第六章习题

习题 1 给定如下(标量型)差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2\left[\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+(1-2\theta)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right.$$
$$\left.+\theta\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right] \tag{1}$$

试证：当 $\theta=\frac{1}{4}$ 时，差分格式 (1) 与以下 (向量型) 的两层格式等价

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau} = a\frac{w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n+w_{j+1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n+1}}{2h} \\ \frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\tau} = a\frac{v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1}+v_j^n-v_{j-1}^n}{2h} \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$v_j^k = \frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau},\quad w_{j+1/2}^k = a\frac{\left(u_{j+1}^k-u_j^k\right)+\left(u_{j+1}^{k-1}-u_j^{k-1}\right)}{2h} \tag{3}$$

证明：当 $\theta=\frac{1}{4}$ 时，差分格式 (1) 就变为

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}=a^2\left[\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right] \tag{4}$$

首先验证 (2) 的第二个式子.

将 (3) 代入 (2) 的第二个式子, 有

$$\frac{a\frac{\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)}{2h}-a\frac{\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{2h}}{\tau}$$
$$=a\frac{\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\tau}+\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\tau}-\frac{u_{j-1}^n-u_{j-1}^{n-1}}{\tau}}{2h} \tag{5}$$

即

$$
\frac{a}{2h\tau}\left[\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)-\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)-\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)\right]
$$

$$
=\frac{a}{2h\tau}\left[\left(u_j^{n+1}-u_j^n\right)-\left(u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n\right)+\left(u_j^n-u_j^{n-1}\right)-\left(u_{j-1}^n-u_{j-1}^{n-1}\right)\right]
$$

显然，上式为恒等式.

接着验证 (2) 的第一个式子.

将 (3) 代入 (2) 的第一个式子，有

$$
\frac{\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\tau}}{\tau}=a\frac{a\frac{\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)+\left(u_{j+1}^{n-1}-u_j^{n-1}\right)}{2h}+a\frac{\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)+\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)}{2h}}{2h}
-a\frac{a\frac{\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{2h}+a\frac{\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)}{2h}}{2h}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} \\
&= \frac{a^2}{4h^2}\left[\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)+\left(u_{j+1}^{n-1}-u_j^{n-1}\right)+\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)+\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)\right] \\
&\quad -\frac{a^2}{4h^2}\left[\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)+\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)\right] \\
&= a^2\left[\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right]
\end{aligned}
$$

显然上式即为 (4).

综上可知，当 $\theta=\frac{1}{4}$ 时，差分格式 (1) 与 (2) 等价. □

习题 2 证明两层差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau} = a\dfrac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n + w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{2h} \\ \dfrac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}-w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} = a\dfrac{v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1}+v_j^n-v_{j-1}^n}{2h} \end{cases} \tag{6}$$

绝对稳定.

证明: (6) 等价于($r = a\tau/h$ 为网比)

$$\begin{cases} 2v_j^{n+1} - 2v_j^n = r(w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n + w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ 2w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2w_{j-\frac{1}{2}}^n = r(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1} + v_j^n - v_{j-1}^n) \end{cases} \tag{7}$$

下面利用 Fourier 方法分析差分格式 (6) 的稳定性.

以通项

$$v_{j+m}^{n+q} = V_1^{n+q} e^{i\alpha x_{j+m}}, \quad w_{j+m}^{n+q} = V_2^{n+q} e^{i\alpha x_{j+m}}, \quad \alpha = 2p\pi$$

代入 (7),

$$\begin{cases} 2V_1^{n+1} e^{i\alpha x_j} - 2V_1^n e^{i\alpha x_j} = r[V_2^n e^{i\alpha x_{j+\frac{1}{2}}} - V_2^n e^{i\alpha x_{j-\frac{1}{2}}} \\ \qquad\qquad + V_2^{n+1} e^{i\alpha x_{j+\frac{1}{2}}} - V_2^{n+1} e^{i\alpha x_{j-\frac{1}{2}}}] \\ 2V_2^{n+1} e^{i\alpha x_{j-\frac{1}{2}}} - 2V_2^n e^{i\alpha x_{j-\frac{1}{2}}} = r[V_1^{n+1} e^{i\alpha x_j} - V_1^{n+1} e^{i\alpha x_{j-1}} \\ \qquad\qquad + V_1^n e^{i\alpha x_j} - V_1^n e^{i\alpha x_{j-1}}] \end{cases}$$

消去共同因子 $e^{i\alpha x_j}$ 和 $e^{i\alpha x_{j-\frac{1}{2}}}$, 得

$$\begin{cases} 2V_1^{n+1} - 2V_1^n = r[V_2^n e^{i\alpha h/2} - V_2^n e^{i\alpha(-h/2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + V_2^{n+1} e^{i\alpha h/2} - V_2^{n+1} e^{i\alpha(-h/2)}] \\ 2V_2^{n+1} - 2V_2^n = r[V_1^{n+1} e^{i\alpha h/2} - V_1^{n+1} e^{i\alpha(-h/2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + V_1^n e^{i\alpha h/2} - V_1^n e^{i\alpha(-h/2)}] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2V_1^{n+1} - 2V_1^n = rV_2^n[e^{i\alpha h/2} - e^{i\alpha(-h/2)}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + rV_2^{n+1}[e^{i\alpha h/2} - e^{i\alpha(-h/2)}] \\ 2V_2^{n+1} - 2V_2^n = rV_1^{n+1}[e^{i\alpha h/2} - e^{i\alpha(-h/2)}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + rV_1^n[e^{i\alpha h/2} - e^{i\alpha(-h/2)}] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2V_1^{n+1} - i2r\sin(\frac{\alpha h}{2})V_2^{n+1} = 2V_1^n + i2r\sin(\frac{\alpha h}{2})V_2^n \\ -i2r\sin(\frac{\alpha h}{2})V_1^{n+1} + 2V_2^{n+1} = i2r\sin(\frac{\alpha h}{2})V_1^n + 2V_2^n \end{cases}$$

其矩阵形式为 (记 $c = 2r\sin(\frac{\alpha h}{2})$)

$$\begin{pmatrix} 2 & -ic \\ -ic & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & ic \\ ic & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^n \\ V_2^n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -ic \\ -ic & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & ic \\ ic & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^n \\ V_2^n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4+c^2} \begin{pmatrix} 2 & ic \\ ic & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & ic \\ ic & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^n \\ V_2^n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-c^2}{4+c^2} & \frac{i4c}{4+c^2} \\ \frac{i4c}{4+c^2} & \frac{4-c^2}{4+c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^n \\ V_2^n \end{pmatrix}$$

则增长矩阵

$$G(\alpha h) = \begin{pmatrix} \frac{4-c^2}{4+c^2} & \frac{i4c}{4+c^2} \\ \frac{i4c}{4+c^2} & \frac{4-c^2}{4+c^2} \end{pmatrix}$$

容易验证

$$G^HG=\begin{pmatrix}\frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} & \frac{-ic}{1+c^2/4}\\ \frac{-ic}{1+c^2/4} & \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} & \frac{ic}{1+c^2/4}\\ \frac{ic}{1+c^2/4} & \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}$$

$$GG^H=\begin{pmatrix}\frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} & \frac{ic}{1+c^2/4}\\ \frac{ic}{1+c^2/4} & \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} & \frac{-ic}{1+c^2/4}\\ \frac{-ic}{1+c^2/4} & \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}$$

所以 $G(\alpha h)$ 是酉矩阵 (一种正规矩阵), 那么为了证明格式按初值稳定, 只需验证 $G(\alpha h)$ 的谱半径满足 Von Neumann 条件即可.

下面给出估计增长矩阵 $G(\alpha h)$ 的谱半径的两种不同方法.

方法一: 注意到此时 $\|G(\alpha h)\|_2 = \rho(G(\alpha h))$, 又

$$\|G(\alpha h)\|_2 = \sqrt{\rho(G(\alpha h)G^H(\alpha h))} = \sqrt{\rho(\mathrm{I})} = 1,$$

故

$$\rho(G(\alpha h)) = 1,$$

从而该差分方程满足 Von Neumann 条件, 故 (6) 绝对稳定. □

方法二： 增长矩阵 $G(\alpha h)$ 对应的特征方程为

$$(\lambda - \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4})^2 + (\frac{c}{1+c^2/4})^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} \pm \frac{ic}{1+c^2/4}$$

$\Rightarrow$

$$|\lambda| = \sqrt{\left(\frac{1-c^2/4}{1+c^2/4}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+c^2/4}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \qquad (8)$$

由 (8) 知，$\rho(G) = 1$，满足 Von Neumann 条件，所以差分格式 (6) 绝对稳定. □

习题 3 直接用 Fourier 方法证明差分格式

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} \\
= \quad & a^2\left[\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+(1-2\theta)\frac{u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n}}{h^2}\right. \\
&\left.+\theta\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

(1) 当 $\theta \geqslant \frac{1}{4}$ 时绝对稳定;

(2) 当 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{4}$ 时稳定的充要条件是

$$r = \frac{a\tau}{h} < \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}.$$

证明： 令 $u_j^n = v^n e^{i\alpha x_j}$ 代入 (9), 有

$$\frac{(v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1})e^{i\alpha x_j}}{\tau^2}$$
$$= a^2[\theta \frac{v^{n+1}(e^{i\alpha x_{j+1}} - 2e^{i\alpha x_j} + e^{i\alpha x_{j-1}})}{h^2}$$
$$+ (1-2\theta)\frac{v^n(e^{i\alpha x_{j+1}} - 2e^{i\alpha x_j} + e^{i\alpha x_{j-1}})}{h^2} + \theta \frac{v^{n-1}(e^{i\alpha x_{j+1}} - 2e^{i\alpha x_j} + e^{i\alpha x_{j-1}})}{h^2}]$$

约去公共因子得

$$v^2 - 2v + 1 = \frac{a^2\tau^2}{h^2}[2v^2\theta(\cos\alpha h - 1) + 2v(1-2\theta)(\cos\alpha h - 1) + 2\theta(\cos\alpha h - 1)]$$

$\Rightarrow$ (令 $r^2 = \frac{a^2\tau^2}{h^2}$)

$$v^2 - 2v + 1 = -r^2[4\theta\sin^2\frac{\alpha h}{2}v^2 + 4(1-2\theta)\sin^2\frac{\alpha h}{2}v + 4\theta\sin^2\frac{\alpha h}{2}]$$

$\Rightarrow$

$$(1+4\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2})v^2-(2-4(1-2\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2})v+(1+4\theta\sin^2\frac{\alpha h}{2})=0$$

$\Rightarrow$ 特征方程为

$$\lambda^2-\frac{2-4(1-2\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}}{1+4\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}}\lambda+1=0$$

格式稳定的必要条件是 $|\lambda|\leqslant 1$,

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{2-4(1-2\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}}{1+4\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}}\right|\leqslant 2$$

$\Leftrightarrow$

$$-2\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}\leqslant(1-2\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}\leqslant 1+2\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}$$

$\Leftrightarrow$ ($\because 1-2\theta > -2\theta$, 故左边不等式恒成立.)

$$(1-2\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2} \leqslant 1 + 2\theta r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$(1-4\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2} \leqslant 1$$

$\sin^2\frac{\alpha h}{2} = 0$ 时，显然成立。下面分两种情形讨论 $\sin^2\frac{\alpha h}{2} \neq 0$ 时上述不等式成立的条件.

(1) 当 $\theta \geqslant \frac{1}{4}$,

$$(1-4\theta)r^2\sin^2\frac{\alpha h}{2} \leqslant 0 < 1,$$

故格式绝对稳定.

(2) 当 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{4}$, 格式稳定必要条件为

$$(1-4\theta)r^2 \leqslant 1 \Rightarrow r \leqslant \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}$$

当 $r = \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}$ 时，若 $\sin^2\frac{\alpha h}{2} = 1$ 成立，则等号成立，故 $r = \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}$ 不稳定，故稳定的充要条件是

$$r = \frac{a\tau}{h} < \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}.$$

□

习题 4 试求下列混合问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ 0<x<\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=|x-1|, \quad u(0,t)=1 \end{cases} \tag{10}$$

解: 方程 (10) 的特征方向为

$$\tau=(1,1)$$

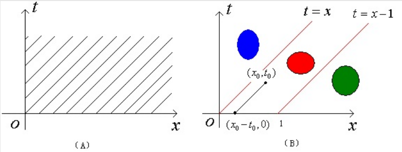
即特征线的斜率

$$\frac{dt}{dx}=1$$

所以有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=0$$

即在特征线上, u 是一个常数 (如下图 (A) 所示).



下面给出 $u(x,t)$ 的函数表达式, 为此, 将 (x,t) 所属的求解区域第一象限分为如下三个子区域 (见上图 (B)):

蓝色区域:

$$\Omega_1 = \{(x,t) : t > 0, 0 < x \leqslant t\}$$

红色区域:

$$\Omega_2 = \{(x,t) : t > 0, t < x \leqslant t+1\}$$

绿色区域:

$$\Omega_3 = \{(x,t) : t > 0, x > t+1\}$$

这时，

- 当 $(x_0, t_0) \in \Omega_1$ 时，过该点且斜率为 1 的特征直线:

$$t = t_0 + (x - x_0)$$

必与 t 轴相交，而 $u(x,t)$ 在该特征线上的函数值都相等，由边值条件 $u(0,t) = 1$ 可得

$$u(x_0, t_0) = 1$$

由 (x_0, t_0) 的任意性知

$$u(x,t) = 1, \quad (x,t) \in \Omega_1$$

- 当 $(x_0, t_0) \in \Omega_2$ 时，过该点的特征线必与 x 轴相交，交点为 $(x_0 - t_0, 0)$，其中 $x_0 - t_0 \in (0, 1]$，因此，有

$$u(x_0, t_0) = u(x_0 - t_0, 0) = |x_0 - t_0 - 1| = 1 - x_0 + t_0$$

由 (x_0, t_0) 的任意性知

$$u(x,t) = 1 - x + t, \quad (x,t) \in \Omega_2$$

- 当 $(x_0, t_0) \in \Omega_3$ 时，过该点的特征线与 x 轴的交点为 $(x_0 - t_0, 0)$，其中 $x_0 - t_0 \in (1, +\infty)$，因此，有

$$u(x_0, t_0) = u(x_0 - t_0, 0) = |x_0 - t_0 - 1| = x_0 - t_0 - 1$$

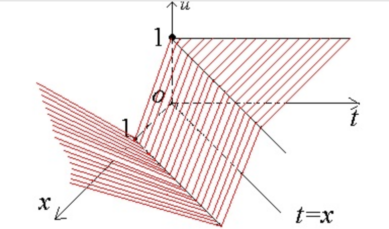
由 (x_0, t_0) 的任意性知

$$u(x, t) = x - t - 1, \quad (x, t) \in \Omega_3$$

综上可得，$u(x, t)$ 的函数表达式为

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \ t \geqslant 0 \\ 1 - x + t, & t < x \leqslant t + 1, \ t \geqslant 0 \\ x - t - 1, & x > t + 1, \ t \geqslant 0 \end{cases}$$

解函数的图像为 (3D 图象)



□

习题 5 分析下列两种差分格式的稳定性.

(1)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0 \tag{11}$$

(2)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \tag{12}$$

解: (1) 记 $r=a\frac{\tau}{h}$, 则 (11) 可以等价地写为

$$u_j^{n+1}=(1+r)u_j^n-ru_{j+1}^n \tag{13}$$

令

$$u_j^n=v_ne^{i\alpha x_j},\quad \alpha=2p\pi \tag{14}$$

将 (14) 代入 (13), 得:

$$v_{n+1}e^{i\alpha x_j} = (1+r)v_n e^{i\alpha x_j} - r v_n e^{i\alpha(x_j+h)}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 可得

$$v_{n+1} = (1+r)v_n - r v_n e^{i\alpha h} = (1+r-re^{i\alpha h})v_n \tag{15}$$

由 (15) 知, 差分格式 (11) 的增长因子为

$$G(ph,\tau) = 1+r-re^{i\alpha h} = (1+r-r\cos\alpha h) - i\cdot r\sin\alpha h$$

差分格式 (11) 稳定的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件:

$$|G(ph,\tau)| \leqslant 1+M\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$|(1+r-r\cos\alpha h) - i\cdot r\sin\alpha h| \leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$(1+r-r\cos\alpha h)^2+r^2\sin^2\alpha h\leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$r\cdot(r+1)\cdot(1-\cos\tau h)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$r\cdot(r+1)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2\leqslant -r$$

$\Leftrightarrow$

$$(a\frac{\tau}{h})^2\leqslant -a\frac{\tau}{h}$$

$\Leftrightarrow$

$$a\leqslant 0 \quad \text{且} \quad \left|a\frac{\tau}{h}\right|\leqslant 1 \tag{16}$$

即 (16) 是差分格式 (11) 稳定的充要条件.

(2) 记 $r = a\frac{\tau}{h}$, 则 (12) 可以等价地写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{17}$$

令

$$u_j^n = v_n e^{i\alpha x_j}, \quad \alpha = 2p\pi \tag{18}$$

将 (18) 代入 (17), 得:

$$v_{n+1} e^{i\alpha x_j} = v_n e^{i\alpha x_j} - \frac{r}{2}(v_n e^{i\alpha(x_j+h)} - v_n e^{i\alpha(x_j-h)})$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 可得

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \frac{r}{2}(v_n e^{i\alpha h} - v_n e^{-i\alpha h}) \\ &= \left[1 - \frac{r}{2}(e^{i\alpha h} - e^{-i\alpha h})\right] v_n \\ &= (1 - i \cdot r \sin\alpha h) \cdot v_n \end{aligned} \tag{19}$$

由 (19) 知, 差分格式 (12) 的增长因子为

$$G(ph,\tau) = 1 - i \cdot r \sin \alpha h$$

差分格式 (12) 稳定的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件:

$$|G(ph,\tau)| \leqslant 1 + M\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$|1 - i \cdot r \sin \alpha h| \leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$1 + r^2 \sin^2 \alpha h \leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2 \sin^2 \alpha h \leqslant 0 \tag{20}$$

显然, (20) 对任意的 $r \neq 0$ 均不成立, 因此, 差分格式 (12) 对任意的 $r \neq 0$ 均不稳定. □

习题 6 证明逼近 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad a \geqslant 0 \tag{21}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0, \quad a < 0 \tag{22}$$

绝对稳定.

解: 记 $r = \frac{\tau}{h}$, 则 (21) 可以等价地写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - aru_j^{n+1} + aru_{j-1}^{n+1} \tag{23}$$

令

$$u_j^n = v_n e^{i\alpha x_j}, \quad \alpha = 2p\pi \tag{24}$$

将 (24) 代入 (23), 得:

$$v_{n+1}e^{i\alpha x_j} = v_n e^{i\alpha x_j} - ar v_{n+1} e^{i\alpha x_j} + ar v_{n+1} e^{i\alpha(x_j - h)}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 可得

$$(1 + ar - are^{-i\alpha h})v_{n+1} = v_n \tag{25}$$

由 (25) 知, 差分格式 (21) 的增长因子为

$$G(ph, \tau) = (1 + ar - are^{-i\alpha h})^{-1}$$

所以差分格式 (21) 稳定的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件:

$$|G(ph, \tau)| \leqslant 1 + M\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{1}{1 + ar - ar\cos\alpha h + i \cdot r\sin\alpha h} \right| \leqslant 1$$

显然当 $a \geqslant 0$ 时, 上式恒成立, 所以格式 (21) 是绝对稳定的.

同理知，差分格式 (22) 的增长因子为

$$G(ph,\tau) = (1 - ar + are^{i\alpha h})^{-1}$$

所以差分格式 (22) 稳定的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件:

$$|G(ph,\tau)| \leqslant 1 + M\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{1}{1 - ar + ar\cos\alpha h + i \cdot ar\sin\alpha h}\right| \leqslant 1$$

显然当 $a < 0$ 时，上式恒成立，所以格式 (22) 是绝对稳定的. □

习题 7 证明逼近 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的隐格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0 \tag{26}$$

绝对稳定.

解: 记 $r = a\frac{\tau}{h}$, 则 (26) 可以等价地写为

$$2u_j^{n+1} = u_j^n - ru_{j+1}^{n+1} + ru_{j-1}^{n+1} \tag{27}$$

令

$$u_j^n = v_n e^{i\alpha x_j}, \quad \alpha = 2p\pi \tag{28}$$

将 (28) 代入 (28), 得:

$$2v_{n+1}e^{i\alpha x_j} = v_n e^{i\alpha x_j} - rv_{n+1}e^{i\alpha(x_j+h)} + rv_{n+1}e^{i\alpha(x_j-h)}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 可得

$$(2 + re^{i\alpha h} - re^{-i\alpha h})v_{n+1} = v_n \tag{29}$$

由 (29) 知, 差分格式 (26) 的增长因子为

$$G(ph,\tau) = (2 - re^{i\alpha h} + re^{-i\alpha h})^{-1} = (2 - i2r\sin\alpha h)^{-1}$$

所以差分格式 (26) 稳定的充要条件是增长因子满足 Von Neumann 条件:

$$|G(ph,\tau)| \leqslant 1 + M\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{1}{2 - i2r\sin\alpha h}\right| \leqslant 1$$

上式显然恒成立, 所以格式 (26) 是绝对稳定的.

习题 8 逼近 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的蛙跳 (Leap frog) 格式是

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \tag{30}$$

证明其稳定条件是 $|a\tau/h| \leqslant 1$.

解: 记 $r = a\frac{\tau}{h}$, 将 (30) 化成等价的两层格式

$$w_j^{n+1} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_{j-1}^n + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_j^n + \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_{j+1}^n$$

其中

$$\begin{cases} w_j^n = (u_j^n, v_j^n)^T \\ v_j^{n+1} = u_j^n \end{cases}$$

令 $w_j^n = w^n e^{i\alpha jh}$, 可得其二阶增长矩阵

$$G(\tau,\alpha) = \begin{bmatrix} -i2r\sin\alpha h & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + 2ir\sin(\alpha h)\lambda - 1 = 0$$

则其特征值为

$$\lambda_{1,2} = -ir\sin\alpha h \pm \sqrt{1 - r^2\sin^2\alpha h}$$

$$1 - r^2\sin^2\alpha h \geqslant 0 \Leftrightarrow |r| \leqslant 1$$

则

$$|\lambda|^2 = r^2\sin^2\alpha h + 1 - r^2\sin^2\alpha h = 1 \tag{31}$$

所以 $|r| \leqslant 1$ 是格式稳定的必要条件.

现在验证 $|r| \leqslant 1$ 是充要条件. 即满足上章定理 4.4 的两个条件. 由 (31) 式知条件 1 是成立的, 现验证条件 2:
因为

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2ir\sin\alpha h$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{1 - r^2\sin^2\alpha h}$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad 1 - |\lambda_1| = 1 - |\lambda_2| = 0$$

所以

$$|1 - |\lambda_1|| + |\lambda_1 - \lambda_2| = 2\sqrt{1 - r^2\sin^2\alpha h} \tag{32}$$

$$G(\theta) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I = \begin{bmatrix} -ir\sin\alpha h & 1 \\ 1 & ir\sin\alpha h \end{bmatrix}$$

因此

$$\left\| G(\theta) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I \right\|_F = \sqrt{2}\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \alpha h} \tag{33}$$

由 (32), (33) 知, 存在 M, 使得

$$\left\| G(\theta) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I \right\|_F \leqslant M(|1 - |\lambda_1|| + |\lambda_1 - \lambda_2|)$$

所以条件 (2) 成立. 所以格式稳定的充要条件是
$|r| = \left|\frac{a\tau}{h}\right| \leqslant 1.$ □

习题 1* 对于一般的 $\theta \in [0,1]$ 将三层差分格式

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} \\
= \quad & a^2\left[\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+(1-2\theta)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right. \\
&\left.+\theta\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right] \qquad (34)
\end{aligned}
$$

试写出其等价的两层差分格式:

$$
\left\{\begin{array}{l}
\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}=a\frac{\beta(w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n)+(2-\beta)(w_{j+1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n+1})}{2h} \\
\frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\tau}=a\frac{\alpha(v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1})+(2-\alpha)(v_j^n-v_{j-1}^n)}{2h}
\end{array}\right. \qquad (35)
$$

其中

$$
\left\{\begin{array}{l}
v_j^k=\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau} \\
w_{j+1/2}^k=a\frac{\alpha\left(u_{j+1}^k-u_j^k\right)+(2-\alpha)\left(u_{j+1}^{k-1}-u_j^{k-1}\right)}{2h}
\end{array}\right. \qquad (36)
$$

α, β 为待定系数.

解: 首先验证 (35) 的第二个式子. 将 (36) 代入 (35) 的左端, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n}}{\tau} \\
&= a\frac{\left[\frac{\alpha\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+(2-\alpha)\left(u_j^{n}-u_{j-1}^{n}\right)}{2h}\right]-\left[\frac{\alpha\left(u_j^{n}-u_{j-1}^{n}\right)+(2-\alpha)\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{2h}\right]}{\tau} \\
&= \frac{a}{2h}\left[\frac{\alpha\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)}{\tau}+\frac{(2-\alpha)\left(u_j^{n}-u_{j-1}^{n}\right)}{\tau}\right] \\
&\quad -\left[\frac{\alpha\left(u_j^{n}-u_{j-1}^{n}\right)}{\tau}+\frac{(2-\alpha)\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{\tau}\right] \\
&= a\frac{\alpha\frac{\left(u_j^{n+1}-u_j^{n}\right)-\left(u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}\right)}{\tau}+(2-\alpha)\frac{\left(u_j^{n}-u_j^{n-1}\right)-\left(u_{j-1}^{n}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{\tau}}{2h} \\
&= a\frac{\alpha(v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1})+(2-\alpha)(v_j^{n}-v_{j-1}^{n})}{2h} = \text{右端}
\end{aligned}
$$

即得 (35) 第二个式子恒成立, 因此要写出 (34) 的等价形式 (35), 只需通过验证 (35) 的第一个式子确定适当的 α, β 即可.

将 (36) 代入 (35) 的第一个式子, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}\\
&= a\frac{a\frac{\beta\alpha\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)+\beta(2-\alpha)\left(u_{j+1}^{n-1}-u_j^{n-1}\right)}{2h}+a\frac{(2-\beta)\alpha\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)+(2-\beta)(2-\alpha)\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)}{2h}}{2h}\\
&\quad - a\frac{a\frac{\beta\alpha\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\beta(2-\alpha)\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)}{2h}+a\frac{(2-\beta)\alpha\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+(2-\beta)(2-\alpha)\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)}{2h}}{2h}\\
&= \frac{a^2}{4h^2}\Big[\beta\alpha\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)+\beta(2-\alpha)\left(u_{j+1}^{n-1}-u_j^{n-1}\right)\\
&\quad +(2-\beta)\alpha\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)+(2-\beta)(2-\alpha)\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)\Big]\\
&\quad -\frac{a^2}{4h^2}\Big[\beta\alpha\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\beta(2-\alpha)\left(u_j^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}\right)\\
&\quad +(2-\beta)\alpha\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+(2-\beta)(2-\alpha)\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)\Big]
\end{aligned}
$$

$$= a^2 \left[\frac{(2-\beta)\alpha}{4} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right.$$
$$+ \frac{\beta\alpha + (2-\beta)(2-\alpha)}{4} \frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2}$$
$$\left. + \frac{\beta(2-\alpha)}{4} \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} \right]$$

因为上式应与 (34) 等价, 所以

$$\begin{cases} \frac{(2-\beta)\alpha}{4} = \theta \\ \frac{\beta\alpha+(2-\beta)(2-\alpha)}{4} = 1 - 2\theta \\ \frac{\beta(2-\alpha)}{4} = \theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha(2-\alpha) = 4\theta \end{cases}$$

特别当 $\theta = 1/4$ 时，可取 $\alpha = 1$; 当 $\theta = 3/16$ 时，可取 $\alpha = 3/2$ 或 $1/2$

综上，(35) 实际可以写为

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau} = a\frac{\alpha(w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n)+(2-\alpha)(w_{j+1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n+1})}{2h} \\ \frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\tau} = a\frac{\alpha(v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1})+(2-\alpha)(v_j^n-v_{j-1}^n)}{2h} \end{cases}$$

其中 $\alpha(2-\alpha) = 4\theta$. □