微分方程数值解法

第十周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 21 日

1 P147 Poincaré 不等式离散形式（式 3.1.54）

证明.

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_N)$$
$$\delta_x^+ \mathbf{e} = \left(\frac{e_2 - e_1}{h}, \frac{e_3 - e_2}{h}, \ldots, \frac{e_N - e_{N-1}}{h}\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{i=1}^{N} e_i^2 =& \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k)\right)^2 \\
\leq& \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k)^2\right) \left(\sum_{k=0}^{i-1} 1^2\right) \\
\leq& N \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{i-1} (e_{k+1} - e_k)^2\right) \\
\leq& N \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (e_{k+1} - e_k)^2\right) \\
=& N^2 \sum_{k=0}^{N-1} (e_{k+1} - e_k)^2 \\
=& \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e_{k+1} - e_k}{h}\right)^2
\end{aligned}$$
$$\therefore \|\mathbf{e}\|_{l^2} \leq \left\|\delta_x^+ \mathbf{e}\right\|_{l^2}$$

□

2 P151 3 三点差分格式极值原理和最大模误差估计

证明. (1) 由三点差分格式有，

$$-f_i = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h}\left(a(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

上式可以化为

$$a(x_{i+\frac{1}{2}})\left(u_{i+1}-u_i\right) = -h^2 f_i + a(x_{i-\frac{1}{2}})\left(u_i-u_{i-1}\right)$$

当 $f_i \geq 0$ 时，如果 u_i 取得最小值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边大于等于 0，右边小于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最小值只能在边界达到。

当 $f_i \leq 0$ 时，如果 u_i 取得最大值，因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以上式左边小于等于 0，右边大于等于 0。得到 i=0 或 n，或者得到 u_i 恒为常数，即 u(x) 最大值只能在边界达到。

极值原理得证。

(2) 记

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_N - 1)^T \\
\mathbf{e} &= (e_1, e_2, \ldots, e_N - 1)^T \\
\mathbf{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_N - 1)^T \\
\mathbf{R} &= (R_1, R_2, \ldots, R_N - 1)^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
a_{\frac{3}{2}}+a_{\frac{1}{2}} & -a_{\frac{3}{2}} & & & \\
-a_{\frac{3}{2}} & a_{\frac{5}{2}}+a_{\frac{3}{2}} & -a_{\frac{5}{2}} & & \\
 & -a_{\frac{5}{2}} & a_{\frac{7}{2}}+a_{\frac{5}{2}} & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & -a_{N-2+\frac{1}{2}} \\
 & & & -a_{N-1-\frac{1}{2}} & a_{N-1-\frac{1}{2}}+a_{N-1+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix}$$

那么有

$$\begin{aligned}\mathbf{Au} =& h^2\mathbf{f}\\ \mathbf{Ae} =& h^2\mathbf{R}\end{aligned}$$

因为 $a(x) \geq \alpha > 0$，所以 $\mathbf{A}$ 是正定阵，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{e} =& h^2\mathbf{A^{-1}}\mathbf{R}\\ \|\mathbf{e}\|_{l^\infty} =& h^2\left\|\mathbf{A^{-1}}\mathbf{R}\right\|_{l^\infty}\\ \leq& h^2\left\|\mathbf{A^{-1}}\right\|\|\mathbf{R}\|_{l^\infty}\end{aligned}$$

□

3 P164 1 五点差分格式问题

证明. (1)$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{T} & & \\ \mathbf{T} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{T}\\ & & \mathbf{T} & \mathbf{S}\end{pmatrix}$

其中，

$$\mathbf{T} = -h^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix}\frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h} & & \\ -\frac{1}{h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h}\\ & & -\frac{1}{h} & \frac{4}{h^2}\end{pmatrix}$$

(2)

(3)

□