|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las integrales |
| Código del guion | MA\_11\_05\_CO |
| Descripción | Con la aplicación de las integrales podrás modelar situaciones que muestran variaciones respecto al tiempo o a otras variables y calcular el área y el volumen de formas regulares e irregulares. |

[ SECCIÓN 1] **1 La antiderivada**

A lo largo de tu aprendizaje en el área has estudiado las operaciones aritméticas y conoces que para cada una de ellas se determina su inversa. Por ejemplo, la inversa de la adición es la sustracción, de la multiplicación es la división, de la potenciación es la radicación. En cada caso, la segunda operación “deshace” a la primera y viceversa. El interés de estos procesos de operaciones inversas radica en la utilidad que tienen para solucionar ecuaciones. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas, necesitaremos su inversa, denominada antiderivación. En el presente capítulo veremos este proceso, inverso a la derivación, es decir, dada la derivada *f’* (*x*), hallar la función *f*(*x*). Así, una derivada tendrá su correspondiente antiderivada.

**La antiderivada**

Una función *F*(*x*) definida en un intervalo, es una**antiderivada**de otra función *f*(*x*) en ese intervalo, si cumple que *F’* (*x*) = *f*(*x*), para todo *x* que pertenezca al intervalo.

[ SECCIÓN 2] **1.1 La primitiva de una función**

La antiderivada de una función también se conoce con el nombre de **primitiva de la función** y consiste en determinar la función original *F*(*x*) conociendo su función derivada *F’* (*x*).

Una particularidad de las antiderivadas es que no son únicas. Si recordamos la derivada de una función constante es cero, entonces si *F*(*x*) es una antiderivada de *f*(*x*), también lo es *G*(*x*)*,* definida por *G*(*x*) *= F*(*x*) *+ C*, para cualquier número *C.*

Por ejemplo, si *f*(*x*) = 4*x*³, entonces las funciones definidas por las expresiones *G*(*x*) = *x*4 + 3, *H*(*x*) = *x*4 + √2, entre otras, son antiderivadas de *f*(*x*).

En general, si *F*(*x*) es una antiderivada de *f*(*x*), en un intervalo, entonces cualquiera otra antiderivada de *f*(*x*) tiene la forma *F(x) + C*, donde *C* es una constante arbitraria.

Así que, si una función *f* tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la adición de una constante adecuada.

La función *F*(*x*) *+ C* se llama la antiderivada general de *f*(*x*)*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica se muestra una familia de funciones *F*(*x*) en las que *C* es una constante arbitraria. |
| **Ubicación del pie de imagen** |  |

Ejemplo 1

Hallar una primitiva *F* de la función *G*(*x*) = *x*4 + 3.

Anteriormente se dedujo que *F*(*x*) = 4*x*³es una primitiva de *G*(*x*)*,* ya que la derivada de *G*(*x*) es igual a *f*(*x*)*.*

Luego *F*(*x*) = 4*x*³ + 4.

Ejemplo 2

Si *f*(*x*) = cos 3*x* + 2*x*, definir la primitiva *F* de la función *f*.

Se calcula la derivada implícita de *f*.

Si *f*(*x*) = cos 3*x* + 2*x*, entonces *F*(*x*) = (–sen 3*x*)(3) + 2 = –3(sen 3*x*) + 2.

**[** SECCIÓN 2**] 1.2 La integral indefinida**

Las antiderivadas de una función forman una familia de funciones cuya representación gráfica se diferencia una de otra solamente en un número.

**La integral indefinida**

Al conjunto de todas las antiderivadas de una función *f*(*x*) se le llama **integral indefinida** de *f*(*x*), y se representa como:

ʃ *f*(*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_001

Se lee **la integral** **indefinida** de *f*(*x*) respecto a *x*.

Por ejemplo, si *f*(*x*) = *y* = *x*2*+ x –* 2, entonces *f´* (*x*) *= dy =* (2*x* + 1) *dx* y la integral indefinida es:

ʃ *dy/dx* = ʃ (2*x* + 1) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_002

Luego, se puede concluir que:

ʃ *f*(*x*) *dx* = *F*(*x*) + *C* FQ\_MA\_11\_05\_003

*C* es llamada la **constante de integración**.

**[** SECCIÓN 3**] 1.2.1 Propiedades de la integral indefinida**

Si *f*(*x*) y *g*(*x*) son dos funciones que tienen integral indefinida, y *k* es una constante, entonces:

*ʃ* (*f*(*x*) *+ g*(*x*)) *dx = ʃ f*(*x*) *dx + ʃ g*(*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_004

*ʃ* (*f*(*x*) *– g*(*x*)) *dx = ʃ f*(*x*) *dx – ʃ g*(*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_005

*ʃ kf*(*x*) *dx = k ʃ f*(*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_006

A partir de la tabla de derivación se puede obtener una serie de integrales llamadas **integrales inmediatas**, es decir, aquellas que se pueden determinar directamente, sin necesidad de realizar ningún cambio o transformación. Por ejemplo:

* La integral de la **función nula** *f*(*x*) = 0 es:

*ʃ f*(*x*) *dx = ʃ* 0 *dx =* 0 *ʃ dx = C* FQ\_MA\_11\_05\_007

* La integral de la **función constante** *f*(*x*) = *k* es:

*ʃ f*(*x*) *dx = k ʃ dx = kx + C* FQ\_MA\_11\_05\_008

* La integral de la **función *f*(*x*) *= x***es:

*ʃ f*(*x*) *dx = ʃ x dx = x*2*/*2 *+ C* FQ\_MA\_11\_05\_009

* La integral de la función ***f*(*x*) *=* 1** es:

*ʃ dx = x + C* FQ\_MA\_11\_05\_010

* La integral de **la función potencia *f*(*x*) *= xn***, con *n* ≠–1*,* es:

*ʃ f*(*x*) *dx = ʃ x dx = xn* + 1*/*(*n +* 1) *+ C* FQ\_MA\_11\_05\_011

Veamos cómo descomponer algunas integrales en otras más sencillas aplicando las integrales inmediatas dadas.

Para cada caso resolver las integrales.

1. 4 – 5*x*2 + 3) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_012

4 – 5*x*2 + 3) *dx* = 4 *dx* – *x*2 *dx* + *dx* FQ\_MA\_11\_05\_013

= *x*5/5 + *C*1 – 5*x*3/3 + *C*2 + 3*x* + *C*3 FQ\_MA\_11\_05\_014

Por tanto:

4 – 5*x*2 + 3) *dx* = *x*5/5 – 5*x*3/3 + 3*x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_015

1. ʃ (7*x*3 – 2*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_016

ʃ (7*x*3 – 2*x*) *dx =* 3 *dx* – FQ\_MA\_11\_05\_017

Luego:

ʃ (7*x*3 – 2*x*) *dx* =7/4*x*4 – *x*2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_018

1. 3/2 – 3*u* + 10) *du* FQ\_MA\_11\_05\_019

3/2 – 3*u* + 10) *du* = 3/2 *du* – 3 + 10 FQ\_MA\_11\_05\_020

Entonces:

3/2 – 3*u* + 10) *du* = 2/5*u*5/2 – 3/2*u*2 + 10*u* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_021

1. *dx* FQ\_MA\_11\_05\_022

*dx = –*  FQ\_MA\_11\_05\_023

*– =* FQ\_MA\_11\_05\_024

= FQ\_MA\_11\_05\_025

= 3 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_026

3 + *C =*  4 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_027

Finalmente:

*dx* = 4 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_028

5. Determinar *f*(*x*) para la cual su derivada es la función *f’* (*x*) = *x*2 – 3*x* + csc2 *x.*

FQ\_MA\_11\_05\_029

FQ\_MA\_11\_05\_030

FQ\_MA\_11\_05\_031

Por tanto, se concluye que:

FQ\_MA\_11\_05\_032

A continuación se presenta una primera lista de primitivas inmediatas que surgen directamente de derivadas ya conocidas.

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones algebraicas** |
|  |

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones trascendentes** |
|  |

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones trigonométricas** |
|  |

Ejemplo 3

Usando la tabla de integrales inmediatas, encontrar la integral indefinida de cada función.

1. 2 + 2/*x*3) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_046

2 + 2/*x*3) *dx* = 2 *dx* + 3 *dx* FQ\_MA\_11\_05\_047

= -2 *dx* + -3 *dx* = –*x*-1 – 2*x*-2/2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_048

Por tanto:

2 + 2/*x*3) *dx* = –1/*x* – 1/*x*2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_049

1. *dx* FQ\_MA\_11\_05\_050

*dx* = 1/2 *dx* = 3 *x*3/2 / 3/2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_051

Se concluye que:

*dx* = 2*x*3/2 + *C* = 2*x*√*x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_052

1. 2 *x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_053

2 *x*) *dx* = + 2 *x* *dx* = sen *x* + tan *x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_054

Por tanto, se obtiene:

2 *x*) *dx* = sen *x* + tan *x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_055

1. FQ\_MA\_11\_05\_056

FQ\_MA\_11\_05\_057

FQ\_MA\_11\_05\_058

FQ\_MA\_11\_05\_059

Finalmente se concluye que:

FQ\_MA\_11\_05\_060

**[**SECCIÓN 3**] 1.2.2 Soluciones particulares**

Se ha dicho que las antiderivadas de una función forman una familia de funciones, cuyas soluciones se diferencian una de otra solo por la constante de integración *C*.

Por ejemplo, la integral de la función *f*(*x*) *=* 5*x*2 + 2*x* – 3 es:

ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3) *dx* = ʃ 5*x*2 *dx* + ʃ 2*x dx* – ʃ 3 *dx* FQ\_MA\_11\_05\_061

ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3) *dx* = 5*x*3/3 + 2*x*2/2 – 3*x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_062

Finalmente:

ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3) *dx* = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_063

Si se sustituye el valor de *C* por distintos valores, se obtienen algunas integrales de la función *f*(*x*) dada.

Ahora, si el planteamiento del ejercicio brinda información adicional, es posible obtener una solución particular de una integral dada. A este tipo de información se le llama **condición inicial**.

**Recuerda**

Una condición inicial se da cuando se conoce el valor de *F(x)* para un valor *x* dado.

Por ejemplo, calcular una solución particular para la función *F*(*x*) = (5*x2* + 2*x* – 3) *dx* si *F*(0) = 2.

En este caso, la solución particular determina que si *F*(*x*) = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x + C,* entonces:

2 = 5/3(0)3 + (0)2 – 0 + *C*

Al resolver la ecuación se obtiene que *C* = 2.

Así, la solución particular para la integral es:

*F*(*x*) = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x* + 2

Al igual que la derivación, la integración resulta un método útil para encontrar la ecuación de una recta o solucionar problemas de física o de otras áreas.

Veamos:

Encontrar la función *f*(*x*) que pasa por el punto (0, 2), *f ”* (*x*) 2*x* – 1y la pendiente de la recta tangente en dicho punto es *m* = 4.

Como la función pasa por el punto (0, 2), entonces *f*(0) = 2. Además, como la pendiente de la recta tangente de la función en *x* = 0 es 4, entonces *f ’* (0) = 4. Luego, se halla *f ’* (*x*), con *f ’* (0) = 4, como sigue:

FQ\_MA\_11\_05\_064

Se sustituye *x* = 0:

*f* ’ (0) = (0)2 – (0) + *C*

Se sustituye *f ’* (0) = 4:

4 = *C*

De esa forma:

*f ’* (*x*) *= x*2 *– x +* 4

En el campo de la física es posible analizar lo siguiente: si una partícula se mueve en línea recta, la función de posición *s*(*t*) es una antiderivada de su función de velocidad *v*(*t*)*;* es decir, *s’* (*t*) *= v*(*t*)*.*

Igualmente, como la velocidad es una antiderivada de la aceleración, se tiene que *v’* (*t*) *= a*(*t*)*.*

Teniendo condiciones iníciales, puede determinarse la función de posición de una partícula a partir de la función de aceleración de la partícula. Observa.

Determinar la función de posición de una partícula que parte del reposo, en la posición *s* = 3 y cuya aceleración en el tiempo *t*, es *a*(*t*) = 15 m/s2.

Si *s*(*t*) es la posición de un objeto, *v*(*t*) su velocidad y *a*(*t*) su aceleración en función del tiempo *t*, entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_065

FQ\_MA\_11\_05\_066

Así se facilita el cálculo de *v*(*t*).

FQ\_MA\_11\_05\_067

Como la partícula parte del reposo se sabe que *C* = 0.

Por tanto, *v*(*t*) = 15*t* m/s.

Ahora se reemplaza para hallar *s*(*t*).

FQ\_MA\_11\_05\_068

Como *B* = 3, finalmente se obtiene:

FQ\_MA\_11\_05\_069

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_REC50 |
| **Título** | El estudio de las integrales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se exponen distintas formas de comprender la integral |

**[** SECCIÓN 2**] 1.3 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La antiderivada |
| **Descripción** | Actividades sobre las integrales |

[ SECCIÓN 1] **2 Métodos de integración**

En ocasiones no es posible calcular la integral inmediata de una función. Por tal razón, es necesario aplicar otros métodos que permitan obtener una expresión equivalente que haga posible aplicar las propiedades de las integrales o alguna fórmula de integrales inmediatas. Los métodos que se estudiarán en esta sección se denominan la integración por sustitución y la integración por partes.

[ SECCIÓN 2] **2.1 La integración por sustitución**

La integración por sustitución tiene su fundamento en la regla de la cadena para derivar funciones compuestas y consiste en realizar un cambio de variable en la función a la cual se le va a hallar la integral para obtener una expresión que sea más fácil de integrar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La integración por sustitución** |
| **Contenido** | Si *f* y *g* son funciones derivables tales que *y* = *f*(*g*(*x*)) y *F* es unaantiderivada *de f,* entonces:  *ʃ f*(*g*(*x*)*g’* (*x*) *dx =* FQ\_MA\_11\_05\_070  Si se considera que *u* = *g*(*x*), entonces *du* = *g*’ (*x*) *dx*,entonces:  FQ\_MA\_11\_05\_071 |

Ejemplo 1

Evaluar la siguiente integral.

*ʃ* (*x*4 + 3*x*)5(4*x*3 + 3) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_072

Sea *g*(*x*) = *x*4 + 3*x*; entonces *g´* (*x*) = 4*x*3 + 3.

Así, por la regla anterior, se obtiene:

FQ\_MA\_11\_05\_073

= (*x*4 + 3*x*)6 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_074

Ejemplo 2

Hallar la siguiente integral empleando el método de sustitución.

ʃ (*x*3 + 6*x*)5(6*x*2 + 12) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_075

Sea *u* = *x*3 + 6*x*; entonces *du* = (3*x*2 + 6) *dx*

Pero, (6*x*2 + 12) = 2(3*x*2 + 6) = 2 *du,* y en consecuencia:

ʃ (*x*3 + 6*x*)5(6*x*2 + 12) *dx* = ʃ *u*5 2 *du* FQ\_MA\_11\_05\_076

ʃ *u*5 2 *du* = 2 ʃ *u*5 *du* FQ\_MA\_11\_05\_077

ʃ *u*5 2 *du* = 2[*u*6 + *C*] FQ\_MA\_11\_05\_078

Así se puede afirmar que:

ʃ (*x*3 + 6*x*)5(6*x*2 + 12) *dx* = = 2[ (*x*3 + 6*x*)6 + C] FQ\_MA\_11\_05\_079

Ejemplo 3

Calcular la siguiente integral.

ʃ (*x*2 + 4)10 (2*x*) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_080

Sea *u* = (*x*2 + 4); entonces *du* = 2*x dx*, por tanto:

ʃ (*x*2 + 4)10 (2*x*) *dx* = ʃ *u* *du* = *u*2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_081

ʃ (*x*2 + 4)10 (2*x*) *dx* = (*x*2 + 4)2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_082

Ejemplo 4

Calcular la siguiente integral.

FQ\_MA\_11\_05\_083

FQ\_MA\_11\_05\_084

FQ\_MA\_11\_05\_085

Si *u* = *x*2, entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_086

FQ\_MA\_11\_05\_087

Entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_088

También se pueden calcular las integrales usando el método de sustitución o desarrollando el integrando, y observando cómo varían las constantes de integración.

En el siguiente ejemplo se presenta una aplicación.

Ejemplo 5

Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debida a la gravedad, es de 10 metros por segundo por segundo (m/s2), siempre y cuando sea posible despreciar la resistencia del aire. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 300 metros a una velocidad de 15 metros por segundo (m/s), ¿cuál es su velocidad y altura 4 segundos después del lanzamiento?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Objeto en caída libre. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

Supongamos que la altura *s* se considera positiva hacia arriba. Entonces *v = ds/dt* inicialmente es positiva (*s* está aumentando con relación al punto de lanzamiento), pero *a = dv/dt* es negativa (la fuerza que ejerce la gravedad es descendente, por lo que el valor *v* disminuye).

*dv/dt* = –10 FQ\_MA\_11\_05\_089

*v* = ʃ –10 *dt* = –10*t* + *C* FQ\_MA\_11\_05\_090

Como *v* = 15 en *t* = 0, entonces se obtiene que *C* = 15, y así:

*v* = –10*t* + 15

Ahora, *v = ds/dt*, entonces:

*ds/dt =* –10*t* + 15

*ds* = (–10*t* + 15) *dt*

Al integrar ambos términos se obtiene

*s =* ʃ (–10*t* + 15) *dt* FQ\_MA\_11\_05\_091

*s =* –5*t*2 + 15*t* + *K*

Como *s =* 300 en *t =* 0, se calcula que *K* = 300, por tanto:

*s =* –5*t*2 + 15*t* + 300

Finalmente, en *t =* 4:

*v =* –10(4) + 15 = –25 m/s

*s =* –5(4)2 + 15(4) + 300 = 280 m

Observa que si *v = vo* y *s = so* en *t =* 0, se obtienen las conocidas fórmulas de caída libre de un cuerpo.

*a =* –10

*v =* –5*t* + *vo*

*s =* –5*t*2 + *vot + so*

[SECCIÓN 2] **2.2 La integración por partes**

El procedimiento de integración por partes tiene su fundamento en la regla de derivación del producto de dos funciones, en el caso de que una de ellas sea la derivada de una función fácil de obtener.

Así, la derivada de la función(*f*(*x*) *g*(*x*))*’ = f’* (*x*) *g*(*x*) *+ f*(*x*) *g’* (*x*)*,* entonces:

*f*(*x*) *g’* (*x*) *=* (*f*(*x*) *g*(*x*))*’ – f’* (*x*) *g*(*x*)

Al calcular la integral de los dos miembros de la igualdad, resulta:

FQ\_MA\_11\_05\_092

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La integración por partes** |
| **Contenido** | Para calcular la integral de una función por partes se aplica la siguiente fórmula:  FQ\_MA\_11\_05\_093 |

Generalmente, aplicando cambio de variables se utiliza la fórmula equivalente:

FQ\_MA\_11\_05\_094

Esta expresión sirve para calcular el producto de dos funciones, donde una de ellas es la derivada de una función conocida y la integral original es equivalente a otra más simple de hallar.

Para aplicar el método de integración por partes es conveniente:

1. Determinar entre las expresiones del integrando *u* y *dv*.
2. Derivar *u* para determinar *du*.
3. Se integra *dv* para hallar la función *v*.
4. Se aplica la fórmula de integración por partes y se soluciona la integral dada.

Ejemplo 6

Hallar la siguiente integral.

ʃ *x* cos *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_095

Sean *u = x* y *dv =* cos *x dx*.

Entonces: *du = dx* y *v =* sen *x*

Al reemplazar en la fórmula se obtiene:

ʃ *x* cos *x* *dx* = *x* sen *x* – ʃ sen *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_096

La integral que aparece a la derecha de esta expresión es conocida. Por tanto, tenemos:

ʃ *x* cos *x* *dx* = *x* sen *x* + cos *x* + *C*. FQ\_MA\_11\_05\_097

Ejemplo 7

Hallar la integral dada aplicando la integración por partes.

ʃ *x*2 *ex* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_098

Sean *u* = *x*2 y *dv* = *ex* *dx*.

Entonces: *du* = 2*x* *dx* y *v* = *ex*

Reemplazando se llega a:

ʃ *x*2 *ex* *dx* = *x*2*ex* – 2 ʃ *xex dx* (ecuación 1) FQ\_MA\_11\_05\_099

En este caso, la segunda integral es más fácil que la primera, pero necesitamos continuar de la misma manera. Cuando la segunda integral se integra por partes así:

*u* = *x* y *dv* = *ex* *dx*

De modo que *du* = *dx* y *v* = *ex*, entonces:

ʃ *xex* *dx* = *xex* – *ex* FQ\_MA\_11\_05\_100

Se reemplaza en la ecuación 1, y el resultado final es:

ʃ *x*2 *ex dx* = *x*2*e*x – 2*xe*x + 2 *e*x + *C* FQ\_MA\_11\_05\_101

En ocasiones ocurre que la integral con la que se comienza aparece por segunda vez durante la integración por partes. En este caso es posible resolver la ecuación mediante la aplicación del álgebra elemental. Veamos.

Ejemplo 8

Resolver la siguiente integral.

ʃ *ex* cos *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_102

Por facilidad, se denota la integral por *j*. Según el proceso de integración por partes:

*u* = *ex* y *dv* = cos *x* *dx*

Entonces: *du* = *e*x *dx* y *v* = sen *x*, por tanto:

*j* = *ex* sen *x* – ʃ *ex* sen *x* *dx* (ecuación 1) FQ\_MA\_11\_05\_103

Observa que el segundo término de la derecha de la igualdad no es tan fácil de integrar, pero se puede aplicar de nuevo la integración por partes, así:

*u* = *ex* y *dv* = sen *x* *dx*

*du* = *ex* *dx* y *v* = –cos *x*

Por consiguiente:

ʃ *ex* sen *x* *dx* = –*ex* cos *x* + ʃ *ex* cos *x dx* FQ\_MA\_11\_05\_104

Notemos que la integral del segundo miembro es nuevamente *j*, por tanto, se escribe:

ʃ *ex* sen *x* *dx* = –*ex* cos *x* + *j* FQ\_MA\_11\_05\_105

Al reemplazar esta ecuación en la ecuación 1, se llega a:

*j* = *ex* sen *x* + *e*x cos *x* – *j* FQ\_MA\_11\_05\_106

Es fácil resolver la ecuación para hallar *j*:

2*j* = *ex* sen *x* + *e*x cos *x* FQ\_MA\_11\_05\_107

De donde:

*j* = ½(*ex* sen *x* + *ex* cos *x*) FQ\_MA\_11\_05\_108

Finalmente, solo se agrega la constante de integración:

ʃ *ex* cos *x* *dx* = 1/2 *ex*(sen *x* + cos *x*) + *C* FQ\_MA\_11\_05\_109

**Recuerda**

La expresión general para la integración por partes

FQ\_MA\_11\_05\_110

consiste en seleccionar una parte del integrando como *u* y la restante como *dv*, de manera que *dv* sea fácilmente integrable para obtener *v* y la integral de la derecha corresponde a una integral simple de fácil deducción.

[ SECCIÓN 2] **2.3 Integrales de funciones trigonométricas**

Algunas de las funciones trigonométricas se pueden expresar como productos o cocientes de otras funciones cuyas integrales ya son conocidas.

Ejemplo 9

Determinar la integral.

*x* · sen4 *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_111

En este caso, se tiene que la función cos3 *x* tiene exponente impar y sen4 *x* exponente par, así que se puede realizar la siguiente sustitución:

*u* = sen *x* y al derivar se obtiene *du* = cos *xdx.*

Entonces:

*x* · sen4 *x* *dx = x* · sen4 *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_112

= *x*) · sen4 *x* *dx* FQ\_MA\_11\_05\_113

FQ\_MA\_11\_05\_114

FQ\_MA\_11\_05\_115

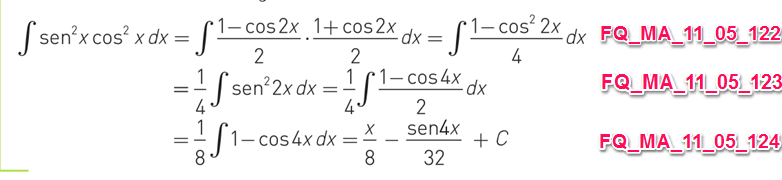
Como *u* = sen *x*,entonces:

*x* · sen4 *x* *dx =* FQ\_MA\_11\_05\_116

Ejemplo 10

Calcular la siguiente integral.

FQ\_MA\_11\_05\_121



[ SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los métodos de integración |
| **Descripción** | Actividades sobre Los métodos de integración |

[ SECCIÓN 1] **3 Áreas**

Es fácil calcular el área de una región plana cuando está limitada por segmentos de recta. Por ejemplo, si la región es un rectángulo, un triángulo o cualquier polígono que se pueda dividir en triángulos, existen fórmulas que permiten determinar su área.

Para encontrar áreas de regiones cuyos límites no son segmentos rectos, sino gráficas de funciones, es necesario utilizar un proceso que se fundamenta en el concepto de límite.

Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra una región *S* en un plano coordenado, limitada por segmentos de rectas verticales que intersecan al eje *X* en el punto *x* = *a* y en el punto *x* = *b*, por el eje *X* y por la gráfica de la función *y = f*(*x*), continua y no negativa en el intervalo [*a, b*]*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las áreas de los rectángulos por encima de la curva, son el área por exceso. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Como ninguna porción de la gráfica está por debajo del eje *X*, se dice que *S* es la región bajo la gráfica de *f* entre los puntos *a* y *b*.

Para calcular el área de *S* se hace una partición del intervalo[*a*, *b*] en partes iguales, formando rectángulos de igual base. Algunos de estos rectángulos quedan por encima de la curva y otros por debajo de ella, como se muestra en la imagen anterior.

La suma de las áreas de los rectángulos de la gráfica, *S*1, constituye una aproximación por **exceso** del área que se quiere determinar.

La suma de las áreas de los rectángulos de la gráfica, *S*2, constituye una aproximación por **defecto** del área bajo la curva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las áreas sin sombrear, por debajo de la curva, constituyen el área por defecto. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Si se considera una partición del intervalo [*a*, *b*] en partes iguales, pero con rectángulos de menor base, se obtiene una aproximación mayor al área buscada.

Luego, el área *S* de la región bajo la curva es la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos cuando *n* (número de rectángulos) es muy grande y su base (∆*x*) es muy pequeña. Así:

FQ\_MA\_11\_05\_125

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cuanto menor sea la base de los rectángulos elementales, menor será el área sombreada. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

[ SECCIÓN 2] **3.1 La integral definida**

Una función *f* continua y no negativa, tiene área bajo su gráfica si la amplitud de la partición ∆*x* tiende a cero, entonces el límite de las aproximaciones por exceso es igual al límite de las aproximaciones por defecto.

**La integral definida**

Se llama **integral definida** entre *a* y *b* de *f*(*x*), al área de la porción de plano limitado por la gráfica de la función *f*(*x*), el eje *X* y las rectas *x* = *a* y *x* = *b*. Se denota así:

FQ\_MA\_11\_05\_126

Si la integral definida de *f* desde *a* hasta *b* existe, se dice que *f* es **integrable** en el intervalo cerrado [*a*, *b*].

Los números *a* y *b* se llaman **límites de integración.** El punto*a* es el límite inferior y el punto *b* es el límite superior.

La función *f*(*x*) a la derecha del signo de la integral se llama integrando.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área bajo la curva se representa con la integral de *f*(*x*) en el intervalo [*a*, *b*]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

[ SECCIÓN 2] **3.2 Propiedades de la integral definida**

Para enunciar las propiedades más importantes de la integral definida es necesario aclarar que las funciones *f* y *g* son integrables en [*a*, *b*], y *k* es una constante.

* **Propiedad 1:** si la base del área de la región bajo la curva es cero, el área es cero y se denota así:

FQ\_MA\_11\_05\_127

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La base del rectángulo es cero y su área será nula. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

* **Propiedad 2:** el área de la región bajo la curva siempre será positiva si *f*(*x*) es positiva. Es decir, para todo *x* en el intervalo [*a*, *b*] y *f*(*x*) > 0 se cumple que:

FQ\_MA\_11\_05\_128

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área bajo la curva sobre el eje *X* es positiva. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

* **Propiedad 3:** el área de la región bajo la curva siempre será negativa si *f*(*x*) es negativa. Es decir, para todo *x* en el intervalo [*a*, *b*] y *f*(*x*) < 0 se cumple que:

FQ\_MA\_11\_05\_129

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área mostrada, debajo del eje *X*, es negativa. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

* **Propiedad 4:** si *f* es una función integrable en un intervalo que contiene los puntos *a*, *b* y *c*, tal que *a* < *c* < *b*, entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_130

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área total será la suma de las áreas parciales determinadas por los intervalos. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

* **Propiedad 5:** si *f* y *g* son funciones integrables en [*a*, *b*], entonces también lo son las funciones *f* + *g* y *f* – *g*. Es decir:

FQ\_MA\_11\_05\_131

* **Propiedad 6:** para todo real *k* constante se cumple:

FQ\_MA\_11\_05\_132

* **Propiedad 7:** si se intercambian los límites de integración cambia el signo de la integral.

FQ\_MA\_11\_05\_133

* **Propiedad 8:** si *f* y *g* son funciones integrables en el intervalo [*a*, *b*] y si *f*(*x*) ≥ *g*(*x*) para todo *x* que pertenezca al intervalo, entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_134

* **Propiedad 9:** si la función es constante, su integral es el producto de la constante por la diferencia de los límites de integración.

FQ\_MA\_11\_05\_135

Ejemplo 1

Realizar la representación gráfica de la integral definida por:

FQ\_MA\_11\_05\_136

La región que representa la integral dada es la limitada por la función *f*(*x*) = *x*2 + 1, en el intervalo [0, 3].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área de la región sombreada corresponde a la integral de la función *f*(*x*). |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Ejemplo 2

Calcular la integral definida de la función que se representa en la gráfica.

FQ\_MA\_11\_05\_137

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área de la región sombreada corresponde a la integral de la función *f*(*x*). |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

En la gráfica se observa que la región que demarca la integral definida de *f*(*x*) es la limitada *f*(*x*) = *x* + 1, el eje *X* y las rectas *x* = 1 y *x* = 5.

La región corresponde a un trapecio de altura 4 cm y bases paralelas de 2 cm y 6 cm.

Entonces, se aplica la fórmula del área del trapecio:

FQ\_MA\_11\_05\_138

FQ\_MA\_11\_05\_139

Luego:

FQ\_MA\_11\_05\_140

Ejemplo 3

Determinar el valor de las siguientes integrales, si:

FQ\_MA\_11\_05\_141

FQ\_MA\_11\_05\_142

Entonces:

FQ\_MA\_11\_05\_143

1. FQ\_MA\_11\_05\_144

FQ\_MA\_11\_05\_145

Luego:

FQ\_MA\_11\_05\_146

1. FQ\_MA\_11\_05\_147

FQ\_MA\_11\_05\_148

1. FQ\_MA\_11\_05\_149

FQ\_MA\_11\_05\_150

1. FQ\_MA\_11\_05\_151

Con esa información calcular

3 – 3*x* + 4) *dx* FQ\_MA\_11\_05\_152

3 – 3*x* + 4) *dx* = 3 *dx* – + FQ\_MA\_11\_05\_153

3 – 3*x* + 4) *dx* = 3 *dx* – + FQ\_MA\_11\_05\_154

3 – 3*x* + 4) *dx* = 5(5) – 3(2) + 4(3 – 1) = 25 – 6 + 8 = 27 FQ\_MA\_11\_05\_155

3 – 3*x* + 4) *dx =* 27 FQ\_MA\_11\_05\_156

[ SECCIÓN 2] **3.3 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El área bajo la curva |
| **Descripción** | Actividades en varios niveles de complejidad respecto a los conceptos estudiados con relación al área bajo la curva |

[ SECCIÓN 1] **4 Relación entre integración y derivación**

Para establecer la relación entre la derivación y la integración en esta sección se estudiarán dos teoremas.

[ SECCIÓN 2] **4.1 Primer teorema fundamental del cálculo**

El teorema que se presenta a continuación recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**, ya que expresa, de manera concisa, la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

**Primer teorema fundamental del cálculo**

Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*]. Si *F* es una función definida por

*dx* con *a* ≤ *x* ≤ *b* FQ\_MA\_11\_05\_189

entonces es *F* continua y derivable en (*a*, *b*) y, además, es una antiderivada de *f* en [*a*, *b*]; es decir, *F*’(*x*) = *f*(*x*) para todo *x* que pertenezca al intervalo [*a*, *b*].

Ejemplo 1

Determinar la función *f* ’ (*x*) si

FQ\_MA\_11\_05\_157

Primero se calcula la integral:

FQ\_MA\_11\_05\_158

FQ\_MA\_11\_05\_159

Se evalúa la función entre *x* y 0 y se obtiene *f*(*x*).

Entonces *f* ’ (*x*) = 3*x*2.

[SECCIÓN 2] **4.2 Segundo teorema fundamental del cálculo**

El teorema que se muestra a continuación, y que puede considerarse como la segunda parte del teorema anterior, suele emplearse para encontrar la integral definida sin usar límites de sumas. El método se conoce como **regla de Barrow.**

**La regla de Barrow**

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*] y si *F* es una antiderivada de *f*, entonces

FQ\_MA\_11\_05\_160

Para calcular las integrales definidas usando la regla de Barrow, se pueden seguir los siguientes pasos:

1.° Determinar una función *F*(*x*), tal que *F*’ (*x*) = *f*(*x*).

2.° Evaluar *F*(*x*) en los límites de integración, es decir, *F*(*a*) y *F*(*b*).

3.° Calcular la diferencia entre *F*(*a*) y *F*(*b*), es decir, *F*(*a*) – *F*(*b*).

Ejemplo 2

Usando la regla de Barrow, evaluar las siguientes integrales:

1. FQ\_MA\_11\_05\_161

FQ\_MA\_11\_05\_162

= FQ\_MA\_11\_05\_163

FQ\_MA\_11\_05\_164

1. FQ\_MA\_11\_05\_165

FQ\_MA\_11\_05\_166

FQ\_MA\_11\_05\_167

FQ\_MA\_11\_05\_168

Al calcular ese valor se obtiene aproximadamente 65,68.

En ocasiones, es necesario utilizar algunos de los métodos de integración, que ya hemos visto, para calcular la integral definida y aplicar la regla de Barrow.

Ejemplo 3

Evaluar la siguiente integral.

FQ\_MA\_11\_05\_169

En este caso se utiliza el método de sustitución así:

Sea *u* = *x*2 + *x*, entonces *du* = 2*x* + 1, por tanto:

= = *u*3/2 + *C* = (*x*2 + *x*)3/2 + *C* FQ\_MA\_11\_05\_170

Entonces, aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo, se llega a:

= FQ\_MA\_11\_05\_171

FQ\_MA\_11\_05\_172

= [ (20)3/2 + *C*] – [0 + *C*] FQ\_MA\_11\_05\_173

= [(20)3/2 ≅ 59,63 FQ\_MA\_11\_05\_174

[ SECCIÓN 2] **4.3 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La relación entre las derivadas y las integrales |
| **Descripción** | Actividad de afianzamiento de la relación entre las derivadas y las integrales |

[ SECCIÓN 1] **5 Cálculo de áreas por integración**

Una de las aplicaciones de la integral definida es el cálculo del área de una región plana.

**Cálculo del área de una región**

Sea *f* una función continua en el intervalo [*a*, *b*], tal que *f*(*x*) ≥ 0.

La región limitada por *f*(*x*), las rectas *x* = *a*, *x* = *b* y el eje *X* tiene por área

*A* = FQ\_MA\_11\_05\_175

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El área bajo la curva está determinada por el valor de la integral en el intervalo [*a*, *b*]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

Ejemplo 1

Hallar el área de cada región limitada por *x* = 1, *x* = 3 y la función *f*(x) = *x*2 – *x*. Trazar la gráfica.

Para iniciar, se calcula el área bajo la curva con las condiciones dadas, así:

*A* = = 2 – 1) *dx* = 2 *dx* – FQ\_MA\_11\_05\_176

*A* = = – FQ\_MA\_11\_05\_177

*A* = – – = 9 – – 4,5 + ½ = 14/3 *u*2 FQ\_MA\_11\_05\_178

En la siguiente figura se ilustra la región.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f*(*x*) = *x*2 – *x*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

La función *f* continua, frecuentemente, determina dos o más regiones separadas por el eje *X.* En este caso, se calculan las áreas de las regiones por separado, adicionando las áreas que están por encima del eje *X* y sustrayendo las áreas que resultan debajo del mismo*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función continua con áreas por encima y por debajo del eje *X*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

Ejemplo 2

Encontrar el área de la región determinada por *y* = *x*3 + *x*2 – 5*x* – 3, y limitada por las rectas *x* = –2, *x* = 2 y el eje *X*.

En la siguiente figura se ilustra la región.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = *x*3 + *x*2 – 5*x* – 3 |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Se observa que una parte está por encima del eje *X* y otra está debajo. Estas dos áreas se calculan por separado.

*A* = *A*1 – *A*2

*A*1= 3 + *x*2 – 5*x* – 5) *dx* = FQ\_MA\_11\_05\_179

*A*1 = FQ\_MA\_11\_05\_180

*A*1 = FQ\_MA\_11\_05\_181

De otro lado:

*A*2 = 3 + *x*2 – 5*x* – 5) *dx* = FQ\_MA\_11\_05\_182

*A*2 =

FQ\_MA\_11\_05\_182

*A*2 = FQ\_MA\_11\_05\_183

Por tanto: *A* = *A*1 – *A*2

*A* = *u*2 FQ\_MA\_11\_05\_184

Ejemplo 3

Hallar el área de la región limitada por la función *f*(*x*) = cos *x*, el eje *X* y las rectas *x* = 0 y *x* = 5π/2.

Para iniciar, se identifican los intervalos donde la función *f*(*x*) es positiva y los intervalos donde es negativa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f*(*x*) = cos *x* en el intervalo [0, 5π/2]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

En la imagen se observa la gráfica de *f*(*x*). En ella se reconoce que en los intervalos [0, π/2] ∪ [3 π/2, 5π/2] la función es positiva y es negativa en el intervalo [π/2, 3π/2].

Por tanto, se definen las siguientes integrales:

FQ\_MA\_11\_05\_185

FQ\_MA\_11\_05\_186

FQ\_MA\_11\_05\_187

FQ\_MA\_11\_05\_188

[ SECCIÓN 2] **5.1 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El cálculo de áreas |
| **Descripción** | Actividad para revisar concepciones y aplicaciones del cálculo de áreas. |