微分方程数值解法

第十周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 22 日

1 P147 Poincaré 不等式离散形式（式 3.1.54）

证明.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} &= (e_1, e_2, \ldots, e_N) \\
\delta_x^+ \mathbf{e} &= \left(\frac{e_2 - e_1}{h}, \frac{e_3 - e_2}{h}, \ldots, \frac{e_N - e_{N-1}}{h} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \sum_{i=1}^{N} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k) \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k)^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{i-1} 1^2 \right) \\
&\leq N \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k)^2 \right) \\
&\leq N \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (e_{k+1} - e_k)^2 \right) \\
&= N^2 \sum_{k=0}^{N-1} (e_{k+1} - e_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e_{k+1} - e_k}{h} \right)^2 \\
\therefore \|\mathbf{e}\|_{\ell^2} &\leq \left\| \delta_x^+ \mathbf{e} \right\|_{\ell^2}
\end{aligned}
$$

□

2 P151 3 三点差分格式极值原理和最大模误差估计

证明. (1) 由三点差分格式有，

$$-f_i = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h}\left(a(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

上式可以化为

$$a(x_{i+\frac{1}{2}})\,(u_{i+1}-u_i) = -h^2 f_i + a(x_{i-\frac{1}{2}})\,(u_i-u_{i-1})$$

当 $f_i \geq 0$ 时，如果 u_i 取得最小值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边大于等于 0，右边小于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最小值只能在边界达到。

当 $f_i \leq 0$ 时，如果 u_i 取得最大值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边小于等于 0，右边大于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最大值只能在边界达到。

极值原理得证。

(2) 记

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^T \\
\mathbf{e} &= (e_1, e_2, \ldots, e_{N-1})^T \\
\mathbf{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})^T \\
\mathbf{R} &= (R_1, R_2, \ldots, R_{N-1})^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
a_{\frac{3}{2}}+a_{\frac{1}{2}} & -a_{\frac{3}{2}} & & & \\
-a_{\frac{3}{2}} & a_{\frac{5}{2}}+a_{\frac{3}{2}} & -a_{\frac{5}{2}} & & \\
 & -a_{\frac{5}{2}} & a_{\frac{7}{2}}+a_{\frac{5}{2}} & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -a_{N-2+\frac{1}{2}} \\
 & & & -a_{N-1-\frac{1}{2}} & a_{N-1-\frac{1}{2}}+a_{N-1+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix}$$

那么有

$$\begin{aligned}\mathbf{Au} =& h^2\mathbf{f}\\ \mathbf{Ae} =& h^2\mathbf{R}\end{aligned}$$

因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以 $\mathbf{A}$ 是正定阵，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{e} =& h^2\mathbf{A^{-1}R}\\ \|\mathbf{e}\|_{\ell\infty} =& h^2\left\|\mathbf{A^{-1}R}\right\|_{\ell\infty}\\ \leq& h^2\left\|\mathbf{A^{-1}}\right\|\|\mathbf{R}\|_{\ell\infty}\end{aligned}$$

□

3 P164 1 五点差分格式问题

证明. (1)$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{T} & & \\ \mathbf{T} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{T}\\ & & \mathbf{T} & \mathbf{S}\end{pmatrix}$

其中，

$$\begin{aligned}\mathbf{T} =& -\frac{1}{h^2}\mathbf{I}\\ \mathbf{S} =& \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以，$\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}+\mathbf{I} & \mathbf{T} & & \\ \mathbf{T} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{T}\\ & & \mathbf{T} & \mathbf{S}+\mathbf{I}\end{pmatrix}$

其中，

$$\mathbf{S}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix} \frac{4}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2}+1 \end{pmatrix}$$

容易得到 $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ 也是成块 TST 矩阵。

(2) 记

$$\mathbf{u}=(u_{11},\ldots,u_{n1},u_{12},\ldots,u_{nn})^T$$

$$\mathbf{A_0}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\left(a_{ij}^{(0)}\right)_{n\times n}$$

$$\mathbf{a_0}=\left(a_{11}^{(0)},\ldots,a_{n1}^{(0)},a_{12}^{(0)},\ldots,a_{nn}^{(0)}\right)^T$$

所以有

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})\,\mathbf{u}=\mathbf{f}+\mathbf{a_0}$$

类比书上定理 3.2.6（P161），在网格点 x_ℓ 上，误差函数满足

$$-\Delta_h e_{h,\ell}+e_{h,\ell}=\Delta_h u(x_\ell)-\Delta u(x_\ell)+a_{h,\ell}^{(0)}\equiv R_{h,\ell}+a_{h,\ell}^{(0)}$$

由于 $a_{h,\ell}^{(0)}$ 在边界上不为 0，结合稳定性估计，得到格式不是二阶收敛。

(3) 由书上定理 3.2.8（P161），得到特征值是

$$\lambda_{j,k}=\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{j\pi}{2n})+\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi}{2n})$$

对应的特征向量是

$$\mathbf{u}_{m,l}^{(j,k)}=\frac{2}{n}\sin\left(\frac{mj\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n}\right),1\le m,\ell\le n-1$$

□