第一周-桑明达 15300180062

第一题

对于形如$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵，其条件数与维数的关系如图 1。

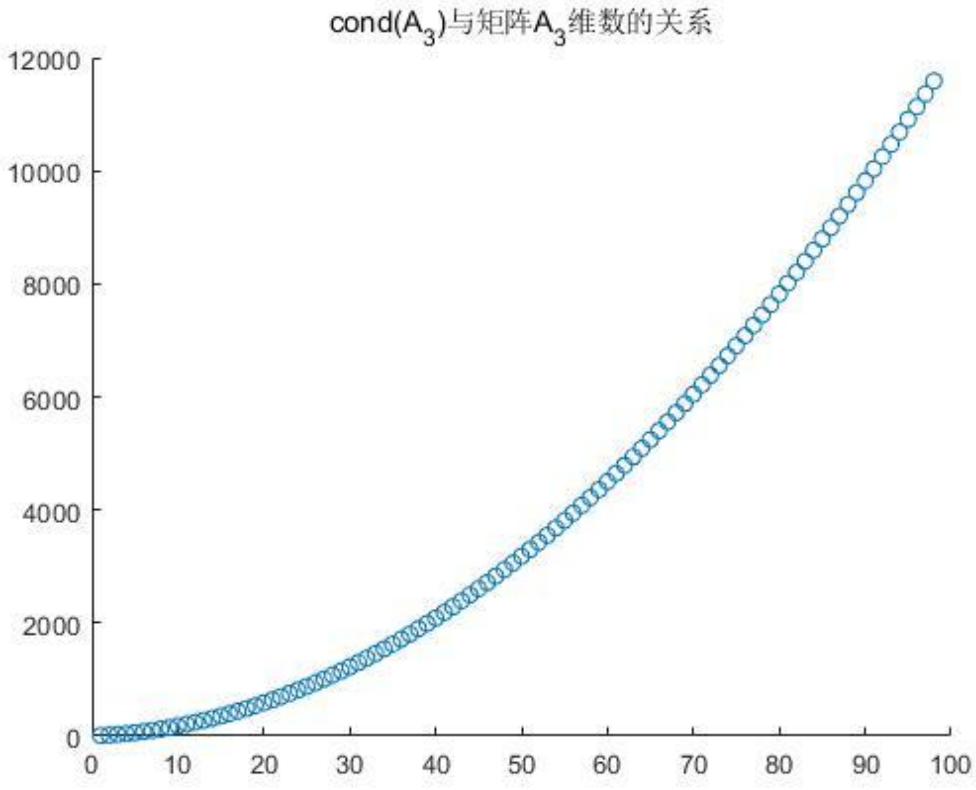

图 1

补充书上的两个图，见图 2，图 3

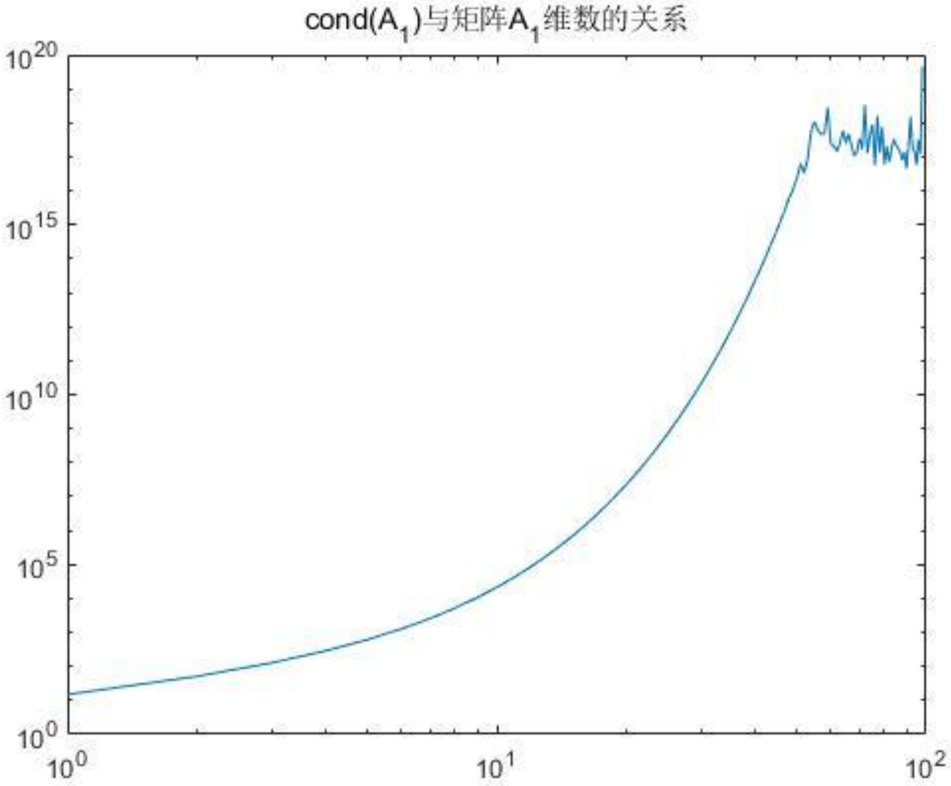
cond(A1)与矩阵A1维数的关系
10^20
10^15
10^10
10^5
10^0
10^0
10^1
10^2

图 2

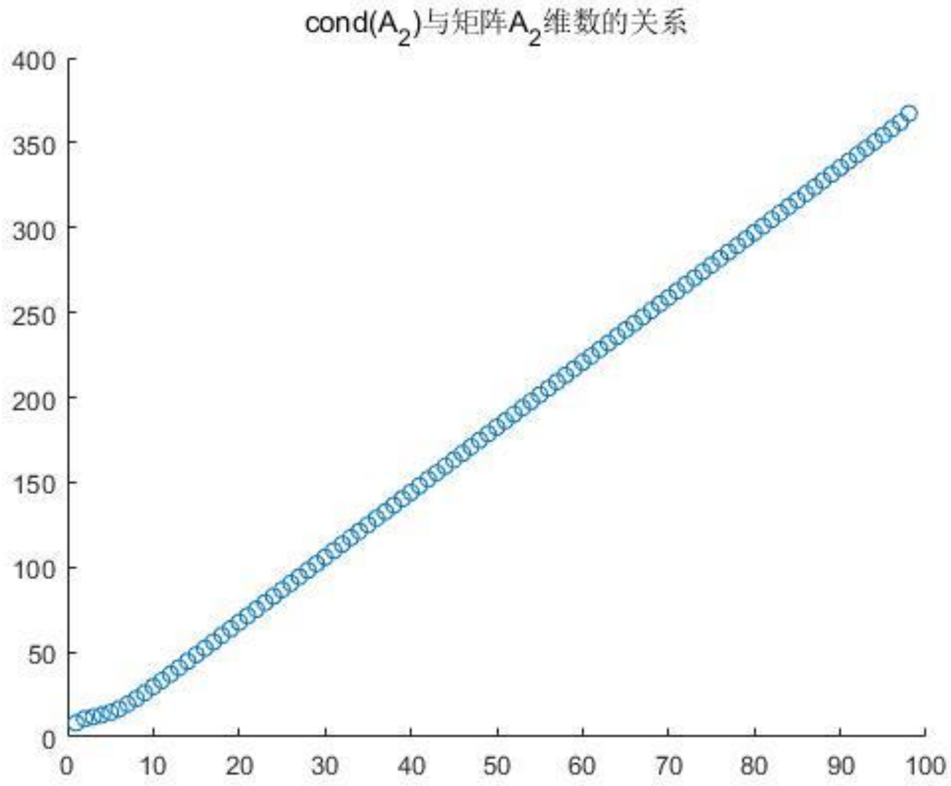
cond(A2)与矩阵A2维数的关系
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

图 3

第二题

由逆推公式$u_{n-2}=\frac{3u_{n-1}-u_n}{2}$，以及初始值$u_n=u_{n-1}=0.1$，可递推计算出$u_1$，在$n=10:100:1000$的计算中，$u_1=1.00000000000000019428902930940239457413 55e-01$，相应的误差$tol=1.3877787807814456755295395851135253906250e-17$，是$2.7755575615628913510590791702270507812500e-17$的一半，稳定性很强，误差得到了有效控制。

相关分析：逆推公式的$A=\begin{pmatrix}1.5 & -0.5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，其特征分解是$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0.7071 & 0.4472\\ 0.7071 & 0.8944\end{pmatrix}$，迭代后误差并没有改变。

第三题

$$
\begin{aligned}
\|x_{m+n}-x_n\| &\ll \|x_{m+n}-x_{m+n-1}\|+\|x_{m+n-1}-x_n\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\| \\
&\ll \alpha^{m+n-1}\|x_1-x_0\|+\alpha^{m+n-2}\|x_1-x_0\|+\cdots+\alpha^{n}\|x_1-x_0\| \\
&\ll \frac{\alpha^{n}-\alpha^{m+n-1}}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|
\end{aligned}
$$

$m\to\infty$, 有

$$
\|x^{\star}-x_n\| \ll \frac{\alpha^{n}}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|
$$

附件 1　MATLAB 代码

第一题

```
clear all;close all;clc
n=100;
for i=3:n
a1=ones(i,1);
a2=-2*ones(i-1,1);
a3=ones(i-2,1);
a=diag(a1)+diag(a2,-1)+diag(a3,-2);
a(2,1)=0;
a_cond(1,i-2)=cond(a);

end
x=1:n-2;
scatter(x,a_cond)
title cond(A_3)与矩阵A_3维数的关系
```

第二题

```
%%
clear all;close all;clc
for j=1:100
    n=100*j;
u(n,1)=0.1;
u(n-1,1)=0.1;
for i=(n-2):-1:1
    u(i,1)=(3*u(i+1,1)-u(i+2,1))./2;
end
tol(j,1)=u(1)-0.1;
end
fprintf('%.40s\n',tol);
fprintf('%.40s\n',u(1));
fprintf('%.40s\n',2*tol(1));
%%
clear all;close all;clc
A=[1.5 -0.5
    1 0];
[V,D]=eig(A)
V^-1
```