|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | El concepto de función es considerado como un elemento fundamental para la construcción del pensamiento matemático, en gran parte por las múltiples aplicaciones cuando se piensa en realizar modelización de situaciones de variación relativas a contextos cotidianos y de todas las aplicaciones en otras ciencias. |

[SECCIÓN 1]**1Funciones de números reales**

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de función, este encierra la idea de **dependencia**, es decir, una función establece como una cantidad depende de otra, por ejemplo, cuando de lanza un balón al aire la altura a la que este se encuentre depende del tiempo que haya transcurrido, el pago que debemos realizar en el recibo de la luz depende del consumo de energía del mes, el área de un circulo depende de su radio, el costo de enviar un paquete depende de su peso, el precio de un teléfono celular depende de la demanda que este tenga etc. El determinar como presenta esta dependencia, como varia una cantidad con respecto a lo que la otra cambia, es precisamente lo que llamaremos función, y se convierte en un herramienta para realizar una modelación de distintos fenómenos tanta reales como abstractos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Se espera poder contruir una cologe que reent varias graficas de funciones modelando diferentes situaciones de la vida cotidiana. |
| **Pie de imagen** | Las funciones como herramienta de modelación |

El estudio de las funciones empieza con el estudio de algo más general, las relaciones.

[SECCIÓN 2]**1.1 Concepto de relación**

Una relación entre dos conjuntos cualesquiera se puede interpretar como una manera de hacer corresponder a algunos elementos del primer conjunto uno o más elementos del segundo conjunto, por ejemplo, si se tiene que es el conjunto de todas las ciudades de Colombia y tenemos es el conjunto de todos los departamentos de Colombia, se puede establecer la relación “esta ubicada en el departamento” en este caso se tienen correspondencias como:

Bogotá “esta ubicada en el departamento de” Cundinamarca

Melgar “esta ubicada en el departamento de” Tolima

Girardot “esta ubicada en el departamento de” Cundinamarca

Girón “esta ubicada en el departamento de” Santander

Ipiales “esta ubicada en el departamento de” Nariño

por supuesto los anteriores son solos algunos ejemplos de todas las correspondencias, ya que a cada una de las 1118 ciudades se le hace corresponder uno de los 32 departamentos.

La anterior, no es la única relación que se puede establecer entre estos dos conjuntos, una relación que puede parecer extraña pero que de igual manera establece una correspondencia entre los elementos de los dos conjuntos es “Su primera letra es igual a la primera letra de”, se tienen correspondencias como:

Bogotá “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Bolívar

Bogotá “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Boyacá

Arauca “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Atlántico

Arauca “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Amazonas

Arauca “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Arauca

Arauca “ Su primera letra es igual a la primera letra de” Antioquia

Melgar “ Su primera letra es igual a la misma que la de” Meta

Melgar “ Su primera letra es igual a la misma que la de” Magdalena

Manizales “ Su primera letra es igual a la misma que la de” Meta

Manizales “ Su primera letra es igual a la misma que la de” Magdalena

nuevamente, estos son tan solo algunos de los ejemplos de las correspondencias que se establecieron, sin embargo, a diferencia del caso anterior en este ejemplo hay ciudades a las que les corresponde más de un departamento como Arauca que esta relacionado con cuatro, mientras que otras ciudades como Duitama, Ibague, Espinal u Ocaña, no están relacionadas con ningún departamento.

Una relación queda determinada por las parejas de elementos de con elementos de que se pueden establecer con la correspondencia, por ejemplo si tenemos que todas las correspondencias que se presentan son:

Leticia “…” Amazonas, Medellín “…” Antioquia, Arauca “…” Arauca,

Barranquilla “…” Atlántico, Cartagena “…” Bolívar, Tunja “…” Boyacá,

Manizales “…” Caldas, Florencia “…” Caquetá, Yopal “…” Casanare;

Popayán “…” Cauca, Valledupar “…” Cesar; Quibdó “…” Chocó, Montería “…” Córdoba, Bogotá “…” Cundinamarca, Inírida “…” Guainía; Riohacha “…” Guajira, San José del Guaviare “…” Guaviare, Neiva “…” Huila, Santa Marta “…” Magdalena,

Villavicencio “…” Meta, Pasto “…” Nariño; Norte de Santander “…” Cúcuta,

Mocoa “…” Putumayo, Armenia “…” Quindío, Pereira “…” Risaralda,

Providencia “…” San Andrés Islas, Bucaramanga “…” Santander; Sincelejo “…” Sucre, Ibagué “…” Tolima, Valle del Cauca “…” Cali, Mitú “…”Vaupés,

Puerto Carreño “…” Vichada.

se puede afirmar que la relación es “es capital de”

De manera un poco más formal, en matemáticas definimos la relación justamente como el conjunto de las parejas que se corresponden, apoyándonos en el producto cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dados dos conjuntos y se define el producto cartesiano entre los dos conjuntos como:  es decir el conjunto de todas las **parejas ordenadas** tales que el primer elemento de la pareja (primera componente) pertenece al conjunto y el segundo elemento de la pareja (segunda componente) pertenece al conjunto . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de Relación** |
| **Contenido** | Una relación entre dos conjuntos y es un subconjunto de su producto cartesiano. Es decir si entonces es una relación entre el conjunto y , al conjunto lo llamaremos **conjunto de salida** y a **conjunto de llegada**. |

**Ejemplo 1.** Si y tenemos que

entonces algunas relaciones distintas saliendo de y llegando a son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

El conjunto no es una relación entre el conjunto y ya que no se encuentra en el conjunto de llegada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

De manera similar el conjunto , no es una relación entre y ya que no se encuentra en el conjunto de salida.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

**Ejemplo 2.** Si los conjuntos:

son relación entre el conjunto de salida y de llegada .

El hecho de que las relaciones se defina como un conjunto de parejas ordenadas, no quiere decir que no se pueda utilizar una regla o ley que permita determinar la correspondencia, es más, escribir todas las parejas que pertenecen a la relación o realizar un diagrama sagital resulta ineficaz en conjuntos con un número demasiado grande de elementos o conjuntos infinitos (**como los son los sistemas numéricos que conocemos**); en el ejemplo de ciudades y departamentos hubiese sido inoficioso escribir las 1118 parejas que obtienen en la relación “esta ubicado en el departamento de”. Otros ejemplos son:

**Ejemplo 3.** Entre los números naturales como conjunto salida y el mismo como conjunto de llegada, la relación dada por esta relacionado con si es divisor de .

tenemos que:

ya que es divisor de

ya que es divisor de

ya que es divisor de

ya que aunque es divisor de , no es un número natural que es el

conjunto de salida.

ya que aunque es divisor de , no es un número natural que es el

conjunto de llegada.

**Ejemplo 4.** Entre los números naturales como conjunto de salida y los números racionales como conjunto de llegada la relación:

tenemos que:

ya que

ya que

ya que

ya que

ya que aunque , no es un número natural que es e conjunto de

salida.

**Ejemplo 5.** Entre los números reales como conjunto de salida y ellos mismos como conjunto de llegada, la relación dada por:

tenemos que:

[SECCIÓN 3]**1.1.1 Dominio y rango de una relación**

Dada una relación entre un conjunto y , se define el dominio de la relación (), como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas que pertenecen a la relación, es decir todos los elementos de que están en la relacionados con por lo menos un elemento de . El rango de la relación como el de todas las segundas componentes de la relación, es decir todos los de que están relacionados con por lo menos un elemento de .

**En el ejemplo 1**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* y el
* y el
* y el
* y el
* y el

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Sobre el dominio y rango de relaciones** |
| **Contenido** | Dos relaciones pueden tener el mismo dominio y rango y no necesariamente son la misma. |

En este ejemplo es el caso de y .

**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y mismo como llegada. |

* y el
* y el
* y el

En los ejemplo , y si bien podemos determinar si una pareja pertenece o no a la relación, no tenemos enlistadas todas las parejas de la relación, esto hace que para obtener los dominios debamos apoyarnos en las propiedades de las operaciones o relaciones de los conjuntos numéricos en los que las definimos.

**En el ejemplo 3.**

Como todo número es divisor de si mismo (incluso cero), luego la pareja para todo , por lo tanto y .

**En el ejemplo 4**

Se sabe que si y entonces , y no esta definido, luego, la única forma en que este relacionado con es que en ese caso

Luego debe ser una potencia de distinta de uno de donde:

ahora como

y es natural, entonces debe ser entero positivo y por tanto debe ser una fracción unitaria positiva, de donde:

**En el ejemplo 5.**

Despejamos de la ecuación

entonces

Luego los valores de deben cumplir que de donde:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Luego de donde .

De forma similar si despejando tenemos que de donde .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC10 |
| **Título** | Dominio y Rango de relaciones |
| **Descripción** | Actividad en la que el estudiante debe identificar en diferentes relaciones sus conjuntos de salida y llegada, así como dominios y rangos. |

[SECCIÓN 3]**1.1.2 Relaciones de números reales y el plano cartesiano**

El plano cartesiano es un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto que llamamos origen. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o eje , y la vertical, eje de las ordenadas o eje . Una pareja ordenada de números reales puede ser representada por un punto del plano y todo punto del plano representa una pareja ordenada de números reales, de manera similar a lo que pasa con la recta numérica y los números reales, se puede establecer una relación biunívoca entre puntos del plano y . [[VER](http://conteni2.educarex.es/mats/11894/contenido/)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Plano Cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 146258987 |
| **Pie de imagen** | Correspondencia entre puntos del plano y parejas ordenadas de números reales. |

Como el plano cartesiano nos representa todas las parejas ordenadas de números reales, es el escenario ideal para representar las relaciones ente números reales (ya que estas son conjunto de parejas de reales), graficar una relación en el plano, consiste en ubicar en el todos los puntos correspondientes a las parejas que pertenecen a la relación, asumiendo que el conjunto de salida lo ubicamos en e eje y el conjunto de llegada en el eje .

En los siguientes ejemplos se ha realizado la grafica de la relación usando la ayuda de un software.

**La grafica del Ejemplo 5**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso el conjunto de puntos correspondientes a la pareja de la relación forman una circunferencia. |

En algunas ocasiones desde la grafica de la relación es mucho más fácil determinar dominio y rango, en este caso se observa que el dominio y rango de la relación es

**Ejemplo 6.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso la grafica de la relación es una región, más específicamente un semiplano. |

Se observa que y

**Ejemplo 7**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso la grafica de la relación es una parábola. |

Se observa que y

**Ejemplo 8.** La ecuación de Batman [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En este caso la grafica de la relación forma el logo de Batman. |

Se observa que y

[SECCIÓN 2]**1.2 Funciones**

Las funciones son un caso particular de las relaciones, esto nos dice que toda función es una relación, pero no toda relación es función. Una relación entre los conjuntos y , es una función si todo elemento del dominio esta relacionado con un único elemento del conjunto ; es decir que si encontramos al menos un elemento del dominio que este relacionado con mas de un elemento de , entonces no es una función.

**En el ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* **no es una función** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* **no es una función** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* **no es una función** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* **si es una función**.
* **si es una función**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Acerca de la condición de función** |
| **Contenido** | La definición de función restringe que un elemento de es relacionado con más de un elemento de , pero no impide que un elemento de se pueda relacionar con más de un elemento de . |

En este ejemplo se tiene a pesar de que en , se relaciona con , y esta sigue siendo función.

**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG16 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y mismo como llegada. |

* **no es una función** ya que se observa que esta relacionado con dos elementos y .
* y si **son funciones.**

**El ejemplo 3, No es una función** ya que 1 es divisor de todo número luego para todo numero natural , es decir que esta relacionado con infinitos números.

**En el ejemplo 4,** Si entonces luego de donde , eso nos dice que cada natural que este en el dominio de la relación

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Prueba de la recta vertical** |
| **Contenido** | Cuando las relaciones son entre el conjunto de los números reales y el mismo desde la grafica de la relación es posible determinar si es o no función; para ello simplemente se observa si ninguna recta vertical corta la grafica en más de un punto, si esto sucede la relación es una función, en caso de que alguna recta vertical corte en más de un punto la relación no es función. |

**El ejemplo 5, No es una función.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Prueba de la recta verical para la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la circunferencia en más de un punto. |

**El ejemplo 6, No es función.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Prueba de la recta verical para la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la región en infinitos puntos. |

**El ejemplo 7, Si es función.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripción** | Prueba de la recta verical para la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la parábola en más de un punto. |

**El ejemplo 8, no es función**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Prueba de la recta verical para la relación del ejemplo 8. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta el logo en dos puntos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | ¿Cuáles funciones son relaciones? |
| **Descripción** | Actividad en el que se practica como se diferencian las relaciones que son funciones de las que no. |

[SECCIÓN 3]**1.2.1 Codominio, imagen y preimagen de funciones**

Como se ha visto, las funciones son relaciones es decir que establecen una correspondencia entre elementos de un conjunto de salida y un conjunto de llegada , por lo que tienen definido un **dominio** y **rango**, pero hay otros elementos que deben tener en cuenta cuando se trabaja con una función, estos son, codominio, imagen y preimagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de codominio de una función** |
| **Contenido** | El conjunto de llegada de una función se denomina el **codominio de la función** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de imagen por una función** |
| **Contenido** | Como en las funciones cada elemento del dominio esta relacionado con un único elemento del condominio, dado un elemento del dominio, se denomina **imagen** **de**  **por**  **ó**  precisamente a ese único elemento con el que se encuentra relacionado. |

Se observa que si una relación no es función no tendría sentido hablar de la imagen por , por ejemplo en la relación , ya que es el único divisor de , pero no estaría determinado ya que todo número natural divide a cero, no hay seguridad de que número se esta hablando, podría ser; mientras que cuando se determina para cada elemento del dominio un único elemento del codominio entonces los elementos que se toman en el codominio **dependen** de los valores del dominio, en otras palabras, si decimos que estamos afirmado que el valor de **depende y queda determinado** por el valor de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de preimagen por la función** |
| **Contenido** | Si es un elemento del rango de una llamaremos **preimagen de**  **por**  a todos los elementos del dominio cuya imagen sea . |

A diferencia de la imagen, las preimagenes no son únicas.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación , en estos casos la flecha indica la correspondencia. |

es una función con , y . Además se tiene que:

además son las preimagenes de .

[SECCIÓN 2]**1.3 Funciones de números reales.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones de números reales** |
| **Contenido** | Si es un elemento del rango de una llamaremos **preimagen de**  **por**  a todos los elementos del dominio cuya imagen sea . |

Por lo general las funciones de números reales se expresan de forma grafica o analítica, la manera grafica corresponde a su representación en el plano cartesiano y la forma analítica es cuando la imagen de un elemento del dominio se puede expresar como la aplicación de las operaciones y relaciones establecidas en el conjunto de los números reales. Por ejemplo las funciones dadas por las expresiones analíticas:

, , ,

Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión analítica o establecer la grafica de una función de números reales, por ejemplo, establecemos sobre los reales la función que dado un número real , su imagen por es la cantidad de cifras periódicas que tiene su expansión decimal, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

, y

Pero para esta función no podemos encontrar una expresión analítica o grafica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC30 |
| **Título** | Dominio y Rango de algunas funciones de números reales con expresiones analiticas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los porcedimeintos para determinar el dominio de funciones de números reales. |

[SECCIÓN 2]**1.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Determinar, dominio, rango, codominio, imagenes y preimagenes de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican y determinan el dominio, rango, codominio, imagenes y preimagenes de funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculo de dominio de funciones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se determinan el dominio de funciones de numeros reales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Otras formas de graficar funciones. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se explora otra forma de graficar las funciones de números reales. |

[SECCIÓN 1]**2 propiedades de las funciones**

Para profundizar el estudio sobre las funciones es necesario explorar ciertas características o propiedades que cumplen algunas funciones y que repercuten fuertemente tanto en el comportamiento de la función como en la grafica de la misma, varias de estas propiedades se pueden definir para cualquier tipo de función, mientras que otras se definen para las funciones de números reales.

[SECCIÓN 2]**2.1 Funciones inyectivas o uno a uno**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion inyectiva o uno a uno** |
| **Contenido** | Una función se denomina **inyectiva o uno a uno** si todo elemento del rango tiene una única preimagen. En otras palabras  Si entonces |

Ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG22 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa que el , calculemos las preimagenes para cada uno de esto valores

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como cada elemento del rango tiene una sola preimagen entonces la **función es inyectiva.**

Ejemplo 2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG23 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa que el , calculemos las preimagenes para cada uno de esto valores

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de son .

Como hay un elemento del rango que tiene más de una preimagen entonces la **función no es inyectiva.**

Para el caso de las funciones de números reales podemos observar si una función es inyectiva a partir de la grafica, usando rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta horizontal** |
| **Contenido** | Una función función de número resles es inyectiva si y solos si ninguna recta horizontal corta la resta en más de un punto. |

Ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG24 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la grafica en más de un punto. |

Ejemplo 2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Prueba de la recta verical |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta corta la grafic de la función en más de un punto. |

[SECCIÓN 2]**2.2 Funciones sobreyectivas**

Una función es sobreyectiva si el rango es el mismo codominio

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Diagrama sagital represetando la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función |

Se observa que el , y como coincide rango y codominio las función **es sobreyectiva.**

Ejemplo 2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa que el , y como no coincide rango y codominio la **función no es sobreyectiva**.

Ejemplo 3. La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** | Función en el plano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El rango son todos los reales |

En la grafica se observa que el rango son los número reales por lo tanto **es una función sobreyetiva.**

[SECCIÓN 2]**2.3 Funciones biyectivas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Biyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. |

Ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de una función. |

Se observa que el = por lo tanto es una función **sobreyectiva,** ahora calculemos las preimagenes para cada uno de esto valores

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como las preimagenes son únicas **es una función inyectiva y por lo tanto es biyectiva.**

Ejemplo 2. lA función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la grafica en más de un punto y el rngo son los reales. |

Desde la grafica podemos ver que pasa la prueba de la recta horizontal por lo que s inyectiva y además el rango son lo números reales por lo que es sobreyectiva, por tanto la **función es biyectiva.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC70 |
| **Título** | La relación reciproca y biyectividad. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se define la relación reciproca y cual es su relación con las propiedades de inyectividad, sobryectividad y biyectividad de funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como se identifican las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. |

[SECCIÓN 2]**2.4 Propiedades de funciones de números reales**

Cuando se establece una función de números reales es posible usar la estructura algebraica de los números reales para establecer propiedades y operaciones en el conjunto de las funciones de números reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La estructura de algebraica que caracteriza a los números reales, es la estructura de campo ordenado, es decir tenemos un orden total en los números reales, una suma que es conmutativa y asociativa, tiene elemento neutro y opuestos aditivos, una multiplicación que distribuye a la suma, es asociativa y conmutativa, tienen elemento neutro y todos menos cero tienen elementos inversos y se cumplen las propiedades de monotonía. |

[SECCIÓN 3]**2.4.1 Funciones pares**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion Par** |
| **Contenido** | Una función se dice par si para todo se tiene que y además |

En el plano cartesiano las grafica de una función par se identifica porque al ser reflejada por el eje , la grafica obtenida coincide con la función.

Ejemplo 1. La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG33 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El reflejo de la grafica por el eje coincide con la grafica. |

Ejemplo 2. La función

No es una función par, ya que por ejemplo para el caso de se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG34 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El reflejo de la grafica por el eje no coincide con la grafica. |

[SECCIÓN 3]**2.4.2 Funciones Impares**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion impar** |
| **Contenido** | Una función se dice par si para todo se tiene que y además |

En el plano cartesiano la grafica de una función impar se identifica porque al ser reflejada por el eje y por el ele las graficas obtenidas coinciden entre ellas.

Ejemplo 1. La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG35 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El reflejo de la grafica por el eje y por el eje coinciden. |

Ejemplo 2. La función

No es una función impar, ya que por ejemplo para el caso de se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG36 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El reflejo de la grafica por el eje y por el eje no coinciden. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Funciones pares e impares |
| **Descripción** | Acitividad en la que se practica como se identifican las funciones pares e impares. |

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Funciones Creciente**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion creciente** |
| **Contenido** | Una función se dice creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

En el plano cartesiano la grafica de una función creciente se identifica porque la grafica se ve ascendiendo.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG37 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es creciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Monotona Creciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monotona creciente si es creciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Funciones Decrecientes**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion creciente** |
| **Contenido** | Una función se dice creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

En el plano cartesiano la grafica de una función creciente se identifica porque la grafica se ve descendiendo.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG38 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es decreciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Monotona dereciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monotona decreciente si es decreciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Máximos y mínimos relativos y absolutos.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo absoluto en si y solo si y además  para todo . |

En estos casos decimos que es el mínimo de la función y es el valor donde lo alcanza.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG39 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función Alcanza un minimo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Maxímo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo absoluto en si y solo si y además  para todo . |

En estos casos decimos que es el mínimo de la función y es el valor donde lo alcanza.

Ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG40 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función Alcanza un máximo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo relativo en si y solo si y existe un tal que  para todo . |

En estos casos decimos que es el máximo de la función y es el valor donde lo alcanza.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo relativo en si y solo si y existe un tal que  para todo . |

En estos casos decimos que es el mínimo relativo de la función y es el valor donde lo alcanza.

Si se observa la función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG41 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene un máximo relativo en y un mínimo relativo en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Crecimiento, decrecimiento, maximos y minimos de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican las funciones crecientes, decrecientes, asi como sus maximos y los minimos a partir de su grafica. |

[SECCIÓN 3]**2.4.1 Concavidad**

En el plano cartesiano la grafica de una función impar se identifica porque al tomar dos puntos de la grafica el segmento que os une queda por encima de la grafica

Ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG42 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El segmento queda por encima de la grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG43 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El segmento queda por encima de la grafica. |

En el plano cartesiano la grafica de una función cóncava hacia arriba se identifica porque al tomar dos puntos de la grafica el segmento que los une queda por debajo de la grafica.

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG44 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El segmento queda por debajo de la grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG45 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El segmento queda por debajo de la grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC110 |
| **Título** | La importancia de la concavidad. |
| **Descripción** | Interecativo en el que se expresa la relación entre la concavidad y el coompartamiento de la variación en la función. |

[SECCIÓN 2]**2.5 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Refueza tu aprendizaje: Compartamiento de la varición de la función desde su grafica. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se puede indentifica la concavidad de una función y el comportamiento en la variación que estas propiedades determinan. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propiedades de las funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica lo aprendido sobre propiedades de las funciones. |

[SECCIÓN 1]**3 Clasificación de las funciones de números reales**

Las funciones de números reales que tienen una expresión analítica pueden clasificarse en dos tipo de funciones, las algebraicas y las trascendentes.

[SECCIÓN 2]**3.1 Funciones algebraicas**

Las funciones algebraicas son todas aquellas cuya expresión analítica se construye usando suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponentes racionales, y radicales de índice natural, por ejemplo:

, , , ,

Dentro de las funciones algebraicas más usuales son: las funciones potencias, las funciones polinómicas, las funciones racionales y as funciones radicales.

[SECCIÓN 3]**3.1.1 Funciones potencia**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones potencia** |
| **Contenido** | Una función de la forma con se denomina una función potencia. |

El dominio de cualquier función potencia es el conjunto de los números reales, el resto de sus características dependen de si es par o impar.

**par**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG46 |
| **Potencia** | Potencias pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones potencia pares. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente: |  |
| Decreciente |  |
| Concava hacia arriba: | En su dominio |

**impar**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG47 |
| **Potencia** | Potencias impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones potencia impares. |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Creiente: |  |
| Decreciente | No presenta este comp. |
| Concava hacia arriba: |  |
| Concava hacia abajo: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC140 |
| **Título** | Las desigualdades y las funciones potencias. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se analiza los procesos algebraicos en las desigualdades al aplicar la potenciación a partir de las graficas de las funciones potencias. |

[SECCIÓN 3]**3.1.2 Funciones polinómicas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina una función polinómicas. |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales, las demás propiedades y características de las funciones polinómicas depende del grado de la misma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El grado de una función polinómicas que es la mayor potencia de la expresión. |

Las funciones polinómicas que se pueden caracterizar completamente son la función , la funciones de grado cero o constates, las funciones de grado uno que se clasifican en lineales y afines y las de grado dos que son las funciones cuadráticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función constante** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función constante. |

La grafica de las funciones constantes siempre son rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG48 |
| **Potencia** | Constantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones constantes |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: |  |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función lineal** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función lineal |

La grafica de las funciones afines, siempre son rectas con inclinación que pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG49 |
| **Potencia** | Grafica de varias funciones lineales en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión alegrabrica que las define. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones lineales |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |

La función lineal es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir , si esta es positivo la función es creciente si es negativa la función es decreciente, pero en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función afin** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función afin. |

La grafica de las funciones afines, siempre son rectas con inclinación que no pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG50 |
| **Potencia** | Grafica de varias funciones afines en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión alegrabrica que las define. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones afines |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |

De manera similar a las funciones lineales, las funciones afín es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir , si este es positivo la función es creciente si es negativo la función es decreciente, pero en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función cuadratica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina función cuadratica. |

La grafica de las funciones afines, siempre son parabolas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG51 |
| **Potencia** | Grafica de varias funciones afines en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión alegrabrica que las define. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones cuadraticas |

Algunas de las características principales de la función cuadrática son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si y solo si |
| Impar | No |

Otras de sus características principales cambian según el signo de el coeficiente que acompaña la variable al cuadrado, es decir ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Rango: |  |  |
| Creiente: |  |  |
| Decreciente |  |  |
| Maximo: | No tiene |  |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |  |
| Minimo |  | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |  |
| Concava hacia arriba: |  | No presenta este comp. |
| Concava hacia abajo: | No presenta este comp. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC150 |
| **Título** | Graficas de funciones polinomicas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia las formas generales de las graficas de fucniones polinomicas. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones racionales**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina una función racional. |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los que hacen que el denominador sea cero.

Ejemplo 1. Considere la función

se iguala a cero, el denominador y se halla el conjunto solución para sacarlo del dominio:

de donde

Ejemplo 2. Considere la función

se iguala a cero, el denominador y se halla el conjunto solución para sacarlo del dominio:

pero esta expresión nunca es cero por lo tanto .

Ejemplo 3. Considere la función

se iguala a cero, el denominador y se halla el conjunto solución para sacarlo del dominio:

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional impropia** |
| **Contenido** | Una función racional se considera impropia si y solo si el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales impropias

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional propia** |
| **Contenido** | Una función racional se considera propia si y solo si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales propias

, y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asintotas Verticales de una función racional** |
| **Contenido** | Diremos que un función racional  tiene una asintota vericla si y |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota en si la función toma valores muy grandes (en valor absoluto) a la derecha o izquierda de la recta.

Ejemplo 1. Considere la función:

es una asíntota vertical ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 2. Considere la función:

es una asíntota vertical ya que y

es una asíntota vertical ya que y

no es una asíntota vertical ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en y pero no en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asintotas horizontal de una función racional** |
| **Contenido** | Diremos que un función racional  con ,   * Tiene una asintota horizontal si * Tiene una asintota horizontal si * No tiene asintota horizontal si |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota horizontal si la cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se acercan a .

Ejemplo 1. Considere la función:

Como son de igual grado tienen una asíntota horizontal

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 2. Considere la función:

Como el grado del denominador es mayor que el del numerador tienen una asíntota horizontal

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG53 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica presenta asintota en |

Ejemplo 3. Considere la función:

Como el grado del denominador es menor que el del numerador no tienen una asíntota horizontal .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG54 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota horizontal |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asintotas oblicuas de una función racional** |
| **Contenido** | Diremos que un función racional  con y tiene una asintota horizontal , donde  es la expresión que se obtiene al hacer la división de polinomios. |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tienen una asíntota horizontal si la cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se acercan a la recta.

Ejemplo 1. Considere la función:

Dividiendo los polinomios [[VER](http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/division_polinomios/Dpolinomios_home.html)], se tiene que:

Por lo tanto es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG55 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota oblicua |

Ejemplo 2. Considere la función:

Dividiendo los polinomios se tiene que:

por lo tanto es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG56 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica no presenta asintota oblicua |

Como se observa las graficas de las funciones racionales pueden tomar diferentes formas por lo que no se pueden caracterizar sus propiedades de forma general.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Asintotas de funciones racionales. |
| **Descripción** | Actividad en el que se practica como se identifican las diferentes asintotas de una función racional. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones radicales**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Radical** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y , se denomina una **función radical**. |

De manera similar a las funciones potencia, el comportamiento y las características de las funciones radicales dependen de si es par o impar.

**par**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Potencia** | Radicales pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones radicales pares. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia abajo: | En su dominio |

**impar**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Potencia** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones radicales impares. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia abajo: |  |
| Concava hacia arrib: |  |

[SECCIÓN 2]**3.2 Funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas, se consideran funciones trascendentes, dentro de ellas se encuentran algunas que tienen expresión analítica y otras que no. En general se estudian tres tipos de funciones trascendentes, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

[SECCIÓN 3]**3.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas, surgen al ampliar el concepto de razón trigonométrica, en el circulo trigonométrico para poder trabajar con cualquier valor para el ángulo y no solo los que se encuentran entre y de radián. Las seis funciones trigonométricas son: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Cosecante y Secante. A continuación se presentan sus graficas y propiedades.

**La función Seno**

La función seno se construye a partir del circulo trigonométrico [[VER](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Docsup/Recursos/42810459F%5CFuncionSeno.zip_desc%5CFuncionSeno/index.html)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG59 |
| **Descripción** | La función Seno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función seno |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Periodo: |  |
| Amplitud: |  |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: |  |
| Minimo |  |

Desde la grafica de la función seno, se puede observar que se presentan intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento, e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, luego se tienen que en la función:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente en: |  |
| Decreciente en: |  |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

**La función Coseno**

La función Coseno se construye a partir del circulo trigonométrico [[VER](http://www.antioquiadigital.edu.co/Demostraciones-interactivas-de-Geogebra/construccion-de-la-grafica-de-la-funcion-coseno.html)]

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG60 |
| **Descripción** | La función Coseno y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función coseno |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Periodo: |  |
| Amplitud: |  |
| Par | Si |
| Impar | No |
| Maximo: |  |
| Minimo |  |

Similar a la función Senos desde la grafica de la función seno, se puede observar que se presentan intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento, e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, luego se tienen en la función coseno:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creiente en: |  |
| Decreciente en: |  |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

**La función Tangente**

La función tangente se puede construir a partir de la identidad , por esta razón es necesario sacar del dominio aquellos valores donde el coseno se vuelve cero, obsérvese que en esos mismos valores el Seno no es cero, luego de manera similar a lo que sucede con las funciones racionales en esos valores se presenta una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG61 |
| **Descripción** | La función Tangente y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función tangente |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | Si |
| Periodo: |  |
| Par | No |
| Impar | Si |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Creiente: | En su dominio |
| Asintotas Verticales: |  |

En la grafica de la función tangente se observa que en medio de dos de sus asíntotas verticales la función cambia de comportamiento de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba, y por ser periódica este comportamiento se presenta una y otra vez, de donde:

|  |  |
| --- | --- |
| Concava hacia arriba en: |  |
| Concava hacia abajo en: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Caracteristicas y propiedades de las funciones trigonometricas. |
| **Descripción** | Actividad en el que a partir de la grafica de las funciones cotangente, cosecante y secate se identifican sus carcaterizticas y propiedades. |

[SECCIÓN 3]**3.1.3 Funciones exponenciales**

Una función exponencial es una función en la que la variable se encuentra en el exponente, de una manera más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion Exponencial** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con , se denomina una **función exponencial.** |

Se observa que debe ser positivo ya que cuando es negativo, calcular el dominio o realizar un bosquejo de la grafica de la función es una tarea que no es posible resolver de forma practica.

Las funciones exponenciales tienen como dominio todos los números reales y su rango son los reales positivos, son funciones inyectivas. Sus otras características depende del valor de , se consideran dos casos, cuando o cuando , el caso de no se considera porque sería la función constante .

**Si**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG64 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Exponencial con |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Decreciente | En su dominio |
| Concava hacia arriba: | En su dominio |

**Si**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG65 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Exponencial con |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |
| Creiente: | En su dominio |
| Concava hacia arriba: | En su dominio |

[SECCIÓN 2]**3.3. Funciones a trozos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funcion a trozos** |
| **Contenido** | Una **función esta definida a trozos o por partes** si el domonio se divide en dos o más subconjuntos disjuntos (que su intersección sea vacía) que llamaremos trozos, y para cada uno de ellos se da una expresión o regla de correspondencia para hallar la imagen. |

Ejemplo 1. Una función de dominio , definida en tres trozos, el primero es intervalo y las imágenes quedan determinadas por la expresión , el segundo trozo es el intervalo y la imagines están determinas por la expresión , y el ultimo trozo es el intervalo en el que las imágenes están determinadas por la expresión ; esto se puede escribir como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG66 |
| **Descripción** | La función a trozos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función efinida en tres trozos |

Ejemplo 2. La función con dominio real dada por:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG67 |
| **Descripción** | La función a trozos, modificarla para que se note el hueco que se dan el segmeto cuando |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función en definada en cinco trozos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los trozos en los que están definidos la función sean disjuntos por que de lo contrario se podría perder la condición de función. |

Por ejemplo la expresión

no es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Realizar la grafica de la expresión dada  Y mostrar con una recta vertical entre -1 y 1 que la grafica es cortada en dos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba de la recta vertical en la expresión dada por trozos. |

Dentro de las funciones a trozos encontramos dos que son las más estudiadas, la función valor absoluto y la función parte entera.

[SECCIÓN 3]**3.3.1 Función valor absoluto**

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos, los reales negativos y los no negativos, como se sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Grafica del valor absoluto |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función valor absoluto |

Las características del valor absoluto son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si |
| Impar | No |
| Maximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo |  |
| Valores en que alcanza el minimo: |  |
| Creciente: |  |
| Decreciente |  |

[SECCIÓN 3]**3.3.2 Función parte entera**

La función valor absoluto es una función definida en infinitos trozos de la forma cono un número entero.

La función parte entera también se puede definir como la que a cada número real le hace corresponder el mayor entero que es menor o igual al número dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG69 |
| **Descripción** | La función parte entera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función parte entera |

Las características de la función parte entra son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | No |
| Impar | No |
| Maximo: | No |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Minimo | No |
| Valores en que alcanza el minimo: | - |

[SECCIÓN 2]**3.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC180 |
| **Título** | Las transformaciones de funciones. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian como obtener graficas de funciones de ciertas funciones a partir de otras. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu prendizaje: Clasificación de funciones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica lo aprendido sobre las funciones usuales de números reales. |

[SECCIÓN 1]**4 Operaciones con funciones**

Dadas dos funciones de números reales y , es posible aprovechar la estructura aditiva y multiplicativa de los números reales para definir operaciones entre estas dos funciones, por ejemplo la suma de dos funciones es una función para la cual la imagen por de un elemento esta dado por la suma de la imagen por y la imagen por , es decir, para que la expresión tenga sentido es necesario que este en el dominio tanto de como de .

[SECCIÓN 2]**4.2 Suma, diferencia, producto y cocientes de funciones**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los númos reales y un número real, se definen las siguientes operaciones entre funciones:   * para todo * para todo * para todo * para todo * para todo |

Ejemplo 1. Considere las funciones y entonces:

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG70 |
| **Descripción** | Graficas de y en distintos colores y con etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Suma de funciones |

|  |
| --- |
| donde |

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG71 |
| **Descripción** | Graficas de y, con distintos colores y etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Diferencia de funciones |

|  |
| --- |
| donde |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG72 |
| **Descripción** | Graficas de y con distintos colores y etiqueta de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Producto de funciones |

|  |
| --- |
| donde  como la ecuación no tienen solución en el conjunto de los reales entonces: |

Cuando se opera con funciones el dominio de la función resultante no solo esta dado por la expresión que se obtiene si no que también es necesario tener en cuenta los dominios de las funciones que se operan, en el ejemplo anterior la expresión resultante fue que no se indetermina en , pero este no hace parte del dominio ya que no esta en el domino de .

|  |
| --- |
| donde  como la ecuación tienen solución en el conjunto entonces: |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG73 |
| **Descripción** | Graficas de y , , con disntintos colores y etiquetas de cual es cada una, en el caso de que se resalte el hueco que se presenta en |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cociente de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Algebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones.. |

[SECCIÓN 2]**4.2 Composición de funciones**

Si tenemos dos funciones y tales que el conjunto de llegada de es precisamente conjunto de salida de , entonces es posible dado un elemento de salida aplicarle la función y en seguida aplicarle a su imagen la función , es decir, e define una función que llamada compuesta (, que lleva elementos del conjunto de salida de al conjunto de llegada de , de tal manera que la imagen por la composición es a imagen por de la imagen por .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG74 |
| **Descripción** | Diagrama que muestra la Composición de funciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | Diagrama Sagital de la composición de funciones. |

De manera más precisa para funciones de números reales se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los números reales se define la **composición de funciones** como:  para todo |

Para hallar el dominio de podemos tomar el dominio de y eliminar de este los valores que estén restringidos en la expresión que resulta al evaluar en .

Ejemplo 1. Si se consideran las funciones y

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante no tiene restricciones luego . |

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante no tiene restricciones luego . |

Se observa que la composición de funciones **no es conmutativa**.

Ejemplo 2. Si se consideran las funciones y

|  |
| --- |
| Tenemos que el y como la expresión resultante tiene como restriccion que entonces . |

De manera similar a las operaciones de números reales podemos establecer que propiedades cumpla la composición de funciones, entre ellas están

* La composición de funciones es asociativa es decir

Ejemplo 1. Considere las funciones , y .

Comprobemos que

Calculado

|  |
| --- |
|  |
|  |

Calculando

|  |
| --- |
|  |
|  |

* La composición de funciones tienen elemento neutro

Ejemplo. Dado si se tiene que:

luego .

Como se menciono anteriormente la composición de funciones no es conmutativa, la pregunta es si tiene elementos inversos.

[SECCIÓN 3]**4.2.1 Funciones inversas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Dada una función de números reales, decimos que es la función inversa de si el y    Para todo y  Para todo , en estos casos notamos a como . |

No todas las funciones de número reales tienen una función inversa, para ellos se necesita que la función sea inyectiva:

Ejemplo 1. Si entonces

Ejemplo 1. Si entonces

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC210 |
| **Título** | Composición de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se componen funciones. |

[SECCIÓN 2]**4.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Inversas de las funciones exponenciles y trigonometricas. |
| **Descripción** | Interctivo en el que se estudian las funciones logaritmicas y las invesas de las funciones trigonometricas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Operaciones con funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones.. |

[SECCIÓN 1]**5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Analizando funciiones de números reales. |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone analizar varias de las propiedades de una función de números reales. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema de funciones. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 | |
| **Web 01** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 02** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 03** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
|  | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 04** |  | <http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/coordenadascartesianas/sec/MATE30_imprimible_alumnado.pdf> |
|  |  | http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/mate/Matematicas\_VI/Applets\_Geogebra/operacionesconfunciones.html |
| **Web 05** |  | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |
|  |  | <http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/rectas.pdf> |
|  |  |  |