

微分方程数值解法

第九周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 16 日

1 P143 3 三点差分及精度

1.1 $u(x)$ 精确解

证明. (1) 当 $b = c = 0$ 时, 得到

$$u(x) = -\frac{1}{2a}(x^2 + c_1x)$$

代入新的边界条件 $u(0) = 0, \frac{du}{dx}(1) + u(1) = 0$, 得到

$$u(x) = \frac{x(3-2x)}{4a}$$

(2) 当 $b \neq 0, c = 0$ 时, 得到

$$u(x) = \alpha_1 \frac{b}{a} e^{\frac{b}{a}x} + \alpha_2 + \frac{x}{b}$$

代入新的边界条件, 得到

$$u(x) = \frac{-2a(e^{\frac{b}{a}x} - 1)}{b((a+b)e^{\frac{b}{a}} - a)} + \frac{x}{b}$$

(3) 在其他情形下, 记特征方程 $-a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2 , 则

$$u(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{c}$$

代入新的边界条件，得到

$$u(x) = \frac{e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)-1}{c(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2))}e^{\lambda_1 x} + \frac{1-e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)}{c(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2))}e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{c}$$

□

1.2 三点差分格式离散求解

证明. 求解结果如图 1。

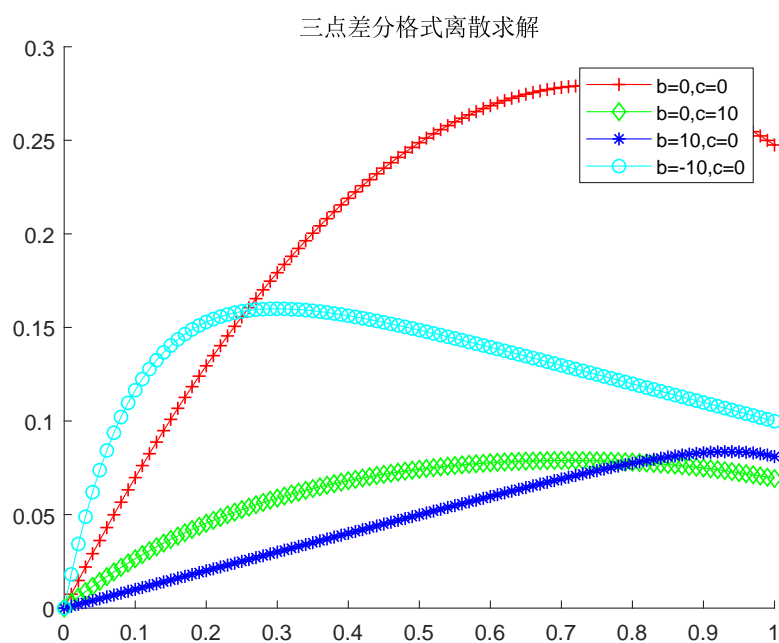


图 1: 三点差分格式离散求解

差分格式精度分析，精确解如图 2。

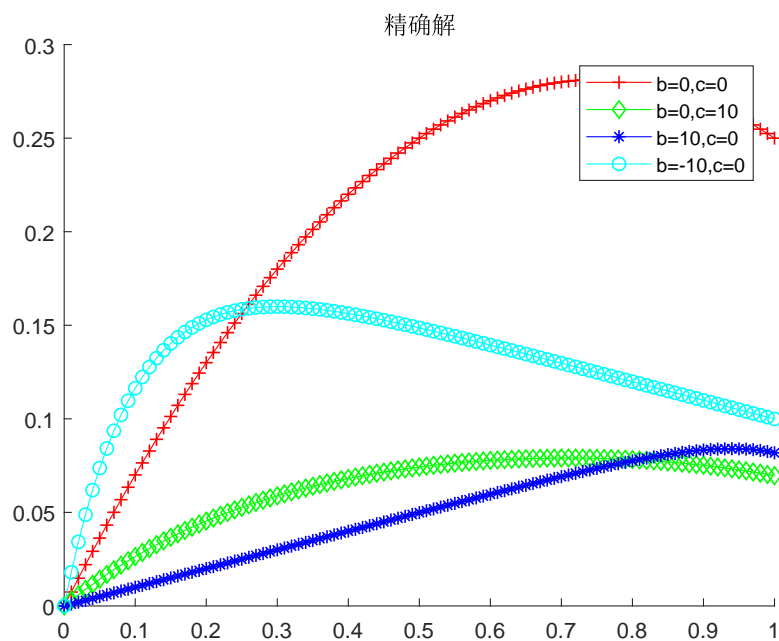


图 2: 精确解

其中,

$b=0, c=0$ 时误差率是 $6.024096e-03$

$b=0, c=10$ 时误差率是 $1.755775e-03$

$b=10, c=0$ 时误差率是 $1.745959e-03$

$b=-10, c=0$ 时误差率是 $1.211599e-04$

□

2 P146 图 3.5 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式

如图 3。

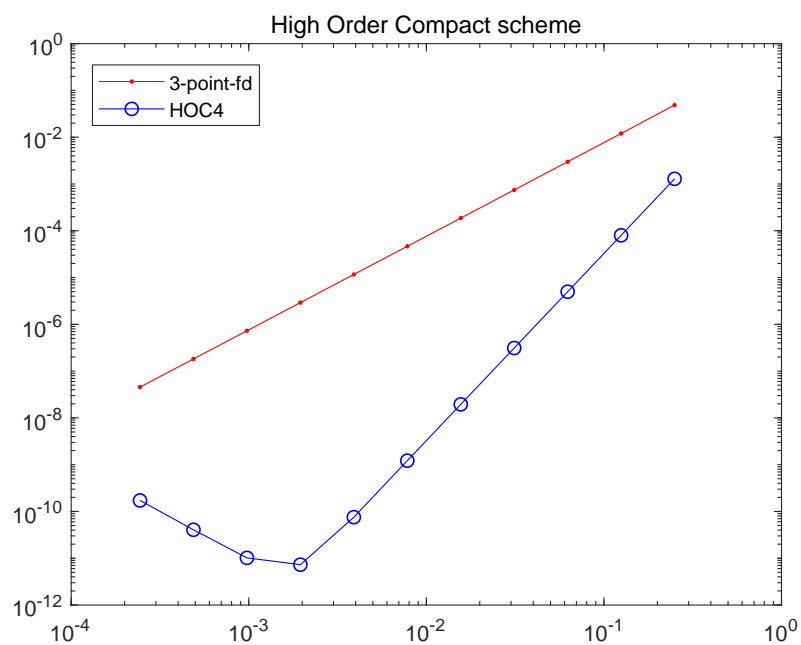


图 3: 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式