微分方程数值解法

第八周作业

桑明达 15300180062

2018 年 5 月 10 日

1 P136 附加求 Green 函数

证明. 当 $G(0)=0; G'(1)=0$, 有

$$G(x;x_0)=\begin{cases} x & 0<x<x_0 \\ x_0 & x_0<x<1 \end{cases}$$

□

2 P136 1 求函数 u

证明. 解方程，得

$$u=\frac{1}{k^2}+C_1e^{kix}+C_2e^{-kix}$$

代入 $u(0)=0; u(1)=0$，得

$$C_1=\frac{e^{-ki}-1}{k^2\left(e^{ki}-e^{-ki}\right)}, C_2=\frac{1-e^{ki}}{k^2\left(e^{ki}-e^{-ki}\right)}$$

此时，

$$Lu=-u_{xx}-k^2u=-1<0$$

而

$$u_x=kiC_1\left(e^{kix}-e^{ki(1-x)}\right)$$

即存在极值

$$u\left(0.5\right)=\frac{1}{k^{2}}>0=u\left(0\right)=u\left(1\right)$$

不符合极值原理。

□

3 P136 3 验证函数 u(x)

证明. (1) 对于初值

$$\begin{aligned} u\left(0\right)&=\int_{0}^{1}G\left(0;x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}=0\\ u\left(1\right)&=\int_{0}^{1}G\left(1;x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}=0\end{aligned}$$

(2) 对于 $\forall x\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned} u\left(x\right)=&\int_{x}^{1}G\left(x;x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}+\int_{0}^{x}G\left(x;x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}\\ =&\int_{x}^{1}x\left(1-x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}+\int_{0}^{x}x_{0}\left(1-x\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}\\ \therefore u_{x}=&-\left(1-x\right)xf\left(x\right)+\int_{x}^{1}\left(1-x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}\\ &+x\left(1-x\right)f\left(x\right)+\int_{0}^{x}x_{0}\left(-1\right)f\left(x_{0}\right)\mathrm{d}x_{0}\\ \therefore u_{xx}=&-\left(1-x\right)f\left(x\right)+\left(-x\right)f\left(x\right)\\ =&-f\left(x\right)\end{aligned}$$

即证。

□