|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | El concepto de función es fundamental para la construcción del pensamiento matemático, debido a las múltiples aplicaciones que tiene en la modelización de situaciones de variación relativas a contextos cotidianos y de todas las aplicaciones en otras ciencias. |

[SECCIÓN 1]**1Funciones de números reales**

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de **función**, que encierra la idea de **dependencia**, es decir, una función establece una relación de dependencia entre dos magnitudes, por ejemplo, cuando de lanza un balón al aire, la altura a la que este se encuentra depende del tiempo que haya transcurrido después de haber sido lanzado el objeto, el valor que se debe cancelar del recibo de la luz depende del consumo de energía del mes, el área de un circulo depende de su radio, el costo de enviar un paquete depende de su peso, entre otras situaciones de dependencia. La forma de representación de estas situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a la otra, es el centro de estudio de la función, por esta razón, el concepto de función se convierte en una herramienta para realizar la modelación de distintos fenómenos tanto reales como abstractos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Se espera poder construir una colage que reent varias graficas de funciones modelando diferentes situaciones de la vida cotidiana. |
| **Pie de imagen** | Las funciones como herramienta de modelación |

El estudio de las funciones empieza con el estudio de algo más general, las relaciones.

[SECCIÓN 2]**1.1 Concepto de relación**

Una relación entre dos conjuntos cualesquiera es una correspondencia entre algunos elementos del primer conjunto y uno o más elementos del segundo conjunto, por ejemplo, si se tiene que es el conjunto de todas las ciudades de Colombia y es el conjunto de todos los departamentos de Colombia, se puede establecer la relación “…está ubicada en el departamento de…” en este caso se tienen correspondencias como:

Bogotá “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Melgar “está ubicada en el departamento de” Tolima.

Girardot “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Girón “está ubicada en el departamento de” Santander.

Ipiales “está ubicada en el departamento de” Nariño.

Por supuesto los anteriores son solos algunos ejemplos de todas las correspondencias, ya que a cada una de las 1118 ciudades se le hace corresponder uno de los 32 departamentos.

La anterior, no es la única relación que se puede establecer entre estos dos conjuntos, una relación que aunque parece extraña, establece correspondencias entre los elementos de los dos conjuntos es “… tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de …”, por ejemplo:

Bogotá “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Bolívar

Bogotá “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Boyacá

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Atlántico

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Amazonas

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Arauca

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Antioquia

Melgar “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Meta

Melgar “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Manizales “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Meta

Manizales “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Nuevamente, estos son tan solo algunos de los ejemplos de las correspondencias que se establecieron, sin embargo, a diferencia del caso anterior, en esta relación hay ciudades a las que les corresponde más de un departamento como Arauca, mientras que otras ciudades como Duitama, Ibagué, Espinal u Ocaña, no están relacionadas con ningún departamento de Colombia.

Una relación queda determinada por las parejas de correspondencias de elementos de con elementos de que se pueden establecer mediante la correspondencia, por ejemplo si tenemos que todas las correspondencias que se presentan son:

Leticia “…” Amazonas, Medellín “…” Antioquia, Arauca “…” Arauca,

Barranquilla “…” Atlántico, Cartagena “…” Bolívar, Tunja “…” Boyacá,

Manizales “…” Caldas, Florencia “…” Caquetá, Yopal “…” Casanare;

Popayán “…” Cauca, Valledupar “…” Cesar; Quibdó “…” Chocó, Montería “…” Córdoba, Bogotá “…” Cundinamarca, Inírida “…” Guainía; Riohacha “…” Guajira, San José del Guaviare “…” Guaviare, Neiva “…” Huila, Santa Marta “…” Magdalena,

Villavicencio “…” Meta, Pasto “…” Nariño; Norte de Santander “…” Cúcuta,

Mocoa “…” Putumayo, Armenia “…” Quindío, Pereira “…” Risaralda,

Providencia “…” San Andrés Islas, Bucaramanga “…” Santander; Sincelejo “…” Sucre, Ibagué “…” Tolima, Valle del Cauca “…” Cali, Mitú “…”Vaupés,

Puerto Carreño “…” Vichada.

Se puede afirmar que: la relación es: “es capital de”.

En matemáticas, se define una relación como un conjunto de parejas que pertenecen al producto cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dados dos conjuntos y se define el producto cartesiano entre los dos conjuntos como:  Es decir, el conjunto de todas las **parejas ordenadas** tales que el primer elemento de la pareja (primera componente) pertenece al conjunto y el segundo elemento de la pareja (segunda componente) pertenece al conjunto . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de Relación** |
| **Contenido** | Una relación entre dos conjuntos y es un subconjunto de su producto cartesiano. Es decir si entonces es una relación entre el conjunto y , el conjunto se llama **conjunto de salida** y el conjunto se denomina **conjunto de llegada**. |

**Ejemplo 1.** Si y , se tiene que:

entonces algunas relaciones distintas saliendo de y llegando a son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R3 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R4. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

El conjunto no es una relación entre el conjunto y , ya que no se encuentra en el conjunto de llegada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación. escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

De manera similar el conjunto , no es una relación entre y , puesto que no se encuentra en el conjunto de salida.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

**Ejemplo 2.** Si , los conjuntos:

Son relaciones, donde el conjunto A es tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada.

Las relaciones también se pueden definir mediante una regla o ley que permita determinar la correspondencia establecida. Esto se debe a que algunas veces, representar una relación mediante la escritura de todas las parejas que pertenecen a esta, o a través de su representación sagital es ineficaz en conjuntos con un número grande de elementos o conjuntos infinitos (**como los son los sistemas numéricos que conocemos**); en el ejemplo de ciudades y departamentos hubiese sido inoficioso escribir las 1118 parejas que obtienen en la relación “… está ubicado en el departamento de…”. Otros ejemplos son:

**Ejemplo 3.** En el conjunto de los números naturales como conjunto salida y de llegada, la relación dada por esta relacionado con si es divisor de .

Se tiene que:

, ya que es divisor de

, ya que es divisor de

, ya que es divisor de

, ya que aunque es divisor de , no es un número natural que es el conjunto de salida.

, ya que aunque es divisor de , no es un número natural que es el conjunto de llegada

**Ejemplo 4.** Entre los números naturales como conjunto de salida y los números racionales como conjunto de llegada la relación:

Se tiene que:

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que aunque , no pertenece al conjunto de los números naturales.

**Ejemplo 5.** Entre los números reales como conjunto de salida y a la vez como conjunto de llegada, la relación dada por:

Se tiene que:

[SECCIÓN 3]**1.1.1 Dominio y rango de una relación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio y rango de una relación** |
| **Contenido** | Dada una relación entre los conjuntos y , se define **el dominio de la relación** (), como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas que pertenecen a la relación, es decir todos los elementos de que están en la relacionados por lo menos con un elemento de .  **El rango de la relación** es el conjunto el de todas las segundas componentes de la relación, es decir, es el conjunto de todos los elementos de que son relacionados por lo menos con un elemento del conjunto A. |

**En el ejemplo 1**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 1. Escribir A y B para cada una de las representaciones del conjunto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* y
* y el
* y el
* y
* y

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos relaciones que tienen el mismo dominio y el mismo rango, no necesariamente son iguales. |



**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y mismo como llegada. |

* y
* y
* y

En los ejemplos 3, 4 y 5 debido a que no se tienen enlistadas todas las parejas de la relación, para obtener los dominios es necesario acudir a las propiedades de las operaciones de los conjuntos numéricos en los fueron establecidas las relaciones.

**En el ejemplo 3.**

Como todo número natural es divisor de sí mismo, luego la pareja ordenada para todo , por lo tanto y . Es importante destacar que cero (0) no es un número natural.

**En el ejemplo 4**

Si y , entonces y no está definido, luego, en este caso:

Luego, debe ser una potencia de 2 con .

Además como:

y es natural, entonces debe ser un número entero positivo y por tanto debe ser una fracción unitaria positiva, de donde:

**En el ejemplo 5.**

Se despeja de la ecuación

entonces

Luego los valores de deben cumplir que de donde:

Por lo tanto se particiona el conjunto de los números reales en los intervalos , y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Luego de donde .

De forma similar, si al despejar se obtiene que de donde .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC10 |
| **Título** | Dominio y Rango de relaciones |
| **Descripción** | Actividad para identificar en diferentes relaciones sus conjuntos de salida y llegada, así como dominios y rangos. |

[SECCIÓN 3]**1.1.2 Relaciones de números reales y el plano cartesiano**

El plano cartesiano es un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto que llamamos origen. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o eje , y la vertical se denomina eje de las ordenadas o eje . Una pareja ordenada de números reales puede ser representada por un punto del plano y todo punto del plano representa una pareja ordenada de números reales, por lo tanto, se puede establecer una relación biunívoca entre puntos del plano yel producto cartesiano . [[VER](http://conteni2.educarex.es/mats/11894/contenido/)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Plano Cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 146258987 |
| **Pie de imagen** | Correspondencia entre puntos del plano y parejas ordenadas de números reales. |

Graficar una relación en el plano cartesiano consiste en ubicar en este todos los puntos correspondientes a las parejas que pertenecen a la relación, asumiendo que el conjunto de salida se debe ubicar en el eje y el conjunto de llegada en el eje .

En los siguientes ejemplos, se ha realizado la gráfica de cada relación usando la ayuda de un software.

**La grafica del Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso el conjunto de puntos correspondientes a la pareja de la relación forman una circunferencia. |

En algunas ocasiones, la gráfica de la relación permite determinar dominio y rango, en este caso se observa que el dominio y rango de la relación es

**Ejemplo 6.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación corresponde a la región sombreada, específicamente a un semiplano. |

Se observa que y

**Ejemplo 7.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso la gráfica de la relación es una parábola. |

Se observa que y

**Ejemplo 8.** La ecuación de Batman [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 7. [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)] |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso la gráfica de la relación forma el logo de Batman. |

Se observa que y .

[SECCIÓN 2]**1.2 Funciones**

Las funciones son un caso particular de las relaciones, es decir, toda función es una relación, pero no toda relación es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función.** |
| **Contenido** | Una relación entre los conjuntos y es una **función**, si cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del conjunto . |

En otras palabras, si en una relación es posible determinar al menos un elemento del dominio que esté relacionado con más de un elemento de , entonces la relación **no** es una función.

**En el ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* **no es una función,** ya que se observa que el elemento esta relacionado con dos elementos y .
* **no es una función,** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* **no es una función** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* **si es una función**.
* **si es una función**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La definición de función no permite relacionar a un elemento del conjunto de salida A con más de un elemento del conjunto de llegada B, pero no impide que un elemento de se pueda relacionar con más de un elemento de . |

Como sucede en la función R5 del ejemplo 1.

**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG16 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y mismo conjunto A como conjunto de llegada. |

* **no es una función,** porque 1 está relacionado con dos elementos y .
* y si **son funciones.**

**El ejemplo 3,** *R* **no es una función,** ya que 1 es divisor de todo número, luego para todo numero natural , es decir que está relacionado con infinitos números naturales.

**En el ejemplo 4,** Si , entonces luego de donde , eso nos dice que a cada natural que este en el dominio de la relación le corresponde un único número racional b, que está en el conjunto de llegada, por lo tanto R es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Prueba de la recta vertical** |
| **Contenido** | Cuando el conjunto de salida y el conjunto de llegada de una relación es el conjunto de los números reales, es posible determinar si esta relación es o no función; para ello se observa si cada recta vertical corta la gráfica en un único punto, si esto sucede la relación es una función, en caso de que alguna recta vertical corte en más de un punto la relación no es función. |

**El ejemplo 5, no** es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la circunferencia en más de un punto, por lo tanto *R* no es función. |

**El ejemplo 6, no** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la región en infinitos puntos. |

**El ejemplo 7,** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la parábola en más de un punto. |

**El ejemplo 8,** La relación del logotipo de Batman **no** es función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 8. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta el logo en dos puntos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | ¿Cuáles relaciones son funciones? |
| **Descripción** | Actividad en el que identifican y se diferencian las relaciones que son funciones de las que no lo son. |

[SECCIÓN 3]**1.2.1 Codominio, imagen y preimagen de funciones**

Las funciones son relaciones, por lo tanto establecen una correspondencia entre elementos de un conjunto de salida y un conjunto de llegada , de esta forma, tienen definido un **dominio** y un **rango**, además de estos, hay otros elementos que deben tener en cuenta cuando se trabaja con una función, estos son, codominio, imagen y preimagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de codominio de una función** |
| **Contenido** | El conjunto de llegada de una función se denomina el **codominio de la función** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de imagen por una función** |
| **Contenido** | Como en las funciones cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del codominio, dado un elemento del dominio, se denomina **imagen** **de**  **por**  o precisamente a ese único elemento con el que se encuentra relacionado. |

En otras palabras, la afirmación indica que el valor de **queda determinado** por el valor de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de preimagen por la función** |
| **Contenido** | Si es un elemento del rango de una función, se llama **preimagen de**  **por**  a todos los elementos del dominio cuya imagen sea . |

A diferencia de la imagen, las preimagen no necesariamente son únicas.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

es una función con , y . Además se tiene que:

es el conjunto de las preimágenes de .

[SECCIÓN 2]**1.3 Funciones de números reales.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones de números reales** |
| **Contenido** | Las funciones que tienen su dominio y codominio en el conjunto de los números reales se denominan **funciones de números reales**. |

Por lo general, las funciones de números reales se expresan de forma gráfica o analítica, la gráfica corresponde a su representación en el plano cartesiano y la forma analítica a la ecuación que relaciona a través de la aplicación de las operaciones y relaciones establecidas a cada uno de los elemento del dominio con sus respectivas imágenes. Las siguientes expresiones son ejemplos de la forma analítica de funciones de números reales:

, , ,

Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión analítica o establecer la gráfica de una función de números reales, por ejemplo, dada la función que relaciona a cada número real con su imagen por , donde es la cantidad de cifras periódicas que tiene la expansión decimal de *x*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

, y

En esta esta función no es posible determinar una expresión analítica o gráfica que la represente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC30 |
| **Título** | Dominio y Rango de algunas funciones de números reales con expresiones analíticas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales. |

[SECCIÓN 2]**1.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Dominio, rango, codominio, imágenes y preimagenes de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican y determinan el dominio, rango, codominio, imágenes y preimagenes de funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculo de dominio de funciones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se determinan el dominio de funciones de números reales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Otras formas de graficar funciones. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se explora otra forma de graficar las funciones de números reales. |

[SECCIÓN 1]**2 Propiedades de las funciones**

Para profundizar el estudio sobre las funciones es necesario explorar ciertas características o propiedades que cumplen algunas de estas y que se evidencian tanto en el comportamiento de la función como en la gráfica de la misma, algunas de estas propiedades se pueden definir para cualquier tipo de función, mientras que otras se definen para las funciones de números reales.

[SECCIÓN 2]**2.1 Funciones inyectivas o uno a uno**

Una función inyectiva, se denomina también función **uno a uno**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inyectiva o uno a uno** |
| **Contenido** | Una función es **inyectiva,**  si todo elemento del rango tiene una única preimagen. En otras palabras  Si entonces |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG22 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

En el diagrama sagital se observa que el , las preimagenes para cada uno de esto valores son:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como cada elemento del rango tiene una sola preimagen, entonces la **función es inyectiva.**

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG23 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa en el diagrama sagital que , las preimagenes para cada uno de esto valores son:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de son .

Como hay un elemento del rango que tiene más de una preimagen, entonces la **función no es inyectiva.**

Para el caso de las funciones de números reales, se puede determinar si una función es inyectiva a partir de la gráfica trazando rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta horizontal** |
| **Contenido** | Una función de números reales es inyectiva si y solo si ninguna recta horizontal corta su gráfica en más de un punto. |

**Ejemplo 4.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG24 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la gráfica en más de un punto, por lo tanto la función es inyectiva |

**Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la gráfica de la función en más de un punto, por lo tanto la función **no** es inyectiva |

[SECCIÓN 2]**2.2 Funciones sobreyectivas**

Una función es sobreyectiva, si el rango es el mismo codominio, en otras palabras:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función sobreyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **sobreyectiva,**  si y solo si, todos los elementos del codominio son imágenes de la función. |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función |

En el diagrama sagital se observa que , y , como coincide rango y codominio las función **es sobreyectiva.**

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la función g, cambiar f por g |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

De acuerdo con el diagrama sagital, se puede determinar que , y como no coincide el rango y el codominio la **función no es sobreyectiva**.

**Ejemplo 3.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** | Función en el plano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El rango son todos los reales |

En la gráfica se observa que el rango es el conjunto de los números reales, de la misma forma que el codominio, por lo tanto **es una función sobreyectiva.**

[SECCIÓN 2]**2.3 Funciones biyectiva**

Una función biyectiva establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y los elementos del codominio, de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Biyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **biyectiva,** si y solosi es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa que el = por lo tanto es una función **sobreyectiva,** ahora calculemos las preimagenes para cada uno de esto valores

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como las preimagenes son únicas, *f* **es una función inyectiva**

En conclusión, *f* es sobreyectiva e inyectiva, por lo tanto **es biyectiva.**

**Ejemplo 2.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la gráfica en más de un punto y el rango son los números reales, por lo tanto la función es biyectiva |

Gráficamente se puede ver que la función pasa la prueba de la recta horizontal por lo que es inyectiva y además el rango de la función es el conjunto de los números reales por lo que es sobreyectiva, por tanto la **función es biyectiva.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC70 |
| **Título** | La relación reciproca y biyectividad. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se define la relación recíproca y su relación con las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |
| **Descripción** | Actividad en que se practica procesos para identificar las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. |

[SECCIÓN 2]**2.4 Propiedades de funciones de números reales**

Cuando se establece una función de números reales es posible usar la estructura algebraica de este conjunto numérico para establecer propiedades y operaciones en el conjunto de las funciones de números reales.



[SECCIÓN 3]**2.4.1 Funciones pares**

En el plano cartesiano las grafica de una función par se identifica porque al ser reflejada por el eje , la gráfica obtenida coincide. En general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Par** |
| **Contenido** | Una función se dice **par** si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG33 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La reflexión de la gráfica por el eje coincide con la grafica. |

**Ejemplo 2.** La función

No es una función par, por ejemplo para el caso de se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG34 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La reflexión de la gráfica de la función *f* por el eje no coincide con la gráfica de la función. |

[SECCIÓN 3]**2.4.2 Funciones Impares**

En el plano cartesiano la gráfica de una función impar se identifica porque al ser reflejada por el eje y después por el eje la gráfica obtenida coincide con la gráfica de la función. En general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función impar** |
| **Contenido** | Una función se dice impar si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG35 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El reflejo de la gráfica por el eje y después por el eje coincide con la gráfica de la función |

**Ejemplo 2.** La función

No es una función impar, ya que tomando un caso particular, por ejemplo se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG36 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La reflexión de la gráfica por el eje y después por el eje no coincide con la gráfica de la función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Funciones pares e impares |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican las funciones pares e impares. |

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Funciones Crecientes**

áasciende de izquierda a derecha. En forma general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG37 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es creciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función monótona creciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona creciente si es creciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Funciones Decrecientes**

En el plano cartesiano la gráfica de una función decreciente se identifica porque la gráfica se ve descendiendo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función decreciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG38 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es decreciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Monótona decreciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona decreciente si es decreciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Máximos y mínimos relativos y absolutos**

En una función definida en los números reales es el mínimo de la función y es el valor donde lo alcanza. Si se cumple la siguiente definición:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo absoluto en si y solo si y además  para todo . |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG39 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un mínimo absoluto en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo absoluto en si y solo si y además  Para todo . |

En este caso, es el máximo de la función y es el valor donde lo alcanza.

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG40 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un máximo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo relativo en si y solo si y existe un tal que,  Con , para todo . |

De esta manera

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo relativo en si y solo si y existe un tal que  Para todo . |

**Ejemplo 2.** Observa la función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG41 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene un máximo relativo en y un mínimo relativo en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Funciones crecientes, decrecientes, máximos y mínimos de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican las funciones crecientes, decrecientes, así como sus máximos y los mínimos a partir de su gráfica. |

[SECCIÓN 3]**2.4.1 Concavidad**

La concavidad es una característica de las funciones, que proporciona información acerca de la forma de la curva la gráfica de una función. En este sentido, la gráfica de una función puede ser convexa o cóncava, como se muestra a continuación:

En el plano cartesiano la **convexidad** de una función se identifica porque al tomar dos puntos de la gráfica, el segmento que los une está por encima de la curva de la función. Una función convexa se denomina también cóncava hacia arriba, como se muestra en los siguientes ejemplos

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG42 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos de la gráfica está por encima de la gráfica. |

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG43 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es convexa o cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos de la gráfica está por encima de la curva de la funcion. |

En el plano cartesiano, la **concavidad** de una función se identifica porque al tomar dos puntos de la gráfica el segmento que los une está por debajo de la gráfica. Una función cóncava se denomina también cóncava hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG44 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava, debido a que el segmento está por debajo de la gráfica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG45 |
| **Descripción** | Representación grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia abajo, porque el segmento está por debajo de la gráfica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC110 |
| **Título** | La importancia de la concavidad. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se expresa la relación entre la concavidad y el comportamiento de la variación en la función. |

[SECCIÓN 2]**2.5 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Comportamiento de la variación de la función desde su representación gráfica. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica procesos para identificar la concavidad de una función y el comportamiento en la variación que estas propiedades determinan. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propiedades de las funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica lo aprendido sobre propiedades de las funciones. |

[SECCIÓN 1]**3 Clasificación de las funciones de números reales**

Las funciones de números reales que tienen una expresión analítica se clasifican en dos tipos de funciones: las algebraicas y las trascendentes.

[SECCIÓN 2]**3.1 Funciones algebraicas**

**Las funciones algebraicas** son todas aquellas cuya expresión analítica se construye usando suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponentes racionales, y radicales de índice natural, por ejemplo:

, , , ,

Las funciones algebraicas más usuales son: las funciones potencia, las funciones polinómicas, las funciones racionales y las funciones radicales.

[SECCIÓN 3]**3.1.1 Funciones potencia**

Una función potencia se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones potencia** |
| **Contenido** | Una función de la forma con se denomina una función potencia. |

El dominio de una función potencia es el conjunto de los números reales, las otras características de la función dependen de si es par o impar.

**par**

La grafica de las funciones potencia con el exponente n par son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG46 |
| **Descripción** | Potencias pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones potencia con exponente par. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Par |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |
| Concavidad: | Concavidad hacia arriba |

**impar**

La grafica de las funciones potencia con su exponente n impar son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG47 |
| **Potencia** | Potencias impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones potencia con el exponente n impar. |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Impar |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba en el intervalo .  Cóncava hacia abajo en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC140 |
| **Título** | Las desigualdades y las funciones potencia. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se analiza los procesos algebraicos en las desigualdades al aplicar la potenciación a partir de las graficas de las funciones potencias. |

[SECCIÓN 3]**3.1.2 Funciones polinómicas**

Una función polinómica se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina una función polinómicas. |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales, las demás propiedades y características de las funciones polinómicas depende del grado de la misma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El grado de una función es la mayor potencia de la expresión algebraica de una función polinómica. |

Por ejemplo

La función tiene grado 1 puesto que el mayor exponente de *x* es 1

La función tiene grado 3, puesto que el mayor exponente de la función es 3.

Las funciones polinómicas que se pueden caracterizar completamente son la función , la funciones de grado cero o funciones constantes, las funciones de grado uno que se clasifican en lineales y afines y las de grado dos que son las funciones cuadráticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función constante** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función constante. |

La grafica de las funciones constantes siempre son rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG48 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función constante |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Impar |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba en el intervalo .  Cóncava hacia abajo en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Par |
| Máximo: |  |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función lineal** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función lineal |

La representación gráfica de las funciones lineales son lineas rectas con inclinación que pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG49 |
| **Descripción** | Grafica de varias funciones lineales en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x, f(x)=-x, f(x)=2x, f(x)=-2x, f(x)=3x, f(x)=-3x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Por diseñar |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones lineales |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |



La función lineal es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir , si es positivo la función es creciente si es negativo la función es decreciente, en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función afín** |
| **Contenido** | Una función de la forma  Con se denomina función afín. |

La gráfica de una función afín es una línea recta con inclinación que no pasa por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG50 |
| **Potencia** | Grafica de varias funciones afines en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x+1, f(x)=-x+1, f(x)=2x+1, f(x)=-2x+1, f(x)=3x-1, f(x)=-3x-2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones afines |

Las características principales de estas funciones son:



|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |

De manera similar a las funciones lineales, una función afín es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir, si es positivo la función es creciente, si es negativo la función es decreciente, en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función cuadrática** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina función cuadratica. |

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG51 |
| **Potencia** | Representación gráfica de varias funciones cuadráticas en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define, por ejemplo f(x)=x2, f(x)=1-x2, f(x)=x2-x+2, f(x)=-x2+2x-1 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones cuadráticas |

Algunas de las características principales de la función cuadrática son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si y solo si |
| Impar | No |

Otras de sus características principales cambian según el signo del coeficiente que acompaña la variable al cuadrado, es decir ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Rango: |  |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |  |
| Máximo: | No tiene |  |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |  |
| Mínimo |  | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  | No aplica |
| Cóncava hacia arriba: |  | No presenta este comportamiento |
| Cóncava hacia abajo: | No presenta este comportamiento |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC150 |
| **Título** | Representación graficas de funciones polinómicas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia las formas generales de las gráficas de funciones polinómicas. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones racionales**

Una función racional es una función en la cual el numerador y el denominador de la fracción que la conforman son polinomios algebraicos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional** |
| **Contenido** | Una función de la forma  Con y . *f(x)* se denomina una función racional. |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los valores de *x* para los cuales denominador es cero.

**Ejemplo 1.** Considere la función

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

Se retira del conjunto de los números reales las soluciones anteriores, De esta forma:

**Ejemplo 2.** Considere la función

Para calcular el dominio se iguala a cero la expresión del denominador y se determina el conjunto solución:

Esta expresión nunca es cero por lo tanto .

**Ejemplo 3.** Considere la función

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

De donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional impropia** |
| **Contenido** | Una función racional es impropia si y solo si el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales impropias

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional propia** |
| **Contenido** | Una función racional es **propia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales propias

, y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas Verticales de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional  tiene una asíntota vertical si y |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota en si la función toma valores muy grandes (en valor absoluto) a la derecha o izquierda de la recta.

Ejemplo 1. Considere la función:

es una asíntota vertical ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 2. Considere la función:

es una asíntota vertical ya que y

es una asíntota vertical ya que y

no es una asíntota vertical ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en y pero no en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asintotas horizontal de una función racional** |
| **Contenido** | Diremos que un función racional  con ,   * Tiene una asintota horizontal si * Tiene una asintota horizontal si * No tiene asintota horizontal si |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota horizontal si la cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se acercan a .

Ejemplo 1. Considere la función:

Como son de igual grado tienen una asíntota horizontal

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 2. Considere la función:

Como el grado del denominador es mayor que el del numerador tienen una asíntota horizontal

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG53 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 3. Considere la función:

Como el grado del denominador es menor que el del numerador no tienen una asíntota horizontal .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG54 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota horizontal |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asintotas oblicuas de una función racional** |
| **Contenido** | Diremos que un función racional  con y tiene una asintota horizontal , donde  es la expresión que se obtiene al hacer la división de polinomios. |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota horizontal si la cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se acercan a la recta.

Ejemplo 1. Considere la función:

Dividiendo los polinomios [[VER](http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/division_polinomios/Dpolinomios_home.html)], se tiene que:

Por lo tanto es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG55 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota oblicua |

Ejemplo 2. Considere la función:

Dividiendo los polinomios se tiene que:

por lo tanto es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG56 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota oblicua |

Como se observa las graficas de las funciones racionales pueden tomar diferentes formas por lo que no se pueden caracterizar sus propiedades de forma general.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Asintotas de funciones racionales. |
| **Descripción** | Actividad en el que se practica como se identifican las diferentes asintotas de una función racional. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones radicales**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Radical** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y , se denomina una **función radical**. |

De manera similar a las funciones potencia, el comportamiento y las características de las funciones radicales dependen de si es par o impar.

**par**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Potencia** | Radicales pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones radicales pares. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia abajo: | En su dominio |

**impar**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Potencia** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones radicales impares. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia abajo: |  |
| Concava hacia arrib: |  |

[SECCIÓN 2]**3.2 Funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas, se consideran funciones trascendentes, dentro de ellas se encuentran algunas que tienen expresión analítica y otras que no. En general se estudian tres tipos de funciones trascendentes, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

[SECCIÓN 3]**3.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas, surgen al ampliar el concepto de razón trigonométrica, en el circulo trigonométrico para poder trabajar con cualquier valor para el ángulo y no solo los que se encuentran entre y de radián. Las seis funciones trigonométricas son: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Cosecante y Secante. A continuación se presentan sus graficas y propiedades.

**La función Seno**

La función seno se construye a partir del circulo trigonométrico [[VER](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Docsup/Recursos/42810459F%5CFuncionSeno.zip_desc%5CFuncionSeno/index.html)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG59 |
| **Descripción** | La función Seno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función seno |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Periodo: |  |
| Amplitud: |  |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: |  |
| Minimo |  |

Desde la grafica de la función seno, se puede observar que se presentan intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento, e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, luego se tienen que en la función:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente en: |  |
| Decreciente en: |  |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

**La función Coseno**

La función Coseno se construye a partir del circulo trigonométrico [[VER](http://www.antioquiadigital.edu.co/Demostraciones-interactivas-de-Geogebra/construccion-de-la-grafica-de-la-funcion-coseno.html)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG60 |
| **Descripción** | La función Coseno y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función coseno |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Periodo: |  |
| Amplitud: |  |
| Par | Si |
| Impar | No |
| Maximo: |  |
| Minimo |  |

Similar a la función Senos desde la grafica de la función seno, se puede observar que se presentan intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento, e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, luego se tienen en la función coseno:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente en: |  |
| Decreciente en: |  |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

**La función Tangente**

La función tangente se puede construir a partir de la identidad , por esta razón es necesario sacar del dominio aquellos valores donde el coseno se vuelve cero, obsérvese que en esos mismos valores el Seno no es cero, luego de manera similar a lo que sucede con las funciones racionales en esos valores se presenta una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG61 |
| **Descripción** | La función Tangente y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función tangente |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | Si |
| Periodo: |  |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Creiente: | En su dominio |
| Asintotas Verticales: |  |

En la grafica de la función tangente se observa que en medio de dos de sus asíntotas verticales la función cambia de comportamiento de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba, y por ser periódica este comportamiento se presenta una y otra vez, de donde:

|  |  |
| --- | --- |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Caracteristicas y propiedades de las funciones trigonometricas. |
| **Descripción** | Actividad en el que a partir de la grafica de las funciones cotangente, cosecante y secate se identifican sus carcaterizticas y propiedades. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones exponenciales**

Una función exponencial es una función en la que la variable se encuentra en el exponente, de una manera más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion Exponencial** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con , se denomina una **función exponencial.** |

Se observa que debe ser positivo ya que cuando es negativo, calcular el dominio o realizar un bosquejo de la grafica de la función es una tarea que no es posible resolver de forma practica.

Las funciones exponenciales tienen como dominio todos los números reales y su rango son los reales positivos, son funciones inyectivas. Sus otras características depende del valor de , se consideran dos casos, cuando o cuando , el caso de no se considera porque sería la función constante .

**Si**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG64 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Exponencial con |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Decreciente | En su dominio |
| Concava hacia arriba: | En su dominio |

**Si**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG65 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Exponencial con |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia arriba: | En su dominio |

[SECCIÓN 2]**3.3. Funciones a trozos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion a trozos** |
| **Contenido** | Una **función esta definida a trozos o por partes** si el domonio se divide en dos o más subconjuntos disjuntos (que su intersección sea vacía) que llamaremos trozos, y para cada uno de ellos se da una expresión o regla de correspondencia para hallar la imagen. |

Ejemplo 1. Una función de dominio , definida en tres trozos, el primero es intervalo y las imágenes quedan determinadas por la expresión , el segundo trozo es el intervalo y la imagines están determinas por la expresión , y el ultimo trozo es el intervalo en el que las imágenes están determinadas por la expresión ; esto se puede escribir como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG66 |
| **Descripción** | La función a trozos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función efinida en tres trozos |

Ejemplo 2. La función con dominio real dada por:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG67 |
| **Descripción** | La función a trozos, modificarla para que se note el hueco que se dan el segmeto cuando |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función en definada en cinco trozos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los trozos en los que están definidos la función sean disjuntos por que de lo contrario se podría perder la condición de función. |

Por ejemplo la expresión

no es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Realizar la grafica de la expresión dada  Y mostrar con una recta vertical entre -1 y 1 que la grafica es cortada en dos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba de la recta vertical en la expresión dada por trozos. |

Dentro de las funciones a trozos encontramos dos que son las más estudiadas, la función valor absoluto y la función parte entera.

[SECCIÓN 3]**3.3.1 Función valor absoluto**

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos, los reales negativos y los no negativos, como se sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Grafica del valor absoluto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función valor absoluto |

Las características del valor absoluto son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creciente: |  |
| Decreciente |  |

[SECCIÓN 3]**3.3.2 Función parte entera**

La función valor absoluto es una función definida en infinitos trozos de la forma cono un número entero.

La función parte entera también se puede definir como la que a cada número real le hace corresponder el mayor entero que es menor o igual al número dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG69 |
| **Descripción** | La función parte entera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función parte entera |

Las características de la función parte entra son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |

[SECCIÓN 2]**3.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC180 |
| **Título** | Las transformaciones de funciones. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian como obtener graficas de funciones de ciertas funciones a partir de otras. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu prendizaje: Clasificación de funciones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica lo aprendido sobre las funciones usuales de números reales. |

[SECCIÓN 1]**4 Operaciones con funciones**

Dadas dos funciones de números reales y , es posible aprovechar la estructura aditiva y multiplicativa de los números reales para definir operaciones entre estas dos funciones, por ejemplo la suma de dos funciones es una función para la cual la imagen por de un elemento esta dado por la suma de la imagen por y la imagen por , es decir, para que la expresión tenga sentido es necesario que este en el dominio tanto de como de .

[SECCIÓN 2]**4.2 Suma, diferencia, producto y cocientes de funciones**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los númos reales y un número real, se definen las siguientes operaciones entre funciones:   * para todo * para todo * para todo * para todo * para todo |

Ejemplo 1. Considere las funciones y entonces:

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG70 |
| **Descripción** | Graficas de y en distintos colores y con etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Suma de funciones |

|  |
| --- |
| donde |

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG71 |
| **Descripción** | Graficas de y, con distintos colores y etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Diferencia de funciones |

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG72 |
| **Descripción** | Graficas de y con distintos colores y etiqueta de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Producto de funciones |

|  |
| --- |
| donde  como la ecuación no tienen solución en el conjunto de los reales entonces: |

Cuando se opera con funciones el dominio de la función resultante no solo esta dado por la expresión que se obtiene si no que también es necesario tener en cuenta los dominios de las funciones que se operan, en el ejemplo anterior la expresión resultante fue que no se indetermina en , pero este no hace parte del dominio ya que no esta en el domino de .

|  |
| --- |
| donde  como la ecuación tienen solución en el conjunto entonces: |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG73 |
| **Descripción** | Graficas de y , , con disntintos colores y etiquetas de cual es cada una, en el caso de que se resalte el hueco que se presenta en |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cociente de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Algebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones.. |

[SECCIÓN 2]**4.2 Composición de funciones**

Si tenemos dos funciones y tales que el conjunto de llegada de es precisamente conjunto de salida de , entonces es posible dado un elemento de salida aplicarle la función y en seguida aplicarle a su imagen la función , es decir, e define una función que llamada compuesta (, que lleva elementos del conjunto de salida de al conjunto de llegada de , de tal manera que la imagen por la composición es a imagen por de la imagen por .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG74 |
| **Descripción** | Diagrama que muestra la Composición de funciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | Diagrama Sagital de la composición de funciones. |

De manera más precisa para funciones de números reales se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los números reales se define la **composición de funciones** como:  para todo |

Para hallar el dominio de podemos tomar el dominio de y eliminar de este los valores que estén restringidos en la expresión que resulta al evaluar en .

Ejemplo 1. Si se consideran las funciones y

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante no tiene restricciones luego . |

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante no tiene restricciones luego . |

Se observa que la composición de funciones **no es conmutativa**.

Ejemplo 2. Si se consideran las funciones y

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante tiene como restriccion que entonces . |

De manera similar a las operaciones de números reales podemos establecer que propiedades cumpla la composición de funciones, entre ellas están

* La composición de funciones es asociativa es decir

Ejemplo 1. Considere las funciones , y .

Comprobemos que

Calculado

|  |
| --- |
|  |
|  |

Calculando

|  |
| --- |
|  |
|  |

* La composición de funciones tienen elemento neutro

Ejemplo. Dado si se tiene que:

luego .

Como se menciono anteriormente la composición de funciones no es conmutativa, la pregunta es si tiene elementos inversos.

[SECCIÓN 3]**4.2.1 Funciones inversas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Dada una función de números reales, decimos que es la función inversa de si el y    Para todo y  Para todo , en estos casos notamos a como . |

No todas las funciones de número reales tienen una función inversa, para ellos se necesita que la función sea inyectiva:

Ejemplo 1. Si entonces

Ejemplo 1. Si entonces

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC210 |
| **Título** | Composición de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se componen funciones. |

[SECCIÓN 2]**4.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Inversas de las funciones exponenciles y trigonometricas. |
| **Descripción** | Interctivo en el que se estudian las funciones logaritmicas y las invesas de las funciones trigonometricas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Operaciones con funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones.. |

[SECCIÓN 1]**5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Analizando funciiones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone analizar varias de las propiedades de una función de números reales. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema de funciones. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 | |
| **Web 01** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 02** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 03** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
|  | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 04** |  | <http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/coordenadascartesianas/sec/MATE30_imprimible_alumnado.pdf> |
|  |  | http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/mate/Matematicas\_VI/Applets\_Geogebra/operacionesconfunciones.html |
| **Web 05** |  | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |
|  |  | <http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/rectas.pdf> |
|  |  |  |