|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de límite de una función es la base sobre la que se construye el cálculo, prueba de ello es que como se verá más adelante la derivada y la integral principales objetos de estudio del cálculo, resultan por definición ser límites. |

[SECCIÓN 1]**1 Noción intuitiva de límite**

Etimológicamente, la palabra límite proviene del latín “limes”, que se traduce como “frontera o borde”, en matemáticas, el concepto de límite se refiere a la proximidad a dicho borde, por lo tanto los valores próximos al límite en una función, son de interés en el estudio del éste.

Asimismo, el concepto de función permite modelar y analizar situaciones relacionadas con economía, aspectos ambientales o físicos, este tipo de análisis se fortalece con el **concepto de límite** que permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que son modelados a través de una función y que requieren ser analizados a largo plazo. Por esta razón el concepto de límite encierra la noción de infinito, te invitamos a revisar el siguiente interactivo que presenta una clasificación del infinito.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande e infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia el infinito desde las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas |

[SECCIÓN 2] **1.1 Límite de una función en un punto**

Calcular el límite de una función en un número real *a* es estudiar el comportamiento de las imágenes de los valores próximos a *a,*  de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Una función que está definida para valores tan aproximados a un número real como se quiere tanto a su derecha e izquierda y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real L, el límite cuando tiende a de las imágenes por la función *f* es L, y se denota como : |

**Ejemplo 1.** Sea la función ,

Esta función no está definida para *x = 0*, puesto que al remplazar cero por *x* en la función *f*, el denominador es cero, sin embargo al inspeccionar el comportamiento de los valores próximos a cero y sus imágenes tanto por derecha (números reales mayores que cero), como por izquierda (números reales menores que cero). Como se muestra en las siguientes tablas, se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,9983341664… |  | 0,1 | 0,9983341664682… | | -0,034 | 0,99980734446… |  | 0,034 | 0,9998073444691… | | -0,017 | 0,99995183402… |  | 0,017 | 0,9999518340293… | | -0,001 | 0,99999983333… |  | 0,001 | 0,9999998333333… | | -0,00023 | 0,99999999118... |  | 0,00023 | 0,9999999911833… | | -0,00001023 | 0,999999999982... |  | 0,00001023 | 0,9999999999825… | | -0,000000531 | 0,999999999999… |  | 0,000000531 | 0,99999999999995… | | -0,000000101 | 0,9999999999999… |  | 0,000000101 | 0,9999999999999… | |

Se observa que a la vez que *x* toma valores en la función más cercanos a cero tanto por derecha como por la izquierda las imágenes toman valores positivos cada vez más cercanos a *1*. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y que resalte los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , se evidencia que en los valores de *x* próximos a cero, sus imágenes se aproximan a uno. |

De esta forma, se tiene que el límite de la función *f* cuando *x* tiende a cero es *1*, y se representa como:

**Ejemplo 2.** Sea la función

,

al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se tienen las siguientes imágenes de *g(x)*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,544021110… |  | 0,1 | -0,54402111088… | | -0,034 | 0,9075576245… |  | 0,034 | -0,90755762454… | | -0,017 | -0,762216923… |  | 0,017 | 0,762216923022… | | -0,001 | -0,826879540… |  | 0,001 | 0,826879540532… | | -0,00023 | 0,1377066308… |  | 0,00023 | -0,13770663086… | | -0,00001023 | 0,8700178328… |  | 0,00001023 | -0,87001783285… | | -0,000000531 | 0,8962273099… |  | 0,000000531 | -0,8962273099… | | -0,000000101 | 0,0988696287… |  | 0,000000101 | -0,09886962877… | |

Se observa que sus imágenes no se aproximan a ningún número real en específico, por esta razón se afirma que la función , no tiene límite en *x=0.* Como se muestra en la representación gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función    se evidencia que *g(x)* oscila de creciente a decreciente sin aproximarse a un valor específico en el rango, a medida que los valores de su dominio se aproximan a cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si *f* es una función de número reales que está definida para valores tan aproximados como se quiere a derecha e izquierda de un número real *a* y a medida que *x* toma valores más cercanos a *a* sus imágenes son cada vez mayores, el límite cuando *x* tiende a *a* de las imágenes por la función *f* es infinito, y se denota como:  Si cuando *x* toma valores en la función *f* cada vez más próximos al número real *a,* sus imágenes son negativas y además el valor absoluto de sus imágenes son cada vez mayores, sin aproximarse a un número real especifico, el límite cuando *x* tiende a *x* de las imágenes por la función *f* es menos infinito, y se denota como: |

**Ejemplo 3.** Sea la función

,

al remplazar *x* por valores cercanos a cero se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 100 |  | 0,1 | 100,00 | | -0,034 | 865,0519… |  | 0,034 | 865,05 | | -0,017 | 3460,2076… |  | 0,017 | 3460,21 | | -0,001 | 1000000 |  | 0,001 | 1000000,00 | | -0,00023 | 18903591,6824… |  | 0,00023 | 18903591,68 | | -0,00001023 | 9555396935,9664… |  | 0,00001023 | 9555396935,97 | | -0,000000531 | 3546589776600,31… |  | 0,000000531 | 3546589776600,31 | | -0,000000101 | 98029604940692,1 |  | 0,000000101 | 98029604940692,10 | |

Como se observa en las tablas anteriores, a medida que los valores de *x* se aproximan a cero, sus imágenes son mayores, este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  ,  cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

Por lo tanto,

**Ejemplo 4.** Sea la función

al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se obtiene

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | -0,02 |  | 0,1 | -0,02 | | -0,034 | -0,17301… |  | 0,034 | -0,17301… | | -0,017 | -0,69204… |  | 0,017 | -0,69204… | | -0,001 | -200 |  | 0,001 | -200 | | -0,00023 | -3780,71834… |  | 0,00023 | -3780,71834… | | -0,00001023 | -1911079,38719… |  | 0,00001023 | -1911079,38719… | | -0,000000531 | -709317955,320… |  | 0,000000531 | -709317955,32006… | | -0,000000101 | -19605920988,1… |  | 0,000000101 | -19605920988,1… | |

Se observa que al aproximarse por derecha y por izquierda a cero, aunque sus imágenes son negativas, su valor absoluto es cada vez mayores. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  ,  cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son números reales negativos, y el valor absoluto de sus imágenes son cada vez son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

De esta forma, se concluye que el límite de *t(x)* cuando *x* tiende a cero es menos infinito, es decir

**Ejemplo 5.** Considere la función *m(x) = x2 – 2*, al remplazar a *x* por valores muy cercanos a cero se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *m(x) = x2 – 2* |  | *x* | *m(x) = x2 – 2* | | -0,1 | -1,99 |  | 0,1 | -1,99 | | -0,034 | -1,998844 |  | 0,034 | -1,998844 | | -0,017 | -1,999711 |  | 0,017 | -1,999711 | | -0,001 | -1,999999 |  | 0,001 | -1,999999 | | -0,00023 | -1,9999999471 |  | 0,00023 | -1,9999999471 | | -0,00001023 | -1,99999999989… |  | 0,00001023 | -1,99999999989… | | -0,000000531 | -1,9999999999997… |  | 0,000000531 | -1,9999999999997… | | -0,000000101 | -1,9999999999999... |  | 0,000000101 | -1,9999999999999… | |

Al remplazar *x* por números reales cercanos a cero, el valor de las imágenes de la función se aproxima a -2, además, en este caso , Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *m(x) = x2 – 2*, se observa que cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes se aproximan a *-2*. |

Por lo tanto, se obtiene que

En conclusión, de los ejemplos anteriores, la función *m(x) = x2 – 2,* es la única que tiene imagen cuando *x = 0*, sin embargo las funciones

, y

tienen límite cuando *x* tiende a cero, debido a que la noción de límite está relacionada principalmente con la noción de proximidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Límites por tabulación o gráfica |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el límite de una función en un punto a partir de su tabulación o su gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo en que se estudia el concepto de punto de acumulación y su relación con los limites. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Límites laterales**

Para determinar el límite de una función en un número real *a*, se consideran las imágenes de valores cercanos al número real *a* tanto menores que *a* como mayores que *a* como en los ejemplos anteriores, pero es posible que al analizar las imágenes de la función de los números reales próximos a *a,* se observe que las imágenes de los valores que están a la derecha de *a* se aproximen a un número real diferente al que se aproximan las imágenes de los valores que están a la izquierda del número real *a.* como se observa en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.** Considérese

Al remplazar *x* por valores cercanos a *-1*, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *X* |  |  | *X* |  | | -1,1 | -2,1 |  | -0,9 | 1,9 | | -1,034 | -2,034 |  | -0,966 | 1,966 | | -1,017 | -2,017 |  | -0,983 | 1,983 | | -1,001 | -2,001 |  | -0,999 | 1,999 | | -1,00023 | -2,00023 |  | -0,99977 | 1,99977 | | -1,00001023 | -2,00001023 |  | -0,99998977 | 1,99998977 | | -1,000000531 | -2,000000531 |  | -0,99999947 | 1,999999469 | | -1,000000101 | -2,000000101 |  | -0,999999999 | 1,999999899 | |

En la tabla de la izquierda se observa que al remplazar por valores cercanos y menores que -1, las imágenes de la función se aproximan a -2. Por otra parte la tabla de la derecha muestra que al remplazar en la función por valores cercanos y mayores que -1, sus imágenes se aproximan a 2, como también se observa en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de los valores a la derecha de -1 se aproximan a 2 y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto, el límite de la función *f* cuando tiende a no existe, ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia diferente tanto por derecha como por izquierda cada uno de estos comportamientos se describe como un límite lateral.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límites laterales** |
| **Contenido** | Sea una función de números reales definida para valores tan aproximados como se quiere a **izquierda** de un número real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la izquierda** es L, y se denota como :  De forma similar, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la derecha** es *L*, y se denota como: |

Del ejemplo 1, se obtiene que:

De esta forma, la existencia o no existencia del límite de una función depende de sus límites laterales, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Existencia del límite de una función a partir de sus límites laterales** |
| **Contenido** | Sea *f* una función de números reales y *a* un número real, por lo tanto,  si y solo si  Donde, |

En otras palabras, si los límites de la función por izquierda y por derecha de un número real son iguales, la función tiene límite, si los límites laterales son diferentes, el límite de la función no existe.

En el ejemplo 1,

no existe,

porque

**Ejemplo 2.** Sea la función *g(x) = x3 – 8,* al analizar las imágenes de los números reales cercanos a *x = 2*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* |  |  | *x* |  | | 1,9 | -1,141 |  | 2,1 | 1,261 | | 1,966 | -0,40110330… |  | 2,034 | 0,41497530… | | 1,983 | -0,20227091… |  | 2,017 | 0,20573891… | | 1,999 | -0,01199400… |  | 2,001 | 0,01200600… | | 1,99977 | -0,00275968… |  | 2,00023 | 0,00276032… | | 1,99998977 | -0,00012276… |  | 2,00001023 | 0,00012276… | | 1,999999469 | -0,00000637… |  | 2,00000053 | 0,00000637… | | 1,999999899 | -0,00000121… |  | 2,000000101 | 0,00000121… | |

Tanto por izquierda como por derecha las imágenes de la función se aproximan a 0 a medida que los elementos del dominio de la función se aproximan a 2, de esta forma se obtiene que

**Ejemplo 3.** Considera la gráfica de la función *h(x)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  se observan las imágenes de los valores próximos a *x = -4* |

De acuerdo con la gráfica *h(-4) = -1*, sin embargo se tiene que

, ,

por lo tanto

**Ejemplo 4.** Determinar el límite de la función cuando de

Al analizar las imágenes de *f(x)*  cuando *x* se aproxima a cero, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -0,1 | -10 |  | 0,1 | 10 | | -0,034 | -29,412… |  | 0,034 | 29,412… | | -0,017 | -58,824… |  | 0,017 | 58,824… | | -0,001 | -1000 |  | 0,001 | 1000 | | -0,00023 | -4347,826… |  | 0,000230000 | 4347,826… | | -0,00001023 | -97751,711… |  | 0,000010230 | 97751,711… | | -0,000000531 | -1883239,171… |  | 0,000000531 | 1883239,171… | | -0,000000101 | -9900990,099… |  | 0,000000101 | 9900990,099… | |

Por tanto,

La no existencia de

,

se verifica en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de *0*, las imágenes de valores a su derecha tienden a infinito y las imágenes de valores a su izquierda tienden a menos infinito. |

En el capítulo de funciones se mencionaba que la función racional

tiene una asíntota horizontal *x = 0*, a continuación se presenta la definición de asíntota vertical a través del límite de una función en un determinado punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asíntota vertical** |
| **Contenido** | **La asíntota vertical de una función *f* es *x = k****,* si y solo si existen valores del dominio de *f* tan cercanos a como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

**Ejemplo 5.** Considera la función

Para analizar los valores alrededor de -1, hay que tener en cuenta que a la izquierda de -1, la función está dada por la expresión

y a la derecha de -1 , la expresión es

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *f(x)* |  | *X* | *f(x)* | | -1,1 | -36,3 |  | -0,9 | -0,19 | | -1,034 | -94,337294… |  | -0,966 | -0,066844 | | -1,017 | -182,5215882… |  | -0,983 | -0,033711 | | -1,001 | -3006,003… |  | -0,999 | -0,001999 | | -1,00023 | -13049,47895… |  | -0,99977 | -0,00045995 | | -1,00001023 | -293261,132… |  | -0,99998977 | -0,00002046… | | -1,000000531 | -5649723,514… |  | -0,999999469 | -0,00000106… | | -1,000000101 | -29702976,32… |  | -0,999999899 | -0,0000002… | |

de donde:

por lo tanto, la función *f* tiene como asíntota vertical la recta *x = -1*, a pesar de que *f(-1) = 2.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asíntota horizontal *x = -1* |

Los límites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto, aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda.

**Ejemplo 6.** Si se considera la función

que tiene por domino *Dom h = (-∞, -1) ∪ [1, ∞)*, no tiene sentido hablar del límite cuando *x* tiende a -1, ya que no es posible calcular las imágenes de valores cercanos por la derecha, pero como si es posible determinar las imágenes a la izquierda de -1, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| -1,1 | *-4,582575...* |
| -1,034 | *-7,7345672…* |
| -1,017 | *-10,8925231…* |
| -1,001 | *-44,732538…* |
| -1,00023 | *-93,255842…* |
| -1,00001023 | *-442,158819…* |
| -1,000000531 | *-1940,741956…* |
| -1,000000101 | *-4449,941709…* |

Se observa que las imágenes son negativas y el valor absoluto de sus imágenes es cada vez mayor a medida que su dominio se aproxima a -1, luego

por esta razón, la función tiene asíntota horizontal *x = -1*.

De manera similar,

no existe,

Porque no es posible estudiar las imágenes de los valores a la izquierda de 1, pero sí de los valores a la derecha de 1, que se presentan en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| x |  |
| 1,1 | 0,218217… |
| 1,034 | 0,129289… |
| 1,017 | 0,091806… |
| 1,001 | 0,0223551… |
| 1,00023 | 0,010723… |
| 1,00001023 | 0,002261… |
| 1,000000531 | 0,000515… |
| 1,000000101 | 0,000224… |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado en el intervalo (-1,5, 1,5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función  que tiene como asíntota vertical la recta *x = -1* y no tiene asíntota vertical en *x = 1* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Límites laterales |
| **Descripción** | Actividad en que se practica el cálculo del límite o los límites laterales de una función en un punto a partir de su gráfica |

[SECCIÓN 2] **1.2 Límites en el infinito**

El estudio de las imágenes de las funciones cuando los valores del dominio se hacen infinitamente grandes se lleva a cabo mediante el estudio de los límites en el infinito que se definen como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite al infinito** |
| **Contenido** | Si *f* es una función definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces el limite cuando tiende a **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como:  Asimismo, si la función *f* está definida en números reales negativos cuyo valor absoluto es un número real infinitamente grande y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces se dice que el límite cuando *x* tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como : |

**Ejemplo 1.** Considera la función

,

al evaluar la función con números reales positivos cada vez mayores, que se hacen infinitamente grandes (tienden a infinito) o con números reales negativos cuyo valor absoluto es un es cada vez mayor (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  | | | X |  |  | x |  | | -100 | -0,00506365641… |  | 100 | -0,00506365641… | | -345,53 | -0,00013074556… |  | 345,53 | -0,00013074556… | | -3133,605 | -0,00031627445… |  | 3133,605 | -0,00031627445… | | -12896,58483 | -0,00002636868… |  | 12896,58483 | -0,00002636868… | | -369896,3204 | -0,00000238665… |  | 369896,3204 | -0,00000238665… | | -6943605,786 | 0,00000013170… |  | 6943605,786 | 0,00000013170... | | -79365930,49 | 0,00000001023… |  | 79365930,49 | 0,00000001023… | |

En ambos casos, a medida que el valor absoluto del dominio de la función es mayor, se observa que las imágenes se aproximan a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

**Ejemplo 2.** Si se considera la función *g(x) = -x3+x2* se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | *x* | *g(x) = -x3+x2* | | -100 | 1010000 | | -345,53 | 41372556,61 | | -3133,605 | 30780192033,32 | | -12896,58483 | 2145150817914,39 | | -369896,3204 | 50610567542353400,000 | | -6943605,786 | 334776705850875000000 | | -79365930,49 | 499922107415254000000000 | |

|  |
| --- |
|  |

En la tabla anterior se observa que cuando lo elementos del dominio en valor absoluto son infinitamente grandes, sus imágenes tienden a infinito. Es decir

.

Además,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | *x* | *g(x) = -x3+x2* | | 100 | -990000 | | 345,53 | -41133775 | | 3133,605 | -30760553073 | | 12896,58483 | -2144818174114 | | 369896,3204 | -50610293895777700 | | 6943605,786 | -334776609423552000000 | | 79365930,49 | -499922094817352000000000 | |

De esta manera, se concluye que

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

**Ejemplo 3.** Si se considera la función *h(x) = sen (x)*

Al representar las imágenes de *h(x)* en una tabla se obtiene

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | *h(x) = sen (x)* |  | *x* | *h(x) = sen (x)* | | -100 | 0,506365641110 |  | 100 | -0,506365641110 | | -345,53 | 0,045176513825 |  | 345,53 | -0,045176513825 | | -3133,605 | 0,991079199205 |  | 3133,605 | -0,991079199205 | | -12896,58483 | 0,340065938383 |  | 12896,58483 | -0,340065938383 | | -369896,3204 | 0,882813679244 |  | 369896,3204 | -0,882813679244 | | -6943605,786 | -0,914515258822 |  | 6943605,786 | 0,914515258822 | | -79365930,49 | -0,812289706560 |  | 79365930,49 | 0,812289706560 | |

Debido a que la función oscila entre -1 y 1, en el infinito y en menos infinito no se muestra alguna tendencia, es decir

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

**Ejemplo 4.** Considera la función

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* |  |  | *x* |  | | -100 | -0,01 |  | 100 | 0,01 | | -345,53 | -0,002894104709 |  | 345,53 | 0,002894104709 | | -3133,605 | -0,000319121268 |  | 3133,605 | 0,000319121268 | | -12896,58483 | -0,000077539908 |  | 12896,58483 | 0,000077539908 | | -369896,3204 | -0,000002703460 |  | 369896,3204 | 0,000002703460 | | -6943605,786 | -0,000000144017 |  | 6943605,786 | 0,000000144017 | | -79365930,49 | -0,0000000125999 |  | 79365930,49 | 0,0000000125999 | |

Se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en menos infinito tienden a cero. |

En el capítulo de funciones se mencionaba que la función racional

tenía una asíntota vertical *y = 0*, por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de asíntota horizontal aplicada a cualquier función (no solamente las funciones racionales).

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asíntota horizontal** |
| **Contenido** | Una función *f* tiene como **asíntota horizontal** la recta ***y = k*** y solo si cumple una o las dos siguientes condiciones: |

**Ejemplo 4.** Si consideramos la función

Al analizar los límites al infinito y a menos infinito, se debe tener en cuenta que para valores negativos x < -2, la función está dada por la expresión

y para los valores positivos la expresión que permite calcular las imágenes es

Como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | x | *f(x)* |  | x | *f(x)* | | -100 | 3,0003000300030… |  | 100 | 0,1 | | -345,53 | 3,00002512773666… |  | 345,53 | 0,02894104708… | | -3133,605 | 3,00000030551518… |  | 3133,605 | 0,00319121267… | | -12896,58483 | 3,0000000180373… |  | 12896,58483 | 0,00077539907… | | -369896,3204 | 3,0000000000219… |  | 369896,3204 | 0,0000270346… | | -6943605,786 | 3,0000000000006… |  | 6943605,786 | 0,00000144017… | |

Por lo tanto,

Se concluye que la función *f* tiene dos asíntotas horizontales que son la recta *y = 1* y la recta *y = 0.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | Comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango y las rectas y=1 y y=0 punteadas como asíntotas de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas *y = 0*, y *y = 1* son las asíntotas horizontales de la función *f*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Límites en el infinito |
| **Descripción** | Actividad en que se identifica el límite de una función en el infinito a partir de su tabulación o su gráfica |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Definición formal de límite |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presenta y se explica el concepto formal de límite de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Límites de algunas funciones usuales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los límites de algunas funciones estudiadas con anterioridad y de algunas funciones especiales que son la base para el cálculo de límites de otras funciones |

[SECCIÓN 1] **2. Propiedades de los límites**

Hasta el momento, para calcular el límite de una función en un punto (o en el infinito), se debe conocer la gráfica de la función o poder calcular fácilmente las imágenes por la función de valores cercanos al número (o que tiendan al infinito), pero esta tarea no siempre es fácil de hacer, en especial si no se cuenta con una calculadora o computador, por esta razón, es necesario establecer algunas reglas que faciliten el cálculo de límites, entre ellas las propiedades.

Las propiedades de los límites relacionan a través de las operaciones de funciones, límites de funciones conocidos, y permiten calcular los límites de funciones desconocidas y que se relacionan a través de la suma, el producto y el cociente de funciones.

[SECCIÓN 2] **2.1. Suma de límites**

El límite de la suma de dos funciones presenta la siguiente propiedad:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de una suma de funciones** |
| **Contenido** | Si y existen  entonces |

Estas propiedades también se aplican para los **límites laterales** y **límites en el infinito.**

**Ejemplo 1.** Calcular

Se conoce que

y

Por lo tanto, por la propiedad de la suma de límites

**Ejemplo 2.** Calcular

Como

Aplicando la propiedad de la suma de límites, se obtiene

De manera específica, en la propiedad de límite de la suma de funciones se destacan los siguientes casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Algunas casos del límite de una suma de funciones** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces, 2. Si y entonces, 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

**Ejemplo 3.** Calcular:

este límite se puede expresar como el límite de una suma de funciones así:

Por lo tanto, se presentan los siguientes dos casos

y

Al considerar el primer caso se obtiene

.

respecto al segundo caso se obtiene

sin embargo, como

se concluye que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC80 |
| **Título** | Propiedad del límite de la suma de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se aplica la propiedad del límite de la suma de funciones para calcular algunos límites |

[SECCIÓN 2] **2.2. Producto de límites**

El límite del producto de un número real por una función es igual al producto del número real por el límite de la función, esta propiedad se define como

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite del producto de una función por un escalar** |
| **Contenido** | Sea *c* un número real y el limite  existe  por lo tanto |

**Ejemplo 1.** Calcular:

se tiene que:

Por lo tanto

Asimismo, el límite del producto de funciones tiene la siguiente propiedad:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de un producto de funciones** |
| **Contenido** | Si el y el existen, entonces |

Estas mismas propiedades se cumplen para los **límites laterales** y **limites en el infinito.**

**Ejemplo 2.** Calcular:

Se tiene que:

Por lo tanto,

De manera específica, el límite del producto de dos funciones presenta los siguientes casos

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Casos del límite del producto de funciones** |
| **Contenido** | 1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces |

**Ejemplo 3.** Calcular:

se tiene que:

por lo tanto,

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC90 |
| **Título** | Propiedad del límite del producto de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se aplica las propiedades del producto y de la suma funciones para calcular algunos límites |

[SECCIÓN 2] **2.3. Cociente de límites**

El límite del cociente de funciones tiene la siguiente propiedad

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de un cociente** |
| **Contenido** | Si y el existen,  entonces |

Esta propiedad también se aplica para **límites laterales** y **límites en el infinito.**

**Ejemplo 1.** Calcular:

se tiene que:

como

Específicamente, esta propiedad presenta los siguientes casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Algunos casos de la propiedad del límite de un cociente** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

**Ejemplo 2.** Calcular:

Al considerar el límite por derecha de la función y al aplicar la propiedad del límite de un cociente, se obtiene

Al considerar el límite por izquierda de la función, se obtiene

Como los limites laterales no coinciden entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC100 |
| **Título** | Propiedad del límite del cociente de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el límite de e funciones usando las propiedades de límite del cociente. |

[SECCIÓN 2] **2.4. Composición de límites**

La propiedad de límite de la composición de funciones establece que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del límite de una composición de funciones** |
| **Contenido** | Si y entonces |

Estas propiedades también se tienen para **límites laterales** y **limites en el infinito.**

Antes de ver algunos ejemplos, es necesario aclarar que se debe observar si el límite *L* es alcanzando por un solo lado o por ambos es decir:

Si entonces, el límite en *g* se calcula únicamente por derecha, es decir .

Si entonces, el límite en *g* se calcula únicamente por izquierda, es decir .

**Ejemplo 1.** Sean y calcular:

Como

se calcula el límite de la función *g* en 2+, por lo tanto por la propiedad de composición de límites, se tiene que

**Ejemplo 2.** Calcular:

Al considerar las funciones

y

tenemos que:

Además, como

Por lo tanto se calcula el límite de la función *g* cuando *x* tiende a 0+, así

Entonces, por la propiedad del límite de composición de funciones, se tiene que

Ejemplo 3: Sean y calcular:

Como

Entonces, se calcula el límite de la función g en ∞**, es decir**

Por lo tanto, por la propiedad de composición de funciones se tiene que

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC110 |
| **Título** | Propiedades del limite de la composición |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las propiedades de limite de la composición. |

[SECCIÓN 2] 2.5 Regla de sustitución

Aunque no siempre la imagen de la función en un punto coincide con el limite calculado en ese punto gracias a las propiedades de los limites podemos establecer los casos en los que si teniendo en cuenta en que funciones básicas los limites coinciden con la imagen. Por ejemplo si se quiere calcular:

Se puede usar que luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de suma de limites:

como y luego por propiedad de suma de limites:

y finalmente por cociente de limites

es decir que en este caso el limite y la imagen coinciden, de forma similar pasa con las funciones que esta definidas en el punto es decir que tienen imagen y alrededor de el las imágenes se obtienen por la misma regla, de forma más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla de sustitución por evaluación de limite en un punto** |
| **Contenido** | Sea una función si existe número real positivo , tal que esta en el dominio de y en este intervalo la función **no se define a trozos** y esta dada por una única expresión analitica entonces:  Si esta misma condición se tiene pero para el intervalo entonces:  Si esta misma condición se tiene pero para el intervalo entonces: |

En otras palabras para usar la regla de la sustitución por evaluación debemos verificar que la función cerca al punto no tenga problemas de dominio y que además no este dada por trozos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | En general en las funciones reales los problemas de dominio se obtienen por tres motivos [VER]:   * División por cero * Logaritmo de no positivos   Raíces de índice par de negativos. |

Ejemplo 1. Calcular:

Para este caso en la función tenemos problemas de división por cero en , por lo que podemos asumir que muy cerca de no hay problemas de dominio, además como la función no es a trozos entonces:

Ejemplo 2. Calcular:

Esta función tienen por dominio por lo que alrededor de 2 no tiene problemas de dominio, además en el intervalo no esta dada por trozos, por lo tanto,

Ahora como las condiciones se cumplen en se puede calcular por evaluación el limite a la derecha de

como ya se había visto.

Ejemplo 3:

Esta función tiene problemas de dominio en luego alrededor de no hay problemas de dominio sin embargo alrededor de la función parte entera esta definida a trozos por lo que en este caso no se puede usar la regla de evaluación, sin embargo si podemos usar las propiedades de los limites para calcularlo:

Sea y entonces

como y entonces por propiedades de composición de limites:

como y entonces por propiedades de composición de limites:

entonces el limite no existe a pesar de que la imagen de es .

Ejemplo 4. Las funciones polinómicas no están definidas a trozos y tienen por domino todos los reales, luego :

Ejemplo 5. Las funciones racionales no están definidas a trozos y tienen por dominio los reales tales que el polinomio del denominador no se hace cero, luego:

siempre y cuando .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC120 |
| **Título** | Regla de sustitución por evaluación |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica identificar las condiciones necesarias para usar la regla de sustitución por evaluación. |

[SECCIÓN 2] 2.6. Consolidación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculo de limites por propiedades. |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las diferentes propiedades de limites y la regla de evaluación. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Limites en el infinito de funciones algebraicas. |
| **Descripción** | Interecativo en el que se estudian como calcular los limites en el infinito de cualquier función algebraica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asintotas horizontales de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica identificar las asintotas horizontales de una función via limites |

[SECCIÓN 1] 3. Limites Indeterminados

Si se observan las tablas de propiedades de limites de las operaciones de dos funciones, no dice que sucede cuando uno o ninguno de los dos limites no existen, además faltan expresar lo que sucede en algunos casos en la suma en el producto o en el cociente. Estos limites que se consideran **limites indeterminados**, se llaman así porque no se sabe con certeza si el limite existe o no, y en caso de que se exista cual es, esto depende de cada caso particular.

[SECCIÓN 2] 3.1. Indeterminación de suma de limites

Con la suma se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de limites** |
| **Contenido** | * Si y entonces   se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Ejemplo 1. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

[SECCIÓN 2] 3.2. Indeterminación de producto de limites

Con el producto se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Ejemplo 1. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

[SECCIÓN 2] 3.3. Indeterminación de cociente de limites

Con el cociente se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciones en el cociente de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del cociente de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Las indeterminaciones como cociente son las más importantes, por lo general en las indeterminaciones de suma y producto se suelen realizar procesos algebraicos para convertirlos en un caso de cociente (ejemplo 3 de suma y 2 y 3 de producto).

Ejemplo 1. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

pero este último no existe.

Los procesos algebraicos son la clave para solucionar las indeterminaciones, en especial la factorización, la racionalización y multiplicar por funciones cuyo limite en el punto sean 1, por ejemplo:

es una indeterminación , se puede resolver de la siguiente manera:

y como vimos en la sección 2 y por la regla de sustitución por evaluación se tiene que: , finalmente por producto de limites:

**También existen las indeterminaciones exponenciales pero estas serán trabajadas más adelante.**

[SECCIÓN 2] 3.4 Consolidación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Limites indeterminados de funciones algebraicas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como resolver la indeterminación para algunas funciones algebraicas.. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Algunos limites trigonometricos indeterminados. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como resolver la indeterminación para algunas funciones trigonometricas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculando limite de indeterminaciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como calcular algunos limites indeterminados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asintotas verticales de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica identificar las asintotas horizontales de una función via limites |

[SECCIÓN 1]**5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Competencias: Concepto y calculo de Limites. |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerza lo aprendido sobre el calculo de limites. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC210 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema de limites. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |