

微分方程数值解法

第十二周作业

桑明达 15300180062

2018 年 6 月 8 日

1 P195 式 4.2.16 Richardson

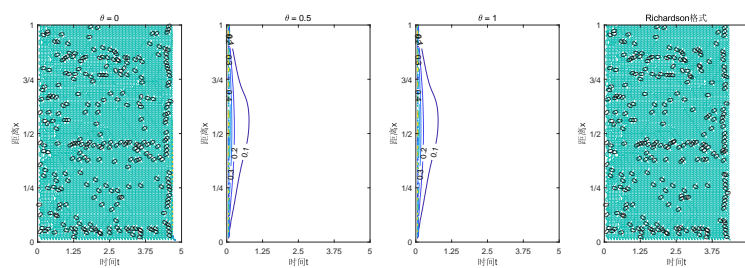
证明.

$$\begin{aligned} R_i^n &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} - a\Delta_h u_i^n - (u_t(t_n, x_i) - au_{xx}(t_n, x_i)) \\ &= \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} - u_t(t_n, x_i) \right) - (a\Delta_h u_i^n - au_{xx}(t_n, x_i)) \\ &= \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_i) + O(\tau^4) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_n, x_i) + O(h^4) \end{aligned}$$

□

2 P195 1 抛物线方程

证明. (1) 解析解未求出, 时间和空间都 100 等分为 101 点, 得到计算结果如图

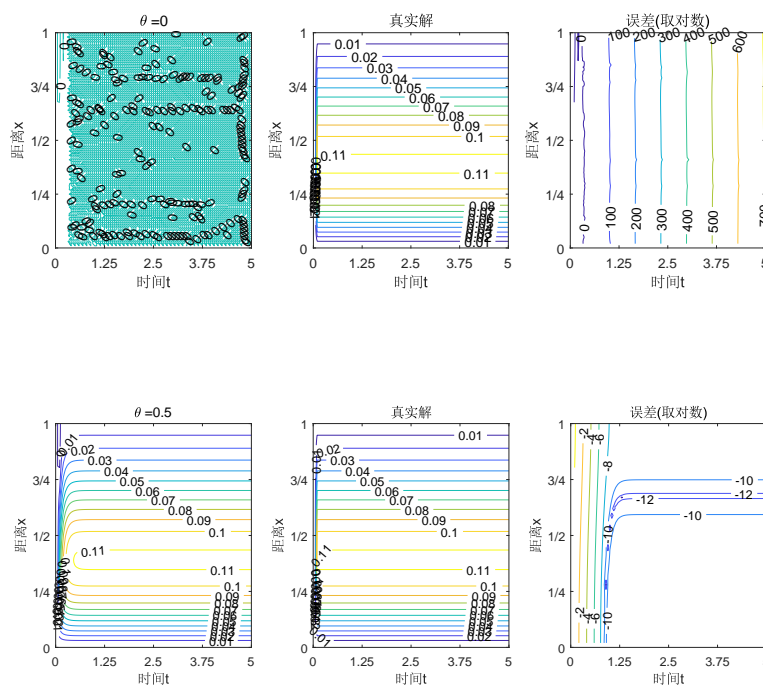


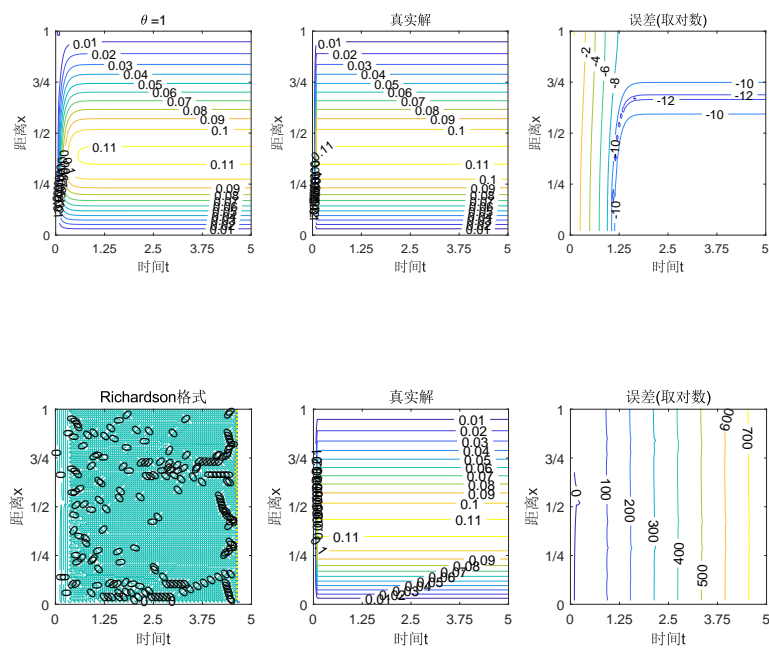
可以看出, $\theta = 0.5$ 或 1 时, 格式结果较好, 其中 $\theta = 1$ 时, 收敛到 0 。

(2) 解析解为

$$u(t, x) = \frac{1 - e^{-\pi^2 t}}{\pi^2} \sin \pi x + \frac{1 - e^{-4\pi^2 t}}{4\pi^2} \sin 2\pi x$$

时间和空间都 100 等分为 101 点, 得到计算结果如图





可以看出, $\theta = 0.5$ 或 1 时, 格式结果较好, 误差很小, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 得到的边值问题的解一致。□