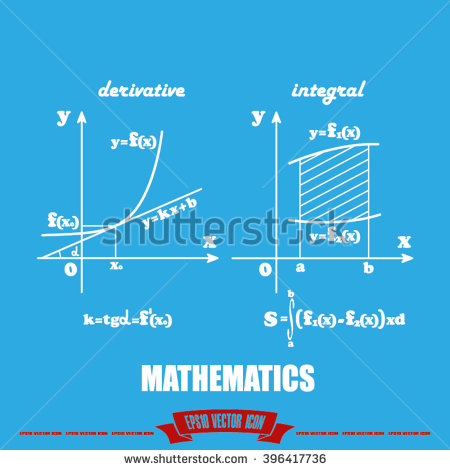
|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las derivadas y sus aplicaciones |
| Código del guion | MA\_11\_04\_CO |
| Descripción | ¿Cómo determinar el valor máximo de una función curva? ¿Cómo determinar la tasa de cambio de una variable respecto a otra? La derivada permite resolver esta y otras preguntas, de orden geométrico, analítico y numérico. |



[SECCIÓN 1] **1 El concepto de derivada**

Como entrada al cálculo infinitesimal, el concepto de derivada revolucionó la matemática usando técnicas poderosas de cálculo en la resolución de problemas cotidianos y especializados. Su justificación, formas de usarse y aplicaciones numéricas en campos como la física, la economía y la biología son presentados en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC10 |
| **Título** | Recurso F13B-01  El concepto de derivada |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia el concepto de derivada, desde la perspectiva analítica y geométrica, con sus aplicaciones. |

[SECCIÓN 2] **1.1 La interpretación geométrica de la derivada**

Determinar la pendiente de una recta es útil para establecer la razón de cambio de una variable respecto a otra, cuando su comportamiento es lineal. A través de la forma explícita de la función, (*y* = *mx* + *b*) es posible medir el cambio de la variable dependiente (*y*) en intervalos fijos de la independiente (*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **La ecuación de la pendiente**  Donde ***m*** es la pendiente de la recta, y (*x*, *f*(*x*)) son las coordenadas de dos puntos cualquiera dentro de la recta. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG01 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Dos puntos en una recta se usan para determinar la pendiente *m*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Pero, ¿qué ocurre si se quiere determinar la razón de cambio de una función que no es recta? ¿Cómo calcular la pendiente de una curva?

Es posible tener una aproximación trazando una recta secante a dos puntos dentro de la curva y determinando la pendiente de ésta, aunque esa aproximación será precisa solo en términos de la cercanía de los dos puntos escogidos. Así, si son dos puntos distantes, el nivel de precisión de la razón de cambio será muy bajo comparado con dos puntos muy cercanos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG02 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una curva |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se observan dos rectas secantes a la misma curva. La más precisa es la que se forma en los dos puntos más cercanos (*m*2). |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Si se reduce Δ*x* (Δ*x = x*2 *– x*1) hasta que sea casi cero, se estaría mejorando la precisión de la medida geométricamente; al convertir los dos puntos que definen la secante en un virtual único punto, se convertiría la recta en una tangente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG03 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una tangente a la curva |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función los puntos *p*1 y *p*2 están tan cerca, que la secante se puede considerar una tangente. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC20 |
| **Título** | Recurso M7A-01  Aproxima algunas derivadas usando límites laterales |
| **Descripción** | Actividad en que se aproxima el valor de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto aplicando límites laterales |

Desde el punto de vista geométrico, la pendiente de los puntos *p*1 y *p*2 en la tangente están muy cerca, separados por un Δ*x*, así que la pendiente se puede expresar como un límite.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | La pendiente como limite |
| **Contenido** | Donde Δ*x ≠* 0, esta ecuación mide la pendiente de la recta que une los puntos *P*1(*x*, *f*(*x*)) y *P*2(*x* + Δ*x, f*(*x* + Δ*x*)). |

Con este simple método de límite, estaría determinándose el valor de la pendiente de la recta tangente a un punto de una curva, una medida con precisión infinitesimal de la razón de cambio de esta función en ese punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Interpretación geométrica de la derivada |
| **Contenido** | Si *f* es una función derivable en un punto *x* = *a*, se define la tangente en *P*(*a*, *f*(*a*)) como la recta que pasa por el punto *P* y tiene por pendiente el número *f*´(*a*). Su ecuación es:  *y* – *f*(*x*) = *f´*(*x*)(*x* – *a*) |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC30 |
| **Título** | Calcula algunas derivadas como límite de secantes  Recurso M5A-01 |
| **Descripción** | Actividad en la que se aplica el límite de secantes para hallar algunas derivadas |

[SECCIÓN 2] **1.2 La función derivada**

Algebraicamente, las funciones continuas, que pueden ser representadas en un plano de coordenadas cartesianas, poseen una función asociada llamada función derivada que está determinada como la función que representa la razón de cambio de esta función original, en todos los puntos de un intervalo. Si esto se cumple, la función se define como derivable. Así las cosas, la función derivada es definida como la pendiente de la recta tangente a un punto de la función, igual que en la ecuación 2.

Las notaciones cambian según los autores. Se puede leer como *y´, f´* de *x* o la derivada de *y* respecto a *x*.

Si *f(x)* es una función, como 2*x*2 +3, por ejemplo, se puede utilizar el álgebra de los límites para encontrar la función derivada. Este proceso se conoce como “derivación” y su acción es “derivar”.

De esta forma *f´(x)* es la función derivada de *f(x)*, es decir que la función *f(x) = 2x2+3* que es cuadrática, tiene una función derivada *f´(x) =4x*, que es una recta, cuya pendiente representa la razón de cambio de las variables.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC40 |
| **Título** | Recurso F13-01  Calcula la función derivada usando Geogebra |
| **Descripción** | Actividad en la que se explica cómo usar el software para calcular la función derivada |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC50 |
| **Título** | Recurso M1B-01  Identifica distintas concepciones sobre la derivada |
| **Descripción** | Actividad de emparejamiento en la que el estudiante reconoce distintas concepciones de la derivada |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC60 |
| **Título** | Obtiene la gráfica de la derivada a partir de la función  Recurso M4A\_01 |
| **Descripción** | Actividad en la que se identifica la función derivada como continuo de las pendientes de las rectas tangentes en diversos puntos de una función |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

Ahora que se estableció el origen, interpretación geométrica y elementos matemáticos de la derivada, podemos trabajar en algunas tareas básicas sobre el concepto de esta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El concepto de derivada  Recurso M101A-01 |
| **Descripción** | Proponer preguntas abiertas sobre el concepto de derivada y los temas asociados a las múltiples formas de conceptualizar la derivada. |

[SECCIÓN 1] **2 Las reglas de derivación.**

Existen reglas algebraicas que simplifican el ejercicio de derivación en funciones específicas, lo que permite obtener resultados más rápidos, siguiendo algunos pasos muy puntuales que, al combinarse, pueden resolver casi cualquier derivada de una función. A continuación se describen estas reglas.

[SECCIÓN 2] **2.1 Las reglas de derivación básica de polinomios**

Muchas funciones derivables son fácilmente identificables como polinomiales, como parte de una estructura más amplia, o pueden ser separadas en elementos polinomiales más pequeños. Si se está atento a la forma que tiene cada expresión, se puede encontrar una regla adecuada para derivarla.

[SECCIÓN 3] **2.1.1 regla 1: derivada de una constante**

La derivada de una constante (número real) es cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **regla 1** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

[SECCIÓN 3] **2.1.2 Regla 2: potencias enteras de x**

Para derivar un valor de *x* elevado a una potencia positiva, se debe multiplicar el valor *n* de la potencia por *x* y reducir en uno el valor de la potencia, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 2** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

[SECCIÓN 3] **2.1.3 Regla 3: derivada de una constante por una función**

Cuando una función esta multiplicada por una constante, esta puede ser extraída de la derivada y multiplicarse posteriormente por el resultado de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 3** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

[SECCIÓN 3] **2.1.4 Regla 4: derivada de una suma**

Si se debe derivar la suma de dos o más funciones, simplemente se calcula la derivada de cada una y sus resultados se suman. Sean *u* y *v* dos funciones derivables.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 4** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

[SECCIÓN 3] **2.1.5 Regla 5: derivada de un producto**

Para derivar el Producto de dos funciones derivables *u* y *v*, es necesario derivar cada una por separado, obteniendo *u´* y *v´*. Luego multiplicar los resultados así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 5** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

Calcule la derivada de

Las funciones u y v son:

Y sus derivadas son:

Entonces:

Se multiplican los polinomios:

Por último, se simplifican términos semejantes

[SECCIÓN 3] **2.1.6 Regla 6: derivada de potencias de una función derivable**

La derivada de una función *u* que esta elevada a una potencia positiva o negativa se obtiene combinando la derivada de la potencia de *u* (regla 2) con la derivada de la función *u*, también conocida como derivada interna de la función, según sea el caso que aplique.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 6** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

Derivar la función

En este caso

Entonces:

Expandir el binomio al cuadrado:

Multiplicar por 3

Multiplicar los dos polinomios

Organizar

Reducir por términos semejantes

[SECCIÓN 3] **2.1.7 Regla 7: derivada de un cociente**

Para derivar el cociente de dos funciones derivables u y v, es necesario derivar cada una por separado, obteniendo u´ y v´. Luego operar los resultados así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla 7** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

Hallar la derivada de

Identificar las partes

Derivar

Realizar las multiplicaciones indicadas

Simplificar la expresión.

Por supuesto se puede seguir jugando con el álgebra, pero eso es tema para otro momento.

[SECCIÓN 2] **2.2 La segunda derivada**

Mientras una función sea derivable, puede derivarse tantas veces como se quiera, encontrando así las razones de cambio de cada una de sus funciones derivadas. A este proceso se le conoce como segunda derivada, o derivada de una derivada, y el resultado es cada vez una función de un grado menor a la función anterior, hasta llegar a cero.

Cuando se habla concretamente de la segunda derivada, se refiere a la derivada de una función que previamente se había derivado, y se denota como *f´´(x)*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Segunda derivada** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

Hallar la segunda derivada de la función

Como se puede observar, el grado de la función original es 3, el de su derivada es 2 y el grado de la segunda derivada es 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC80 |
| **Título** | Ejercita el cálculo de derivadas  Recurso M7A-02 |
| **Descripción** | Actividad para emparejar funciones, con su primera y segunda derivada |

[SECCIÓN 2] **2.3 La derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena**

Las reglas básicas de derivación que se tienen hasta ahora, no son suficientes para derivar algunas funciones más complejas, como aquellas que implican operaciones “anidadas” una dentro de otra. Para este proceso se debe aplicar una técnica conocida como regla de la cadena, que permite encontrar la razón de cambio de una función respecto a otra, que a su vez tiene una razón de cambio.

[SECCIÓN 3] **2.3.1 Función compuesta**

Se define como la función que depende internamente de otra función.

Sea *y=f (u)* una función que aloja a la función *u=g(x)*, se hablaría de la función *f ◦ g*, o (*f* compuesta *g*)

Ejemplo:

Para la función ,a funcionbras, si se tiene una funcion y una de las funciones compuestas. de una funcion es cada vez una funcion Se plantea *y* como el seno de una función interna *u*

Y a su vez definir u como la función interna

[SECCIÓN 3] **2.3.2 Regla de la cadena**

Las funciones compuestas pueden derivarse como el producto de las derivadas de cada una de las funciones compuestas. En otras palabras, si se tiene una función *y = f ◦ g*, su derivada será:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla de la cadena** |
| **Contenido** |  |

Ejemplo:

Derivar la función

Inicialmente, definir *f (u) y u.*

Luego sus respectivas derivadas

Según la regla de la cadena,

Sustituyendo u

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC90 |
| **Título** | Ejercita el cálculo de derivadas de funciones compuestas  Recurso M7A-03 |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar el cálculo de derivadas de funciones compuestas |

[SECCIÓN 2] **2.4 La derivada de las funciones exponencial y logarítmica**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las funciones exponenciales son de la forma *y = ax,* donde *a* es un número real y la variable *x* está en el exponente.  Las funciones logarítmicas son de la forma *y = Loga* *x* donde *a* es la base del logaritmo. |

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas existen reglas sencillas que, combinadas con las reglas anteriores, permiten encontrar las derivadas de funciones complejas. Estas reglas son:

[SECCIÓN 3] **2.4.1 reglas para derivar funciones exponenciales**

* **Si *y = ax*→ *y´ = ax \*Ln a***

Ejemplo: *y = 3x*

*y´= 3x Ln3*

* **Si y = *au*→ *y´= au Lna u´***

Donde ***u*** es una función interna de ***x*** en ***y***. se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo:

* ***Si y = ex → y´= ex***

Donde ***e*** es el número de Euler

Ejemplo:

*y= x2 ex* se resuelve como un producto

*y´ = 2x ex + x2 ex* factorizando

*y´= x ex (2+x)*

* ***Si y = eu → y´= eu u´***

Donde ***u*** es una función interna de ***x*** en ***y***. se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo:

La siguiente tabla resume las reglas de derivación de funciones exponenciales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | derivación de funciones exponenciales |
| **Contenido** | |  |  | | --- | --- | | ***y*** | ***y’*** | | *ax* | *ax \*Ln a* | | *au* | *au Lna u´* | | *ex* | *ex* | | *eu* | *eu u´* | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC100 |
| **Título** | Recurso F10B-01  ¿Por qué derivada de la exponencial es ella misma? |
| **Descripción** | Interactivo para explicar cuál es la razón por la que la función exponencial permanece invariante bajo derivación exactamente para el caso en que la base es el número de Euler |

[SECCIÓN 3] **2.4.2 reglas para derivar funciones logarítmicas**

Ejemplo:

Donde ***u*** es una función interna de ***x*** en ***y***. se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo:

Ejemplo:

Donde ***u*** es una función interna de ***x*** en ***y***. se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo:

La siguiente tabla resume las reglas de derivación de funciones logarítmicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | derivación de funciones logarítmicas |
| **Contenido** | |  |  | | --- | --- | | ***y*** | ***y’*** | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC110 |
| **Título** | Soluciona problemas de aplicación con funciones exponenciales y logarítmicas  Recurso M4A\_02 |
| **Descripción** | Actividad para especificar problemas de aplicación solucionables por cálculo de derivadas |

[SECCIÓN 2] **2.5 La derivada de funciones trigonométricas**

La derivación de funciones trigonométricas está estrechamente ligada a las características mismas de estas, en especial dos:

* Las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios
* La variable x representa un ángulo medido en radianes. Esta última es muy importante, pues en la definición de límite de la función seno se cumple:

Lo cual solo es posible si h está en radianes.

En los ejemplos se demuestran algunas de las siguientes reglas de derivación, pero en términos generales las derivadas de funciones básicas trigonométricas son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de funciones trigonométricas** |
| **Contenido** | |  |  | | --- | --- | | ***y*** | ***y’*** | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |

Ejemplo 1:

Determinar la derivada de .

Usando la identidad trigonométrica,

Así, *y´* debe ser la derivada de una función a una potencia.

𝑜𝑠5otenciderivada de unfunciones basicas uientes reglas de derivaci

Donde

Derivando:

Ejemplo 2:

Determinar la derivada de *y = Tan x.*

Por identidad trigonométrica, se puede decir que

Así que es posible resolver la derivada como un cociente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC120 |
| **Título** | Relaciona funciones trigonométricas con su familia de derivadas  Recurso M1C-01 |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar el cálculo de derivadas de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **2.6 La derivación logarítmica e implícita**

Hasta el momento se han presentado herramientas para derivar funciones de varios tipos, pero todas ellas tienen una cosa en común: están representadas en su forma explícita (*y* = *f (x)*). ¿Qué ocurre cuando la función esta expresada en términos de las dos variables?

La derivación implícita permite derivar funciones en las que la variable dependiente *(y)* no se encuentra despejada o en función de *x* solamente. Si bien podría despejarse la ecuación en forma explícita, muchas veces esta operación hace que el cálculo de la derivada sea mucho más complejo, o simplemente no es posible determinarla. Esta técnica es bastante útil cuando se quiere evaluar la pendiente de una tangente.

[SECCIÓN 3] **2.6.1 La derivación implícita**

El método consiste básicamente en derivar ambas variables, teniendo en cuenta que la variable dependiente debe quedar en términos de la independiente. Es decir, manteniendo la derivada de *y* respecto a *x* en la expresión derivada.

Ejemplo:

Se quiere derivar la expresión *y2 + x2 = 1.*

La función está en su forma canónica. Si se despeja la variable y la expresión seria:

Que es posible derivar utilizando las reglas de las potencias y la regla de la cadena, pero su tratamiento seria largo y tedioso. Ahora, si se aplica la derivada implícita, seria:

Nótese que al derivar *y2* se obtiene la derivada (2*y*) y se agrega su derivada respecto a *x* que seria *y´.* La variable *x* se deriva normalmente. Ahora se tiene una expresión de la que se puede despejar *y´* sin mayor dificultad.

Expresión que ya puede ser usada para evaluar en un punto la pendiente de una tangente.

Más allá, podría sustituirse el valor de *y* de la ecuación explicita, para obtener una expresión en términos de *x* exclusivamente:

[SECCIÓN 3] **2.6.2 La derivación logarítmica**

Es una técnica de derivación implícita que aprovecha las leyes de los logaritmos para simplificar procesos dentro de una función, especialmente cuando se tiene una función en el exponente o cuando las reglas de la cadena se hacen muy complejas. Consiste en hacer logaritmo a ambos lados de la expresión, para luego aplicar las propiedades de estos y convertir funciones de cociente, cadena, etc. En operaciones más simples, como sumas o restas.

Ejemplo:

Se quiere derivar la expresión:

Se podría resolver por una regla de la cadena, donde la derivada interna sería un cociente. Eso podría ser un poco engorroso.

Si se aplican las leyes de los exponentes la expresión seria:

Al hacer *Ln* a ambos lados:

Aplicando las leyes de los logaritmos:

Esta expresión ya es fácilmente derivable, usando las reglas de derivación de logaritmos. No olvidar la condición de derivada implícita, de dejar indicada la derivada de *y* respecto a *x.*

Despejando *y´:*

Si se quiere, es posible sustituir *y*  para que la expresión quede en términos de *x* solamente:

[SECCIÓN 2] **2.7 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio**

Estos dos teoremas se presentan para denotar la existencia de puntos críticos dentro de una función continua. Se presentan gráficamente, para justificar las condiciones en las que se cumple dicha afirmación. El teorema de Rolle es una caso particular del teorema del valor medio, expresado por Lagrange.

[SECCIÓN 3] **2.7.1 Teorema de Rolle**

El teorema presenta la situación en la que, dadas 3 condiciones, en una función existe un punto c cuya pendiente es cero. Estas condiciones son:

1. La función es continua en un intervalo cerrado *[a , b].*
2. La función es derivable en el intervalo abierto *(a ,b).*
3. Hay dos valores *f(a)* y *f(b),* que son iguales en el intervalo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El teorema de Rolle** |
| **Contenido** | Si una función es continua en el intervalo *[a , b]* y es derivable en el intervalo abierto *(a ,b)* y si *f(a) = f(b)*, entonces *f’(c) = 0* para al menos un número *c* en *(a ,b).* |

Gráficamente, estas condiciones se cumplen para 3 casos, a saber:

* Las funciones constantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG04 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En una recta, cualquier valor de a o b son iguales. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

* Las funciones con concavidad positiva o negativa

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG05 |
| **Descripción** | Funciones cóncavas hacia arriba. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A y b son iguales y mayores que c. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG06 |
| **Descripción** | Funciones cóncavas hacia abajo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A y b son iguales y menores que c |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

* Las funciones periódicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG07 |
| **Descripción** | Funciones periódicas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A y b son iguales y hay más de un valor c en el que la pendiente es cero. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC130 |
| **Título** | Identifica condiciones de aplicabilidad del Teorema de Rolle  Recurso M5A-02 |
| **Descripción** | Actividad para identificar las condiciones necesarias que debe cumplir una función para que sea aplicable el Teorema de Rolle |

[SECCIÓN 3] **2.7.2 Teorema del valor medio**

El teorema sostiene que dada cualquier función f continua en el intervalo *[a, b]* y derivable en el intervalo abierto *(a, b)* entonces existe al menos algún punto *c* en ese intervalo en el que la tangente a la curva en *c* es paralela a la recta que une los puntos *(b, f (b))* y *(a, f(a)).*

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El teorema del valor medio** |
| **Contenido** | Si f es una función continua en *[a,b]* y derivable en el intervalo abierto *(a,b)*, existe un número ***c*** en *(a,b)* tal que:  http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/Teorema%20de%20Rolle%20y%20Teorema%20del%20Valor%20Medio_files/image002.gif |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG08 |
| **Descripción** | Tangente del valor medio |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el punto *c*, su tangente es paralela a la línea que une a *a* y *b* |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC140 |
| **Título** | ¿Cuál es la relación entre el Teorema de Rolle y el de Lagrange?  Recurso M4A\_03 |
| **Descripción** | Actividad para que el estudiante reconozca que el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange o Teorema del valor medio |

[SECCIÓN 2] **2.8 Consolidación**

Se tiene un gran número de herramientas y reglas para resolver derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y sus combinaciones, así como las técnicas para determinar valores dentro de funciones gráficas. Esto será de mucha utilidad a la hora de implementar estos recursos en la solución de situaciones reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC150 |
| **Título** | Recurso M1B-02  Diferencias entre el teorema de Rolle, el del valor medio y el del valor intermedio |
| **Descripción** | Actividad para especificar los enunciados de los distintos teoremas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las reglas de derivación  Recurso M101A-02 |
| **Descripción** | Actividad para reforzar las reglas de derivación |

[SECCIÓN 1] **3 El análisis de gráficas**

En las secciones anteriores se revisaron algunos teoremas que permiten analizar gráficamente funciones derivables y definir las regiones en las que se encuentran valores críticos utilizando las derivadas. En esta sección se expondrá concretamente como encontrar valores máximos, mínimos, definir crecimientos y decrecimientos en una función siguiendo unos simples pasos.

[SECCIÓN 2] **3.1 Máximos y mínimos**

Es necesario empezar por definir que es un máximo y un mínimo.

Se dice que la función tiene un máximo si hay un valor *c* para el que *f(c)* es mayor que cualquier *f(x)* en sus cercanías. Igualmente, existe un mínimo en *c* si *f(c)* es menor que cualquier *f(x).*

Ahora. Si existe ese mínimo o máximo punto en la función, estaríamos hablando de un extremo superior o inferior, así que una recta tangente a ese punto tendría pendiente cero, es decir que su derivada seria cero (teorema de Fermat).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG09 |
| **Descripción** | Tangente en un punto crítico de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el punto *c*, su tangente tiene pendiente 0 |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Usando estas condiciones, se puede encontrar en valor máximo o mínimo de cualquier función continua, derivable en un intervalo *[a , b]* así:

* Definir el intervalo
* Derivar la función
* Igualar a cero
* Encontrar las raíces
* Evaluar en las raíces
* Evaluar los extremos del intervalo
* Escoger los valores máximo y mínimo respectivo.

Ejemplo:

Determinar el valor máximo y mínimo de la función en el intervalo [-0,5; 4]

Derivar

Igualar a cero

Donde los únicos valores que cumplen esta condición son *x=0* y *x= 2*.

Evaluar los puntos críticos y en los extremos del intervalo

Al comparar los resultados, encontramos que el valor máximo está en (4,17) y el mínimo en (2,-3)

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC170 |
| **Título** | Recurso M5A-03  Expresa propiedades relativas a los máximos y mínimos de una función |
| **Descripción** | Actividad para hacer corresponder afirmaciones respecto a máximos y mínimos expresadas en diferentes tipos de referencia |

En la resolución de situaciones reales o problemas de texto que incluyan máximos y mínimos, es necesario expresar las funciones en términos matemáticos para desarrollar la técnica. Aquí es muy útil tener habilidades en algebra.

[SECCIÓN 2] **3.2 Crecimiento y decrecimiento**

Para determinar si una función es creciente o decreciente en un punto o en un intervalo usando los máximos y mínimos se debe aplicar la siguiente estrategia:

* Derivar la función.
* Evaluar la función en los intervalos definidos por los puntos críticos.
* Si f´(x) > 0 para todo x del intervalo, entonces la función es creciente en todo el intervalo.
* Si f´(x)< 0 para todo x del intervalo, entonces la función es decreciente en todo el intervalo

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC180 |
| **Título** | Los máximos y mínimos de una función  Recurso F7B-01 |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar el crecimiento de las funciones |

Ejemplo:

Determinar los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

Derivar.

Igualando a cero

Así que los intervalos sugeridos para evaluar serán:

Ahora solo hay que determinar en cuál de estos intervalos la derivada de la función es positiva y en cual es negativa. Para esto se organizan los intervalos y la derivada en una matriz así:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **intervalo** |  |  | ***y´*** |
|  | - | - | + |
|  | + | - | - |
|  | + | + | + |

Por el signo de la derivada, se concluye que la función es creciente en el primer y tercer intervalo, mientras que es decreciente en el segundo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC190 |
| **Título** | Recurso M7A-05  Identifica intervalos de crecimiento de funciones |
| **Descripción** | Actividad para especificar, dadas algunas funciones, sus puntos críticos y los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función. Al menos cuatro preguntas deben dar la gráfica de la derivada y preguntar por condiciones de la función, o al revés. Por ejemplo dado que la función f'(x) = 2x, se puede afirmar que la función original tiene un mínimo o máximo en x=0 |

[SECCIÓN 2] **3.3 Extremos relativos y la prueba de la segunda derivada**

También es posible encontrar puntos extremos en un intervalo abierto que contenga a un punto *c*, sin tener en cuenta los valores del intervalo definido. La secuencia de pasos es muy similar a la usada para determinar los máximos y mínimos absolutos, pero ahora tenemos en cuenta dos reglas muy simples para la segunda derivada de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La prueba de la segunda derivada** |
| **Contenido** | Si la segunda derivada de *y* es menor que cero en un extremo relativo, se trata de un maximo, si es mayor que cero se trata de un minimo. |

Entonces, para hallar los extremos relativos (máximo y mínimo) de una función se debe:

* Derivar la función
* Igualar a cero y encontrar las raíces
* Encontrar la segunda derivada
* Evaluar *y´´* en las raíces
* Aplicar la prueba de la segunda derivada
* Encontrar las coordenadas del punto máximo y mínimo relativos.

Ejemplo:

Determinar los máximos y mínimos relativos de la función:

Hallar la primera y segunda derivada.

La forma factorizada de *y´* sugiere las raíces

Evaluando *y´´* en las raíces

Utilizando la prueba

Calcular las coordenadas de los puntos

Así que las coordenadas son:

Máximo relativo: *(2; 20)*

Mínimo relativo: *(4; 16)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC200 |
| **Título** | Identifica propiedades de una función, dada la segunda derivada  Recurso M9B-01 |
| **Descripción** | Actividad para identificar propiedades de una función, dada la segunda derivada |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

En esta sección se aprendió a analizar gráficamente funciones derivables y encontrar valores críticos en ellas, utilizando técnicas y estrategias de derivación que permiten además, resolver problemas cotidianos si se expresan adecuadamente en lenguaje matemático.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC210 |
| **Título** | Recurso M101A-03  Refuerza tu aprendizaje: El análisis de gráficas |
| **Descripción** | Actividad para identificar propiedades de la derivada, dada la gráfica |

[SECCIÓN 1] **4 los problemas de aplicación**

Se han planteado tácitamente en secciones anteriores las aplicaciones de la derivada en la resolución de problemas cotidianos, como en los campos de la física, la biología, la economía, etc. Aquí se presentarán 3 modelos específicos de aplicación, como son las diferenciales, las razones de cambio y la regla de L´Hopital.

[SECCIÓN 2] **4.1 Diferenciales**

Inicialmente se expresó la derivada de una función con diferentes notaciones, entre ellas la que proviene de la definición del límite, donde:

Pero si se atiende solamente la variación de y dejando indicada su dependencia con la variable *x* y con el intervalo de *x* en el que ocurre, se puede expresar como:

A esta expresión se le conoce como un diferencial de *y* o un *dy.* De igual manera el diferencial de *x* estaría definido solamente por la variación *Δx* en un punto *x*.

**Ejemplo:**

De la función , determinar *dy* y el valor de *dy* para *x=2* y *Δx =0,1*

Derivar

Sustituir x y dx, que por definición es *Δx*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC220 |
| **Título** | Recurso M8A-01  Soluciona problemas empleando diferenciales |
| **Descripción** | Actividad para solucionar problemas empleando diferenciales |

[SECCIÓN 2] **4.2 Razón de cambio**

Se ha interpretado la función derivada como la función de cambio de una variable respecto a otra

Pero en ocasiones se encuentran funciones que relacionan dos variables, en la que ambas varían respecto a una tercera variable, como el tiempo, por ejemplo. En este caso es posible expresar la razón de cambio de cada una de las variables respecto a la otra, en términos de la variación de esta respecto a la tercera. A través de las reglas previamente utilizadas, se puede derivar toda la función en términos de la tercera variable. Se les conoce como razones de cambio relacionadas, y son prácticas a la hora de determinar la razón de cambio de una variable, si se conoce la otra.

Ejemplo:

Una escalera de *20 m* está apoyada a una pared vertical, pero la base de la escalera resbala sobre el suelo a una tasa de *2m* cada segundo. ¿A qué velocidad resbala el otro extremo sobre la pared cuando ésta se encuentra a 12m del suelo?

Identificar las partes del problema.

*x* es la distancia horizontal que resbala la escalera

*y* es la distancia vertical que resbala la escalera

*l* es la longitud fija de la escalera

*t* es el tiempo que tarda en resbalar

*h* es la altura (y) en el momento de ser evaluada.

Hacer un diagrama de la situación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG10 |
| **Descripción** | Escalera sobre una pared |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se forma un triángulo rectángulo |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Expresar una relación para las 3 magnitudes involucradas. Por teorema de Pitágoras, el triángulo que forma la escalera con el suelo y la pared, cumple que:

Se conoce la razón de cambio de la distancia horizontal respecto al tiempo:

Y se quiere definir la razón de cambio de la distancia horizontal respecto al tiempo. Si se deriva la función respecto a t, usando la regla de la cadena, se obtiene:

De esta expresión despejar:

Esta función determina la variación general del movimiento para cualquier pareja *( x , y)*, pero como se tiene la altura especifica (12m) a la que quiere ser evaluada la situación, es posible encontrar el valor de x sustituyendo

Y al reemplazar los valores en la función general derivada:

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC230 |
| **Título** | Recurso F6-01  La razón de cambio en problemas cotidianos |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presenta un problema en una ciencia que use la matemática aplicada y la derivada o modelo funcional para la explicación de un fenómeno específico. |

[SECCIÓN 2] **4.3 Regla de L´Hópital**

En secciones anteriores se hablo acerca de los límites indeterminados, en los que no era posible su valor cuando se formaba una indeterminación, del tipo “cero sobre cero”, por ejemplo. La regla de L´Hopital establece una relación directa entre este tipo de límites y la derivada de dos funciones, donde se cumplan las siguientes condiciones.

* *f(a) = g(a) =0*
* *f´(a) y g´(a)* existen
* *g´(a) ≠ 0*

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La regla de L´Hopital** |
| **Contenido** |  |

Esta regla se puede aplicar tantas veces como sea necesaria sobre un par de funciones, hasta que la derivada de *g* deje de ser cero y la expresión arroje un valor existente.

Ejemplo:

Si se reemplaza directamente, la expresión sería una indeterminación, así que se aplica la regla:

Pero al evaluar en cero, la derivada de g es 0, lo que no cumpliría con las condiciones. Así que el proceso se repite, donde ahora

Aun es cero. Otra vez:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC240 |
| **Título** | Recurso M7A-06  Calcula límites aplicando la Regla de L'Hopital |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la Regla de L'Hopital en el cálculo de límites |

[SECCIÓN 2] **4.4 Consolidación**

Con 3 herramientas poderosas del cálculo para resolver problemas de aplicación de las derivadas, ha sido posible reconocer la idea de diferencial, de razón de cambio y aplicar algunas reglas como la de L´Hopital para resolver situaciones de la matemática que con técnicas anteriores no era posible.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC250 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los problemas de aplicación  Recurso M101A-04 |
| **Descripción** | Actividad para reforzar las los problemas de aplicación de la derivación, específicamente en razones de cambio y diferenciales |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

Ahora que se han revisado y estudiado con detenimiento los conceptos y herramientas, es hora de ejercitar y demostrar las habilidades adquiridas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC260 |
| **Título** | Competencias: Modelando curvas y velocidad  Recurso M102AB-01 |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la definición de la derivada y sus aplicaciones, mediada por software |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC270 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre el concepto y aplicaciones de la derivada |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC280 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre la derivada y sus aplicaciones  Recurso M5A-04 |
| **Descripción** | Actividades para evaluar los temas vistos acerca de la derivada y sus aplicaciones |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC290 | |
| **Web 01** | *Calculadora De Derivadas* | *https://es.symbolab.com/solver/derivative-calculator* |
| **Web 02** | *Obteniendo derivadas. Teoría y ejercicios prácticos* | *https://es.khanacademy.org/math/calculus-home/differential-calculus/taking-derivatives* |
| **Web 03** | *Foro de Matemáticas. Ejercicios de todos los niveles* | *http://www.derivadas.es/* |