

微分方程数值解法

第四周作业

桑明达 15300180062

2018 年 4 月 13 日

1 P69 1 隐式 Euler 格式是一阶收敛的

证明. $e_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$, 代入隐式 Euler 格式, 有

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= |u(t_{n+1}) - u_n - \Delta t f_{n+1}| \\ &\leq |u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1})| + |u(t_n) - u_n| + |\Delta t f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) - \Delta t f(t_{n+1}, u_n)| \\ &\leq |R_{n+1}| + |e_n| + \Delta t L |e_n| \\ &= \left| \frac{u''(\xi)}{2} \Delta t^2 \right| + (1 + \Delta t L) |e_n| \\ &\leq \frac{M}{2} \Delta t^2 + (1 + \Delta t L) |e_n| \end{aligned}$$

由递推关系, 有

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq \frac{M}{2} \Delta t^2 \frac{(1 + \Delta t L)^{n+1} - 1}{\Delta t L} + (1 + \Delta t L)^{n+1} |e_0| \\ &\leq e^{LT} \left(\frac{M}{2L} \Delta t + |e_0| \right) \end{aligned}$$

□

2 P69 2 四种 Euler 格式计算 $\frac{du}{dt} = au$

如图 1, 四种 Euler 格式都是收敛的。

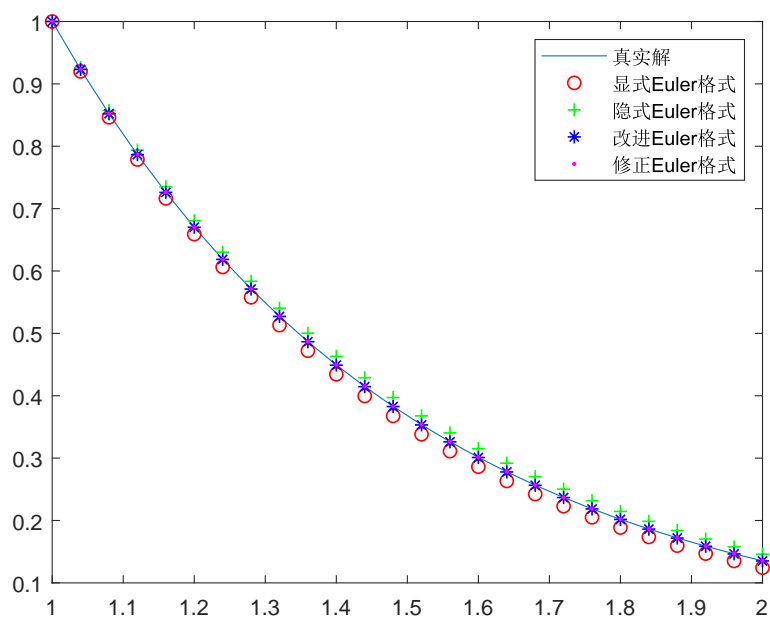


图 1: 四种 Euler 格式计算 $\frac{du}{dt} = au$

3 P73 1 改进, 修正的 Euler 格式的稳定性分析和绝对稳定区间

证明. 对于改进 Euler 格式, 有

$$\begin{aligned} |u_{n+1}^\epsilon - u_{n+1}| &= |u_n^\epsilon - u_n| \left| \frac{1 + \frac{a\Delta t}{2}}{1 - \frac{a\Delta t}{2}} \right| \\ &= |u_0^\epsilon - u_0| \left| \frac{1 + \frac{a\Delta t}{2}}{1 - \frac{a\Delta t}{2}} \right|^n \\ &= \left| \frac{1 + \frac{a\Delta t}{2}}{1 - \frac{a\Delta t}{2}} \right|^n \epsilon \end{aligned}$$

希望初始的舍入误差可以控制, 则

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + \frac{a\Delta t}{2}}{1 - \frac{a\Delta t}{2}} \right| &\leq 1 \\ \left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

对于修正 Euler 格式, 希望初始的舍入误差可以控制, 则

$$\begin{aligned} \left| 1 + a\Delta t \left(1 + \frac{a\Delta t}{2} \right) \right| &\leq 1 \\ \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

□

4 P74 1 Taylor 级数计算 $\frac{du}{dt} = u - u^2$

q=2 时, 有

$$\begin{aligned} F &= (u - u^2)(1 - 2u) \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \left(f + \frac{\Delta t}{2} F \right) \end{aligned}$$

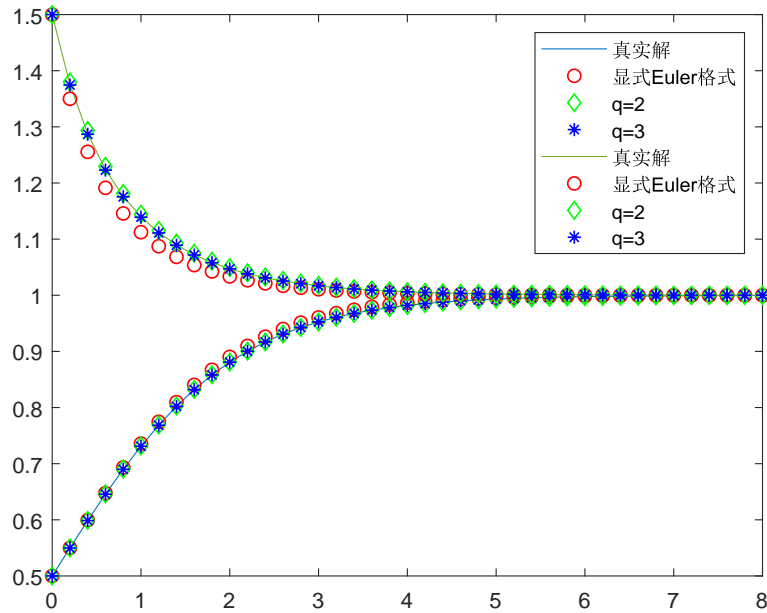


图 2: Taylor 级数计算 $\frac{du}{dt} = u - u^2$

q=3 时，有

$$G = (u - u^2)^2 (-2)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(f + \frac{\Delta t}{2} F \right) + \frac{\Delta t^2 (G + f'_u F)}{6}$$

如图 2

5 P79 2 例 2.3.1

如图 3、图 4

6 P79 3 例 2.2.2

如图 5、图 6

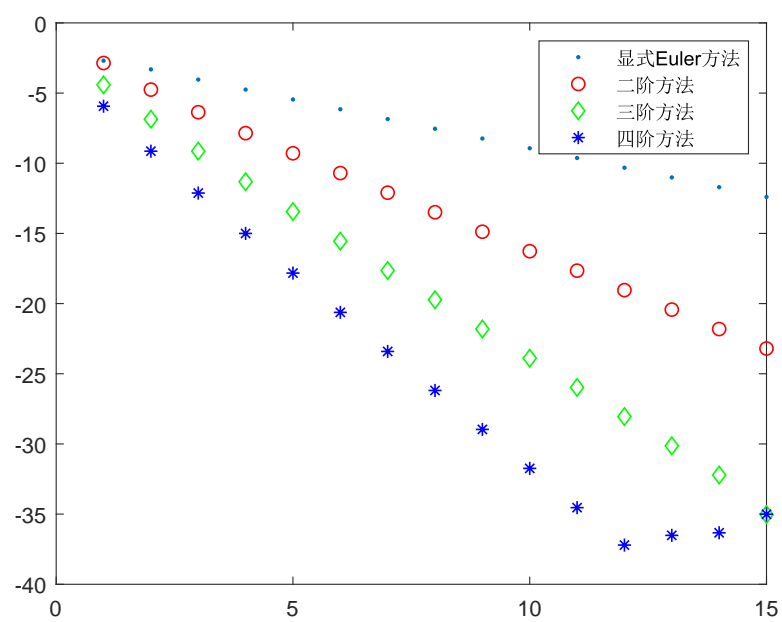


图 3: 收敛阶

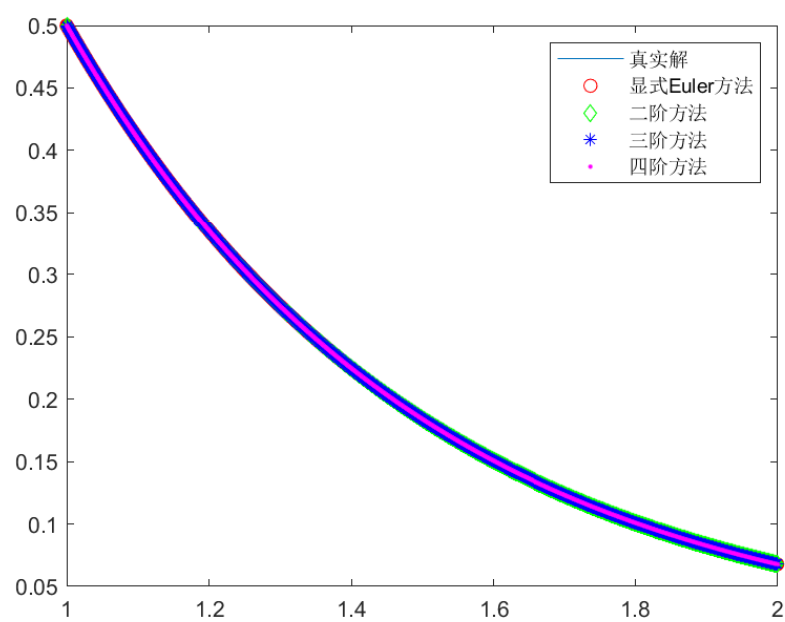


图 4: 所求函数图像

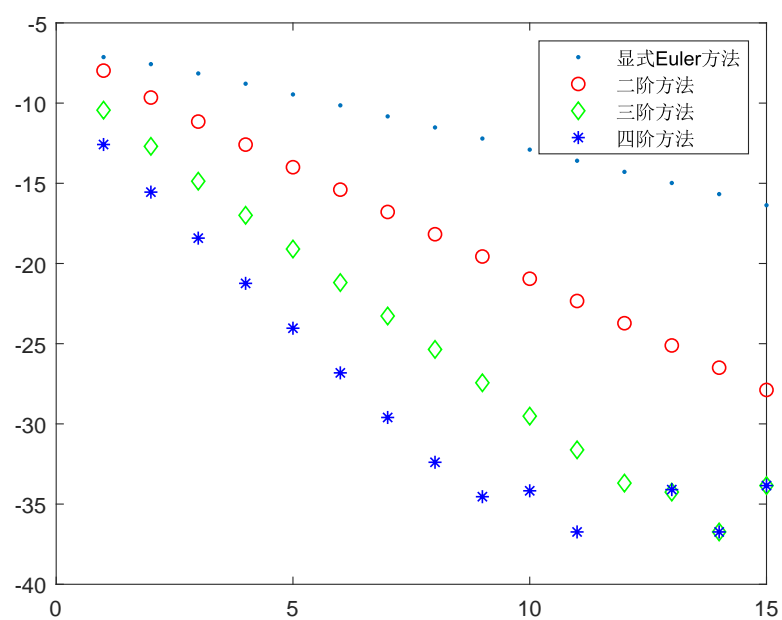


图 5: 收敛阶

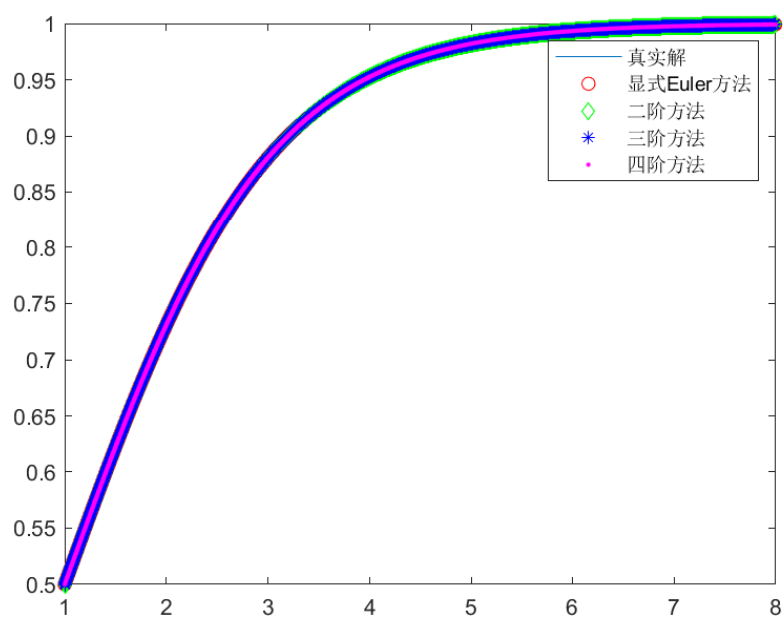


图 6: 所求函数图像