微分方程数值解法

第十四周作业

桑明达 15300180062

2018 年 6 月 23 日

1 Douglas-Rachford 格式稳定性分析

证明. 对于 Douglas-Rachford 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$
\begin{aligned}
\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} =& \Delta_h u^{n+1} - \tau\delta_x^2\delta_y^2(u^{n+1}-u^n) \\
& \text{记} \\
u_{i,j}^n =& g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)} \\
\Delta_h u_{i,j}^n =& g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{e^{i\omega_x h_x}+e^{-i\omega_x h_x}}{h_x^2}+\frac{e^{i\omega_y h_y}+e^{-i\omega_y h_y}}{h_y^2}\right) \\
=& -4g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\right)
\end{aligned}
$$

类似，有

$$
\begin{aligned}
\delta_x u_{i,j}^n =& -4g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2} \\
\delta_y u_{i,j}^n =& -4g(n)e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2} \\
\delta_x\delta_y u_{i,j}^n =& 16g(n)e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}
\end{aligned}
$$

代入格式左边，有

$$\text{left} = \frac{g(n+1)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)} - g(n)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}}{\tau}$$

代入格式右边，有

$$\begin{aligned}\text{right} =& -4g(n+1)e^{i(\omega_x x_i+\omega_y y_j)}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\right)\\ &-16\tau(g(n+1)-g(n))e^{i(\omega_y y_i+\omega_y y_j)}\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}\end{aligned}$$

移项化简，有

$$g(n+1) = g(n)\frac{1+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}{1+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}$$

所以，最终得到

$$|G| = \left|\frac{1+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}{1+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}+4\tau\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}+16\tau^2\frac{\sin^2\frac{\omega_x h_x}{2}}{h_x^2}\frac{\sin^2\frac{\omega_y h_y}{2}}{h_y^2}}\right| \le 1$$

所以 Douglas-Rachford 格式无条件稳定。 □

2 P222 2 Leap-frog 格式截断误差以及数值稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) + c\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4)$$

对于 Leap-frog 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$G_{\pm} = i\frac{c\tau}{h}\sin\omega h \pm \sqrt{1-(\frac{c\tau}{h}\sin\omega h)^2}$$

所以若 $1-(\frac{c\tau}{h}\sin\omega h)^2 \ge 0$，则 Leap-frog 格式稳定；否则不一定。 □

3 P222 3 Lax-Wendroff 格式精度以及数值稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + c\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) + O(h^3) + O(\tau h^3)$$

所以，数值格式是关于时间空间二阶精度的。

对于 Lax-Wendroff 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$|G|^2 = 1 - 4r^2\left(1 - r^2\right)\sin^4\frac{\omega h}{2}$$

所以当 $r \leq 0$ 时，格式稳定。 □

4 P222 4 Beam-Warming 格式精度以及稳定性

证明. 截断误差为

$$R_i^n = \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^3) - \frac{ch^2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) + \frac{c^2\tau h}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\tau h^2)$$

对于 Beam-Warming 格式，使用 Von Neumann 传播因子法分析，有

$$|G|^2 = 1 + 4r(r-1)^2(r-2)\sin^4\frac{\omega h}{2}$$

所以若 $r \leq 2$ 时，$G \leq 1$，格式稳定。 □