|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Continuidad |
| Código del guion | MA\_11\_04\_CO |
| Descripción | La idea intuitiva de función continua en un intervalo es más bien sencilla, una función sera continua en un intervalo si al considerear las la grafica de la función en ese intervalo se tiene que es una curva *continua*, es decir que la podemos dibujar de un solo trazo, sin levantar el lapiz del papel, para dar una definción formal se usara la idea de límite. |

[SECCIÓN 1]**1 Continuidad de funciones**

La definición matemática de continuidad busca coincidir notoriamente con el sentido que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano, un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.

Una de las principales características que tienen los números reales es que pueden ser representados mediante una recta (la recta real), es decir que existe una correspondencia biunívoca entre cada punto de la recta y un número real, sin que quede ningún hueco, lo que permite hacer un **trazo continuo** sin interrupciones o cambios fuertes, lo que nos lleva cuestionarse sobre ¿Cuales son las funciones de números reales que al aplicarse preservan esta propiedad?.

Para responder esta pregunta es posible apoyarse en las graficas de la funciones, geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones, lo que hace que la curva que representa grafica de la función tampoco presenta interrupciones, puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, no tiene huecos o saltos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG01 |
| **Descripción** | 3 funciones cada uno en su plano, las graficas de las funciones , y en el intervalo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el intervalo de la grafica de la izquierda es posible trazarla de un solo trazo, pero la del centro y la derecha no. |

Las funciones que no presentan estas interrupciones o saltos en su gráficas son las candidatas perfectas a ser llamadas **continuas** en el sentido de que preservan el trazo continuo, sin embargo, esta idea es más intuitiva y poco formal, además de que depende de la grafica de la función con la cual no siempre se cuenta, es por esto que es necesario formalizar a idea de continuidad, para ello, se comenzara por definir la continuidad en un punto.

[SECCIÓN 2] 1.1 Continuidad de una función en un punto

En el capitulo anterior se observo que el límite de una función cuando tiende a , con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en , (cuando se cumplen las condiciones para calcular el limite por evaluación), que esto se pueda realizar es precisamente lo que definirá una función sea continua en un punto .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción de función continua en un punto** |
| **Contenido** | Diremos que **una función es continua en punto**  si y solo si se cumple que: |

De la definición anterior se tiene que para que una **función sea continua en un punto** deben cumplirse varias cosas:

* Se debe poder calcular la imagen por de es decir que es necesario que  **este el dominio de la función**.
* Se debe poder calcular el limite cuando tiende a de la función, lo que hace necesariamente que  **debe ser un punto de acumulación de el** . [VER] (enlace a la actividad de punto de acumulación capitulo anterior)
* **El limite cuando tiende a de la función debe existir y ser finito.**
* **El limite cuando tiende a de la función debe coincidir con la imagen en .**

Cada una de las condiciones anteriores se deben revisar en ese orden para saber que la función es continua en ese punto.

Ejemplos:

Se quiere saber si la función es continua en en el punto ,.

Se tiene que pertenece al dominio de la función y que , además es un punto de acumulación y , es decir que existe y es finito, por último el limite en ese punto coincide con su imagen por lo tanto, **la función es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en . |

Si se considera la función en el punto , se tiene que no es un punto del dominio de la función por la tanto  **no es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no pertenece al dominio de la función. |

Si se considera la función en el punto , se tiene que es punto del dominio y , pero no es punto de acumulación por lo que no se puede calcular el limite de l función cuando tiende a cero, por tanto la **función no es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es un punto de acumulación. |

Si se considera la función en el punto , se tiene que es punto del dominio con y también de acumulación, pero no existe, por tanto la **función no es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El limite cuando la función tiende a no existe. |

Si se considera la función en el punto , se tiene que es punto del dominio con y también de acumulación, pero existe pero no es finito, por tanto la **función no es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El limite cuando la función tiende a es infinito. |

Si se considera la función en el punto , se tiene que es un punto del dominio con y de acumulación, además , pero el limite el limite y la imagen no coincide en el punto entonces **la función no es continua en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El limite cuando la función tiende a es 1 pero no coincide con la imagen que es . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC10 |
| **Título** | Funciones continuas en un punto. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica identificar cuando una función es continua en un punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC20 |
| **Título** | Determinando por que la función es discontinua. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica identificar la razón por la que la función es discontinua. |

[SECCIÓN 2] 1.2 Continuidad lateral en un punto

Al igual que el caso de los limites que se puede estudiar la tendencia de las imágenes al acercarnos por derecha o por izquierda del número, también se puede estudiar la continuidad de una función en un punto por derecha o por izquierda.

[SECCIÓN 3] 1.2.1 Continuidad lateral derecha

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción de función continua en un punto a derecha** |
| **Contenido** | Diremos que **una función es continua en punto**  si y solo si se cumple que: |

Por ejemplo:

Si se considera la función en el punto , se tiene que es punto del dominio con , pero no es punto de acumulación y no se pude calcular el limite por izquierda en , por tanto lafunción no es continua en , sin embargo si es un punto de acumulación por derecha del dominio de la función además , como en este caso el limite por derecha y la imagen coinciden por lo que  **es continua por derecha en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por derecha en . |

Si se considera la función en el punto , se tiene que es punto del dominio con , además se tiene que y , lo que hace que el limite de la función cuanto tiende a no exista y por tanto la función no sea continua en , sin embargo, el limite por derecha y la imagen coinciden por lo que  **es continua por derecha en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por derecha en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC30 |
| **Título** | Funciones continuas en un punto por derecha |
| **Descripción** | Actividad en que se practica identificar cuando una función es continua en un punto por derecha |

[SECCIÓN 3] 1.2.1 Continuidad lateral izquierda

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción de función continua en un punto a izquierda** |
| **Contenido** | Diremos que **una función es continua en punto**  si y solo si se cumple que: |

Ejemplos:

Si se considera la función en , se tiene que pertenece al dominio de la función y , además es un punto de acumulación, pero el no existe, ya que y , por lo tanto la función no es continua en , sin embargo observemos que , por lo tanto se puede afirmar que  **es continua en por izquierda.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por izquierdaen . |

Si se considera la función en , se tiene que pertenece al dominio de la función y , además se tiene que y , lo que hace que el limite de la función cuanto tiende a no exista, y por tanto no sea continua en , sin embargo, el limite por izquierda y la imagen coinciden por lo que  **es continua por derecha en .**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG11 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por izquierda en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC40 |
| **Título** | Funciones continuas en un punto por izquierda. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica identificar cuando una función es continua en un punto por izquierda. |

SECCIÓN 2] 1.2 Operaciones de funciones y continuidad en un punto

Estudiar la continuidad de una función en un punto, se puede decir que se reduce a estudiar el limite de una función en dicho punto y compararlo con su imagen, es por esto que no es una sorpresa que las propiedades de los limites con respecto a las operaciones de funciones se trasladen de cierta manera para el caso de la continuidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones de funciones continuas** |
| **Contenido** | Si se sabe que las funciones y son continuas en un punto entonces:   * **es continua en** * **es continua en** * **es continua en siempre que** |

Se aplican de forma similar cuando se estudia la continuidad por derecha o por izquierda.

Ejemplos:

Si se considera la función en , se tiene que:

Es decir que las funciones , y son continuas en , y como la función es la suma de estas tres funciones entonces por el teorema anterior se tiene que  **es continua en** , es decir:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG12 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en . |

Si se considera la función en se tiene que es continua por izquierda en y es continua en y además , luego por el teorema anterior se tiene que la función  **es continua por izquierda en** , es decir:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG13 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por izquierda en . |

Si se considera la función en , se tiene que:

Es decir que las funciones , es continua en , y es continua por derecha en , y como la función es el producto de estas dos funciones entonces por el teorema anterior se tiene que  **es continua por derecha en** , es decir:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG14 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua por derecha en . |

Para el caso de la composición, se esta hallando la imagen de la imagen, es por esto que para preservar la continuidad en un punto , es necesario que la primera función que se aplica sea continua en pero la segunda debe ser continua en la imagen de , es decir:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC50 |
| **Título** | Operaciones entre funciones continuas. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica el uso de operaciones entre funciones continuas para determinar nuevas funciones continuas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones continuas** |
| **Contenido** | Si s  **es continua en un punto**  y la función  **es continua en**  entonces:  **es continua en** |

Ejemplos:

Si se considera la función en , se observa que se puede obtener como la composición de y , es decir que:

Se tiene que es continua en y que ; además es continua en , entonces por el teorema anterior,  **es continua en** , es decir que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG15 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en . |

Si se considera la función en , se observa que se puede obtener como la composición de y , es decir que:

Se tiene que es continua en y que ; además es continua en , entonces por el teorema anterior,  **es continua en** , es decir que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC60 |
| **Título** | Composición de funciones continuas. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica el uso de composición de funciones continuas para determinar nuevas funciones continuas. |

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Composición de funciones y continuidad lateral. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como usuar el teoram de composición de funciones cuando estan presentan continuidad lateral. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_RE80 |
| **Título** | Continuidad de funciones especiales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia la continuidad de funciones poco usuales de numeros reales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC90 |
| **Título** | Continuidad y discontinuidad puntual. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar la continuidad o discontinuidad de ciertas funciones en puntos especificos. |

[SECCIÓN 1] 2. Tipos de discontinuidad.

Existen diferentes motivos por los cuales una función no es continua en un punto , tales como que no este en el dominio, o no sea un punto de acumulación, o el limite de las imágenes por la función no exista o esta sea infinito, o que tanto imagen como el limite existan y sea finito pero estos no coincidan. En algunos de estos casos, es posible redefinir la función para lograr que esta sea continua en dicho punto, en estos casos se dice que la discontinuidad es evitable, ahora si no es posible redefinir la función para que sea continua en el punto se dice que la discontinuidad es inevitable.

[SECCIÓN 2] 2.1 Discontinuidad Evitable o Removible

Una función la función presenta una **discontinuidad evitable o reomovible** en un punto , el limite de la función en el punto existe y es finito pero se tiene que este no coincide con la imagen de la función o no pertenece a dominio de la función, en símbolos se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad evitable** |
| **Contenido** | Sea una función tal que:  y  **ó**  entonces **presenta una discontinuidad evitable en .** |

Ejemplo 1:

Si se considera la función tenemos que sin embargo se tiene que , por lo tanto la función presenta una discontinuidad evitable en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG16 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad evitable en . |

Ejemplo 2:

Si se considera la función

Tenemos que , y , pero por otro lado , como el limite cuando se tiende a es diferente a la imagen de la función en ese punto la función presenta una discontinuidad evitable en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG17 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad evitable en . |

Cuando se presenta una discontinuidad evitable en un punto , se redefine la función en ese punto, para que coincida con el limite en ese punto.

En el ejemplo 1, podemos redefinir la función para que sea continua en el punto , como se sigue:

En el caso de la función se tienen que:

La función y la función solo difieren en el punto .

En el ejemplo 2, podemos redefinir la función para que sea continua en el punto , como se sigue:

En el caso de la función se tienen que:

La función y la función solo difieren en el punto .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC100 |
| **Título** | Discontinuidad evitable |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar si la función presenta o no una discontinuidad removible en cierto punto. |

[SECCIÓN 2] 2.2 Discontinuidad Inevitable.

Cuando en una función se tiene que el limite de una función en un punto no existe o es infinito se dice que la discontinuidad es inevitable, en las discontinuidades inevitables tenemos varios casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad Asintótica.** |
| **Contenido** | La discontinuidad asintótica se presenta cuando uno o los dos limites laterales de la función en ese punto es infinito o menos infinito. |

Ejemplo 1:

Si se considera la función se tienen que y además y , por lo tanto la función presenta una discontinuidad asintótica en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG18 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad asintotica en . |

Ejemplo 2.

Si se considera la función se tienen que y además y , por lo tanto la función presenta una discontinuidad asintótica en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG19 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad asintotica en . |

Cuando se presenta una discontinuidad asintótica hay que tener en cuenta que es posible que uno de los dos limites laterales sea infinito o menos infinito, pero el otro limite lateral exista y sea finito; esto permite que aunque no podemos redefinir a para que sea continua, se pueda estudiar la continuidad de solamente por el lado en que el limite lateral es finito.

En el ejemplo 2, se podría redefinir a la función , para volverla continua por izquierda, como se sigue:

En el caso de la función se tienen que:

La función y la función solo difieren en el punto .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC110 |
| **Título** | Discontinuidad asintotica |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar si la función presenta o no una discontinuidad asintotica en cierto punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad de Salto.** |
| **Contenido** | La discontinuidad de salto se presenta cuando existen los limites laterales y son finitos pero estos no coinciden. |

Ejemplo 1.

Si se considera la función se tienen que y además y , por lo tanto la función presenta una discontinuidad de salto en . Sin embargo la función es continua por derecha en este punto

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG20 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad de salto en . |

Ejemplo 2.

Si se considera la función se tienen que y además y , por lo tanto la función presenta una discontinuidad de salto en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG21 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad de salto en . |

Ahora como los limites laterales existen y son finitos, se puede redefinir la función para que sea continua o bien por derecha o por izquierda, en el ejemplo anterior se tiene que podemos redefinir las funciones como:

de tal manera que siendo continua por derecha.

O como:

de tal manera que siendo continua por izquierda.

Las funciones , y solo difieren en el punto .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC120 |
| **Título** | Discontinuidad de salto |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar si la función presenta o no una discontinuidad de salto en cierto punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad de Oscilación.** |
| **Contenido** | La discontinuidad de oscilación se presenta cuando no existe uno o los dos limites laterales y no son infinitos. |

Ejemplo 1.

Si se considera la función se tienen que y además no existe y tampoco, por lo tanto la función presenta una discontinuidad de oscilación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG22 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad de oscilación en . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad de Punto Aislado.** |
| **Contenido** | La discontinuidad de punto aislado se presenta cuando no es un punto de acumulación de el dominio de la función, lo que hace que ni si quiera tenga sentido pensar en el limite. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Un punto es punto de acumulación de un conjunto si existe un tal que es un subconjunto de . [VER] (enlace a la actividad en limites) |

Ejemplo 1:

La función

Se observa que el dominio de la función es , por lo que si estudiamos la continuidad , tenemos que se presenta una **discontinuidad de punto asilado,** ya que no es punto de acumulación y por lo tanto no se puede calcular el limite.

En la grafica se observa que el punto es aislado en la grafica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG23 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discotinuidad de punto aislado en . |

[SECCIÓN 2] 2.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC130 |
| **Título** | Tipo de discontinuidad |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar si el tipo de discontinuidad de una función en cierto punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC140 |
| **Título** | Refediniendo funciones |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como se redefinen ciertas funciones con continuidad removible para volverlas continuas. |

[SECCIÓN 1] 3. Funciones continuas en intervalos

La idea intuitiva de función continua es poder realizar la grafica de una función en un solo trazo, sin embargo el hecho de que una función sea continua en un punto no es suficiente para que esto suceda ni siquiera cerca al punto .

Por ejemplo si consideramos la función tenemos que tanto por derecha como por izquierdas las imágenes de los valores cercanos a se acercan a , que en este caso también resulta ser , por lo tanto el limite y la imagen coinciden y se tiene que la función es continua en , sin embargo al realizar una grafica de la función esta no se puede realizar en un solo trazo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG24 |
| **Descripción** | ampliando cerca de cero |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en , pero no se puede hacer en un solo trazo. |

Para poder garantizar que podemos realizar la grafica de una función en un solo trazo en un intervalo, se debe garantizar la continuidad en todos los puntos del intervalo.

[SECCIÓN 2] 3.1 Funciones continuas en intervalos abiertos

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos abiertos** |
| **Contenido** | Una función  **es continua en un intervalo abierto**  si y solo si e**s continua en todo punto** .  Una función  **es continua en un intervalo abierto**  si y solo si e**s continua en todo punto** .  Una función  **es continua en un intervalo abierto**  si y solo si e**s continua en todo punto** . |

Ejemplo 1.

Si consideramos la función , tenemos que la función es discontinua en , sin embargo en cualquier otro valor de la función se tiene que la función es continua por lo que podemos decir que es continua en los intervalos y , observemos que en estos la grafica de la función pude realizarse en un solo trazo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en y en |

Ejemplo 2.

Si consideramos la función , tenemos que la función es discontinua en , sin embargo en cualquier otra valor del dominio de la función se tiene que la función es continua por lo que podemos decir que es continua en los intervalos y , observemos que en estos la grafica de la función pude realizarse en un solo trazo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG26 |
| **Descripción** | , |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en y en |

[SECCIÓN 2] 3.2 Funciones continuas en intervalos Semiabiertos

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos semiabiertos** |
| **Contenido** | Una función  **es continua en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s continua y continua por derecha en** .  Una función  **es continua en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s continua y continua por derecha en** .  Una función  **es continua en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s continua y continua por izquierda en** .  Una función  **es continua en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s continua y continua por izquierda en** . |

Ejemplo 1.

Si consideramos la función , tenemos que la función es discontinua en , pero es continua en por derecha en ese punto, una situación similar sucede en cualquier número entero , sin embargo es continua en los demás valores reales, por lo tanto podemos decir que es continua en todos los intervalos con .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en con . |

Ejemplo 2.

Si consideramos la función , tenemos que la función es discontinua en , pero es continua en por izquierda en ese punto, además se tiene que la función es continua en los demás puntos por lo que podemos decir que es continua en los intervalos y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG28 |
| **Descripción** | , |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en y |

[SECCIÓN 2] 3.3 Funciones continuas en intervalos Cerrados

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos Cerrados** |
| **Contenido** | Una función  **es continua en un intervalo Cerrado**  si y solo si e**s continua , continua por derecha en y continua por izquierda en**. |

Ejemplo 1.

Si consideramos la función , tenemos que la función es discontinua en , y en , aunque es continua en por derecha y en por izquierda, además es continua en los demás puntos por lo que podemos decir que es continua en los intervalos , en y en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es continua en , en y en . |

[SECCIÓN 2] 3.4 Continuidad de las funciones Usuales

Gracias a las operaciones entre funciones continuas se tienen que las funciones más usuales entre números reales tales como polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas son continuas en todo punto de su dominio, de manera especifica se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Función** | **Intervalos de continuidad** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

[SECCIÓN 2] 3.5 El teorema del valor Intermedio

Cuando una función es continua en un intervalo cerrado , se puede dibujar la grafica de la función de un solo trazo en este intervalo, esto es quiere decir que la grafica de la función en ese intervalo es una curva continua desde el punto al punto , esto hace que cualquier valor que se encuentre entre y es imagen de un valor en el intervalo, como se expresa de manera formal en el siguiente teorema:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema de Rolle** |
| **Contenido** | **Sea una función es continua en el intervalo** .  Si entonces para todo existe un tal que:  de manera similar si se tiene que entonces para todo existe un tal que: |

Ejemplo 1.

Consideremos la función en el intervalo observemos que es continua en y además entonces cualquier valor entre y es imagen de alguien del intervalo. Con toda seguridad existe tal que en este caso tenemos que

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG29 |
| **Descripción** | en el intervalo y la recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Existe alguien que tiene por imagen 2.5 |

Ejemplo 2.

Consideremos la ecuación para determinar que tiene solución primero igualamos a cero es decir la transformamos en la ecuación . Esta ecuación tiene solución si y solo su la función , corta al eje X.

Como la función y la función son continuas en todos los reales entonces su suma es decir la función también lo es. En particular tenemos que:

y

tenemos entonces que es continua en ya que es continua en todos los reales, y además , por lo tanto todo valor entre y es imagen de alguien en este intervalo, en particular existe algún tal que , por lo que podemos asegurar que la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo ya que el teorema nos garantiza que esta existe aunque no podamos determinar con facilidad cual es.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG30 |
| **Descripción** | y en el intervalo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las dos funciones tienen un punto de corte entre por lo que la ecuación tienen solución. |

[SECCIÓN 2] 3.6 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC150 |
| **Título** | Puntos de discontinuidad de una función |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como determinar los puntos de discontinuidad de una función algebraica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC160 |
| **Título** | Intervalos de continuidad |
| **Descripción** | Actividad en que se practica determinar los intervalos de continuidad de diferenytes funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC170 |
| **Título** | Importancia de las hipotesis del teorema del valor medio |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia las consecuencoas de que falle alguna de las hipotesis del teorema del valor medio. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC180 |
| **Título** | Continuidad de funciones que modelan situaciones reales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia los intervalos de continuidad de ciertas funciones que modelan algunas situiaciones reales. |

[SECCIÓN 1]**5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Competencias: Concepto de continuidad. |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerza lo aprendido sobre el calculo de limites. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_03\_CO\_REC200 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre continuidad. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_03\_CO\_REC210 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC220 | |
| **Web 01** |  | [**http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=5844f7bfc8b89f0512de7c545ad502c**](http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=5844f7bfc8b89f0512de7c545ad502c) |
| **Web 02** |  | [**http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2.html**](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2.html) |
| **Web 03** |  | [**http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2\_1.html**](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2_1.html) |
| **Web 04** |  | **https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limits-topic/continuity-limits** |