|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de limite de una función es la base sobre la que se construye el calculo, prueba de ello es que como se vera más adelante la derivada y la integral principales objetos de estudio del cálculo, resultan por definición ser limites. |

[SECCIÓN 1]**1Noción intuitiva de Limite**

Etimológicamente, la palabra límite proviene del latín “limes”, que se traduce como “frontera o borde”, en matemáticas, el concepto de límite se refiere a la proximidad a dicho borde, por lo tanto los valores próximos al límite en una función, son de interés en el estudio del éste.

Asimismo, el concepto de función permite modelar y analizar situaciones relacionadas con economía, aspectos ambientales o físicos, este tipo de análisis se fortalece con el **concepto de límite** que permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que son modelados a través de una función y que requieren ser analizados a largo plazo. Por esta razón el concepto de límite encierra la noción de infinito, te invitamos a revisar el siguiente interactivo que presenta una clasificación del infinito.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande e infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia el infinito desde las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas |

[SECCIÓN 2] **1.1 Limite de una función en un punto**

Calcular el límite de una función en un número real *a* es estudiar el comportamiento de las imágenes de los valores próximos a *a*. de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Una función que está definida para valores tan aproximados a un número real como se quiere tanto a su derecha e izquierda y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real L, el límite cuando tiende a de las imágenes por la función es , y se denota como : |

**Ejemplo 1.** Sea la función ,

Esta función no está definida para *x=0*, puesto que al remplazar cero por *x* en la función *f*, el denominador es cero, sin embargo al inspeccionar el comportamiento de los valores próximos a cero y sus imágenes tanto por derecha (números reales mayores que cero), como por izquierda (números reales menores que cero). Como se muestra en las siguientes tablas, se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,9983341664… |  | 0,1 | 0,9983341664682… | | -0,034 | 0,99980734446… |  | 0,034 | 0,9998073444691… | | -0,017 | 0,99995183402… |  | 0,017 | 0,9999518340293… | | -0,001 | 0,99999983333… |  | 0,001 | 0,9999998333333… | | -0,00023 | 0,99999999118... |  | 0,00023 | 0,9999999911833… | | -0,00001023 | 0,999999999982... |  | 0,00001023 | 0,9999999999825… | | -0,000000531 | 0,999999999999… |  | 0,000000531 | 0,99999999999995… | | -0,000000101 | 0,9999999999999… |  | 0,000000101 | 0,9999999999999… | |

Se observa que a la vez que *x* toma valores en la función más cercanos a cero tanto por derecha como por la izquierda las imágenes toman valores positivos cada vez más cercanos a 1. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , se evidencia que en los valores de x próximos a cero, sus imágenes se aproximan a uno. |

De esta forma, se tiene que el límite de la función *f* cuando *x* tiende a cero es 1, y se representa como:

**Ejemplo 2.** Sea la función , al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se tienen las siguientes imágenes de *g(x)*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 0,544021110… |  | 0,1 | -0,54402111088… | | -0,034 | 0,9075576245… |  | 0,034 | -0,90755762454… | | -0,017 | -0,762216923… |  | 0,017 | 0,762216923022… | | -0,001 | -0,826879540… |  | 0,001 | 0,826879540532… | | -0,00023 | 0,1377066308… |  | 0,00023 | -0,13770663086… | | -0,00001023 | 0,8700178328… |  | 0,00001023 | -0,87001783285… | | -0,000000531 | 0,8962273099… |  | 0,000000531 | -0,8962273099… | | -0,000000101 | 0,0988696287… |  | 0,000000101 | -0,09886962877… | |

Se observa que sus imágenes no se aproximan a ningún número real en específico, por esta razón se afirma que la función , no tiene límite en *x=0.* Como se muestra en la representación gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función se evidencia que *g(x)* oscila de creciente a decreciente sin aproximarse a un valor específico en el rango a medida que los valores de su dominio se aproximan a cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límites de una función en un punto** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a derecha e izquierda de un número real y a medida que *x* toma valores más cercanos a *a* sus imágenes son cada vez mayores, el límite cuando tiende a de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  Si cuando *x* toma valores en la función *f* cada vez más próximos al número real *a,* sus imágenes son negativas y además el valor absoluto de sus imágenes son cada vez mayores, sin aproximarse a un número real especifico, el límite cuando tiende a de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como: |

**Ejemplo 3.** Sea la función , al remplazar *x* por valores cercanos a cero se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | 100 |  | 0,1 | 100,00 | | -0,034 | 865,0519… |  | 0,034 | 865,05 | | -0,017 | 3460,2076… |  | 0,017 | 3460,21 | | -0,001 | 1000000 |  | 0,001 | 1000000,00 | | -0,00023 | 18903591,6824… |  | 0,00023 | 18903591,68 | | -0,00001023 | 9555396935,9664… |  | 0,00001023 | 9555396935,97 | | -0,000000531 | 3546589776600,31… |  | 0,000000531 | 3546589776600,31 | | -0,000000101 | 98029604940692,1 |  | 0,000000101 | 98029604940692,10 | |

Como se observa en las tablas anteriores, a medida que los valores de *x* se aproximan a cero, sus imágenes son mayores, este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x=0* es una asíntota vertical. |

Por lo tanto,

**Ejemplo 4.**

Sea la función , al remplazar a *x* por valores próximos a cero se obtienen

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | -0,02 |  | 0,1 | -0,02 | | -0,034 | -0,17301… |  | 0,034 | -0,17301… | | -0,017 | -0,69204… |  | 0,017 | -0,69204… | | -0,001 | -200 |  | 0,001 | -200 | | -0,00023 | -3780,71834… |  | 0,00023 | -3780,71834… | | -0,00001023 | -1911079,38719… |  | 0,00001023 | -1911079,38719… | | -0,000000531 | -709317955,320… |  | 0,000000531 | -709317955,32006… | | -0,000000101 | -19605920988,1… |  | 0,000000101 | -19605920988,1… | |

Se observa que al aproximarse por derecha y por izquierda a cero, aunque sus imágenes son negativas, su valor absoluto es cada vez mayores. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son números reales negativos, y el valor absoluto de sus imágenes son cada vez son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x=0* es una asíntota vertical. |

De esta forma, se concluye que el límite de *t(x)* cuando *x*  tiende a cero es menos infinito, es decir

**Ejemplo 5.** Considere la función , al remplazar a *x* por valores muy cercanos a cero se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -0,1 | -1,99 |  | 0,1 | -1,99 | | -0,034 | -1,998844 |  | 0,034 | -1,998844 | | -0,017 | -1,999711 |  | 0,017 | -1,999711 | | -0,001 | -1,999999 |  | 0,001 | -1,999999 | | -0,00023 | -1,9999999471 |  | 0,00023 | -1,9999999471 | | -0,00001023 | -1,99999999989… |  | 0,00001023 | -1,99999999989… | | -0,000000531 | -1,9999999999997… |  | 0,000000531 | -1,9999999999997… | | -0,000000101 | -1,9999999999999... |  | 0,000000101 | -1,9999999999999… | |

Al remplazar *x* por números reales cercanos a cero, el valor de las imágenes de la función se aproxima a -2, además, en este caso , Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función , se observa que cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes se aproximan a -2. |

Por lo tanto, se obtiene que

En conclusión, de los ejemplos anteriores, la función , es la única que tiene imagen cuando *x=0*, sin embargo las funciones , y tienen límite cuando *x*  tiende a cero, debido a que la noción de límite está relacionada principalmente con la noción de proximidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Limites por tabulación o grafica. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo en que se estudia el concepto de punto de acumulación y su relación con los limites. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Limites laterales**

Para determinar el límite de una función en un número real , se consideran las imágenes de valores cercanos al número real *a* tanto menores que *a* como mayores que como en los ejemplos anteriores, pero es posible que al analizar las imágenes de la función de los números reales próximos a *a,* se observe que las imágenes de los valores que están a la derecha de se aproximen a un número real diferente al que se aproximan las imágenes de los valores que están a la izquierda del número real *a.* como se observa en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.** Considérese

Al remplazar *x* por valores cercanos a -1, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | -1,1 | -2,1 |  | -0,9 | 1,9 | | -1,034 | -2,034 |  | -0,966 | 1,966 | | -1,017 | -2,017 |  | -0,983 | 1,983 | | -1,001 | -2,001 |  | -0,999 | 1,999 | | -1,00023 | -2,00023 |  | -0,99977 | 1,99977 | | -1,00001023 | -2,00001023 |  | -0,99998977 | 1,99998977 | | -1,000000531 | -2,000000531 |  | -0,99999947 | 1,999999469 | | -1,000000101 | -2,000000101 |  | -0,999999999 | 1,999999899 | |

En la tabla de la izquierda se observa que al remplazar por valores cercanos y menores que -1, las imágenes de la función se aproximan a -2. Por otra parte la tabla de la derecha muestra que al remplazar en la función por valores cercanos y mayores que -1, sus imágenes se aproximan a 2, como también se observa en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del -1 se aproximan a y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto, el límite de la función *f* cuando tiende a no existe, ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia diferente tanto por derecha como por izquierda cada uno de estos comportamientos se describe como un límite lateral

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de limites laterales** |
| **Contenido** | Sea una función de números reales definida para valores tan aproximados como se quiere a **izquierda** de un número real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la izquierda** es L, y se denota como :  De forma similar, el límite de la función *f* cuando tiende a **por la derecha** es *L*, y se denota como : |

Del ejemplo 1, se obtiene que:

De esta forma, la existencia o no existencia del límite de una función depende de sus límites laterales, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Existencia del límite de una función a partir de sus límites laterales** |
| **Contenido** | Sea *f* una función de números reales y *a* un número real, por lo tanto,  si y solo si  Donde, |

En otras palabras, si los límites de la función por izquierda y por derecha de un número real son iguales, la función tiene límite, si los límites laterales son diferentes, el límite de la función no existe.

En el ejemplo 1, se cumple que no existe, porque

**Ejemplo 2.** Sea la función al analizar las imágenes de los números reales cercanos a , se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* |  |  | *x* |  | | 1,9 | -1,141 |  | 2,1 | 1,261 | | 1,966 | -0,40110330… |  | 2,034 | 0,41497530… | | 1,983 | -0,20227091… |  | 2,017 | 0,20573891… | | 1,999 | -0,01199400… |  | 2,001 | 0,01200600… | | 1,99977 | -0,00275968… |  | 2,00023 | 0,00276032… | | 1,99998977 | -0,00012276… |  | 2,00001023 | 0,00012276… | | 1,999999469 | -0,00000637… |  | 2,00000053 | 0,00000637… | | 1,999999899 | -0,00000121… |  | 2,000000101 | 0,00000121… | |

Tanto por izquierda como por derecha las imágenes de la función se aproximan a 0 a medida que los elementos del dominio de la función se aproximan a 2, de esta forma se obtiene que

**Ejemplo 3.** Considera la gráfica de la función *h(x)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de el limite es cero |

De acuerdo con la gráfica *h(-4)=-1*, sin embargo se tiene que, , por lo tanto

**Ejemplo 4.** Determinar el límite de la función cuando de

Al analizar las imágenes de *f(x)*  cuando *x* se aproxima a cero, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Por izquierda** | |  | **Por derecha** | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -0,1 | -10 |  | 0,1 | 10 | | -0,034 | -29,412… |  | 0,034 | 29,412… | | -0,017 | -58,824… |  | 0,017 | 58,824… | | -0,001 | -1000 |  | 0,001 | 1000 | | -0,00023 | -4347,826… |  | 0,000230000 | 4347,826… | | -0,00001023 | -97751,711… |  | 0,000010230 | 97751,711… | | -0,000000531 | -1883239,171… |  | 0,000000531 | 1883239,171… | | -0,000000101 | -9900990,099… |  | 0,000000101 | 9900990,099… | |

Por tanto se tiene que,

La no existencia de , se verifica en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del 0 se van a infinito y las imágenes de valores a la izquierda del 0 se van a menos infinito. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota horizontal , ya que al evaluar la función en cero, el numerador no era cero pero el denominador si, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota vertical** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asíntota vertical** la recta si y solo si se tiene que existen valores del dominio de tan cercanos a como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando alrededor de , hay que tener en cuenta que a la izquierda de la función esta dada por la expresión y a la derecha de es :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

entonces a función tiene como asíntota vertical la recta , a pesar de que .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asíntota horizontal |

Los limites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda, por ejemplo si se considera la función que tiene por domino , por lo tanto, no tiene sentido hablar del límite cuando tiende a ya que no es posible calcular imágenes de valores cercanos por la derecha, pero como si es posible acercarnos por izquierda se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Se observa que las imágenes son negativas y en valor absoluto van haciendo cada vez más grandes, luego:

por lo que la función tiene asíntota horizontal .

De manera similar en no es posible calcular el limite porque no estudiar las imágenes de valores próximos a la izquierda de , pero si de valores próximos a por derecha, se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado en el intervalo (-1.5, 1.5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asintota horizontal y las imágenes de valores cercano a por derecha se acercan a cero por derecha. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Limites laterales. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite o los limites laterales de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] **1.2 Limites en el infinito**

De manera similar a cuando se estudia el comportamiento de las imágenes por una función de algunos valores cercanos a un número real , se puede estudiar el comportamiento de las imágenes cuando tomamos valores que se hagan infinitamente grandes, ya sean positivos o negativos, y observar si las imágenes de estos valores se aproximan a algún número real o se vuelven cada vez infinitamente más grandes; por lo que la noción intuitiva de limite al infinito es similar a la definición de limite de función en un punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

De manera similar:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al menos infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores negativos en valor absoluto infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **menos** **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

Por ejemplo si se considera la función , evaluada en valores positivos que se van haciendo infinitamente grandes (tienden a infinito) o en valores negativos que en valor absoluto se hacen infinitamente grandes (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

En ambos casos se observa que las imágenes se están acercando a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagens de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

Si se considera la función se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Se observa que las imágenes de valores que se tienden al infinito son negativos y en valor absoluto se van haciendo infinitamente grandes, y las imágenes de los valores que tienden a menos infinito son positivas y también se van haciendo infinitamente grande, de donde:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Como era de esperarse la función oscila entre menos y por eso ni en el infinito y ni en el menos infinito muestra alguna tendencia:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito tienden a cero. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota vertical , por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota horizontal** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota horizontal** la recta si y solo si se tiene que cumple una o las dos siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando los limites al infinito y a menos infinito teniendo en cuenta que para valores negativos infinitamente grande la función esta dada por la expresión y para positivos por :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

de donde:

entonces la función tiene dos asíntotas horizontales la recta y la recta .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | la función tiene dos asíntotas horizontales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Limites en el infinito. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en el infinito por tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Definición formal de limite |
| **Descripción** | Interactivo en el se exoplica el concepto formal de limite y la necesidad de este. |

[SECCIÓN 1] 2. Propiedades de los limites

**Como estar seguros al calcular**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de suma de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites (aplicadas a limites laterales)

ahora como entonces por la regla c. de suma de limites aplicada a limites laterales,

Ejemplo 2. Calcular:

y como se sabe que y entonces por la regla b. de suma de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de limites** |
| **Contenido** | Si y entonces  se considera indeterminado. |

El limite se considera

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de producto de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces 7. Si y entonces 8. Si y entonces |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de cociente de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces   .   1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces |

**Estas mismas reglas se tienen para los limites laterales o para limites al infinito.**

Ejemplo 1. Calcular

Se sabe que y además como entonces se tiene que y por la regla c. de limites de cocientes:

por la regla c. de cocientes tenemos que

Sabemos que

Si y entonces

se considera indeterminado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Reglas de composición de limites** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces |

[SECCIÓN 1]**3. Limites Indeterminados**