微分方程数值解法

第五周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 18 日

1 P84 1 证明引理 2.3.5

证明. $\phi(t,u;\Delta t)$ 满足 Lipschitz 条件，即

$$\begin{aligned}
|\phi(t_n,u_n^\epsilon;\Delta t)-\phi(t_n,u_n;\Delta t)| &\le L\,|u_n^\epsilon-u_n| \\
\left|u_{n+1}^\epsilon-u_{n+1}\right| &= |u_n^\epsilon+\Delta t\phi(t_n,u_n^\epsilon;\Delta t)-u_n-\Delta t\phi(t_n,u_n;\Delta t)| \\
&\le |(u_n^\epsilon-u_n)(1+\Delta tL)| \\
&\le (1+\Delta tL)^{n+1}\,|(u_0^\epsilon-u_0)|
\end{aligned}$$

对于 $0<t\le T=N\Delta t$，有

$$\left|u_{n+1}^\epsilon-u_{n+1}\right| \le e^{LT}\epsilon$$

所以单步方法稳定。

□

2 P85 2 证明定理 2.3.6

证明. $\epsilon_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$, 代入隐式 Euler 格式，有

$$\begin{aligned}
|\epsilon_{n+1}| &= |u(t_{n+1}) - u_{n+1}| \\
&= |u(t_{n+1}) - u_n - \Delta t\phi(t_n, u_n; \Delta t)| \\
&\leq |u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t\phi(t_n, u(t_n); \Delta t)| + |u(t_n) - u_n| \\
&\quad + |\Delta t\phi(t_n, u(t_n); \Delta t) - \Delta t\phi(t_n, u_n; \Delta t)| \\
&= |R_{n+1}| + |\epsilon_n| + \Delta t L |\epsilon_n| \\
&\leq C_R \Delta t^{p+1} + (1 + \Delta t L) |\epsilon_n| \\
&\leq C_R \Delta t^{p+1} \frac{(1 + \Delta t L)^{n+1} - 1}{\Delta t L} + (1 + \Delta t L)^{n+1} |\epsilon_0| \\
&\leq C_R \Delta t^p \frac{e^{L(T-t_0)}}{L} + e^{L(T-t_0)} |\epsilon_0|
\end{aligned}$$

□