|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de límite de una función es la base sobre la que se construye el cálculo, prueba de ello es que como se verá más adelante la derivada y la integral principales objetos de estudio del cálculo, resultan por definición ser límites. |

[SECCIÓN 1]**1Noción intuitiva de Limite**

Etimológicamente, la palabra límite proviene del latín “limes”, que se traduce como “frontera o borde”, en matemáticas, el concepto de límite se refiere a la proximidad a dicho borde, por lo tanto los valores próximos al límite en una función, son de interés en el estudio del éste.

Asimismo, el concepto de función permite modelar y analizar situaciones relacionadas con economía, aspectos ambientales o físicos, este tipo de análisis se fortalece con el **concepto de límite** que permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que son modelados a través de una función y que requieren ser analizados a largo plazo. Por esta razón el concepto de límite encierra la noción de infinito, te invitamos a revisar el siguiente interactivo que presenta una clasificación del infinito.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande e infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia el infinito desde las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas |

[SECCIÓN 2] **1.1 Limite de una función en un punto**

Calcular el límite de una función en un número real *a* es estudiar el comportamiento de las imágenes de los valores próximos a *a,*  de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Una función que está definida para valores tan aproximados a un número real como se quiere tanto a su derecha e izquierda y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real L, el límite cuando tiende a de las imágenes por la función *f* es L, y se denota como : |

**Ejemplo 1.** Sea la función ,

Esta función no está definida para *x = 0*, puesto que al remplazar cero por *x* en la función *f*, el denominador es cero, sin embargo al inspeccionar el comportamiento de los valores próximos a cero y sus imágenes tanto por derecha (números reales mayores que cero), como por izquierda (números reales menores que cero). Como se muestra en las siguientes tablas, se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,9983341664… |  | 0,1 | 0,9983341664682… | | -0,034 | 0,99980734446… |  | 0,034 | 0,9998073444691… | | -0,017 | 0,99995183402… |  | 0,017 | 0,9999518340293… | | -0,001 | 0,99999983333… |  | 0,001 | 0,9999998333333… | | -0,00023 | 0,99999999118... |  | 0,00023 | 0,9999999911833… | | -0,00001023 | 0,999999999982... |  | 0,00001023 | 0,9999999999825… | | -0,000000531 | 0,999999999999… |  | 0,000000531 | 0,99999999999995… | | -0,000000101 | 0,9999999999999… |  | 0,000000101 | 0,9999999999999… | |

Se observa que a la vez que *x* toma valores en la función más cercanos a cero tanto por derecha como por la izquierda las imágenes toman valores positivos cada vez más cercanos a *1*. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y que resalte los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , se evidencia que en los valores de *x* próximos a cero, sus imágenes se aproximan a uno. |

De esta forma, se tiene que el límite de la función *f* cuando *x* tiende a cero es *1*, y se representa como:

**Ejemplo 2.** Sea la función

,

al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se tienen las siguientes imágenes de *g(x)*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,544021110… |  | 0,1 | -0,54402111088… | | -0,034 | 0,9075576245… |  | 0,034 | -0,90755762454… | | -0,017 | -0,762216923… |  | 0,017 | 0,762216923022… | | -0,001 | -0,826879540… |  | 0,001 | 0,826879540532… | | -0,00023 | 0,1377066308… |  | 0,00023 | -0,13770663086… | | -0,00001023 | 0,8700178328… |  | 0,00001023 | -0,87001783285… | | -0,000000531 | 0,8962273099… |  | 0,000000531 | -0,8962273099… | | -0,000000101 | 0,0988696287… |  | 0,000000101 | -0,09886962877… | |

Se observa que sus imágenes no se aproximan a ningún número real en específico, por esta razón se afirma que la función , no tiene límite en *x=0.* Como se muestra en la representación gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función    se evidencia que *g(x)* oscila de creciente a decreciente sin aproximarse a un valor específico en el rango, a medida que los valores de su dominio se aproximan a cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si *f* es una función de número reales que está definida para valores tan aproximados como se quiere a derecha e izquierda de un número real *a* y a medida que *x* toma valores más cercanos a *a* sus imágenes son cada vez mayores, el límite cuando *x* tiende a *a* de las imágenes por la función *f* es infinito, y se denota como:  Si cuando *x* toma valores en la función *f* cada vez más próximos al número real *a,* sus imágenes son negativas y además el valor absoluto de sus imágenes son cada vez mayores, sin aproximarse a un número real especifico, el límite cuando *x* tiende a *x* de las imágenes por la función *f* es menos infinito, y se denota como: |

**Ejemplo 3.** Sea la función

,

al remplazar *x* por valores cercanos a cero se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 100 |  | 0,1 | 100,00 | | -0,034 | 865,0519… |  | 0,034 | 865,05 | | -0,017 | 3460,2076… |  | 0,017 | 3460,21 | | -0,001 | 1000000 |  | 0,001 | 1000000,00 | | -0,00023 | 18903591,6824… |  | 0,00023 | 18903591,68 | | -0,00001023 | 9555396935,9664… |  | 0,00001023 | 9555396935,97 | | -0,000000531 | 3546589776600,31… |  | 0,000000531 | 3546589776600,31 | | -0,000000101 | 98029604940692,1 |  | 0,000000101 | 98029604940692,10 | |

Como se observa en las tablas anteriores, a medida que los valores de *x* se aproximan a cero, sus imágenes son mayores, este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  ,  cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

Por lo tanto,

**Ejemplo 4.**

Sea la función , al remplazar a *x* por valores próximos a cero se obtienen

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | -0,02 |  | 0,1 | -0,02 | | -0,034 | -0,17301… |  | 0,034 | -0,17301… | | -0,017 | -0,69204… |  | 0,017 | -0,69204… | | -0,001 | -200 |  | 0,001 | -200 | | -0,00023 | -3780,71834… |  | 0,00023 | -3780,71834… | | -0,00001023 | -1911079,38719… |  | 0,00001023 | -1911079,38719… | | -0,000000531 | -709317955,320… |  | 0,000000531 | -709317955,32006… | | -0,000000101 | -19605920988,1… |  | 0,000000101 | -19605920988,1… | |

Se observa que al aproximarse por derecha y por izquierda a cero, aunque sus imágenes son negativas, su valor absoluto es cada vez mayores. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  ,  cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son números reales negativos, y el valor absoluto de sus imágenes son cada vez son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

De esta forma, se concluye que el límite de *t(x)* cuando *x* tiende a cero es menos infinito, es decir

**Ejemplo 5.** Considere la función *m(x) = x2 – 2*, al remplazar a *x* por valores muy cercanos a cero se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* | *m(x) = x2 – 2* |  | *x* | *m(x) = x2 – 2* | | -0,1 | -1,99 |  | 0,1 | -1,99 | | -0,034 | -1,998844 |  | 0,034 | -1,998844 | | -0,017 | -1,999711 |  | 0,017 | -1,999711 | | -0,001 | -1,999999 |  | 0,001 | -1,999999 | | -0,00023 | -1,9999999471 |  | 0,00023 | -1,9999999471 | | -0,00001023 | -1,99999999989… |  | 0,00001023 | -1,99999999989… | | -0,000000531 | -1,9999999999997… |  | 0,000000531 | -1,9999999999997… | | -0,000000101 | -1,9999999999999... |  | 0,000000101 | -1,9999999999999… | |

Al remplazar *x* por números reales cercanos a cero, el valor de las imágenes de la función se aproxima a -2, además, en este caso , Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *m(x) = x2 – 2*, se observa que cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes se aproximan a *-2*. |

Por lo tanto, se obtiene que

En conclusión, de los ejemplos anteriores, la función *m(x) = x2 – 2,* es la única que tiene imagen cuando *x = 0*, sin embargo las funciones

, y

tienen límite cuando *x* tiende a cero, debido a que la noción de límite está relacionada principalmente con la noción de proximidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Límites por tabulación o gráfica |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el límite de una función en un punto a partir de su tabulación o su gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo en que se estudia el concepto de punto de acumulación y su relación con los limites. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Limites laterales**

Para determinar el límite de una función en un número real *a*, se consideran las imágenes de valores cercanos al número real *a* tanto menores que *a* como mayores que *a* como en los ejemplos anteriores, pero es posible que al analizar las imágenes de la función de los números reales próximos a *a,* se observe que las imágenes de los valores que están a la derecha de *a* se aproximen a un número real diferente al que se aproximan las imágenes de los valores que están a la izquierda del número real *a.* como se observa en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.** Considérese

Al remplazar *x* por valores cercanos a *-1*, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *X* |  |  | *X* |  | | -1,1 | -2,1 |  | -0,9 | 1,9 | | -1,034 | -2,034 |  | -0,966 | 1,966 | | -1,017 | -2,017 |  | -0,983 | 1,983 | | -1,001 | -2,001 |  | -0,999 | 1,999 | | -1,00023 | -2,00023 |  | -0,99977 | 1,99977 | | -1,00001023 | -2,00001023 |  | -0,99998977 | 1,99998977 | | -1,000000531 | -2,000000531 |  | -0,99999947 | 1,999999469 | | -1,000000101 | -2,000000101 |  | -0,999999999 | 1,999999899 | |

En la tabla de la izquierda se observa que al remplazar por valores cercanos y menores que -1, las imágenes de la función se aproximan a -2. Por otra parte la tabla de la derecha muestra que al remplazar en la función por valores cercanos y mayores que -1, sus imágenes se aproximan a 2, como también se observa en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de los valores a la derecha de -1 se aproximan a 2 y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto, el límite de la función *f* cuando tiende a no existe, ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia diferente tanto por derecha como por izquierda cada uno de estos comportamientos se describe como un límite lateral.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límites laterales** |
| **Contenido** | Sea una función de números reales definida para valores tan aproximados como se quiere a **izquierda** de un número real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la izquierda** es L, y se denota como :  De forma similar, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la derecha** es *L*, y se denota como: |

Del ejemplo 1, se obtiene que:

De esta forma, la existencia o no existencia del límite de una función depende de sus límites laterales, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Existencia del límite de una función a partir de sus límites laterales** |
| **Contenido** | Sea *f* una función de números reales y *a* un número real, por lo tanto,  si y solo si  Donde, |

En otras palabras, si los límites de la función por izquierda y por derecha de un número real son iguales, la función tiene límite, si los límites laterales son diferentes, el límite de la función no existe.

En el ejemplo 1,

**no existe**,

porque

**Ejemplo 2.** Sea la función *g(x) = x3 – 8,* al analizar las imágenes de los números reales cercanos a *x = 2*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | 1,9 | -1,141 |  | 2,1 | 1,261 | | 1,966 | -0,40110330… |  | 2,034 | 0,41497530… | | 1,983 | -0,20227091… |  | 2,017 | 0,20573891… | | 1,999 | -0,01199400… |  | 2,001 | 0,01200600… | | 1,99977 | -0,00275968… |  | 2,00023 | 0,00276032… | | 1,99998977 | -0,00012276… |  | 2,00001023 | 0,00012276… | | 1,999999469 | -0,00000637… |  | 2,00000053 | 0,00000637… | | 1,999999899 | -0,00000121… |  | 2,000000101 | 0,00000121… | |

Tanto por izquierda como por derecha las imágenes de la función se aproximan a 0 a medida que los elementos del dominio de la función se aproximan a 2, de esta forma se obtiene que

**Ejemplo 3.** Considera la gráfica de la función *h(x)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  se observan las imágenes de los valores próximos a *x = -4* |

De acuerdo con la gráfica *h(-4) = -1*, sin embargo se tiene que

, ,

por lo tanto

**Ejemplo 4.** Determinar el límite de la función cuando de

Al analizar las imágenes de *f(x)*  cuando *x* se aproxima a cero, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -0,1 | -10 |  | 0,1 | 10 | | -0,034 | -29,412… |  | 0,034 | 29,412… | | -0,017 | -58,824… |  | 0,017 | 58,824… | | -0,001 | -1000 |  | 0,001 | 1000 | | -0,00023 | -4347,826… |  | 0,000230000 | 4347,826… | | -0,00001023 | -97751,711… |  | 0,000010230 | 97751,711… | | -0,000000531 | -1883239,171… |  | 0,000000531 | 1883239,171… | | -0,000000101 | -9900990,099… |  | 0,000000101 | 9900990,099… | |

Por tanto,

La no existencia de

,

se verifica en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de *0*, las imágenes de valores a su derecha tienden a infinito y las imágenes de valores a su izquierda tienden a menos infinito. |

En el capítulo de funciones se mencionaba que la función racional

tiene una asíntota horizontal *x = 0*, a continuación se presenta la definición de asíntota vertical a través del límite de una función en un determinado punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota vertical** |
| **Contenido** | **La asíntota vertical de una función *f* es *x = k****,* si y solo si existen valores del dominio de *f* tan cercanos a como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

**Ejemplo 5.** Considera la función

Para analizar los valores alrededor de -1, hay que tener en cuenta que a la izquierda de -1, la función está dada por la expresión

y a la derecha de -1 , la expresión es

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* | *f(x)* |  | *X* | *f(x)* | | -1,1 | -36,3 |  | -0,9 | -0,19 | | -1,034 | -94,337294… |  | -0,966 | -0,066844 | | -1,017 | -182,5215882… |  | -0,983 | -0,033711 | | -1,001 | -3006,003… |  | -0,999 | -0,001999 | | -1,00023 | -13049,47895… |  | -0,99977 | -0,00045995 | | -1,00001023 | -293261,132… |  | -0,99998977 | -0,00002046… | | -1,000000531 | -5649723,514… |  | -0,999999469 | -0,00000106… | | -1,000000101 | -29702976,32… |  | -0,999999899 | -0,0000002… | |

de donde:

por lo tanto, la función *f* tiene como asíntota vertical la recta *x = -1*, a pesar de que *f(-1) = 2.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asíntota horizontal *x = -1* |

Los límites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto, aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda.

Por ejemplo, si se considera la función

que tiene por domino *Dom h = (-∞, -1) ∪ [1, ∞)*, no tiene sentido hablar del límite cuando *x* tiende a -1, ya que no es posible calcular las imágenes de valores cercanos por la derecha, pero como si es posible determinar las imágenes a la izquierda de -1, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| *X* |  |
| -1,1 | *-4,582575...* |
| -1,034 | *-7,7345672…* |
| -1,017 | *-10,8925231…* |
| -1,001 | *-44,732538…* |
| -1,00023 | *-93,255842…* |
| -1,00001023 | *-442,158819…* |
| -1,000000531 | *-1940,741956…* |
| -1,000000101 | *-4449,941709…* |

Se observa que las imágenes son negativas y el valor absoluto de sus imágenes es cada vez mayor a medida que su dominio se aproxima a -1, luego

por lo que la función tiene asíntota horizontal *x = -1*.

De manera similar,

no existe,

Porque no es posible estudiar las imágenes de los valores a la izquierda de 1, pero sí de los valores a la derecha de 1, que se presentan en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| X |  |
| 1,1 | 0,218217… |
| 1,034 | 0,129289… |
| 1,017 | 0,091806… |
| 1,001 | 0,0223551… |
| 1,00023 | 0,010723… |
| 1,00001023 | 0,002261… |
| 1,000000531 | 0,000515… |
| 1,000000101 | 0,000224… |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado en el intervalo (-1,5, 1,5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función  que tiene como asíntota vertical la recta *x = -1* y no tiene asíntota vertical en *x = 1* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Límites laterales |
| **Descripción** | Actividad en que se practica el cálculo del límite o los límites laterales de una función en un punto a partir de su gráfica |

[SECCIÓN 2] **1.2 Limites en el infinito**

El estudio de las imágenes de las funciones cuando los valores del dominio se hacen infinitamente grandes se lleva a cabo mediante el estudio de los límites en el infinito que se definen como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite al infinito** |
| **Contenido** | Si *f* es una función definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces el limite cuando tiende a **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como:  Asimismo, si la función *f* está definida en números reales negativos cuyo valor absoluto es un número real infinitamente grande y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces se dice que el límite cuando *x* tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como : |

**Ejemplo 1.** Considera la función

,

al evaluar la función con números reales positivos cada vez mayores, que se hacen infinitamente grandes (tienden a infinito) o con números reales negativos cuyo valor absoluto es un es cada vez mayor (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  | | | X |  |  | x |  | | -100 | -0,00506365641… |  | 100 | -0,00506365641… | | -345,53 | -0,00013074556… |  | 345,53 | -0,00013074556… | | -3133,605 | -0,00031627445… |  | 3133,605 | -0,00031627445… | | -12896,58483 | -0,00002636868… |  | 12896,58483 | -0,00002636868… | | -369896,3204 | -0,00000238665… |  | 369896,3204 | -0,00000238665… | | -6943605,786 | 0,00000013170… |  | 6943605,786 | 0,00000013170... | | -79365930,49 | 0,00000001023… |  | 79365930,49 | 0,00000001023… | |

En ambos casos, a medida que el valor absoluto del dominio de la función es mayor, se observa que las imágenes se aproximan a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagenes de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

**Ejemplo 2.** Si se considera la función *g(x) = -x3+x2* se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | X | *g(x) = -x3+x2* | | -100 | 1010000 | | -345,53 | 41372556,61 | | -3133,605 | 30780192033,32 | | -12896,58483 | 2145150817914,39 | | -369896,3204 | 50610567542353400,000 | | -6943605,786 | 334776705850875000000 | | -79365930,49 | 499922107415254000000000 | |

En la tabla anterior se observa que cuando lo elementos del dominio en valor absoluto son infinitamente grandes, sus imágenes tienden a infinito. Es decir

Además,

|  |  |
| --- | --- |
| X | *g(x) = -x3+x2* |
| 100 | -990000 |
| 345,53 | -41133775 |
| 3133,605 | -30760553073 |
| 12896,58483 | -2144818174114 |
| 369896,3204 | -50610293895777700 |
| 6943605,786 | -334776609423552000000 |
| 79365930,49 | -499922094817352000000000 |

De esta manera se concluye que

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

**Ejemplo 3.** Si se considera la función *h(x) = sen(x)*

Al representar las imágenes de *h(x)* en una tabla se obtiene

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | X | *h(x) = sen(x)* |  | x | *h(x) = sen(x)* | | -100 | 0,506365641110 |  | 100 | -0,506365641110 | | -345,53 | 0,045176513825 |  | 345,53 | -0,045176513825 | | -3133,605 | 0,991079199205 |  | 3133,605 | -0,991079199205 | | -12896,58483 | 0,340065938383 |  | 12896,58483 | -0,340065938383 | | -369896,3204 | 0,882813679244 |  | 369896,3204 | -0,882813679244 | | -6943605,786 | -0,914515258822 |  | 6943605,786 | 0,914515258822 | | -79365930,49 | -0,812289706560 |  | 79365930,49 | 0,812289706560 | |

Debido a que la funcion oscila entre -1 y 1, en el infinito ni en menos infinito se muestra alguna tendencia, es decir

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

Ejemplo 4. Considera la función

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* |  |  | *x* |  | | -100 | -0,01 |  | 100 | 0,01 | | -345,53 | -0,002894104709 |  | 345,53 | 0,002894104709 | | -3133,605 | -0,000319121268 |  | 3133,605 | 0,000319121268 | | -12896,58483 | -0,000077539908 |  | 12896,58483 | 0,000077539908 | | -369896,3204 | -0,000002703460 |  | 369896,3204 | 0,000002703460 | | -6943605,786 | -0,000000144017 |  | 6943605,786 | 0,000000144017 | | -79365930,49 | -0,0000000125999 |  | 79365930,49 | 0,0000000125999 | |

se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito tienden a cero. |

En el capítulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota vertical , por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota horizontal** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota horizontal** la recta si y solo si se tiene que cumple una o las dos siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando los limites al infinito y a menos infinito teniendo en cuenta que para valores negativos infinitamente grande la función esta dada por la expresión y para positivos por :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

de donde:

entonces la función tiene dos asíntotas horizontales la recta y la recta .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | la función tiene dos asíntotas horizontales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Limites en el infinito. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en el infinito por tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Definición formal de limite |
| **Descripción** | Interactivo en el se exoplica el concepto formal de limite y la necesidad de este. |

[SECCIÓN 1] 2. Propiedades de los limites

**Como estar seguros al calcular**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de suma de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites (aplicadas a limites laterales)

ahora como entonces por la regla c. de suma de limites aplicada a limites laterales,

Ejemplo 2. Calcular:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de limites** |
| **Contenido** | Si y entonces  se considera indeterminado. |

El limite se considera

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de producto de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces 7. Si y entonces 8. Si y entonces |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de cociente de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces   .   1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces |

**Estas mismas reglas se tienen para los limites laterales o para limites al infinito.**

Ejemplo 1. Calcular

Se sabe que y además como entonces se tiene que y por la regla c. de limites de cocientes:

por la regla c. de cocientes tenemos que

Sabemos que

Si y entonces

se considera indeterminado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de composición de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces |

[SECCIÓN 1]**3. Limites Indeterminados**