第一周-桑明达 15300180062

第一题

对于形如$A_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$的矩阵，其条件数与维数的关系如图 1。

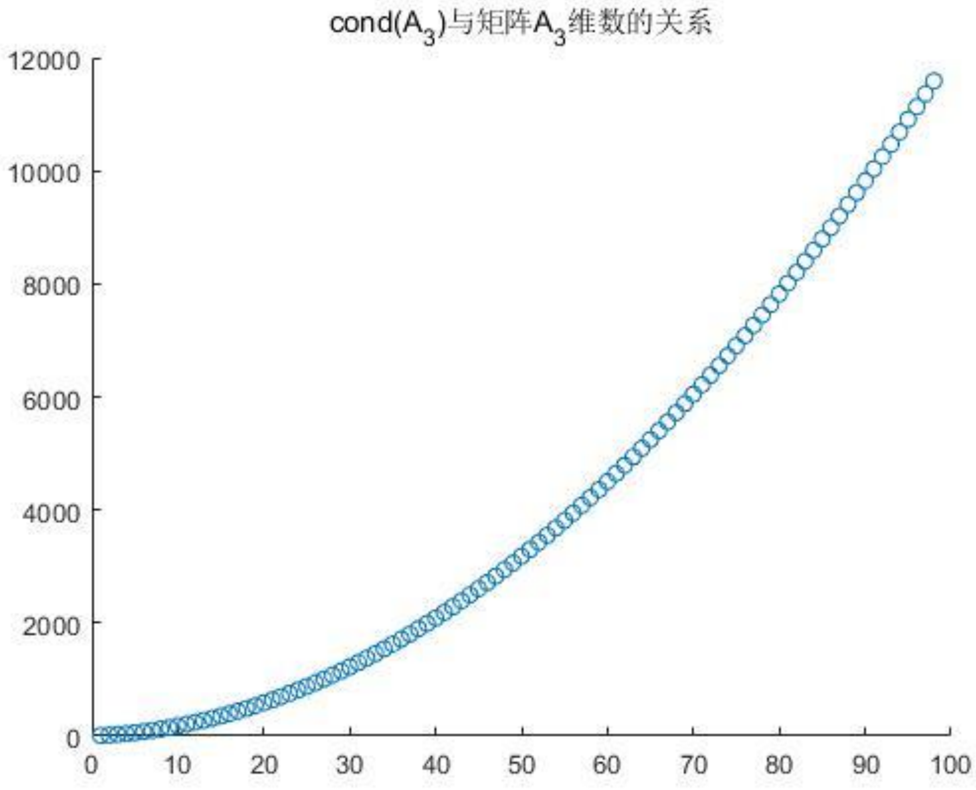


图 1

补充书上的两个图，见图 2，图 3

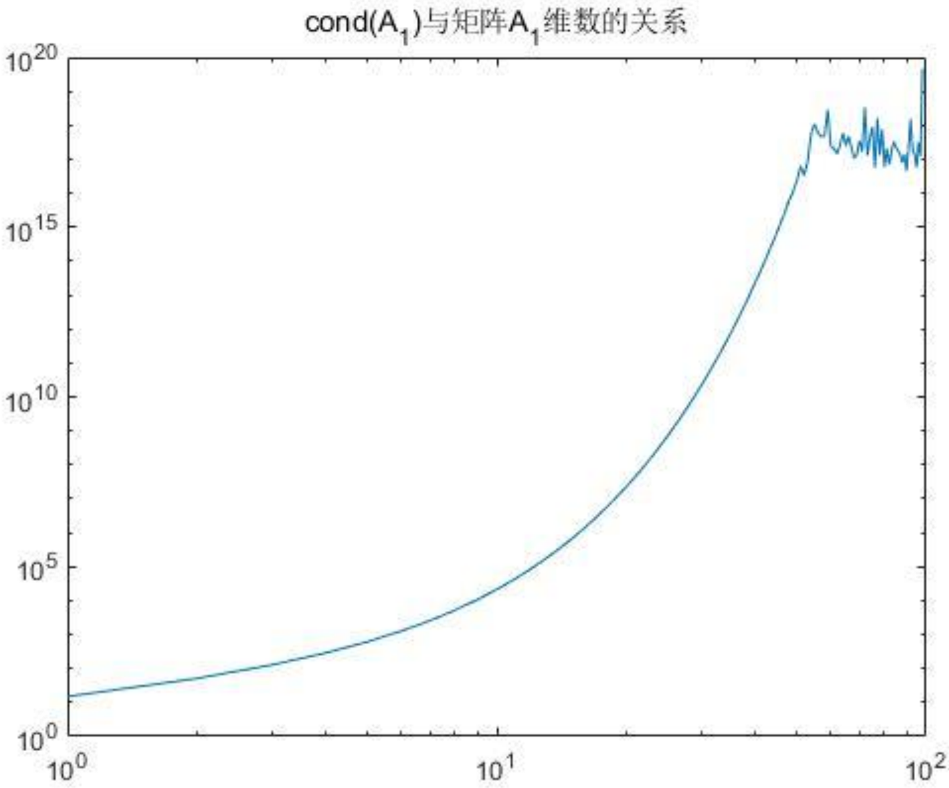

cond(A_1)与矩阵A_1维数的关系
10^20
10^15
10^10
10^5
10^0
10^0
10^1
10^2

图 2

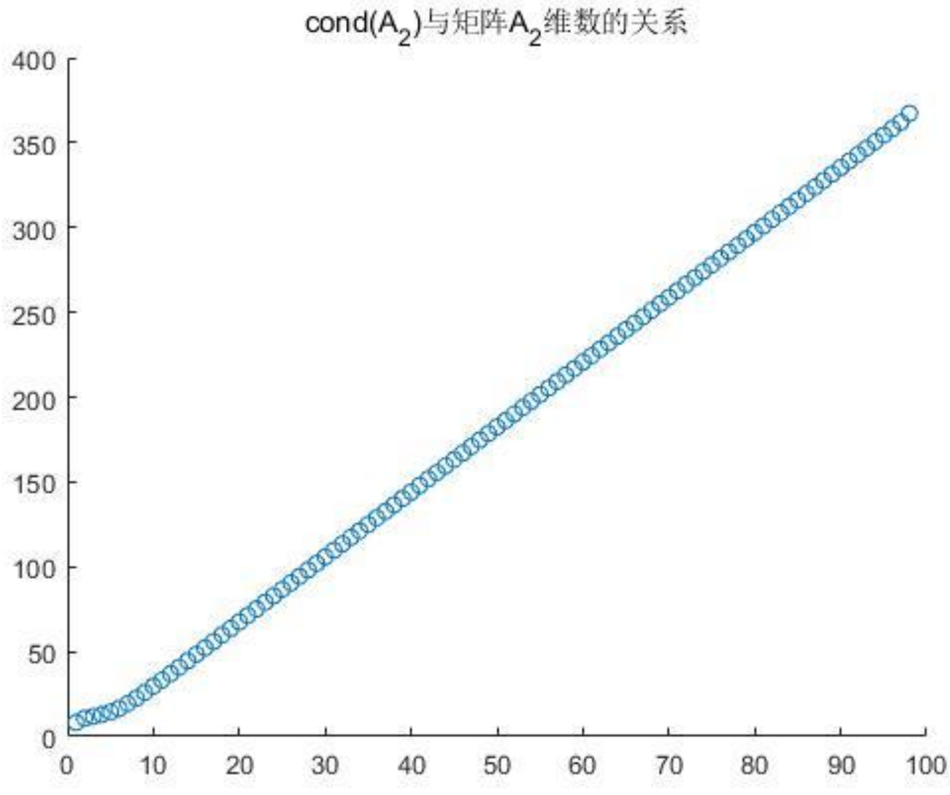

cond(A_2)与矩阵A_2维数的关系
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

图 3

第二题

由逆推公式$u_{n-2}=\frac{3u_{n-1}-u_n}{2}$，以及初始值$u_n=u_{n-1}=0.1$，可递推计算出$u_1$，在$n=10$：$100:1000$的计算中，$u_1=1.0000000000000001942890293094023945741355e-01$，相应的误差 $tol=1.387778780781445675529539585113525390625 0e-17$，是$2.7755575615628913510590791702270507812500e-17$的一半，稳定性很强，误差得到了有效控制。

相关分析: 逆推公式的$A=\begin{pmatrix}1.5 & -0.5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 其特征分解是$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0.7071 & 0.4472\\ 0.7071 & 0.8944\end{pmatrix}$, 迭代后误差并没有改变。

第三题

$$
\begin{aligned}
\|x_{m+n}-x_n\| &\ll \|x_{m+n}-x_{m+n-1}\|+\|x_{m+n-1}-x_n\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|\\
&\ll \alpha^{m+n-1}\|x_1-x_0\|+\alpha^{m+n-2}\|x_1-x_0\|+\cdots+\alpha^{n}\|x_1-x_0\|\\
&\ll \frac{\alpha^{n}-\alpha^{m+n-1}}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|
\end{aligned}
$$

$m\to\infty$, 有

$$
\|x^{\star}-x_n\| \ll \frac{\alpha^{n}}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|
$$

附件 1　MATLAB 代码

第一题

```
clear all;close all;clc
n=100;
for i=3:n
a1=ones(i,1);
a2=-2*ones(i-1,1);
a3=ones(i-2,1);
a=diag(a1)+diag(a2,-1)+diag(a3,-2);
a(2,1)=0;
a_cond(1,i-2)=cond(a);

end
x=1:n-2;
scatter(x,a_cond)
title cond(A_3)与矩阵A_3维数的关系
```

第二题

```
%%
clear all;close all;clc
for j=1:100
    n=100*j;
u(n,1)=0.1;
u(n-1,1)=0.1;
for i=(n-2):-1:1
    u(i,1)=(3*u(i+1,1)-u(i+2,1))./2;
end
tol(j,1)=u(1)-0.1;
end
fprintf('%.40s\n',tol);
fprintf('%.40s\n',u(1));
fprintf('%.40s\n',2*tol(1));
%%
clear all;close all;clc
A=[1.5 -0.5
    1 0];
[V,D]=eig(A)
V^-1
```

微分方程数值解法

第二周作业

桑明达 15300180062

2018 年 3 月 30 日

1 P24 2 比较不动点和 Newton-Paphson 迭代

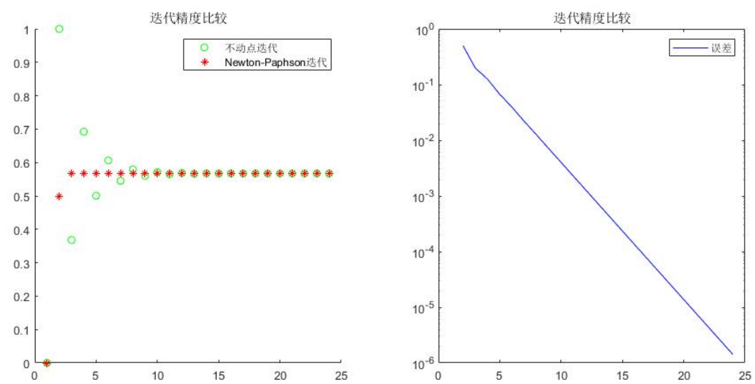


图 1: 比较不动点迭代和 Newton-Paphson 迭代

如图 1，不动点迭代 24 次才能达到 NP 迭代 4 次的精度。

NP 迭代相对于不动点迭代而言，方向性更准确，并且每一步的精确速率很高。

2 P34 1 证明范数等价关系

1. 左边的不等式

$$
\begin{aligned}
\|x\|_p &= \sqrt[p]{|x|_1^p + |x|_2^p + \cdots + |x|_n^p} \\
\|x\|_q &= \sqrt[q]{|x|_1^q + |x|_2^q + \cdots + |x|_n^q} \\
\sum_{i=1}^{n} |x|_i^q &\le \sum_{i=1}^{n} |x|_i^p |x|_i^{q-p} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x|_i^p (|x|_i^p)^{\frac{q-p}{p}} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |x|_i^p (\sum_{i=1}^{n} |x|_i^p)^{\frac{q-p}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} |x|_i^p)^{1+\frac{q-p}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} |x|_i^p)^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}
$$

即证。

2. 右边的不等式

根据 Jensen 不等式

$$\sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x|_i^p}{n}} \le \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x|_i^q}{n}}$$

即有

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x|_i^p} \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |x|_i^q}$$

$$\|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q$$

即证

3 P41 6 Runge 现象

分别用点数 n=5,9,13 时的等距节点插值公式，对 Runge 现象进行测试，如图 2

分别用点数 n=5,9,13 时的 Chebyshev 多项式极值点插值公式，对 Runge 现象进行测试，如图 3

可以看出，相对于等距节点插值公式，Chebyshev 多项式极值点插值公式有更好的逼近性。

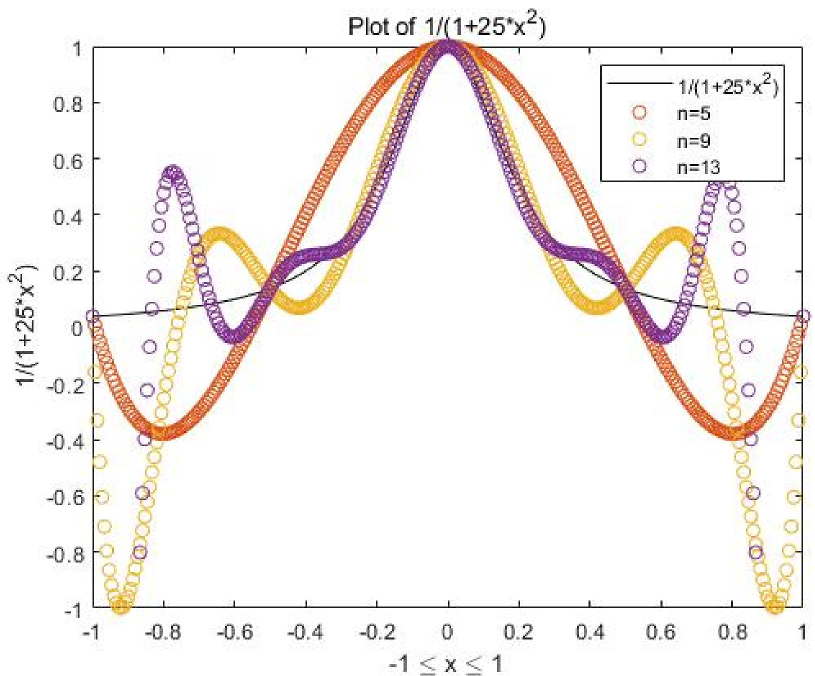


图 2: 等距节点插值公式

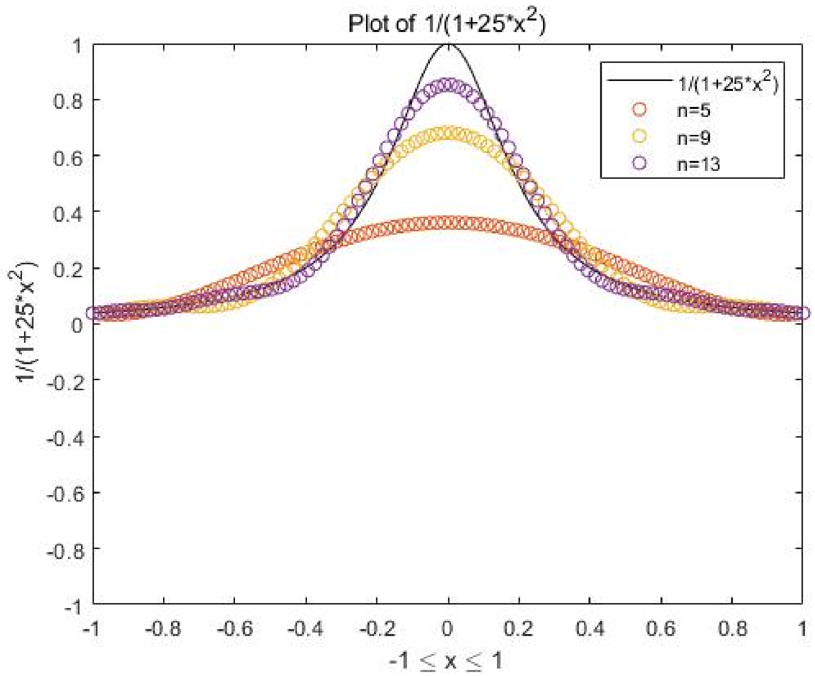


图 3: Chebyshev 多项式极值点插值公式

微分方程数值解法

第三周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 5 日

1 P53 1 多种求积公式计算 x^n

如表 1.1、表 1.2 所示，红色加粗数字为可以精确计算的积分值。

另外，在压缩包代码文件夹内有复化求积公式和自适应 Simpson 公式，这些公式积分值随划分区间个数的增加可以逼近精确值，在此就不再展示结果。

表 1.1 Newton 求积公式

	精确值	中点公式	梯形公式	Simpson 公式	3/8 规则	Cotes 公式					
x^1	0.500000	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**
x^2	0.333333	0.250000	0.250000	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**
x^3	0.250000	0.125000	0.125000	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**
x^4	0.200000	0.062500	0.062500	0.208333	0.203704	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**
x^5	0.166667	0.031250	0.031250	0.187500	0.175926	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**
x^6	0.142857	0.015625	0.015625	0.177083	0.158436	0.143229	0.143067	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**
x^7	0.125000	0.007813	0.007813	0.171875	0.147119	0.126302	0.125733	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**
x^8	0.111111	0.003906	0.003906	0.169271	0.139689	0.113900	0.112693	0.111137	0.111127	**0.111111**	**0.111111**
x^9	0.100000	0.001953	0.001953	0.167969	0.134774	0.104736	0.102720	0.100116	0.100071	**0.100000**	**0.100000**
x^{10}	0.090909	0.000977	0.000977	0.167318	0.131509	0.097931	0.095002	0.091214	0.091097	0.090911	0.090910

表 1.2 Gauss 求积公式

x^n	精确值	1 点	2 点	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点	8 点	9 点	10 点
x^1	0.500000	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**	**0.500000**
x^2	0.333333	0.250000	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**	**0.333333**
x^3	0.250000	0.125000	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**	**0.250000**
x^4	0.200000	0.062500	0.194444	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**	**0.200000**
x^5	0.166667	0.031250	0.152778	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**	**0.166667**
x^6	0.142857	0.015625	0.120370	0.142500	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**	**0.142857**
x^7	0.125000	0.007813	0.094907	0.123750	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**	**0.125000**
x^8	0.111111	0.003906	0.074846	0.108458	0.111088	**0.111111**	**0.111111**	**0.111111**	**0.111111**	**0.111111**	**0.111111**
x^9	0.100000	0.001953	0.059028	0.095563	0.099898	**0.100000**	**0.100000**	**0.100000**	**0.100000**	**0.100000**	**0.100000**
x^{10}	0.090909	0.000977	0.046553	0.084456	0.090641	0.090908	**0.090909**	**0.090909**	**0.090909**	**0.090909**	**0.090909**
x^{11}	0.083333	0.000488	0.036716	0.074770	0.082796	0.083325	**0.083333**	**0.083333**	**0.083333**	**0.083333**	**0.083333**
x^{12}	0.076923	0.000244	0.028957	0.066259	0.076009	0.076898	0.076923	**0.076923**	**0.076923**	**0.076923**	**0.076923**
x^{13}	0.071429	0.000122	0.022837	0.058750	0.070036	0.071371	0.071428	**0.071429**	**0.071429**	**0.071429**	**0.071429**
x^{14}	0.066667	0.000061	0.018011	0.052107	0.064708	0.066554	0.066665	0.066667	**0.066667**	**0.066667**	**0.066667**
x^{15}	0.062500	0.000031	0.014205	0.046224	0.059903	0.062307	0.062494	0.062500	**0.062500**	**0.062500**	**0.062500**
x^{16}	0.058824	0.000015	0.011203	0.041009	0.055535	0.058521	0.058811	0.058823	0.058824	**0.058824**	**0.058824**
x^{17}	0.055556	0.000008	0.008836	0.036385	0.051539	0.055112	0.055532	0.055555	0.055556	**0.055556**	**0.055556**
x^{18}	0.052632	0.000004	0.006968	0.032283	0.047866	0.052017	0.052590	0.052630	0.052632	**0.052632**	**0.052632**
x^{19}	0.050000	0.000002	0.005496	0.028644	0.044480	0.049185	0.049934	0.049997	0.050000	0.050000	**0.050000**
x^{20}	0.047619	0.000001	0.004334	0.025415	0.041350	0.046577	0.047519	0.047614	0.047619	0.047619	**0.047619**

微分方程数值解法

第四周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 13 日

1 P69 1 隐式 Euler 格式是一阶收敛的

证明. $e_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$, 代入隐式 Euler 格式，有

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &= |u(t_{n+1}) - u_n - \Delta t f_{n+1}| \\
&\leq |u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1})| + |u(t_n) - u_n| + |\Delta t f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) - \Delta t f(t_{n+1}, u \\
&\leq |R_{n+1}| + |e_n| + \Delta t L\,|e_n| \\
&= \left|\frac{u''(\xi)}{2}\Delta t^2\right| + (1 + \Delta t L)\,|e_n| \\
&\leq \frac{M}{2}\Delta t^2 + (1 + \Delta t L)\,|e_n|
\end{aligned}$$

由递推关系，有

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq \frac{M}{2}\Delta t^2 \frac{(1 + \Delta t L)^{n+1} - 1}{\Delta t L} + (1 + \Delta t L)^{n+1}\,|e_n| \\
&\leq e^{LT}(\frac{M}{2L}\Delta t + |e_0|)
\end{aligned}$$

□

2 P69 2 四种 Euler 格式计算 $\frac{du}{dt} = au$

如图 1，四种 Euler 格式都是收敛的。

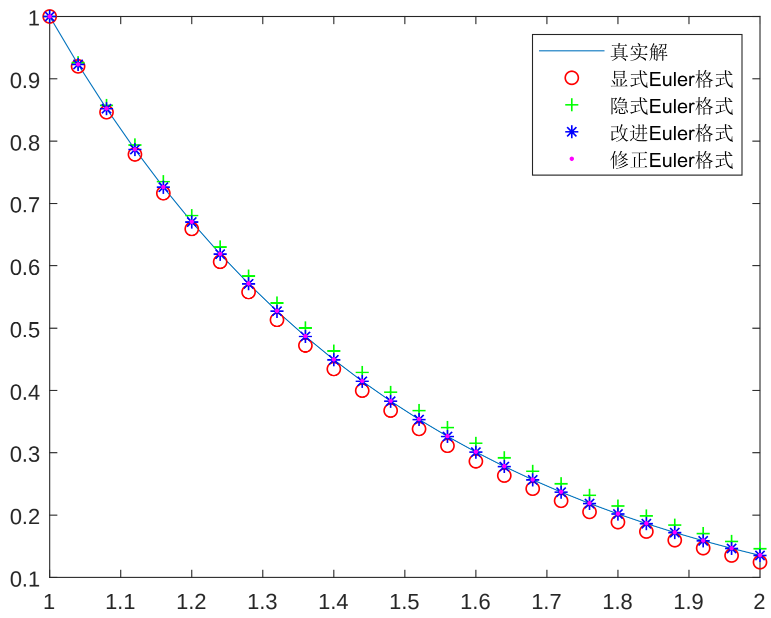


图 1: 四种 Euler 格式计算 $\frac{du}{dt} = au$

3 P73 1 改进，修正的 Euler 格式的稳定性分析和绝对稳定区间

证明. 对于改进 Euler 格式，有

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1}^{\epsilon}-u_{n+1}\right| &= \left|u_{n}^{\epsilon}-u_{n}\right|\left|\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right| \\ &= \left|u_{0}^{\epsilon}-u_{0}\right|\left|\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right|^{n} \\ &= \left|\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right|^{n}\epsilon\end{aligned}$$

希望初始的舍入误差可以控制，则

$$\left|\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right| \le 1$$
$$\left|\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right| \le 1$$

对于修正 Euler 格式，希望初始的舍入误差可以控制，则

$$\left|1+a\Delta t\left(1+\frac{a\Delta t}{2}\right)\right| \le 1$$
$$\left|1+z+\frac{z^{2}}{2}\right|| \le 1$$

□

4 P74 1 Taylor 级数计算 $\frac{du}{dt}=u-u^{2}$

q=2 时，有

$$F=\left(u-u^{2}\right)(1-2u)$$
$$u_{n+1}=u_{n}+\Delta t\left(f+\frac{\Delta t}{2}F\right)$$

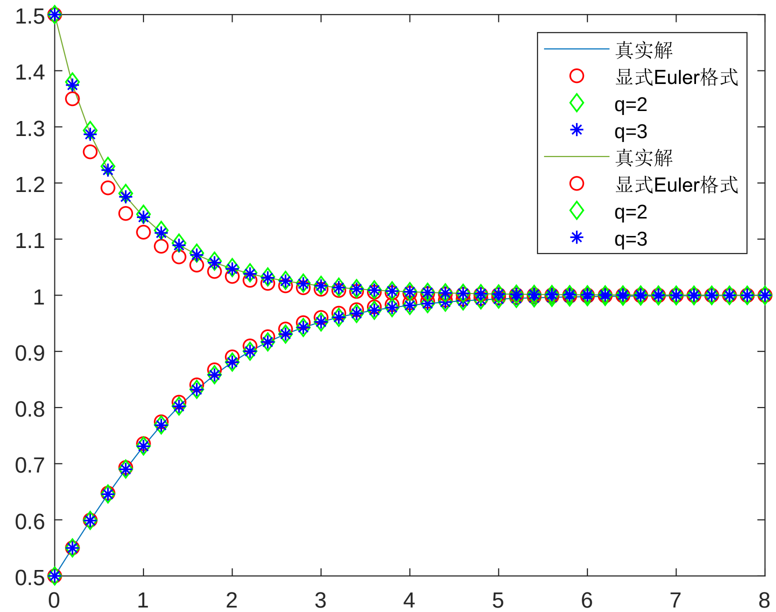


图 2: Taylor 级数计算 $\frac{du}{dt} = u - u^2$

q=3 时，有

$$G = \left(u - u^2\right)^2 (-2)$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(f + \frac{\Delta t}{2} F\right) + \frac{\Delta t^2 \left(G + f'_u F\right)}{6}$$

如图 2

5 P79 2 例 2.3.1

如图 3、图 4

6 P79 3 例 2.2.2

如图 5、图 6

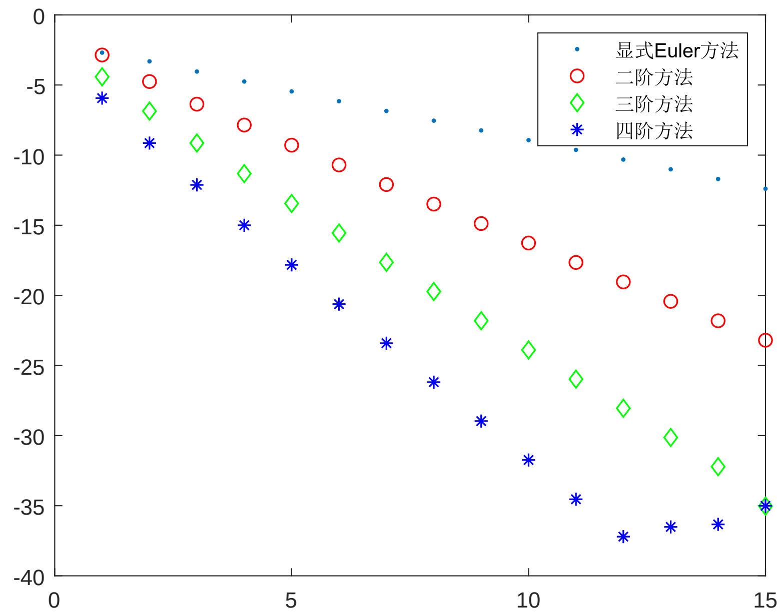


图 3: 收敛阶

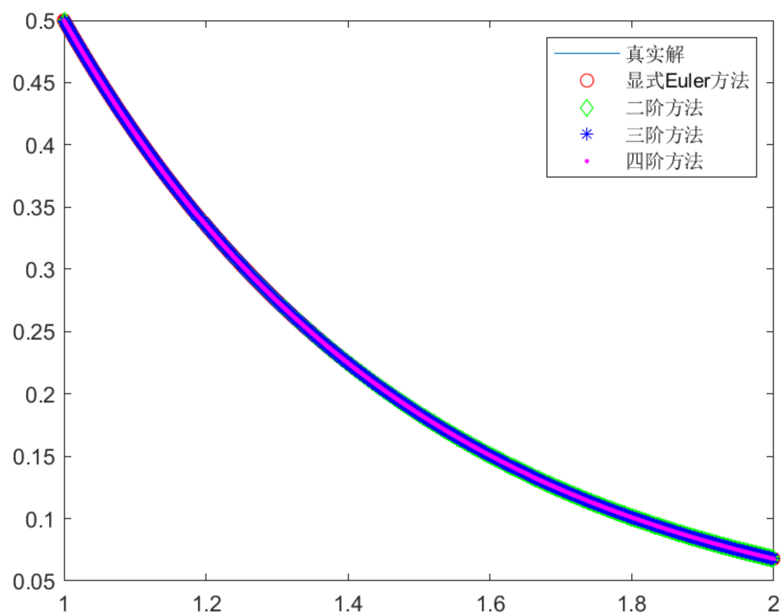

真实解
显式Euler方法
二阶方法
三阶方法
四阶方法
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

图 4: 所求函数图像

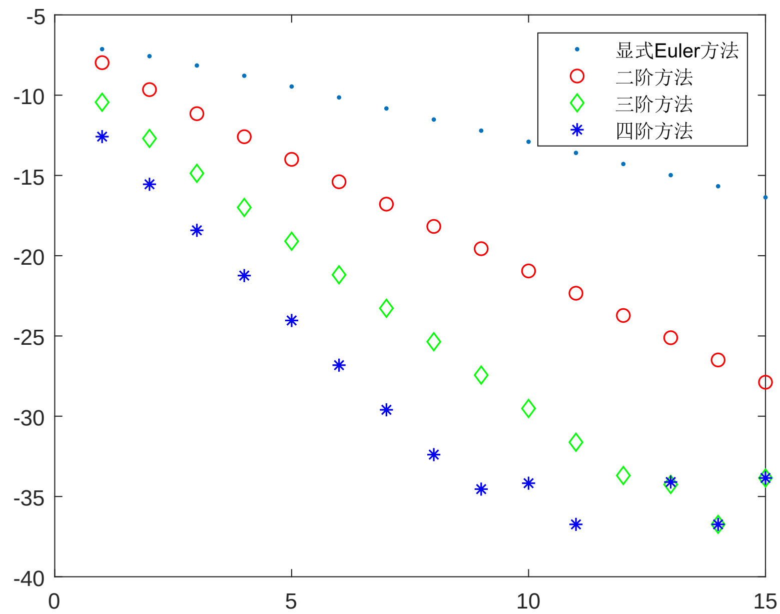


图 5: 收敛阶

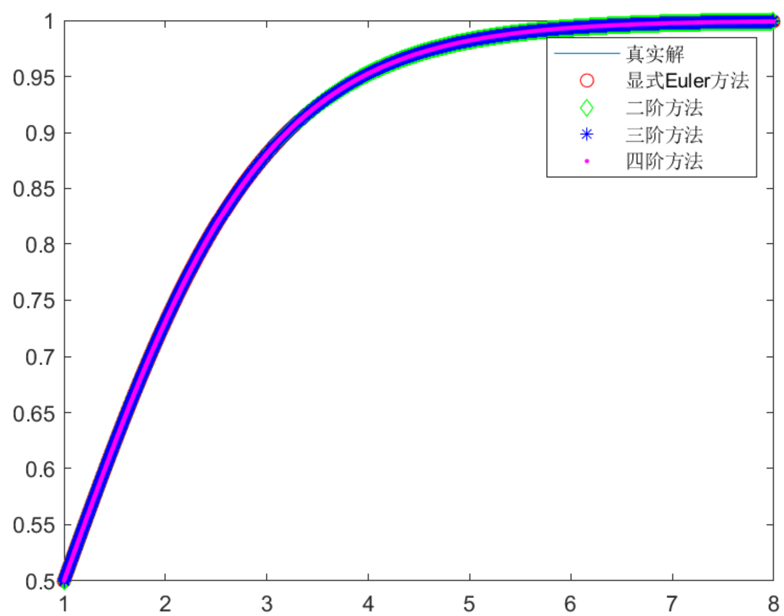

真实解
显式Euler方法
二阶方法
三阶方法
四阶方法
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
1
2
3
4
5
6
7
8

图 6: 所求函数图像

微分方程数值解法

第五周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 18 日

1 P84 1 证明引理 2.3.5

证明. $\phi(t,u;\Delta t)$ 满足 Lipschitz 条件，即

$$\left|\phi\left(t_n,u_n^{\epsilon};\Delta t\right)-\phi\left(t_n,u_n;\Delta t\right)\right|\le L\left|u_n^{\epsilon}-u_n\right|$$

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1}^{\epsilon}-u_{n+1}\right|&=\left|u_n^{\epsilon}+\Delta t\phi\left(t_n,u_n^{\epsilon};\Delta t\right)-u_n-\Delta t\phi\left(t_n,u_n;\Delta t\right)\right|\\&\le\left|\left(u_n^{\epsilon}-u_n\right)\left(1+\Delta tL\right)\right|\\&\le\left(1+\Delta tL\right)^{n+1}\left|\left(u_0^{\epsilon}-u_0\right)\right|\end{aligned}$$

对于 $0<t\le T=N\Delta t$，有

$$\left|u_{n+1}^{\epsilon}-u_{n+1}\right|\le e^{LT}\epsilon$$

所以单步方法稳定。

□

2 P85 2 证明定理 2.3.6

证明. $\epsilon_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$, 代入隐式 Euler 格式，有

$$
\begin{aligned}
\left|\epsilon_{n+1}\right| &= \left|u\left(t_{n+1}\right) - u_{n+1}\right| \\
&= \left|u\left(t_{n+1}\right) - u_n - \Delta t \phi\left(t_n, u_n ; \Delta t\right)\right| \\
&\leq \left|u\left(t_{n+1}\right) - u\left(t_n\right) - \Delta t \phi\left(t_n, u\left(t_n\right) ; \Delta t\right)\right| + \left|u\left(t_n\right) - u_n\right| \\
&\quad + \left|\Delta t \phi\left(t_n, u\left(t_n\right) ; \Delta t\right) - \Delta t \phi\left(t_n, u_n ; \Delta t\right)\right| \\
&= \left|R_{n+1}\right| + \left|\epsilon_n\right| + \Delta t L\left|\epsilon_n\right| \\
&\leq C_R \Delta t^{p+1} + (1 + \Delta t L)\left|\epsilon_n\right| \\
&\leq C_R \Delta t^{p+1} \frac{(1 + \Delta t L)^{n+1} - 1}{\Delta t L} + (1 + \Delta t L)^{n+1}\left|\epsilon_0\right| \\
&\leq C_R \Delta t^p \frac{e^{L\left(T - t_0\right)}}{L} + e^{L\left(T - t_0\right)}\left|\epsilon_0\right|
\end{aligned}
$$

□

微分方程数值解法

第六周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 27 日

1 P93 1 Adams 格式的 Newton 表示

证明. 关于 $f(t,u)$ 的 Lagrange 插值多项式 $q(t)$ 可以表示为

$$q(t) = q(t_n + s\Delta t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j f_{n+1}$$

$$\therefore u_{n+1} - u_n = \sum_{j=0}^{k} c_j \nabla^j f_{n+1}$$

其中 $c_j = (-1)^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \binom{-s+1}{j} \mathrm{d}s$ □

2 P93 2 不同的初始选取对精度的影响

证明. 对于标准测试问题，选取 $a=-2$、$t_0=0$、$dt=0.1$、$T=1$、$u_0=1$，使用' 精确的初始值','EulerExplicit','Runge-Kutta2','Kutta3','Runge-Kutta4' 计算前四个初始值，分别用四阶 Adams 格式和 Geer 格式进行精度测试，结果分别如图 1、图 2。

□

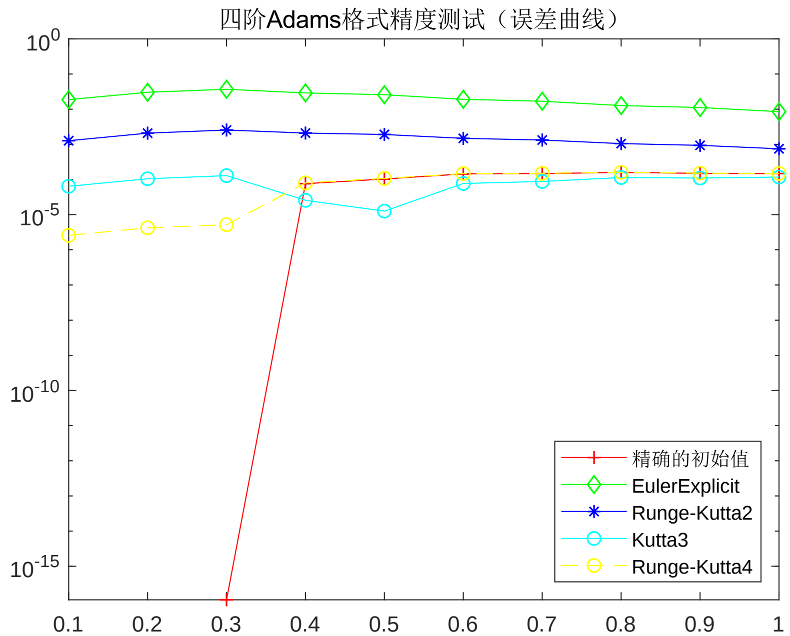


图 1: 四阶 Adams 格式

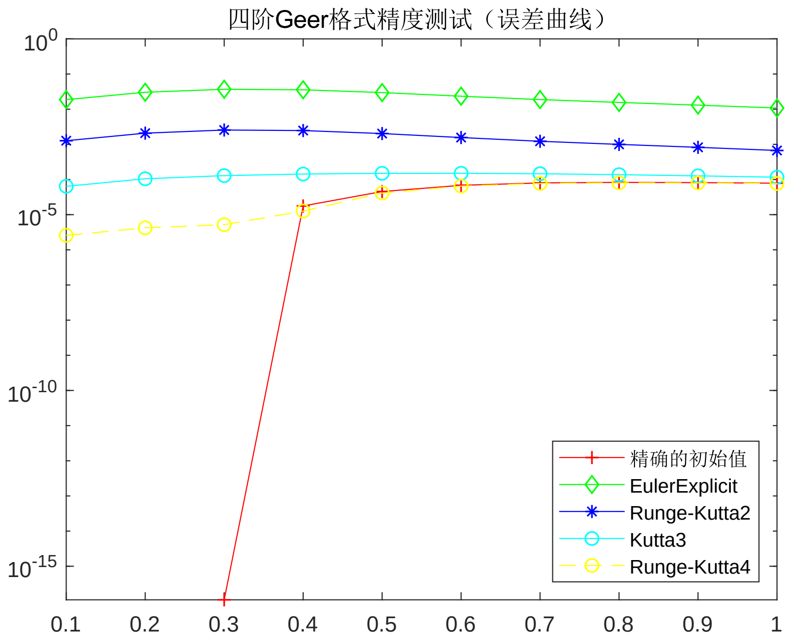

四阶Geer格式精度测试（误差曲线）
10^0
10^-5
10^-10
10^-15
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
精确的初始值
EulerExplicit
Runge-Kutta2
Kutta3
Runge-Kutta4

图 2: 四阶 Geer 格式

微分方程数值解法

第七周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 3 日

1 P118 1 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(-u + cos\left(t\right)\right)$

证明. (1) $u\left(t\right)$ 的精确表达式是

$$\begin{aligned}u\left(t\right) =& \frac{1}{e^{\lambda t}}\left(\int e^{\lambda t}\lambda cos\left(t\right)\mathrm{d}t + C\right)\\ =& \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\left(sin\left(t\right) + \lambda cos\left(t\right)\right) + Ce^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$u\left(0\right) = 0$ 时，$C = -\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$
$u\left(0\right) = 1$ 时，$C = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

(2) 图 1 到图 4，是 $u\left(0\right) = 0$ 情形，图 5 到图 8，是 $u\left(0\right) = 1$ 情形。

(3) 图 9、图 10，是 $u\left(0\right) = 0$ 情形，图 10、图 11，是 $u\left(0\right) = 1$ 情形。

从图 9、图 11 中可以看出，Gear 格式在 $\lambda = 1000$ 时，保持了数值稳定。

而从图 10、图 12 中可以看出，Adams 格式在 $\lambda = 1000$ 时，误差很大，呈指数增长。

□

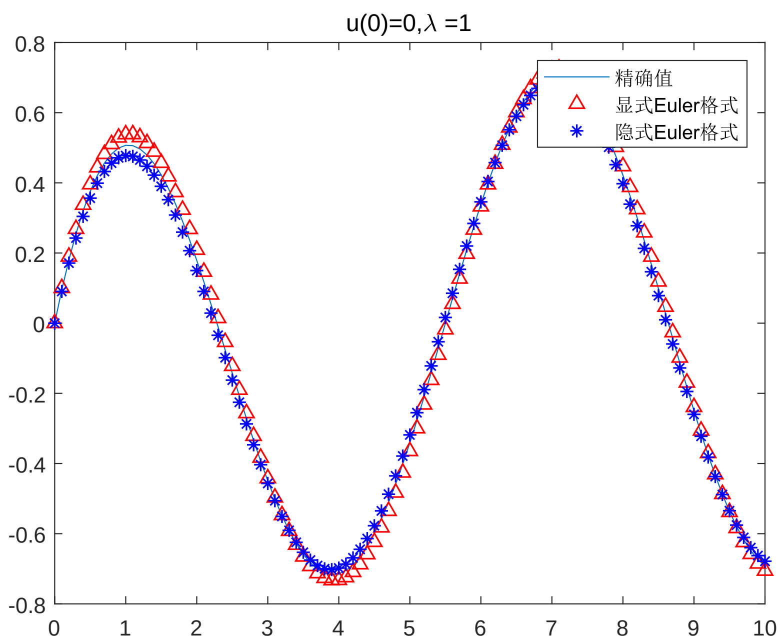

u(0)=0,λ =1
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 1

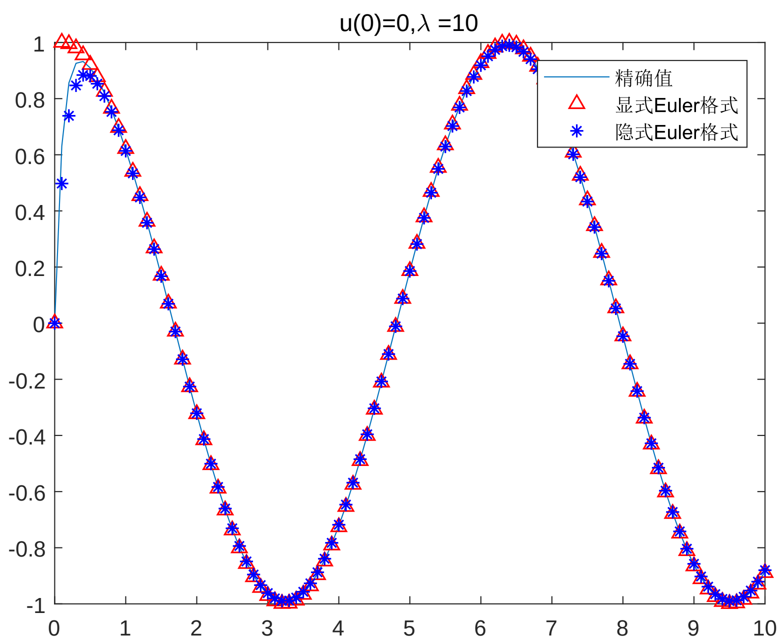
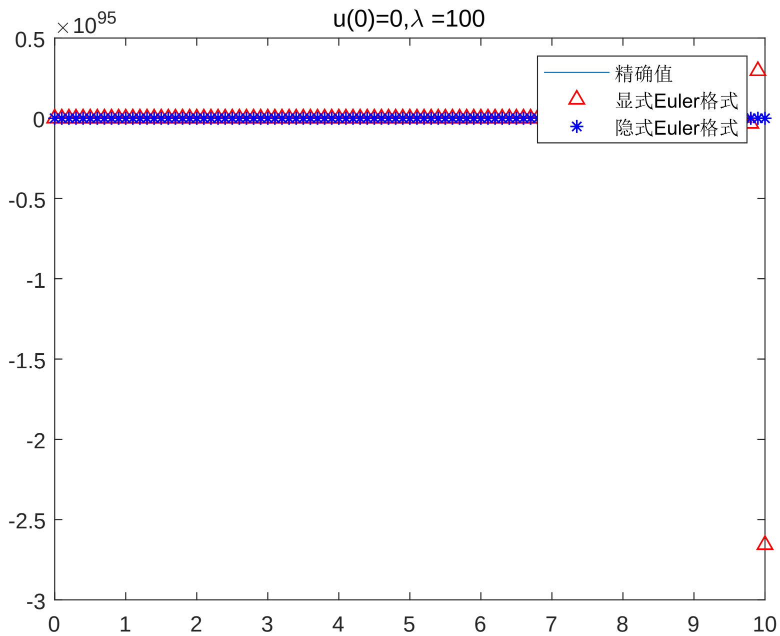

u(0)=0,λ =10
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 2



u(0)=0,λ =100
×10^95
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式

图 3

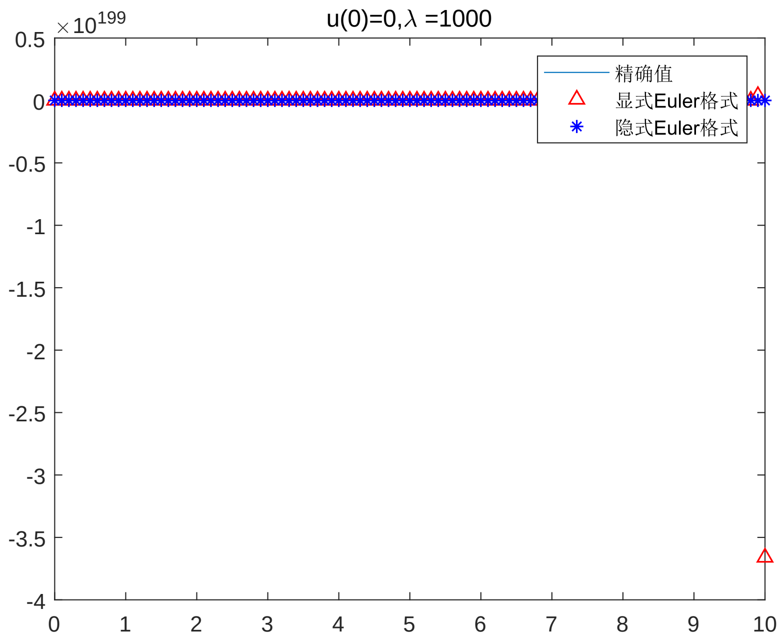

u(0)=0,λ =1000
×10^199
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式

图 4

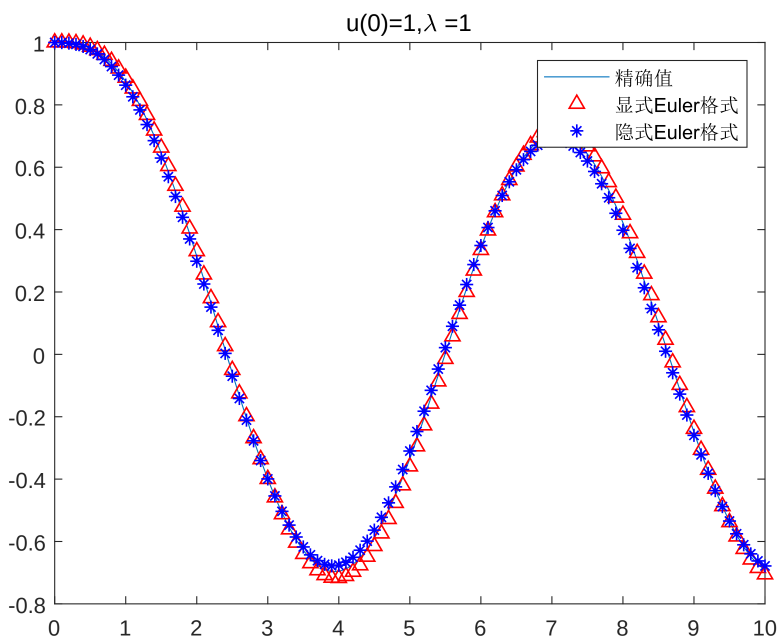

u(0)=1,λ =1
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 5

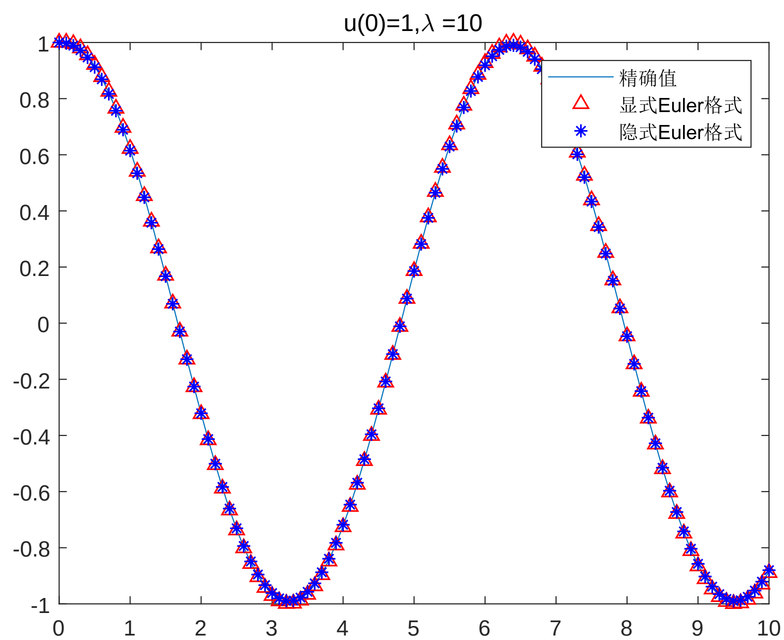

u(0)=1,λ =10
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 6

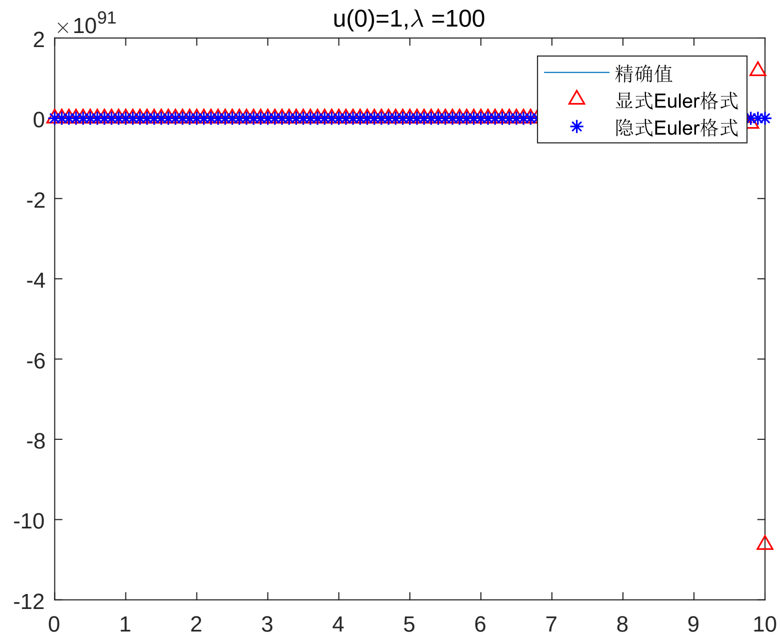

u(0)=1,λ =100
×10^91
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

图 7

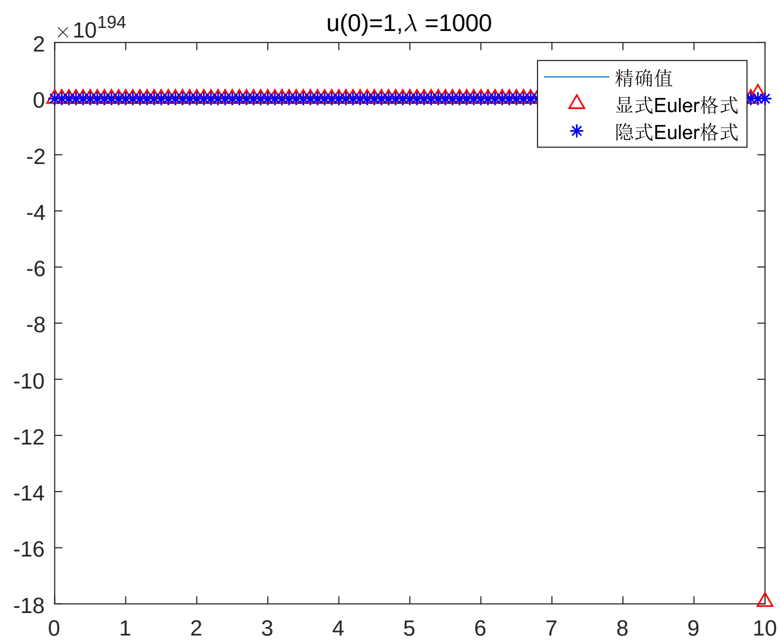

u(0)=1,λ =1000
×10^194
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
精确值
显式Euler格式
隐式Euler格式

图 8

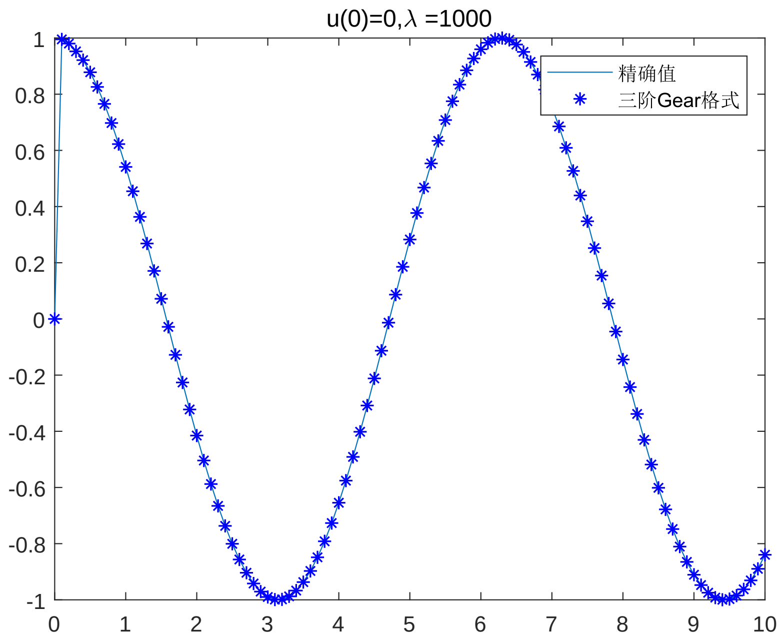

u(0)=0,λ =1000
精确值
三阶Gear格式
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 9

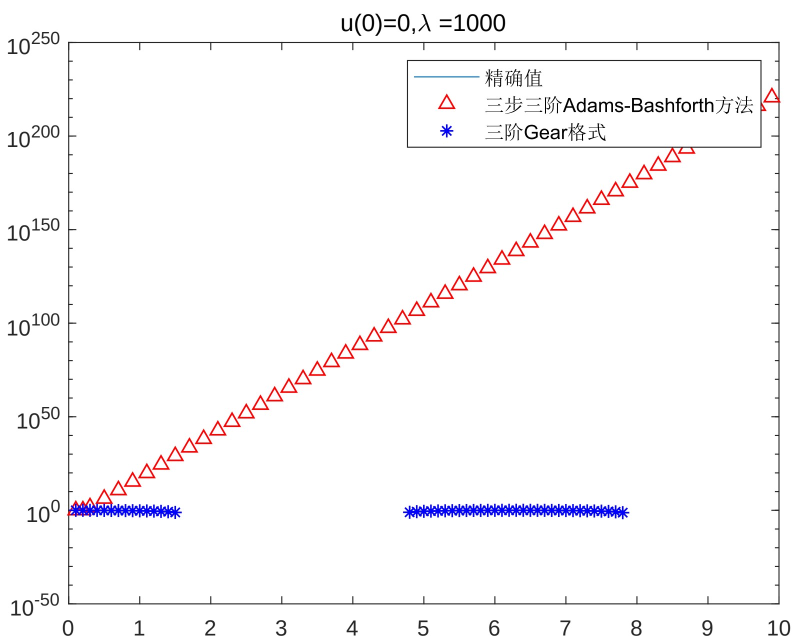

u(0)=0,λ =1000
精确值
三步三阶Adams-Bashforth方法
三阶Gear格式
10^250
10^200
10^150
10^100
10^50
10^0
10^-50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 10

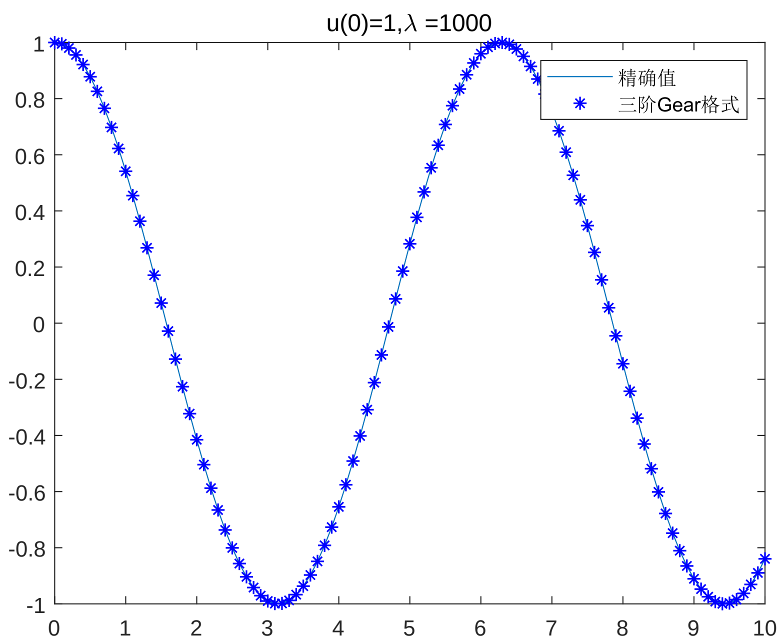

u(0)=1,λ =1000
精确值
三阶Gear格式
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 11

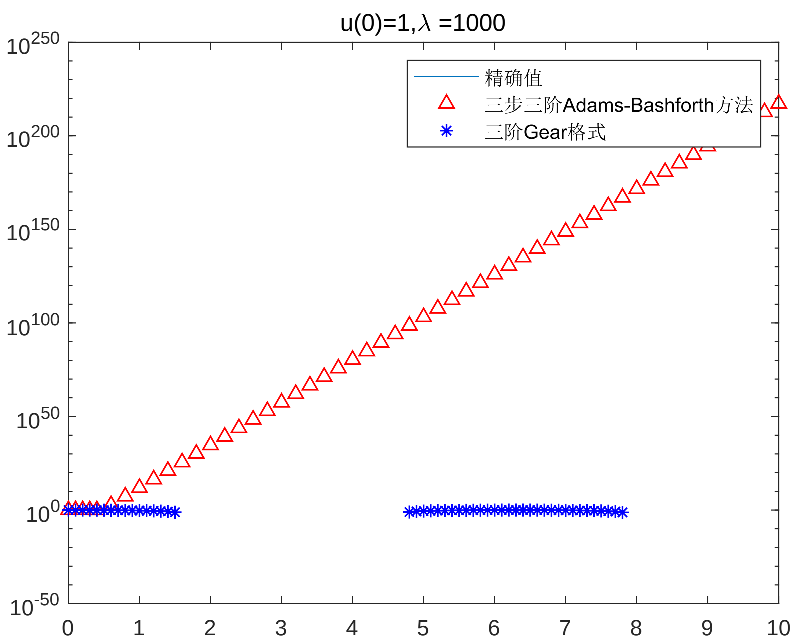

u(0)=1,λ =1000
精确值
三步三阶Adams-Bashforth方法
三阶Gear格式
10^{250}
10^{200}
10^{150}
10^{100}
10^{50}
10^{0}
10^{-50}
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

图 12

微分方程数值解法

第八周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 10 日

1 P136 附加求 Green 函数

证明. 当 $G(0)=0; G'(1)=0$, 有

$$G(x;x_0)=\begin{cases} x & 0<x<x_0 \\ x_0 & x_0<x<1 \end{cases}$$

□

2 P136 1 求函数 u

证明. 解方程，得

$$u=\frac{1}{k^2}+C_1e^{kix}+C_2e^{-kix}$$

代入 $u(0)=0; u(1)=0$，得

$$C_1=\frac{e^{-ki}-1}{k^2\left(e^{ki}-e^{-ki}\right)}, C_2=\frac{1-e^{ki}}{k^2\left(e^{ki}-e^{-ki}\right)}$$

此时，

$$Lu=-u_{xx}-k^2u=-1<0$$

而

$$u_x=kiC_1\left(e^{kix}-e^{ki(1-x)}\right)$$

即存在极值

$$u(0.5) = \frac{1}{k^2} > 0 = u(0) = u(1)$$

不符合极值原理。

□

3 P136 3 验证函数 u(x)

证明. (1) 对于初值

$$u(0) = \int_0^1 G(0; x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 = 0$$
$$u(1) = \int_0^1 G(1; x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 = 0$$

(2) 对于 $\forall x \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_x^1 G(x; x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 + \int_0^x G(x; x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 \\
&= \int_x^1 x(1 - x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 + \int_0^x x_0 (1 - x) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 \\
\therefore u_x &= -(1 - x) x f(x) + \int_x^1 (1 - x_0) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 \\
&\quad + x(1 - x) f(x) + \int_0^x x_0 (-1) f(x_0) \, \mathrm{d}x_0 \\
\therefore u_{xx} &= -(1 - x) f(x) + (-x) f(x) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

即证。

□

微分方程数值解法

第九周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 16 日

1 P143 3 三点差分及精度

1.1 $u(x)$ 精确解

证明. (1) 当 $b = c = 0$ 时，得到

$$u\left(x\right) = -\frac{1}{2a}\left(x^2 + c_1 x\right)$$

代入新的边界条件 $u\left(0\right) = 0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\left(1\right) + u\left(1\right) = 0$, 得到

$$u\left(x\right) = \frac{x\left(3 - 2x\right)}{4a}$$

(2) 当 $b \neq 0, c = 0$ 时，得到

$$u\left(x\right) = \alpha_1 \frac{b}{a} e^{\frac{b}{a}} + \alpha_2 + \frac{x}{b}$$

代入新的边界条件，得到

$$u\left(x\right) = \frac{-2a\left(e^{\frac{b}{a}x} - 1\right)}{b\left(\left(a+b\right)e^{\frac{b}{a}} - a\right)} + \frac{x}{b}$$

(3) 在其他情形下，记特征方程 $-a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2，则

$$u\left(x\right) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{c}$$

代入新的边界条件，得到

$$u(x)=\frac{e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)-1}{c\left(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)\right)}e^{\lambda_1 x}+\frac{1-e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)}{c\left(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)\right)}e^{\lambda_2 x}+\frac{1}{c}$$

□

1.2 三点差分格式离散求解

证明. 求解结果如图 1。

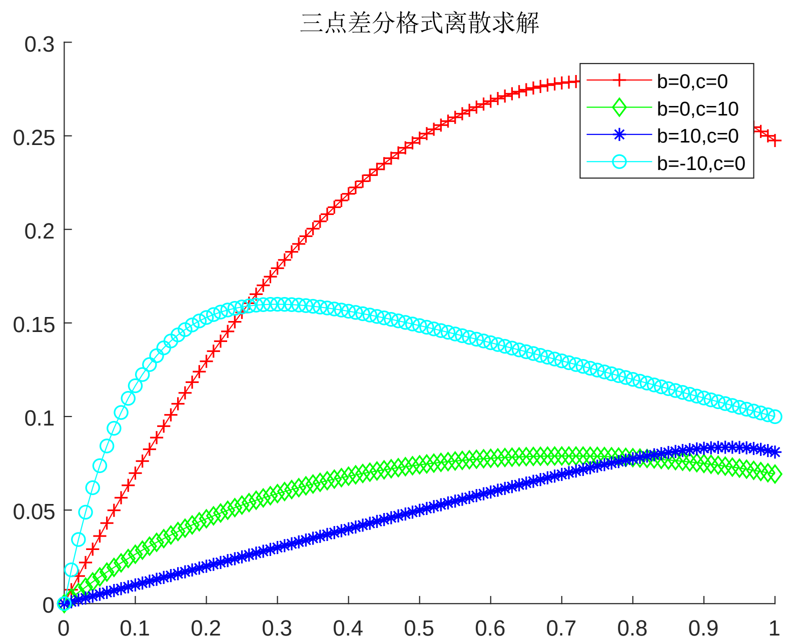


图 1: 三点差分格式离散求解

差分格式精度分析，精确解如图 2。

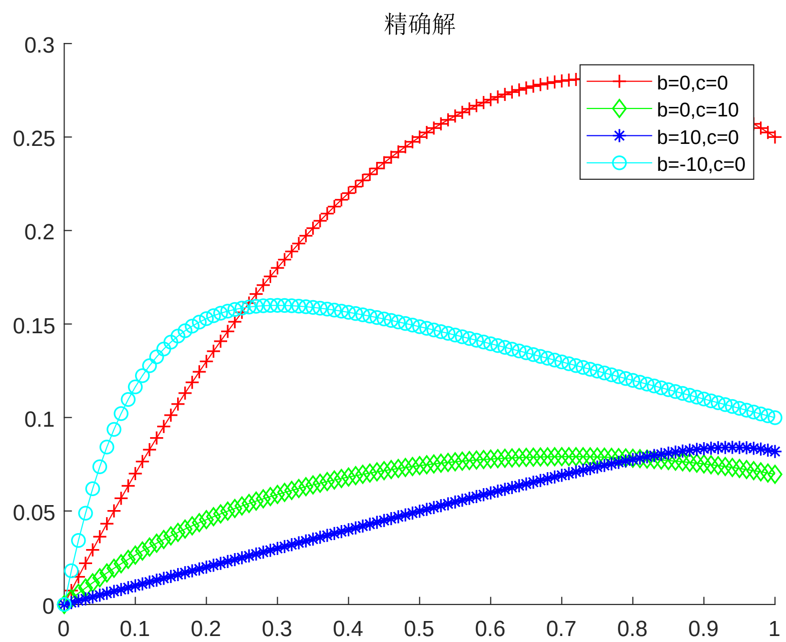


图 2: 精确解

其中，

b=0,c=0 时误差率是 6.024096e-03

b=0,c=10 时误差率是 1.755775e-03

b=10,c=0 时误差率是 1.745959e-03

b=-10,c=0 时误差率是 1.211599e-04

□

2 P146 图 3.5 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式

如图 3。

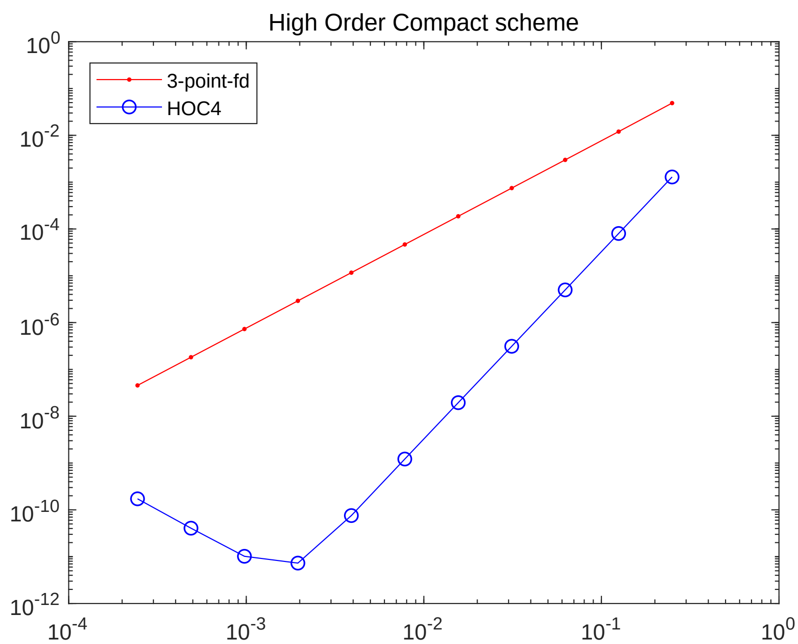


图 3: 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式

微分方程数值解法

第十周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 22 日

1 P147 Poincaré 不等式离散形式（式 3.1.54）

证明.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} &= (e_1, e_2, \ldots, e_N)\\
\delta_x^+\mathbf{e} &= \left(\frac{e_2-e_1}{h}, \frac{e_3-e_2}{h}, \ldots, \frac{e_N-e_{N-1}}{h}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \sum_{i=1}^{N} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{i-1}(e_{k+1}-e_k)\right)^2\\
&\le \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{i-1}(e_{k+1}-e_k)^2\right)\left(\sum_{k=0}^{i-1}1^2\right)\\
&\le N\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{i-1}(e_{k+1}-e_k)^2\right)\\
&\le N\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(e_{k+1}-e_k)^2\right)\\
&= N^2\sum_{k=0}^{N-1}(e_{k+1}-e_k)^2\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{e_{k+1}-e_k}{h}\right)^2\\
\therefore \|\mathbf{e}\|_{\ell^2} &\le \left\|\delta_x^+\mathbf{e}\right\|_{\ell^2}
\end{aligned}
$$

□

2 P151 3 三点差分格式极值原理和最大模误差估计

证明. (1) 由三点差分格式有，

$$-f_i = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h}\left(a(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

上式可以化为

$$a(x_{i+\frac{1}{2}})\,(u_{i+1}-u_i) = -h^2 f_i + a(x_{i-\frac{1}{2}})\,(u_i-u_{i-1})$$

当 $f_i \geq 0$ 时，如果 u_i 取得最小值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边大于等于 0，右边小于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最小值只能在边界达到。

当 $f_i \leq 0$ 时，如果 u_i 取得最大值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边小于等于 0，右边大于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最大值只能在边界达到。

极值原理得证。

(2) 记

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^T \\
\mathbf{e} &= (e_1, e_2, \ldots, e_{N-1})^T \\
\mathbf{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})^T \\
\mathbf{R} &= (R_1, R_2, \ldots, R_{N-1})^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
a_{\frac{3}{2}}+a_{\frac{1}{2}} & -a_{\frac{3}{2}} & & & \\
-a_{\frac{3}{2}} & a_{\frac{5}{2}}+a_{\frac{3}{2}} & -a_{\frac{5}{2}} & & \\
 & -a_{\frac{5}{2}} & a_{\frac{7}{2}}+a_{\frac{5}{2}} & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -a_{N-2+\frac{1}{2}} \\
 & & & -a_{N-1-\frac{1}{2}} & a_{N-1-\frac{1}{2}}+a_{N-1+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix}$$

那么有

$$\begin{aligned}\mathbf{Au} &= h^2\mathbf{f} \\ \mathbf{Ae} &= h^2\mathbf{R}\end{aligned}$$

因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以 $\mathbf{A}$ 是正定阵，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= h^2\mathbf{A^{-1}R} \\ \|\mathbf{e}\|_{\ell\infty} &= h^2\left\|\mathbf{A^{-1}R}\right\|_{\ell\infty} \\ &\leq h^2\left\|\mathbf{A^{-1}}\right\|\|\mathbf{R}\|_{\ell\infty}\end{aligned}$$

□

3 P164 1 五点差分格式问题

证明. (1)$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{T} & & \\ \mathbf{T} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{T} \\ & & \mathbf{T} & \mathbf{S}\end{pmatrix}$

其中，

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -\frac{1}{h^2}\mathbf{I} \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以，$\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}+\mathbf{I} & \mathbf{T} & & \\ \mathbf{T} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{T} \\ & & \mathbf{T} & \mathbf{S}+\mathbf{I}\end{pmatrix}$

其中，

$$\mathbf{S}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix} \frac{4}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2}+1 \end{pmatrix}$$

容易得到 $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ 也是成块 TST 矩阵。

(2) 记

$$\mathbf{u}=(u_{11},\ldots,u_{n1},u_{12},\ldots,u_{nn})^T$$

$$\mathbf{A_0}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\left(a_{ij}^{(0)}\right)_{n\times n}$$

$$\mathbf{a_0}=\left(a_{11}^{(0)},\ldots,a_{n1}^{(0)},a_{12}^{(0)},\ldots,a_{nn}^{(0)}\right)^T$$

所以有

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})\,\mathbf{u}=\mathbf{f}+\mathbf{a_0}$$

类比书上定理 3.2.6（P161），在网格点 x_ℓ 上，误差函数满足

$$-\Delta_h e_{h,\ell}+e_{h,\ell}=\Delta_h u(x_\ell)-\Delta u(x_\ell)+a_{h,\ell}^{(0)}\equiv R_{h,\ell}+a_{h,\ell}^{(0)}$$

由于 $a_{h,\ell}^{(0)}$ 在边界上不为 0，结合稳定性估计，得到格式不是二阶收敛。

(3) 由书上定理 3.2.8（P161），得到特征值是

$$\lambda_{j,k}=\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{j\pi}{2n})+\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi}{2n})$$

对应的特征向量是

$$\mathbf{u}_{m,l}^{(j,k)}=\frac{2}{n}\sin\left(\frac{mj\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n}\right),1\leq m,\ell\leq n-1$$

□

微分方程数值解法

第十二周作业

桑明达 15300180062

2018 年 6 月 8 日

1 P195 式 4.2.16 Richardson

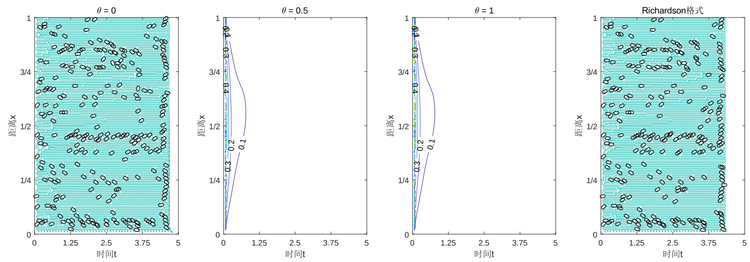
证明.

$$
\begin{aligned}
R_i^n =& \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} - a\Delta_h u_i^n - (u_t(t_n, x_i) - a u_{xx}(t_n, x_i)) \\
=& \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} - u_t(t_n, x_i) \right) - (a\Delta_h u_i^n - a u_{xx}(t_n, x_i)) \\
=& \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) - \frac{a h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_n, x_i) + O(h^4)
\end{aligned}
$$

□

2 P195 1 抛物线方程

证明. (1) 解析解未求出，时间和空间都 100 等分为 101 点，得到计算结果如图

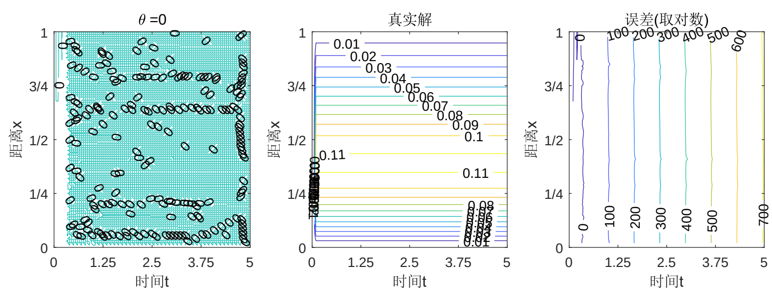


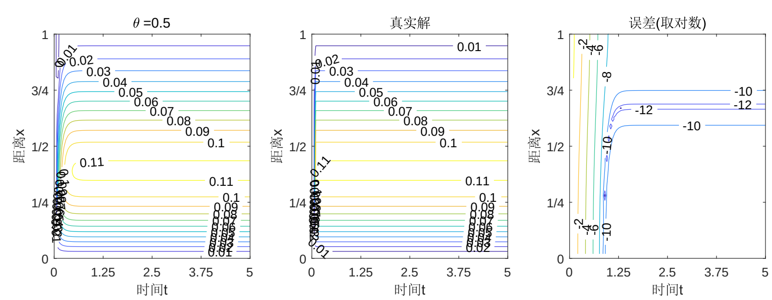
可以看出，$\theta = 0.5$ 或 1 时，格式结果较好，其中 $\theta = 1$ 时，收敛到 0。

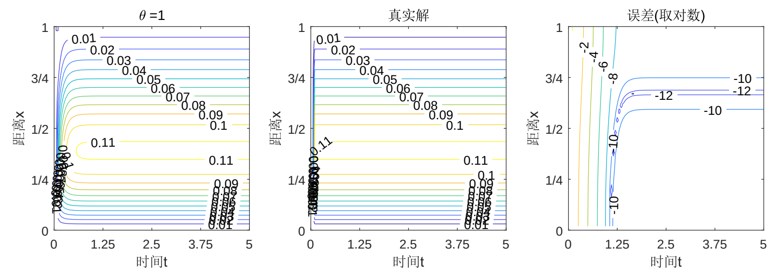
(2) 解析解为

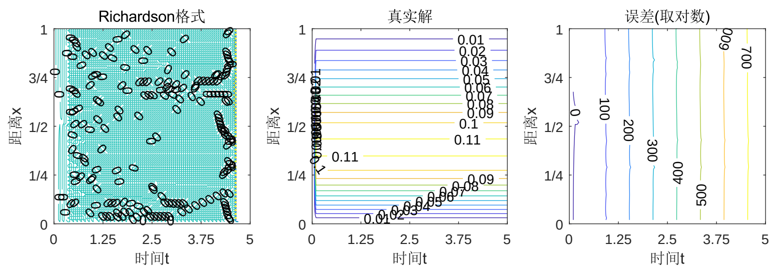
$$u(t,x) = \frac{1-e^{-\pi^2 t}}{\pi^2}\sin \pi x + \frac{1-e^{-4\pi^2 t}}{4\pi^2}\sin 2\pi x$$

时间和空间都 100 等分为 101 点，得到计算结果如图









可以看出，$\theta = 0.5$ 或 1 时，格式结果较好，误差很小，当 $t \to \infty$ 时，得到的边值问题的解一致。 □

微分方程数值解法

第十三周作业

桑明达 15300180062

2018 年 6 月 15 日

1 P207 DuFort-Frankel 格式截断误差

证明.

$$R_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u^{n+1}}{2\tau} - a\frac{u_{i+1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i-1}^n}{h^2} - (u_t\big|_i^n - au_{xx}\big|_i^n)$$

分别定义$R_t\big|_i^n, R_x\big|_i^n$

$$\begin{aligned}
R_t\big|_i^n =& \frac{u_i^{n+1} - u^{n+1}}{2\tau} - u_t\big|_i^n \\
=& \frac{\tau^2}{6}u_{tt}\big|_i^n + O(\tau^3) \\
=& O(\tau^2) \\
R_x\big|_i^n =& -a\frac{u_{i+1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i-1}^n}{h^2} + au_{xx}\big|_i^n \\
=& -\frac{a}{h^2}\left((u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1})\right) + au_{xx}\big|_i^n \\
=& -\frac{a}{h^2}\left((2u_i^n + h^2u_{xx}\big|_i^n + O(h^4)) - (2u_i^n + \tau^2u_{tt}\big|_i^n + O(\tau^4))\right) + au_{xx}\big|_i^n \\
=& -\frac{a}{h^2}\left(O(h^4) - \tau^2u_{tt}\big|_i^n - O(\tau^4)\right) \\
=& O(h^2) + O(\tau^2h^{-2})
\end{aligned}$$

所以，$R_i^n = O(\tau^2 + h^2) + O(\tau^2h^{-2})$

□

微分方程数值解法

第十四周作业

桑明达 15300180062

2018 年 6 月 23 日

1 Douglas-Rachford 格式稳定性分析

证明. 对于 Douglas-Rachford 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \Delta_h u^{n+1} - \tau\delta_x^2\delta_y^2(u^{n+1}-u^n)$$

记

$$u_{i,j}^n = g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}$$

$$\Delta_h u_{i,j}^n = g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{e^{i\omega_x h_x}+e^{-i\omega_x h_x}}{h_x^2}+\frac{e^{i\omega_y h_y}+e^{-i\omega_y h_y}}{h_y^2}\right)$$

$$= -4g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\right)$$

类似，有

$$\delta_x u_{i,j}^n = -4g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}$$

$$\delta_y u_{i,j}^n = -4g(n)e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}$$

$$\delta_x\delta_y u_{i,j}^n = 16g(n)e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}$$

代入格式左边，有

$$\text{left} = \frac{g(n+1)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)} - g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}}{\tau}$$

代入格式右边，有

$$\begin{aligned}\text{right} =& -4g(n+1)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\right)\\ &-16\tau(g(n+1)-g(n))e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\end{aligned}$$

移项化简，有

$$g(n+1) = g(n)\frac{1+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}{1+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}$$

所以，最终得到

$$|G| = \left|\frac{1+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}{1+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}\right| \le 1$$

所以 Douglas-Rachford 格式无条件稳定。 □

2 P222 2 Leap-frog 格式截断误差以及数值稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) + c\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4)$$

对于 Leap-frog 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$G_\pm = i\frac{c\tau}{h}\sin\omega h \pm \sqrt{1-(\frac{c\tau}{h}\sin\omega h)^2}$$

所以若 $1-(\frac{c\tau}{h}\sin\omega h)^2 \ge 0$，则 Leap-frog 格式稳定；否则不一定。 □

3 P222 3 Lax-Wendroff 格式精度以及数值稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + c\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) + O(h^3) + O(\tau h^3)$$

所以，数值格式是关于时间空间二阶精度的。

对于 Lax-Wendroff 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$|G|^2 = 1 - 4r^2\left(1 - r^2\right)\sin^4\frac{\omega h}{2}$$

所以当 $r \leq 0$ 时，格式稳定。 □

4 P222 4 Beam-Warming 格式精度以及稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^3) - \frac{ch^2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) + \frac{c^2\tau h}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\tau h^2)$$

对于 Beam-Warming 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$|G|^2 = 1 + 4r(r-1)^2(r-2)\sin^4\frac{\omega h}{2}$$

所以若 $r \leq 2$ 时，$G \leq 1$，格式稳定。 □

微分方程数值解法

第十五周作业

桑明达 15300180062

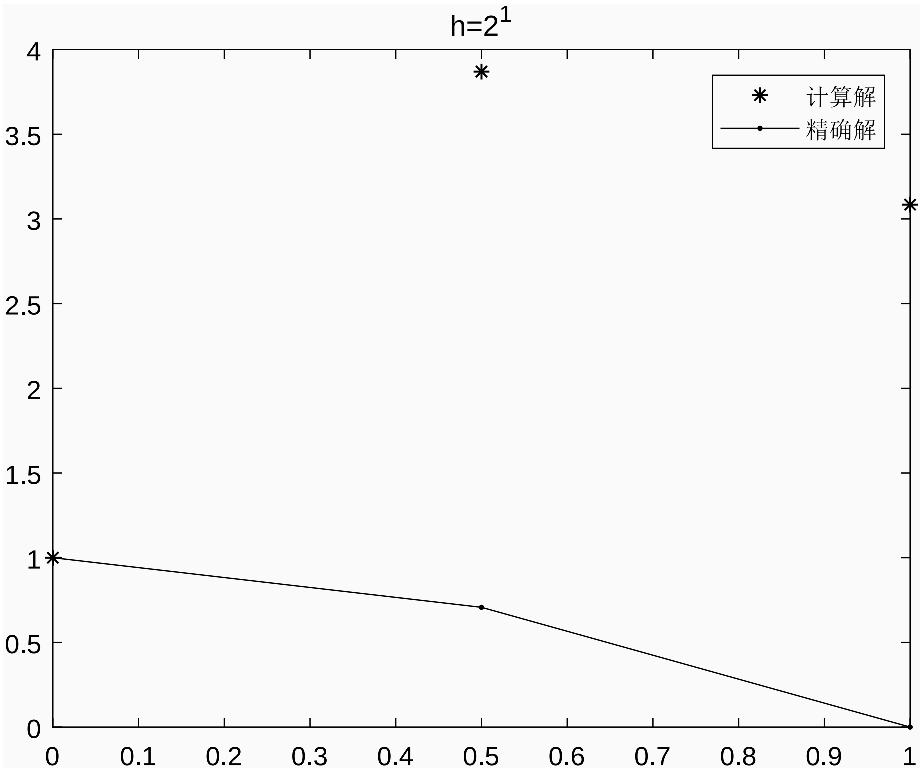
2018 年 6 月 27 日

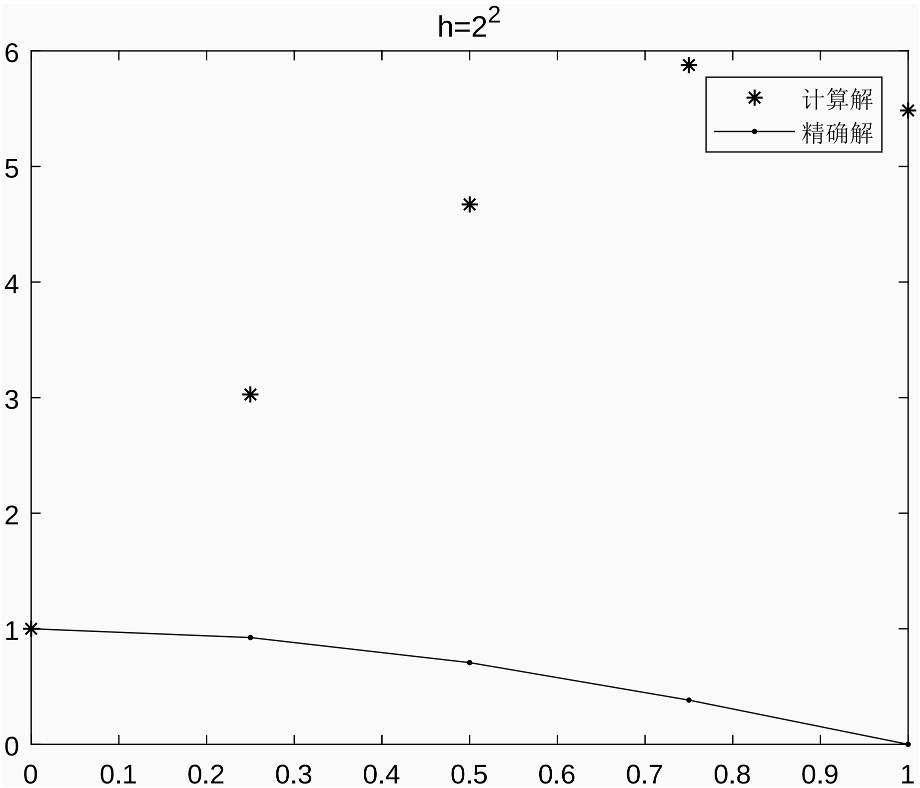
1 P254 3 用线性有限元求解混合边值问题

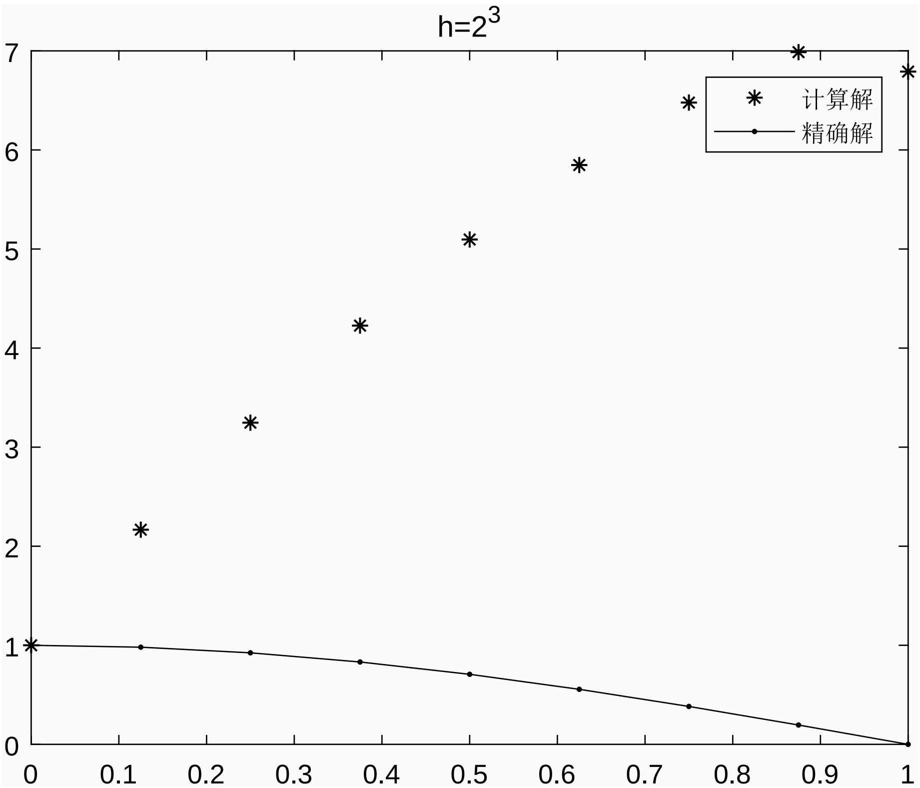
证明. 我使用下面的 **L**、**F**，计算结果如后图，偏差比较大，求正确求解方式

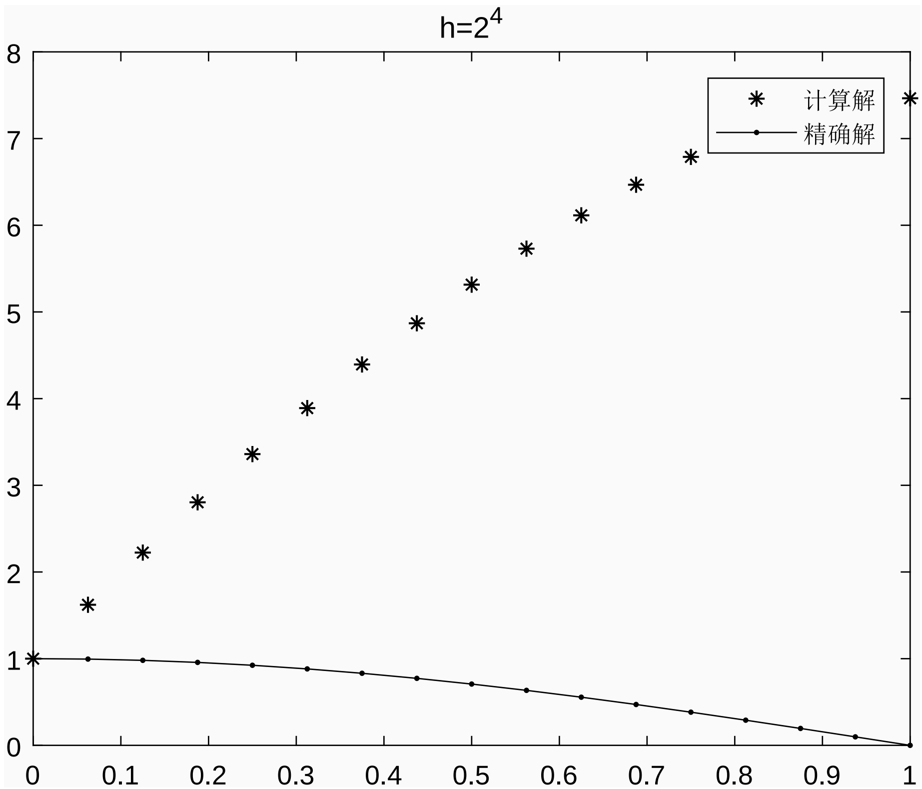
$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_2) & & & \\ a(\varphi_2,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_3) & & \\ & a(\varphi_3,\varphi_2) & a(\varphi_3,\varphi_3) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a(\varphi_{n-2},\varphi_{n-1}) \\ & & & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-2}) & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})+a(\varphi_{n-1},\varphi_n) \end{pmatrix}$$

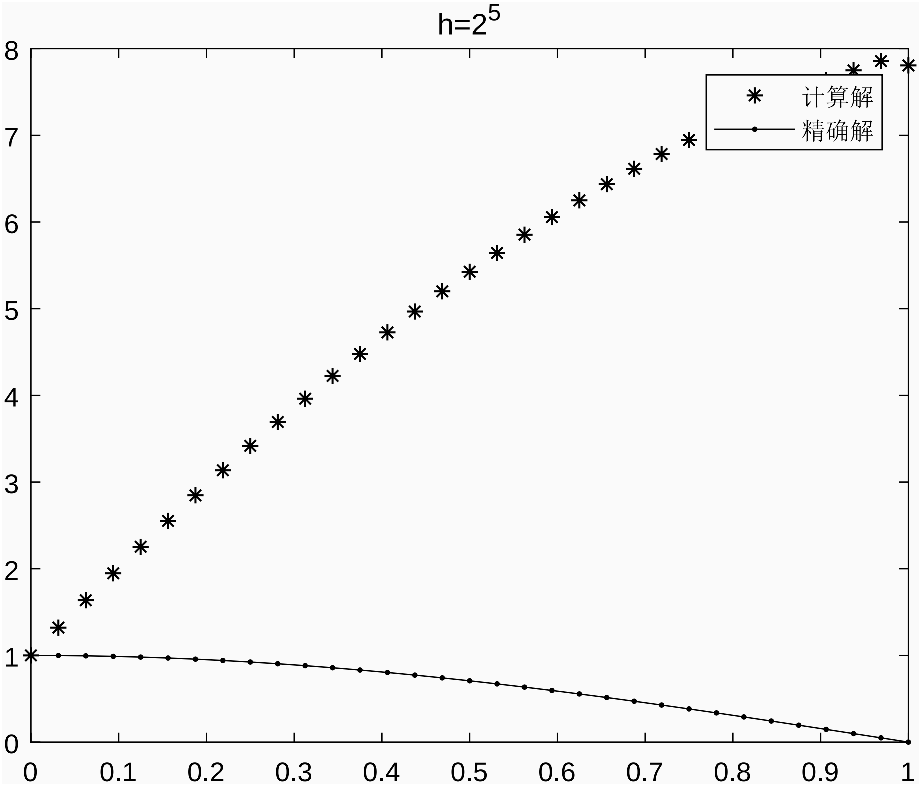
$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} <f,\varphi_1> -u(0))a(\varphi_1,\varphi_0) \\ <f,\varphi_2> \\ <f,\varphi_3> \\ \vdots \\ <f,\varphi_{n-2}> \\ <f,\varphi_{n-1}> -hu'(1))a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \end{pmatrix}$$

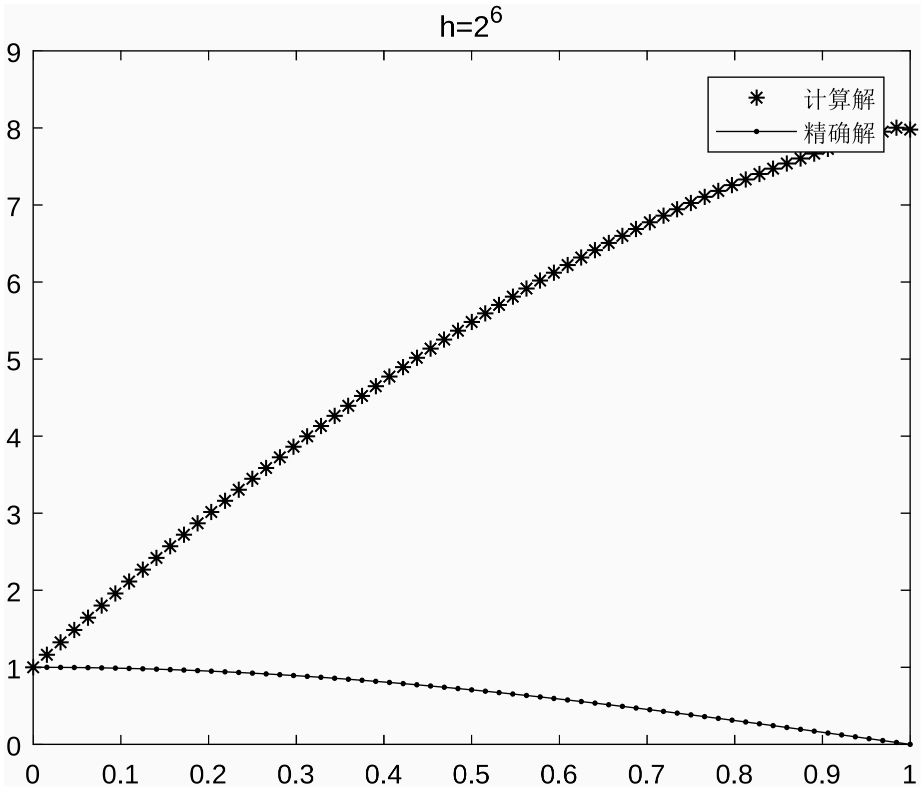

h=2^1
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
计算解
精确解


h=2^2
计算解
精确解
6
5
4
3
2
1
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


h=2^3
计算解
精确解
0
1
2
3
4
5
6
7
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


h=2^4
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
计算解
精确解


h=2^5
计算解
精确解
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


h=2^6
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
计算解
精确解

□