微分方程数值解法

第九周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 12 日

1 P143 3 三点差分及精度

1.1 $u(x)$ 精确解

证明. (1) 当 $b=c=0$ 时，得到

$$u\left(x\right)=-\frac{1}{a}\left(x^{2}+c_{1}x\right)$$

代入新的边界条件 $u\left(0\right)=0,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\left(1\right)+u\left(1\right)=0$, 得到

$$u\left(x\right)=\frac{x\left(3-2x\right)}{2a}$$

(2) 当 $b=0,c\neq 0$ 时，得到

$$u\left(x\right)=\alpha_{1}\frac{b}{a}e^{\frac{b}{a}}+\alpha_{2}+\frac{x}{b}$$

代入新的边界条件，得到

$$u\left(x\right)=\frac{-2a\left(e^{\frac{b}{a}x}-1\right)}{b\left(\left(a+b\right)e^{\frac{b}{a}}-a\right)}+\frac{x}{b}$$

(3) 在其他情形下，记特征方程 $-a\lambda^{2}+b\lambda+c=0$ 的两个根为 λ_{1},λ_{2}，则

$$u\left(x\right)=\alpha_{1}e^{\lambda_{1}x}+\alpha_{2}e^{\lambda_{2}x}+\frac{1}{c}$$

代入新的边界条件，得到

$$u(x)=\frac{e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)-1}{c\left(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)\right)}e^{\lambda_1 x}+\frac{1-e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)}{c\left(e^{\lambda_1}(1+\lambda_1)-e^{\lambda_2}(1+\lambda_2)\right)}e^{\lambda_2 x}+\frac{1}{c}$$

□

1.2 三点差分格式离散求解

证明. 求解结果如图 1。

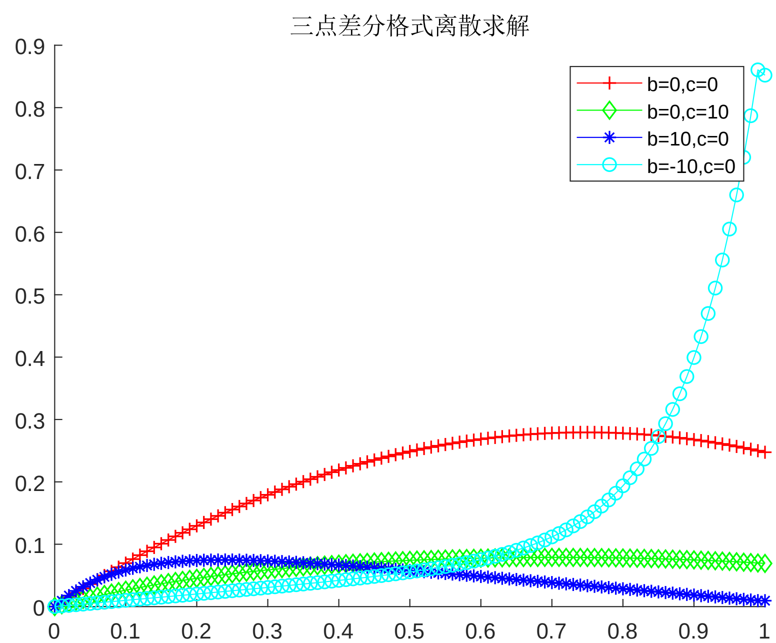

图 1: 三点差分格式离散求解

差分格式精度分析

□

2 P146 图 3.5 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式

如图 2。

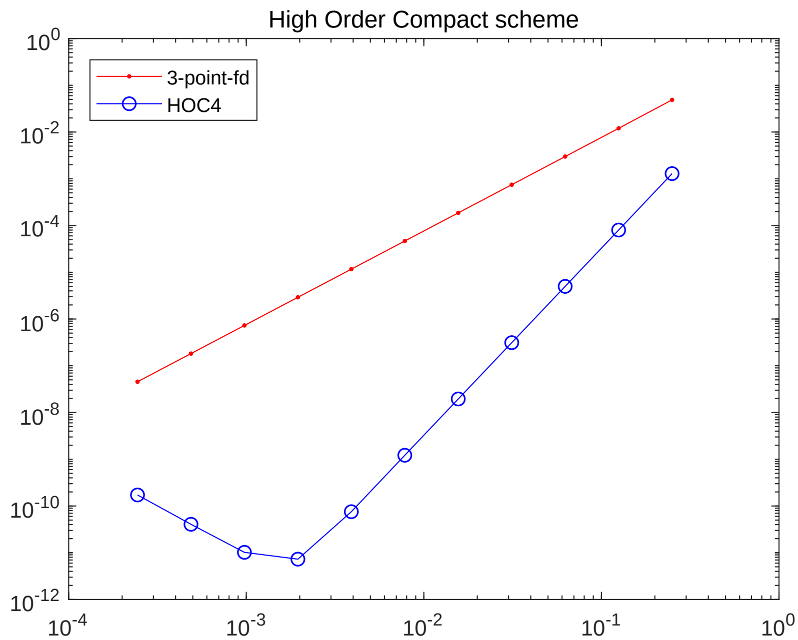

图 2: 标准三点差分格式和四阶 HOC 格式