微分方程数值解法

第二周作业

桑明达 15300180062

2018 年 3 月 30 日

1 P24 2 比较不动点和 Newton-Paphson 迭代

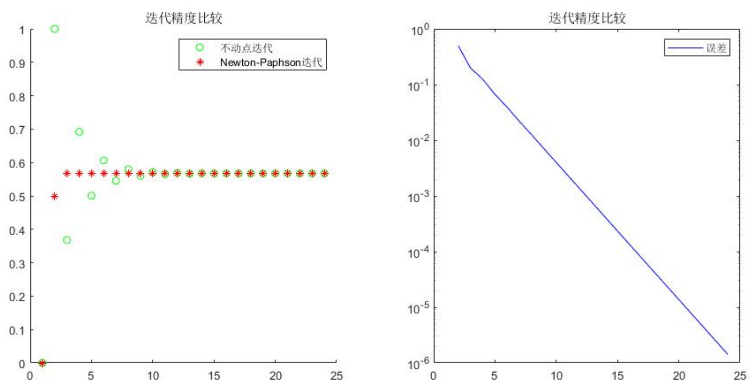

图 1: 比较不动点迭代和 Newton-Paphson 迭代

如图 1，不动点迭代 24 次才能达到 NP 迭代 4 次的精度。

NP 迭代相对于不动点迭代而言，方向性更准确，并且每一步的精确速率很高。

2 P34 1 证明范数等价关系

1. 左边的不等式

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \sqrt[p]{|x|_1^p + |x|_2^p + \cdots + |x|_n^p} \\ \|x\|_q &= \sqrt[q]{|x|_1^q + |x|_2^q + \cdots + |x|_n^q} \\ \sum_{i=1}^n |x|_i^q &\le \sum_{i=1}^n |x|_i^p |x|_i^{q-p} \\ &= \sum_{i=1}^n |x|_i^p (|x|_i^p)^{\frac{q-p}{p}} \\ &\le \sum_{i=1}^n |x|_i^p (\sum_{i=1}^n |x|_i^p)^{\frac{q-p}{p}} \\ &= (\sum_{i=1}^n |x|_i^p)^{1+\frac{q-p}{p}} \\ &= (\sum_{i=1}^n |x|_i^p)^{\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

即证。

2. 右边的不等式

根据 Jensen 不等式

$$\sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n |x|_i^p}{n}} \le \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n |x|_i^q}{n}}$$

即有

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x|_i^p} \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |x|_i^q}$$

$$\|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q$$

即证

3 P41 6 Runge 现象

分别用点数 n=5,9,13 时的等距节点插值公式，对 Runge 现象进行测试，如图 2

分别用点数 n=5,9,13 时的 Chebyshev 多项式极值点插值公式，对 Runge 现象进行测试，如图 3

可以看出，相对于等距节点插值公式，Chebyshev 多项式极值点插值公式有更好的逼近性。

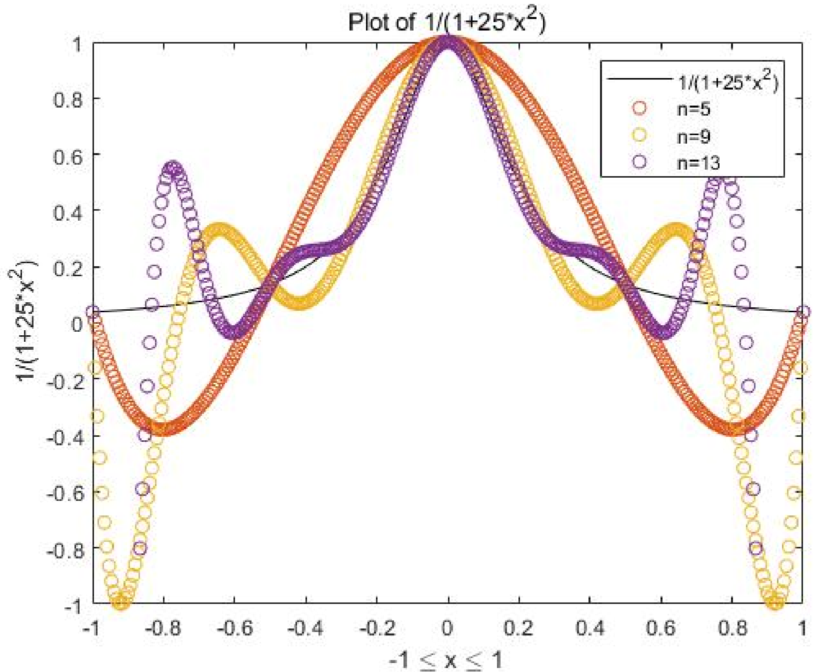

图 2: 等距节点插值公式

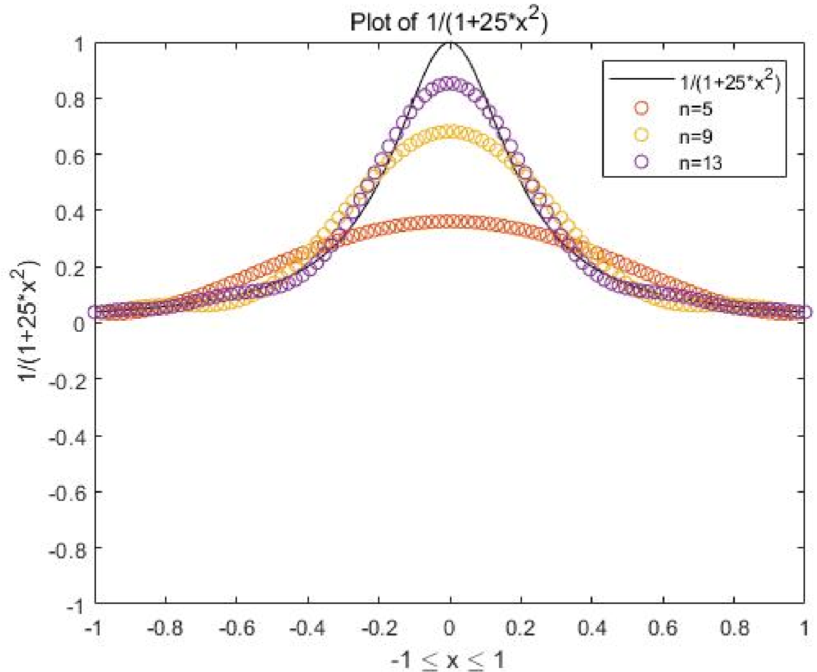

图 3: Chebyshev 多项式极值点插值公式