|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de limite de una función es la base sobre la que se construye el calculo, prueba de ello es que como se vera más adelante la derivada y la integral principales objetos de estudio del cálculo, resultan por definición ser limites. |

[SECCIÓN 1]**1Noción intuitiva de Limite**

La idea de límite formulada en las matemáticas nos ofrece muchas posibilidades para el análisis de situaciones relacionadas con economía, aspectos ambientales o físicos. Esto porque el concepto de límite permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que requieren ser analizados a largo plazo, teniendo una función como modelo que caracterice su forma de comportamiento a través de ciertas variables. Además es útil para comprender el comportamiento de un fenómeno cuando la variable independiente del fenómeno, se aproxima a un valor determinado, lo que describe una característica particular y relevante para el fenómeno.

La palabra limite viene etimológicamente hablando, del latín “limes”, que puede traducirse como “frontera o borde”, en matemáticas, la palabra limite no necesariamente indica que se esta estableciendo una división entre dos objetos, cuando se estudian los limites, interesa el concepto de proximidad de “acercarnos a” dicho borde o frontera tanto lo más posible sin llegar tocar el borde, este concepto encierra el manejo de dos grandes ideas de la humanidad, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande o infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se pretende que el estudiante reconozca que gracias a a densidad y la propiedad arquimediana de los números reales es posibleencontrar valores en valor abasoluto tan pequeños o grandes como se quiera. |

[SECCIÓN 2] 1.1 Limites de una función en un punto

Cuando se piensa en calcular el imite de una función en un número real determinado , no se esta interesado en conocer la imagen que tiene por la función (es más es posible que la imagen de no exista), sino cual es el compartimiento de las imágenes al tomar valores tan próximos como se quieran a , (esto es que la distancia que hay de esos valores a sea infinitamente pequeña).

Si se consideran las funciones:

solo esta definida en cero, sin embargo, en todas es posible tomar valores en el dominio de la función muy cerca de cero tanto por derecha (valores próximos a cero pero mayores) como por izquierda (valores próximos a cero pero menores), lo que permite inspeccionar el comportamiento de las imágenes de estos valores.

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que al acercarnos a cero por la derecha o por la izquierda las imágenes toman valores positivos cada vez más cercanos a . Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se aproximan a |

Para el caso de , cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que las imágenes no se aproximen a ningún valor ni por derecha ni por izquierda, oscila de creciente a decreciente sin acerarse a un valor especifico. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes oscialan entre y y no se aproximan a un valor especfico. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes es muy grande y cada vez se hace más grande, es decir las imágenes se hacen infinitamente más grandes. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se hacen infinitamene grandes. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes es muy grande en valor absoluto y cada vez se hace más grande, es decir las imágenes aunque negativas se hacen infinitamente más grandes en valor absoluto. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes son negativas pero su valor absoluto se hace infinitamene grande. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes se aproxima a además en este caso . Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se aproximan a |

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, el comportamiento de las imágenes de una función valores cercano a un número real dado no siempre es el mismo, a veces se aproximan a un valor, otras veces se hacen infinitamente grandes o simplemente no se ve ninguna tendencia, estas ideas caracterizan la noción intuitiva de limite.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a derecha e izquierda de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función , **no existe**. |

En los ejemplos anteriores se tendría que:

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Limites por tabulación o grafica. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo en que se estudia el concepto de punto de acumulación y su relación con los limites. |

[SECCIÓN 3] 1.1.1 Limites laterales:

Cuando se quiere calcular el limite de una función en un punto o número real , se consideran las imágenes de valores cercanos tanto a la derecha del número como a la izquierda de y se busca una tendencia, pero es posible que al analizar las imágenes se observe una tendencia en las imágenes de los valores que se encuentran a la derecha de y una tendencia diferente cuando se analizan las imágenes de los valores que se encuentran a la izquierda de .

Si se considera

se tiene al tomar valores cercano a que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que dos tendencias, por un lado las imágenes de valores cercanos a por la izquierda tienden a y las imágenes de los valores cercanos a por la derecha tienden a , comportamiento que se refleja en la grafica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del -1 se aproximan a y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto el limite cuando tiende a de la función no existiría ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia tanto por derecha como por izquierda describiremos estos comportamientos como limites laterales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite lateral derecho** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a **derecha** de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función , **no existe**. |

De manera similar se define:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite lateral izquierdo** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a **izquierda** de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función , **no existe**. |

En el ejemplo anterior se tiene entonces que:

como se ve en este ejemplo los limites laterales pueden existir en un punto o valor dado sin que el limite exista, en estos casos sucede por que los limites laterales no son los mismos, pero si los limites laterales coinciden inmediatamente existe el limite, por lo que se establece la siguiente propiedad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema de:** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a de un numero real entonces,  si y solo si  además en estos casos se tiene que: |

Por ejemplo si se estudia las función cerca del punto se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

En algunas ocasiones cuando un limite de una función en un punto es cero, es conveniente saber si las imágenes se están acercando a cero por la derecha o por la izquierda, en este ejemplo se observa que cuando tomamos valores a la izquierda de las imágenes se acercan a y lo hacen por la izquierda y cuando tomamos valores a la derecha del las imágenes se acercan a por su derecha, si se desea se puede especificar este comportamiento en la notación de limite de la siguiente manera:

Si se considera la función dada por la grafica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de el limite es cero |

Al analizar la función alrededor de se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

como se corrobora en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del 0 se van a infinito y las imágenes de valores a la izquierda del 0 se van a menos infinito. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota horizontal , ya que al evaluar la función en cero, el numerador no era cero pero el denominador si, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota vertical** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota vertical** la recta si y solo si se tiene que existen valores del dominio de tan cercanos a como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando alrededor de , hay que tener en cuenta que a la izquierda de la función esta dada por la expresión y a la derecha de es :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

entonces a función tiene como asíntota vertical la recta , a pesar de que .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asintota horizontal |

Los limites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda, por ejemplo si se considera la función que tiene por domino , por lo tanto, no tiene sentido hablar del limite cuando tiende a ya que no es posible calcular imágenes de valores cercanos por la derecha, pero como si es posible acercarnos por izquierda se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Se observa que las imágenes son negativas y en valor absoluto van haciendo cada vez más grandes, luego:

por lo que la función tiene asíntota horizontal .

De manera similar en no es posible calcular el limite porque no estudiar las imágenes de valores próximos a la izquierda de , pero si de valores próximos a por derecha, se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado en el intervalo (-1.5, 1.5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asintota horizontal y las imágenes de valores cercano a por derecha se acercan a cero por derecha. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Limites laterales. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite o los limites laterales de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.2 Limites en el infinito

De manera similar a cuando se estudia el comportamiento de las imágenes por una función de algunos valores cercanos a un número real , se puede estudiar el comportamiento de las imágenes cuando tomamos valores que se hagan infinitamente grandes, ya sean positivos o negativos, y observar si las imágenes de estos valores se aproximan a algún número real o se vuelven cada vez infinitamente más grandes; por lo que la noción intuitiva de limite al infinito es similar a la definición de limite de función en un punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

De manera similar:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al menos infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores negativos en valor absoluto infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **menos** **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

Por ejemplo si se considera la función , evaluada en valores positivos que se van haciendo infinitamente grandes (tienden a infinito) o en valores negativos que en valor absoluto se hacen infinitamente grandes (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

En ambos casos se observa que las imágenes se están acercando a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagens de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

Si se considera la función se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Se observa que las imágenes de valores que se tienden al infinito son negativos y en valor absoluto se van haciendo infinitamente grandes, y las imágenes de los valores que tienden a menos infinito son positivas y también se van haciendo infinitamente grande, de donde:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Como era de esperarse la función oscila entre menos y por eso ni en el infinito y ni en el menos infinito muestra alguna tendencia:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito tienden a cero. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota vertical , por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota horizontal** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota horizontal** la recta si y solo si se tiene que cumple una o las dos siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando los limites al infinito y a menos infinito teniendo en cuenta que para valores negativos infinitamente grande la función esta dada por la expresión y para positivos por :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

de donde:

entonces la función tiene dos asíntotas horizontales la recta y la recta .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | la función tiene dos asíntotas horizontales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Limites en el infinito. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en el infinito por tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Definición formal de limite |
| **Descripción** | Interactivo en el se exoplica el concepto formal de limite y la necesidad de este. |

[SECCIÓN 1] 2. Propiedades de los limites

**Como estar seguros al calcular**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de suma de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites (aplicadas a limites laterales)

ahora como entonces por la regla c. de suma de limites aplicada a limites laterales,

Ejemplo 2. Calcular:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de limites** |
| **Contenido** | Si y entonces  se considera indeterminado. |

El limite se considera

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de producto de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces 7. Si y entonces 8. Si y entonces |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de cociente de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces   .   1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces |

**Estas mismas reglas se tienen para los limites laterales o para limites al infinito.**

Ejemplo 1. Calcular

Se sabe que y además como entonces se tiene que y por la regla c. de limites de cocientes:

por la regla c. de cocientes tenemos que

Sabemos que

Si y entonces

se considera indeterminado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de composición de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces |

[SECCIÓN 1]**3. Limites Indeterminados**