, a partir de cero y solo en los números reales positivos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Dominio y rango de *y* = *x*2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | La gráfica de la función es una parábola con vértice en (0, 0), que abre hacia arriba. Se puede observar que el dominio es el conjunto **R** y el rango **R**+ U {0}. |

[SECCIÓN 3] **1.1.4 El dominio y el rango de funciones con alguna restricción**

En algunos casos, determinar el dominio y el rango de una función precisa un análisis más profundo, pues las expresiones algebraicas de las funciones presentan algunas restricciones. En estos casos, se deben tener en cuenta dos reglas generales de las operaciones matemáticas:

* El denominador de una fracción no puede ser cero.
* Las raíces con índice par deben tener cantidades subradicales mayores o iguales a cero.

Teniendo en cuenta lo anterior, el dominio o el rango de las funciones con alguna restricción se convierte en un subconjunto de los números reales.

Ejemplo:

Hallar el dominio y el rango de la siguiente función:

MA\_11\_02\_CO\_022

Para hallar el dominio se debe tener en cuenta que el valor de *x* debe ser diferente de 0, por tanto, el dominio de la función son los números reales sin el cero:

*Dom f* = **R** – { 0 }

Para hallar el rango se debe despejar *x* para analizar las restricciones en *y*; es importante recordar que *y* = *f*(*x*):

MA\_11\_02\_CO\_023

MA\_11\_02\_CO\_024

MA\_11\_02\_CO\_025

Al analizar la expresión se tiene que *y* debe ser diferente de cero; en conclusión:

*Ran f* = **R** – { 0 }

La siguiente tabla muestra algunos de los valores *x* y *f*(*x*) para la función:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –3 | –2 | –1 | –0,5 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| *y* = *f*(*x*) | –0,3 | –0,5 | –1 | 2 | 2 | 1 | 0,5 | 0,3 |

La gráfica de la función se muestra a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Dominio y rango de *y* = 1/*x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | La gráfica de la función muestra que el único valor que no toma la variable *x* es el 0. Del mismo modo, se observa que el único valor que no toma la variable *y* es 0. |

Ejemplo:

Hallar el dominio y el rango de la función:

MA\_11\_02\_CO\_026

Para el caso del dominio se observa que no hay ninguna restricción, por lo tanto:

*Dom f* = **R**.

En este caso, el procedimiento para despejar *x* no resulta sencillo con los métodos algebraicos conocidos hasta ahora, por tal razón, la búsqueda del rango se realizará a partir de la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG05 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | En la gráfica se ha señalado el vértice de la parábola que describe la función *g*(*x*) = *x*2 – *x* – 6. A partir de este punto se puede definir el rango de la función. |

Algebraicamente el vértice de una parábola está dado por la siguiente expresión:

MA\_11\_02\_CO\_027

Para el caso de *g*(*x*) en donde *a* = 1, *b* = –1 y *c* = –6, se tiene que:

MA\_11\_02\_CO\_028

Como el rango se define con los posibles valores que toma la variable *y*, entonces en la gráfica se puede ver que el valor mínimo es –6,25 (en su expresión decimal); por consiguiente, el rango queda definido así:

MA\_11\_02\_CO\_029

Ejemplo:

Hallar el dominio y el rango de la función:

MA\_11\_02\_CO\_030



En este caso la variable *x* presenta restricciones, pues la expresión *x* – 1 debe ser mayor o igual a cero; para hallar el dominio se realiza el siguiente análisis:

MA\_11\_02\_CO\_031

MA\_11\_02\_CO\_032

MA\_11\_02\_CO\_033

MA\_11\_02\_CO\_034

Para hallar el rango es necesario despejar la variable *y* como se muestra a continuación:

MA\_11\_02\_CO\_035

MA\_11\_02\_CO\_036

MA\_11\_02\_CO\_037

MA\_11\_02\_CO\_038

Aunque la variable *y* puede tomar cualquier valor, la gráfica de la función confirma que toma únicamente valores en el intervalo de cero a infinito; en conclusión:

MA\_11\_02\_CO\_039

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Rango de la función *g*(*x*) = *x*2 – *x* – 6 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | Aunque la expresión algebraica de la función define que el rango pueden ser los números reales, la gráfica determina que son únicamente los reales positivos y el 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | Identifica el dominio y el rango de una función |
| **Descripción** | Actividad para identificar el dominio y el rango de una función |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las funciones definidas a trozos**

Una función está definida a **trozos** o **por partes** si su dominio se divide en dos o más subconjuntos disyuntos (la intersección entre los subconjuntos es vacía) que se denominan trozos; cada uno de estos trozos es un intervalo de números reales y tiene una expresión algebraica diferente que permite relacionar los elementos del dominio con su imagen.

Ejemplo:

Explicar el comportamiento de la siguiente función:

MA\_11\_02\_CO\_040

La función está formada por tres trozos:

* **Primer trozo.** Si el elemento del dominio está en el intervalo (–4, –1), las imágenes se determinan mediante la expresión *f*(*x*) *=* 3.
* **Segundo trozo.** Si el elemento del dominio está en el intervalo [–1, 2], las imágenes están determinadas por la expresión *f*(*x*) *= x*2 *+* 2.
* **Tercer trozo.** Si el elemento del dominio pertenece al intervalo (2, ∞), las imágenes están determinadas por la expresión *f*(*x*) = *x* + 2.

El dominio de la función es el intervalo menos 4 a infinito:

MA\_11\_02\_CO\_041

Para determinar el rango se analiza la gráfica de la función:

MA\_11\_02\_CO\_042

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | En la representación del segundo trozo se señala el punto en el valor para el cual *x* = 2, pues allí el intervalo en el que se define la función indica que es menor o igual a 2; en el tercer trozo se dibuja un “hueco”, pues al definir la función se indica que *x* debe ser estrictamente mayor que 2. |

Ejemplo:

Elaborar la gráfica de la siguiente función:

MA\_11\_02\_CO\_043

Para elaborar la gráfica de la función es necesario tener en cuenta que:

* Antes de –4 la función es un recta con pendiente 1 y punto de corte con el eje *Y* en 8.
* Entre 4 y 0 (sin incluirlo) la gráfica es una recta horizontal que pasa por el punto (0, 4).
* En 0 la función vale 6.
* Después de 0 la función es una recta con pendiente –1 y punto de corte con el eje *Y* en 8.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | Al elaborar la gráfica se deben tener en cuenta los intervalos en los cuales está definida cada parte de la función. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los intervalos en los que está definida la función sean disyuntos, porque de lo contrario para un mismo elemento del dominio pueden existir dos imágenes. Esta condición determina que la expresión no es función. |

Ejemplo:

Explicar por qué la expresión dada no es una función.

MA\_11\_02\_CO\_044

Esta expresión no corresponde a una función, puesto que los dos primeros intervalos de la definición no son disyuntos. Esta condición determina que existen valores de *x* con dos imágenes. Por ejemplo, para *x =* 0, hay una imagen *r*(0) = 3, según la definición del primer tozo, y otra *r*(0) = 02 + 2 = 2, según la definición del segundo trozo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se observa que los dos primeros trozos no están definidos en intervalos disyuntos, razón por la cual la expresión no es una función. |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La función valor absoluto**

La función **valor absoluto** es una función definida a trozos que se representa poniendo a la variable *x* entre dos barras. La expresión algebraica del valor absoluto se muestra a continuación:

MA\_11\_02\_CO\_045

El dominio y el rango de la función valor absoluto son respectivamente:

*Dom f* = **R** *Ran f* = **R**+ U { 0 }

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Gráfica del valor absoluto de *x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *f*(*x*) *= |x|*. |

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de la función:

MA\_11\_02\_CO\_046

Antes de dibujarla es necesario definir la función a trozos así:

MA\_11\_02\_CO\_047

A continuación se muestra la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Gráfica del valor absoluto de *x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **inferior** | Obsérvese que, con relación a la función valor absoluto, esta función se ha desplazado una unidad a la derecha. |

[SECCIÓN 3] **1.2.2 La función parte entera**

La función parte entera está definida en infinitos trozos de la forma [*k, k +* 1), con

*k* ⋲ ℤ, de la siguiente manera:

MA\_11\_02\_CO\_048

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de la función parte entera** |
| **Contenido** | La función parte entera, denotada como ⟦*x*⟧, también se puede definir como la función que hace corresponder a cada número real el mayor número entero que es menor o igual al número real considerado. |

Teniendo en cuenta la definición, a continuación se muestra la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Es importante tener en cuenta que la parte entera de un número entero es él mismo, por esta razón en la gráfica se ponen puntos en (–1, –1), (–2, –2), (1, 1), (2, 2) y en todos los puntos donde las coordenadas son iguales. |

El dominio de la función parte entera es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números enteros.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC30 |
| **Título** | Analiza el dominio y el rango de una función |
| **Descripción** | Actividad para analizar el dominio y el rango de funciones con alguna restricción |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Analiza funciones a trozos |
| **Descripción** | Actividad que propone el análisis de conceptos sobre funciones a trozos |

[SECCIÓN 2] **1.3 Las funciones crecientes y las funciones decrecientes**

La gráfica de una **función creciente** se identifica en el plano cartesiano porque asciende de izquierda a derecha.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo (*a, b*) si está definida en ese intervalo y, además, se cumple que  si *x*1< *x*2, entonces *f*(*x*1) *< f*(*x*2)  para todo *x*1, *x*2⋲(*a, b*)*.* |

Gráficamente se puede interpretar la definición de la siguiente manera.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se observan los valores *x*1*, x*2, *f*(*x*1)y *f*(*x*2). Estos valores cumplen con las condiciones dadas, por lo tanto, la función es creciente. |

En el plano cartesiano la gráfica de una **función decreciente** se identifica porque a medida que los valores del dominio son mayores, los valores del rango son menores.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función decreciente** |
| **Contenido** | Una función es decreciente en un intervalo (*a, b*) si está definida en ese intervalo y, además, se cumple que  si *x*1 < *x*2, entonces *f*(*x*1)> *f*(*x*2)  para todo *x*1, *x*2 ⋲ (*a, b*). |

A continuación se presenta la interpretación gráfica de la definición de función decreciente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se observan los valores *x*1*, x*2, *f*(*x*1)y *f*(*x*2). Estos valores cumplen con las condiciones dadas, por lo tanto, la función es decreciente. |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones |
| **Descripción** | Actividades sobre Las funciones |

[SECCIÓN 1] **2 Las funciones algebraicas**

Una **función algebraica** es aquella cuya expresión se construye usando una o varias de las siguientes operaciones algebraicas: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, como por ejemplo:

MA\_11\_02\_CO\_052

MA\_11\_02\_CO\_053

MA\_11\_02\_CO\_054

MA\_11\_02\_CO\_055

MA\_11\_02\_CO\_056

Las funciones algebraicas más usuales son: las funciones **polinómicas**, las funciones **racionales** y las funciones **radicales**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC60 |
| **Título** | Las funciones algebraicas |
| **Descripción** | Interactivo que presenta las principales funciones algebraicas |

[SECCIÓN 2] **2.1 Las funciones polinómicas**

Una función polinómica es aquella que está definida por un polinomio de cualquier grado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  *f*(*x*) *= anxn + an –* 1*xn –* 1*+ … + a*2*x*2 *+ a*1*x + a*0  con *n* ⋲ℕ ∪ {0} y *ai* ⋲ **R***,* se denomina función polinómica. |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales; el rango depende del grado del polinomio y de la definición específica del mismo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El **grado** de una función polinómica es la mayor potencia de la variable independiente que aparece en su expresión algebraica. |

Ejemplo:

La función *f*(*x*) *=* 3*x –* 6 es de grado 1, pues el mayor exponente de *x* es 1.

La función *g*(*x*) *=* 4*x*3 *– x*2 *+* 1 es de grado 3, ya que el mayor exponente de la expresión algebraica de la función es 3.

La siguiente tabla reúne las características de las funciones polinómicas de grados 0, 1 y 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Grado** | **Nombre** | **Definición** | **Dominio y rango** | **Gráfica** |
| 0 | Constante | *f*(*x*) *= k*  con *k* ⋲ **R** | *Dom f* = **R**  *Ran f* = *k* | Es una recta horizontal que pasa por *k*. |
| 1 | Lineal | *f*(*x*) = *mx*  con *m* ⋲ **R** | *Dom f* = **R**  *Ran f* = **R** | Es una recta con pendiente *m* y que pasa por el origen del plano. |
| 1 | Afín | *f*(*x*) = *mx + b*  con *m, b* ⋲ **R** | *Dom f* = **R**  *Ran f* = **R** | Es una recta con pendiente *m* y punto de corte con *Y* en *b*. |
| 2 | Cuadrática | *f*(*x*) = *ax*2 + *bx* + *c*  con *a, b, c* ⋲ **R** | *Dom f* = **R**  El rango siempre es un subconjunto de **R**. | Es una parábola. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Aspectos en la gráfica de la función cuadrática** |
| **Contenido** | En la parábola que representa la función cuadrática se tienen las siguientes características:  - El vértice está ubicado en:  MA\_11\_02\_CO\_057  - La parábola abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de *a*:  Si *a* > 0, abre hacia arriba  Si *a* < 0, abre hacia abajo  - Los puntos de corte con los ejes se hallan igualando a 0 así:  Corte con *X* cuando *ax*2 + *bx* + *c* = 0  Corte con *Y* en *f*(0) |

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de la función *f*(*x*) = 5.

La gráfica de esta función es una recta horizontal que corta el eje *Y* en 5.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Todas las funciones constantes tienen ecuación *y* = *k*, en donde *k* es el punto de corte con el eje *Y*. |

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de las funciones *f*(*x*) = 3*x* y *g*(*x*) = 3*x* + 5.

Las funciones planteadas son, respectivamente, una función lineal y una función afín. En este caso, las dos funciones tienen la misma pendiente (*m* = 3), por ende, son rectas paralelas. A continuación se muestra la gráfica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función lineal pasa por el origen, es decir, el *y*-intercepto es en 0; la función afín no pasa por el origen, es decir que el *y*-intercepto es en un valor diferente de 0. |

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2 + 5*x* – 3.

Para esta función se tiene que: *a* = 2, *b* = 5 y *c* = –3. Por lo tanto:

- Abre hacia arriba.

MA\_11\_02\_CO\_058

La gráfica se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Lateral** | Los puntos de corte con los ejes se hallan igualando a 0, de modo que:  *x* = 1/2 , *x* = –3, *y* = –3 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC70 |
| **Título** | Identifica las características de las funciones polinómicas |
| **Descripción** | Actividad que propone el análisis de funciones polinómicas |

[SECCIÓN 3] **2.1.1 Las aplicaciones de las funciones polinómicas**

Las funciones polinómicas sirven como modelos de diferentes situaciones de la naturaleza y contribuyen al planteamiento de modelos económicos que permiten hacer predicciones en la industria, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

La *ley de Torricelli* permite determinar el volumen del agua que permanece en un depósito que contiene 50 galones y que tiene un agujero que hace que el depósito se desocupe en 20 minutos. Después de *t* minutos este volumen se define por:

MA\_11\_02\_CO\_059

MA\_11\_02\_CO\_060

* Determinar qué tipo de función polinómica define la ley de Torricelli.
* Elaborar la gráfica de la función.
* Encontrar el volumen del agua cuando *t* = 15 minutos.

La función que define la ley de Torricelli es una función cuadrática, pues el mayor exponente de la variable, en este caso *t*, es 2.

A continuación se muestra la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Lateral** | Para el caso de esta función, los ejes no son llamados *X* y *Y* pues tienen un nombre específico en la aplicación; son reemplazados por *t* y *V*(*t*), respectivamente. |

Finalmente, para encontrar el volumen del agua a los 15 minutos se halla *V*(15):

MA\_11\_02\_CO\_061

En conclusión, después de 15 minutos el agua que queda en el tanque tiene un volumen de 3,125 gal

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Uso de las funciones polinómicas** |
| **Contenido** | Las funciones polinómicas sirven para modelar diferentes situaciones reales. Las funciones que resultan de los modelos plantean relaciones de dependencia entre variables reales; por ejemplo:   * el costo de producción de un artículo asociado con su valor de venta. * la capacidad de almacenamiento de una caja relacionada con el área del material que se usa para su elaboración, etc. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Resuelve situaciones con funciones polinómicas |
| **Descripción** | Actividad para plantear modelos de funciones polinómicas |

[SECCIÓN 2] **2.2 Las funciones racionales**

Una función racional es un cociente entre dos polinomios algebraicos y tiene la siguiente forma:

MA\_11\_02\_CO\_062

Con *n, m* ⋲ ℕ y *ai, bj* ⋲ **R***.*

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los valores de *x* para los cuales el denominador es cero.

[SECCIÓN 3] **2.2.1 Las asíntotas de una función racional**

Una **asíntota** es una línea recta que se prolonga indefinidamente y que se acerca en forma progresiva a una curva, pero sin llegar nunca a intersecarla. Las funciones racionales pueden tener tres estilos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Dada la función racional definida como

MA\_11\_02\_CO\_063

* Para determinar las asíntotas verticales se buscan los valores para los cuales *q*(*x*) = 0.

Si *q*(*x*) = 0 para un valor *k*, se dice que la recta *x* = *k* es una asíntota vertical de *f*(*x*).

* Para determinar las asíntotas horizontales se debe tener en cuenta el grado de los polinomios que forman la función racional; en este caso *n* es el grado de *p*(*x*) y *m* es el grado de *q*(*x*), luego se puede afirmar que:

Si *n* < *m*, la función tiene una asíntota horizontal en el eje *X*.

Si *n* > *m*, la función no tiene asíntotas horizontales.

Si *n* = *m*, la función tiene una asíntota horizontal en la recta

MA\_11\_02\_CO\_064

* Para determinar si una función tiene asíntota oblicua se debe tener en cuenta que el grado del polinomio del numerador debe ser una unidad mayor que el grado del polinomio del denominador. En caso contrario la función no tiene asíntota oblicua. El procedimiento para hallar la pendiente y el punto de corte con el eje *Y* de una asíntota oblicua requiere del concepto de límite que se trabajará en temas posteriores*.*

Ejemplo:

Realizar la gráfica de la siguiente función:

MA\_11\_02\_CO\_065

Para hacer la gráfica de la función se seguirán los pasos descritos a continuación:

1. Determinar el dominio de la función.

En este caso se debe tener en cuenta que:

MA\_11\_02\_CO\_066

MA\_11\_02\_CO\_067

MA\_11\_02\_CO\_068

*Dom f* = **R** – { 0,5 }

2. Se hallan las asíntotas verticales.

*f*(*x*) tiene una asíntota vertical en donde 2*x* – 1 = 0, es decir:

MA\_11\_02\_CO\_069

3. Se hallan las asíntotas horizontales.

Como el grado de los dos polinomios es igual, *f*(*x*) tiene una asíntota horizontal teniendo en cuenta que *a*1 = 3 y *a*2 = 2, así:

MA\_11\_02\_CO\_070

4. Se evalúan algunos valores de la función para dar mayor precisión al trazo de la curva.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –3 | –1 | 0 | 1/3 | 1 | 2 |
| *y* | 1,28 | 1 | 0 | –3 | 3 | 2 |

La gráfica de la función se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las líneas punteadas muestran la asíntota vertical y la asíntota horizontal de la función. Se puede observar que el trazo de la gráfica no es continuo, esta es una de las consecuencias de que una función tenga asíntotas. |

Hay funciones que tienen varias asíntotas horizontales o varias asíntotas verticales. Por ejemplo:

MA\_11\_02\_CO\_071

Esta función tiene las siguientes asíntotas: el eje *X*, *x* = –1, *x* = 1.

La gráfica se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene dos asíntotas verticales, pues el polinomio del denominador se hace cero en 1 y en –1. |

Ejemplo:

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

MA\_11\_02\_CO\_072

MA\_11\_02\_CO\_073

Para determinar el dominio de *f*(*x*) se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución de la ecuación.

*x2* – 1 *=* 0

(*x* – 1)(*x* + 1) *=* 0

*x =* 1o *x = –*1

El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los valores para los cuales el denominador es cero:

*Dom f =* **R** – {–1, 1} *=* (–∞, –1) ∪ (–1, 1) ∪ (1, ∞).

Para determinar el dominio de *h*(*x*) se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

MA\_11\_02\_CO\_074

MA\_11\_02\_CO\_075

MA\_11\_02\_CO\_076

MA\_11\_02\_CO\_077

de donde:

MA\_11\_02\_CO\_078

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Analiza características de las funciones racionales |
| **Descripción** | Actividad sobre diferentes conceptos de funciones racionales |

[SECCIÓN 2] **2.3 Las funciones radicales**

Las funciones radicales son aquellas que contienen raíces en su expresión algebraica. Formalmente,

Una función de la forma:

MA\_11\_02\_CO\_079

con *n* ⋲ ℕ y *n >* 1, se denomina **función radical**.

Las características de las funciones radicales dependen de si *n* es par o impar. Las funciones radicales con índice par están definidas únicamente para los valores de *x* cuyo radicando es mayor o igual a cero. A continuación se muestra la gráfica de algunas funciones radicales con índice par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se muestran varias funciones radicales que tienen índice par. |

Las funciones radicales con índice impar tienen como dominio el conjunto de los números reales. A continuación se muestran las gráficas de algunas funciones radicales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG22 |
| **Descripción** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se muestran varias funciones radicales que tienen índice impar. |

Para hallar el rango de una función radical se despeja la variable *x* en la función, y se analizan las posibles restricciones, pero es necesario revisar la gráfica de la función pues, en algunas ocasiones, en rango resulta tener más restricciones que las que se plantean en la expresión algebraica.

[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones algebraicas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las funciones algebraicas |

[SECCIÓN 1] **3 Las funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas se llaman **trascendentes**. A continuación se estudian tres tipos de funciones trascendentes: las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas y las funciones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC110 |
| **Título** | Las funciones trascendentes |
| **Descripción** | Interactivo que explica aspectos generales de las funciones trascendentes |

[SECCIÓN 2] **3.1 La función exponencial**

Una función es exponencial si la variable se encuentra como exponente en la expresión que la define. Así las funciones de la forma

*f*(*x*) *= ax,* con *a* ⋲ **R**+, *a* ≠ 1

son funciones exponenciales.

Por ejemplo, las funciones *f*(*x*) = 2*x*, *g*(*x*) = 3*x, h*(*x*) = 5*x* son funciones exponenciales.

Como el valor de *a* siempre es un número real positivo, la función exponencial se puede analizar teniendo en cuenta dos condiciones, si *a* > 1 o si 0 < *a* < 1.

**Para 0 < *a* < 1**

* *Dom f* = **R**, *Ran* *f* = **R**+
* No tiene corte con el eje *X* y corta el eje *Y* en 1.
* Tiene una asíntota horizontal en el eje *X*.
* Es una función decreciente.
* Pasa por (0, 1) y (1, *a*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG23 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma  *f*(*x*) *= ax*, con 0 *< a <* 1*.* |

**Para *a* > 1**

* *Dom f* = **R**, *Ran* f = **R**+
* No tiene corte con el eje *X* y corta el eje *Y* en 1.
* Tiene una asíntota horizontal en el eje *X*.
* Es una función creciente.
* Pasa por (0, 1) y (1, *a*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG24 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma *f*(*x*) *= ax* con *a >* 1*.* |

Muchas situaciones que ocurren en la naturaleza exigen el uso de la función exponencial utilizando como base el número de Euler.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función exponencial de base *e*** |
| **Contenido** | Un caso especial de la función exponencial se presenta cuando en lugar de un número *a* positivo está el número de Euler. Así, la función exponencial quedaría definida por: |

Ejemplo:

El porcentaje *P* de personas que contrae una enfermedad depende del número *t* de días que están en una zona donde se ha presentado la enfermedad. La función que describe este comportamiento es:

MA\_11\_02\_CO\_080

¿Qué porcentaje de personas contrae la enfermedad después de 5 días?

Para conocer la respuesta es necesario evaluar la función en *t* = 5:

MA\_11\_02\_CO\_081

En conclusión, el 27,68 % de las personas contrae la enfermedad después de 5 días.

[SECCIÓN 2] **3.2 La función logarítmica**

La función logarítmica de base *a*, donde *a* > 0 y *a* ≠ 1, se escribe

*f*(*x*) *=* log*a x* y se tiene que:

*f*(*x*) *=* log*a x* si y solo si *x = ay*

El dominio de una función logarítmica es **R**+ y el rango es **R**. Si *a* > 1, la función es creciente y si 0 < *a* < 1, la función es decreciente.

El intercepto de la función con el eje *X* es en 1 y con el eje *Y* es una asíntota vertical de la gráfica.

La siguiente gráfica muestra algunas funciones logarítmicas para las cuales

*a* > 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | La función logarítmica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica representa diferentes funciones logarítmicas en las cuales *a >* 1. |

La siguiente gráfica muestra algunas funciones logarítmicas para las cuales

0 *< a* < 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | La función logarítmica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica representa diferentes funciones logarítmicas en las cuales 0 < *a* <1. |

Si la base de la función logarítmica es el número *e*, entonces la función se llama *logaritmo natural* y en lugar de escribir log se escribe ln.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función logarítmica de base *e*** |
| **Contenido** | Cuando la base del logaritmo es el número *e*, se define la función logaritmo natural así:  *y* = ln *x* si y solo si *x* = *ey* |

Ejemplo

La cicatrización de una herida, en condiciones normales, se puede obtener a partir de la siguiente función exponencial:

MA\_11\_02\_CO\_082

donde *A*0 es el área original de la herida y *A* es el área de la herida después de *t* días.

Si una herida deja una cicatriz de 10 cm2 y el proceso de cicatrización ha comenzado, ¿cuántos días pasarán para que la herida tenga la mitad del área original?

Para el caso, se tiene que *A* = 5 cm2 y *A*0 = 10 cm2. Reemplazando en la expresión se tiene:

MA\_11\_02\_CO\_083

MA\_11\_02\_CO\_084

MA\_11\_02\_CO\_085

MA\_11\_02\_CO\_086

MA\_11\_02\_CO\_087

MA\_11\_02\_CO\_088

En conclusión, la herida tarda 0,19 días para tener la mitad su área original.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Identifica funciones exponenciales y logarítmicas |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones exponenciales y logarítmicas |

[SECCIÓN 2] **3.3 Las funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas surgen a partir del concepto de razón trigonométrica, teniendo en cuenta que el valor de los ángulos puede ser cualquier número real. Las seis funciones trigonométricas son:

*f*(*x*) = sen *x*, *f*(*x*) = cos *x*, *f*(*x*) = tan *x*

*f*(*x*) = csc *x*, *f*(*x*) = sec *x*, *f*(*x*) = cot *x*

[SECCIÓN 3] **3.3.1 Las funciones seno y coseno**

La función *f*(*x*) = sen *x* presenta las siguientes características:

* *Dom f* = **R**, *Ran* *f* = [–1, 1].
* Es periódica y su período es 2π.
* Los puntos de corte con el eje *X* están en …–2π, –π, 0, π, 2π,…
* El punto de corte con el eje *Y* está en 0.
* El valor máximo es 1 y el valor mínimo es –1.

La función *f*(*x*) = cos *x* presenta las siguientes características:

* *Dom f* = **R**, *Ran* *f* = [–1, 1].
* Es periódica y su período es 2π.
* Los puntos de corte con el eje *X* están en …–3π/2, –π/2, π/2, 3π/2,…
* El punto de corte con el eje *Y* está en 1.
* El valor máximo es 1 y el valor mínimo es –1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Entre 0 y 2π la función *f*(*x*) = sen *x* es creciente de 0 a π/2 y de 3π/2 a 2π; es decreciente desde π/2 hasta 3π/2.  Entre 0 y 2π la función *f*(*x*) = cos *x* es creciente de π a 2π; es decreciente desde 0 hasta π. |

Resulta un ejercicio interesante trazar las gráficas de funciones relacionadas con el seno y el coseno para las cuales la amplitud es diferente de 1, el período es distinto de 2π y su inicio no es en *x* = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Variaciones de las funciones trigonométricas** |
| **Contenido** | En las expresiones *f*(*x*) = *A* sen (ω*x* – ϕ) y *f*(*x*) = *A* cos (ω*x* – ϕ) se tiene que:   * La amplitud es el valor absoluto de *A*. * El período está determinado por la expresión 2π/ω. * La traslación horizontal está dada por ϕ/ω. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Reconoce funciones trigonométricas y sus variaciones |
| **Descripción** | Actividad para analizar funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 3] **3.3.2 Las funciones tangente y cotangente**

La función *f*(*x*) = tan *x* presenta las siguientes características:

* El dominio de *f* son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2; el rango son todos los números reales.
* Es periódica y su período es π.
* Los puntos de corte con el eje *X* son …–2π, –π, 0, π, 2π.
* El punto de corte con en eje *Y* es en 0.
* Tiene asíntotas verticales en las rectas *x* = …–3π/2, –π/2, π/2, 3π/2…

La función *f*(*x*) = cot *x* presenta las siguientes características:

* El dominio de *f* son todos los números reales excepto los múltiplos de π; el rango son todos los números reales.
* Es periódica y su período es π.
* Los puntos de corte con el eje *X* son …–3π/2, –π/2, π/2, 3π/2…
* El punto de corte con en eje *Y* es en 0.
* Tiene asíntotas verticales en las rectas *x* = …–2π, –π, 0, π, 2π

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) = tan *x* es creciente en todo su dominio.  La función *f*(*x*) = cot *x* es decreciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3] **3.3.3 Las funciones cosecante y secante**

La función *f*(*x*) = csc *x* presenta las siguientes características:

* El dominio de *f* son todos los números reales excepto los múltiplos de π; el rango son todos los números reales excepto el intervalo (–1, 1).
* Es periódica y su período es 2π.
* No tiene puntos de corte con el eje de las *X*.
* No tiene punto de corte con el eje *Y*.
* Tiene asíntotas verticales en las rectas *x* = …–2π, –π, 0, π, 2π…

La función *f*(*x*) = sec *x* presenta las siguientes características:

* El dominio de *f* son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2; el rango son todos los números reales excepto el intervalo (–1, 1).
* Es periódica y su período es 2π.
* No tiene puntos de corte con el eje de las *X*.
* El punto de corte con el eje *Y* es en 1.
* Tiene asíntotas verticales en las rectas *x* = …–3π/2, –π/2, 0, π/2, 3π/2…

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las funciones cosecante y secante son llamadas funciones recíprocas de las funciones seno y coseno respectivamente. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC140 |
| **Título** | Clasifica funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para clasificar funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones trascendentes |
| **Descripción** | Actividades sobre Las funciones trascendentes |

[SECCIÓN 1] **4 Las funciones inversas**

Antes de definir la inversa de una función es necesario determinar las condiciones que deben tener las funciones para que su inversa sea también una función. Estas condiciones son las siguientes: inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

**Las funciones inyectivas**

Una función *f*(*x*) es **inyectiva**, o uno a uno, cuando cada elemento del rango de *f*(*x*) es imagen de un único elemento en el dominio de *f*(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La función inyectiva** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*) es inyectiva si:  MA\_11\_02\_CO\_089 |

Ejemplo:

Demostrar que las funciones lineales son inyectivas.

Para hacer la demostración se parte de la expresión general de la función lineal *f*(*x*) = *mx* + *b*.

Se evalúa la función para dos valores diferentes *x*1 y *x*2, y se aplica la definición de inyectividad:

*f*(*x*1) = *mx*1 + *b* y *f*(*x2*) = *mx*2 + *b*

*mx*1 + *b* = *mx*2 + *b*

*x*1 = *x*2

Por lo tanto, *f*(*x*) = *mx* + *b* es una función inyectiva.

Un ejemplo de una función no inyectiva es la función cuadrática, pues no necesariamente si las imágenes son iguales las preimágenes también lo son. Esta situación se puede observar en la gráfica y permite definir el **criterio de la recta horizontal**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El criterio de la recta horizontal afirma que si sobre la gráfica de una función es posible trazar una recta horizontal y esta recta interseca la función en más de un punto, entonces la función no es inyectiva. |

**Las funciones sobreyectivas**

Una función *f*(*x*) es **sobreyectiva** o sobre, si el rango y el codominio son iguales. Es decir, todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de algún elemento del dominio.

En muchas de las funciones que se trabajan el codominio está definido como el conjunto de los números reales, pero el rango puede ser un subconjunto de **R**.

Ejemplo:

Establecer si la función *f*(*x*) = *x*2 es sobreyectiva.

Primero hay que determinar el rango de la función:

MA\_11\_02\_CO\_090

MA\_11\_02\_CO\_091

Con lo cual *Ran f* = **R**+ U {0}.

Como el codominio de *f* es **R**, se observa que el rango y el codominio no son iguales, por lo tanto, la función no es sobreyectiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La función biyectiva** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*) es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Determina si una función es biyectiva |
| **Descripción** | Actividad para analizar el concepto de biyectividad |

[SECCIÓN 2] **4.1 La inversa de una función**

Si una función *f*(*x*) es biyectiva se dice que existe *f* -1(*x*) definida como la inversa de *f*(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades de la inversa de una función** |
| **Contenido** | La inversa de *f*(*x*) cumple las siguientes propiedades:   * *f* -1(*x*) es biyectiva. * *Dom f* -1 = *Ran f*. * *Ran f* -1= *Dom f*. |

La gráfica de *f* -1(*x*) es una reflexión de la gráfica de *f*(*x*) con eje de reflexión la recta *x* = *y*. El procedimiento para encontrar la expresión algebraica de la inversa de una función consiste en despejar la variable *x* y luego, en la expresión final, reemplazar *x* por *y* y *y* por *x*.

Ejemplo:

Hallar, analítica y gráficamente, la inversa de la función *f*(*x*) = 3*x* – 2.

Se escribe la función de la forma *y* = 3*x* – 2 y se despeja:

MA\_11\_02\_CO\_092

MA\_11\_02\_CO\_093

MA\_11\_02\_CO\_094

MA\_11\_02\_CO\_095

MA\_11\_02\_CO\_096

En conclusión:

MA\_11\_02\_CO\_097

La siguiente gráfica muestra la función y su inversa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de *f* -1(*x*) es una reflexión de la gráfica de *f*(*x*). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Halla la inversa de una función |
| **Descripción** | Actividad para identificar la función inversa a la función dada |

[SECCIÓN 2] **4.2 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones inversas |
| **Descripción** | Actividad sobre Las funciones inversas |

**[SECCIÓN 1] 5 Las operaciones entre funciones**

Las funciones poseen estructura aditiva y multiplicativa, por lo cual es posible plantear entre ellas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, teniendo en cuenta algunas reglas para sus dominios y las operaciones entre polinomios.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Las operaciones entre funciones |
| **Descripción** | Interactivo que expone las operaciones de las funciones y la composición entre ellas |

[SECCIÓN 2] **5.1 La adición, la diferencia, el producto y el cociente de funciones**

A continuación se define la adición de funciones, la diferencia de funciones, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Sean *f* y *g* dos funciones con dominios *A* y *B*, respectivamente. Entonces las funciones *f* + *g*, *f* – *g*, *fg*, *f*/*g* se definen a continuación:   * (*f + g*)(*x*) *= f*(*x*) *+ g*(*x*) Dominio A ∩ *B* * (*f* – *g*)(x) = *f*(x) – *g*(x) Dominio A ∩ *B* * (*fg*) (*x*) *= f*(*x*)*g*(*x*) Dominio A ∩ *B* * (*f/g*) (*x*) *= f*(*x*)*/g*(*x*) Dominio *x* ⋲(*A* ∩ *B*)y *g*(*x*)≠ 0 |

Para que las operaciones entre las funciones *f* y *g* tengan sentido es necesario que *x* pertenezca al dominiode *f* y aldominio de *g*.

Ejemplo:

Hallar las funciones suma, diferencia, producto y cociente dadas *f* y *g*, como sigue:

MA\_11\_02\_CO\_098

MA\_11\_02\_CO\_099

Para las funciones se tiene que *Dom f =* [–2*,* ∞) y *Dom g =* **R**–{3}.

El dominio de las funciones suma, diferencia y producto será la intersección de los dominios de *f* y *g*, por lo tanto, se tiene:

*Dom f* ∩ *Dom g =* [–2,∞) ∩ ((–∞, 3) ∪ (3, ∞)) = [–2, 3) ∪ (3, ∞).

Las funciones pedidas se calculan a continuación:

MA\_11\_02\_CO\_100

MA\_11\_02\_CO\_101

MA\_11\_02\_CO\_102

MA\_11\_02\_CO\_103

MA\_11\_02\_CO\_104

MA\_11\_02\_CO\_105

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Álgebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican las operaciones con funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Practica las operaciones entre funciones |
| **Descripción** | Actividad sobre las operaciones entre funciones |

[SECCIÓN 2] **5.2 La composición de funciones**

La composición es una operación entre dos funciones que consiste en aplicar una primero y la otra después.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La composición entre funciones** |
| **Contenido** | Dadas dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) para las cuales el recorrido de *f*(*x*) está incluido en el dominio de *g*(*x*), se denomina función compuesta de *f* y *g* a la función que se obtiene al aplicar *g*(*x*) a toda imagen resultante de haber aplicado *f*(*x*).  Se nota de la siguiente manera:  MA\_11\_02\_CO\_106 |

La composición entre funciones no es una operación conmutativa pues *f*(*g*(*x*)) es diferente de *g*(*f*(*x*)).

Ejemplo:

Encontrar *f*(*g*(*x*)) dadas las siguientes funciones:

MA\_11\_02\_CO\_107

MA\_11\_02\_CO\_108

Para las funciones dadas se tiene que:

MA\_11\_02\_CO\_109

De donde:

MA\_11\_02\_CO\_110

En conclusión:

MA\_11\_02\_CO\_111

Ejemplo:

Encontrar *g*(*f*(*x*)) dadas las siguientes funciones:

MA\_11\_02\_CO\_112

MA\_11\_02\_CO\_113

Para las funciones dadas se tiene que:

MA\_11\_02\_CO\_114

De donde:

MA\_11\_02\_CO\_115

En conclusión:

MA\_11\_02\_CO\_116

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La composición entre una función y su inversa** |
| **Contenido** | Dadas dos funciones *f*(*x*) y *f* -1(*x*) la composición entre ellas es *f*(*x*) = *x*, en símbolos:  MA\_11\_02\_CO\_117 |

Ejemplo:

Determinar la inversa de la función biyectiva *f*(*x*) = –2*x* – 3 y encontrar *f*(*f* -1(*x*)).

La inversa de *f*(*x*) es *f* -1(*x*) así definida:

MA\_11\_02\_CO\_118

La composición entre las dos funciones es:

MA\_11\_02\_CO\_119

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC210 |
| **Título** | Practica la composición entre funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar la forma en la que se realiza la composición entre dos funciones |

[SECCIÓN 2] **5.3 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las operaciones entre funciones |
| **Descripción** | Actividades sobre Las operaciones entre funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Elaboración de gráficas de funciones |
| **Descripción** | Actividad que propone analizar gráficas de funciones |

[SECCIÓN 1] **6 Competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Las funciones y su aplicación en economía |
| **Descripción** | Actividad para mostrar las aplicaciones de las funciones en la Economía |

[SECCIÓN 1] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evaluación sobre Las funciones y las gráficas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre Las funciones y las gráficas |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Web 01** | *Estudio de las funciones con Geogebra* | *http://rincones.educarex.es/matematicas/index.php/funciones-4esob/525-animaciones4esobfunciones/639-estudio-de-las-funciones-elementales-con-geogebra* |
|  |  |  |
| **Web 02** | *Clasificación de funciones* | *http://www.ditutor.com/funciones/funcion\_clasificacion.html* |
|  | *Gráficas de funciones* | http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado\_tecic/101/AL1/pdfs/Precursos/Tema1.pdf |
|  |  |  |