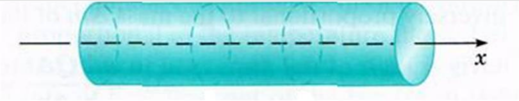
有限差分法

案例 2：均匀直棒热传导问题

1. 均匀直棒热传导问题
   - 背景问题与数学建模
   - 有限差分方法
   - 算法设计与实现
   - 数值实验
   - 理论分析

设一根长为 l 的均匀直棒，水平放置，试建立热流穿过直棒的数学模型。

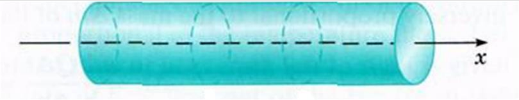
为了叙述的方便，将 x 轴(即横轴) 的正向取为水平方向向右，直棒的左端点为原点，直棒的右端点为l，如下图所示。



下面设温度函数 u 仅与时间变量 t 和空间变量 x 有关，即 $u = u(x,t)$.

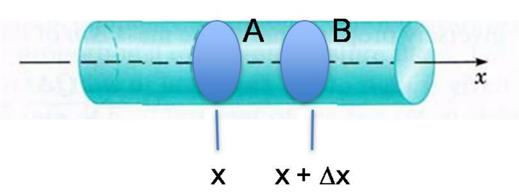
下面基于如下两个基本原理来建立数学模型.

1. Fourier 定律：在导热现象中，单位时间内通过单位截面的热能 (量)，正比例于垂直于该截面方向上的温度变化率 $\partial u/\partial x$，其中比例因子 $k(x)$ 称为热传导系数。
2. 比热容定律：在时间 Δt 内将质量为 m 的物体温度升高 Δu 所吸收的热能为 $c(x)m(x)\Delta u$, 其中 $c(x)$ 为物体材料的比热容。



采用微元法进行分析，考虑微元

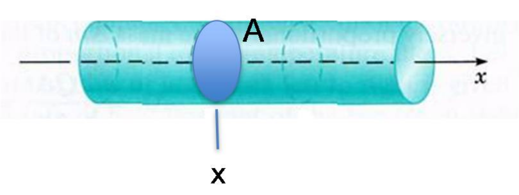
$$[x, x+\Delta x] \times [t, t+\Delta t]$$



由 Fourier 定律，在时间 Δt 内流经截面 A (坐标为 x)处的热能为

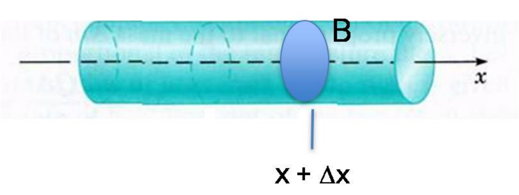
$$H(x) = -\Delta t k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

负号表示热量从温度高的地方流向温度低的地方。



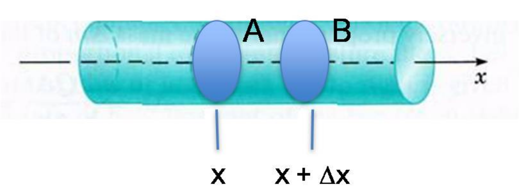
同样，在时间 Δt 内，流经截面 B (坐标为 $x+\Delta x$) 处的热能为

$$H(x+\Delta x) = -k(x+\Delta x)\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)$$



因此，在时间 Δt 内，区间 $[x, x+\Delta x]$ 中热能的变化为

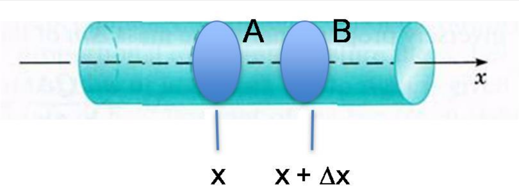
$$
\begin{aligned}
H(x+\Delta x) - H(x) \quad = \quad & \left(-k(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)\right. \\
& \left. + k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)\Delta t \qquad (1)
\end{aligned}
$$



另外，由比热容定律知：在时间 Δt 内，区间 $[x, x+\Delta x]$ 中热能变化为：

$$-c \cdot m \cdot \Delta u = -c(x) \cdot (\rho(x)\Delta x) \cdot \Delta u \tag{2}$$

其中 $\rho(x)$ 为直棒的线密度，负号表示流出。



利用 (1) 和 (2), 由热能守恒定律, 有

$$
\begin{aligned}
&-c(x)\cdot(\rho(x)\Delta x)\cdot\Delta u\\
&\quad=\left(-k(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)\right.\\
&\quad\quad\left.+k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\Delta t
\end{aligned}
$$

两端同时除以$-\Delta t\Delta x$，我们有

$$\frac{c(x)\cdot\rho(x)\cdot\Delta u}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta x}\Big(k(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)$$

取极限$\Delta t,\Delta x\to 0$，可得：

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)$$

如果 k, c, ρ 均为常数，则上述方程可写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (u_t = au_{xx})$$

其中 $a = \frac{k}{c \cdot \rho}$。这就是一维的热传导方程。

根据具体的问题背景，我们还需给出适当的初始时刻的温度分布 $u(x, 0)$ 以及边界条件 $u(0, t)$ 和 $u(l, t)$

一维热传导方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u(0,t) = g_0(t),\ t > 0,\\
&u(l,t) = g_1(t),\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < l.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

若直棒内部还有热源$f(x)$，则方程为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x),\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u(0,t) = g_0(t),\ t > 0,\\
&u(l,t) = g_1(t),\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < l.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

下面，针对如下一维热传导方程初边值问题(抛物方程)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), & (x,t) \in G, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{5}$$

在均匀网格剖分下，介绍有限差分法。

回顾有限差分法的步骤：

1. 网格剖分
2. 导数的差分离散
3. 初边值条件处理

网格剖分

取空间步长和时间步长为 $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{M}$
分别对空间变量 x 所属的区间 $[0, l]$ 和时间变量 t 所属的区间 $[0, T]$ 做如下均匀剖分：

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = l, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$$

其中 $x_i = ih, \ t_k = k\tau$.

用两族平行直线 $x = x_j \ (0, 1, \cdots, N)$ 和 $t = t_k \ (k = 0, 1, \cdots, M)$ 将矩形域 $\bar{G}$ 分割成矩形网格，网格节点集合为

$$\bar{G}_h = G_h \cup \Gamma_h = \{(x_j, t_k) : 0 \le j \le N; 0 \le k \le M\}$$

其中

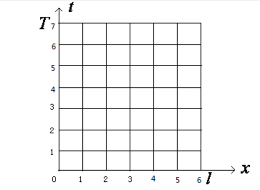
$$G_h = \{(x_j, t_k):\ 0 < j < N;\ 0 < k \le M\}$$

为网格内节点集合.

$$\Gamma_h = \{(x_j, t_k):\ j = 0, N; k = 1, \cdots, M\} \bigcup \{(x_j, t_0):\ j = 0, \cdots, N\}$$

为网格边界节点集合.

下图为当 $N = 6$ 和 $M = 7$ 时 (它们分别是沿 x 和 t 方向的剖分段数) 的矩形网格剖分图.



导数的差分离散与初边值条件处理

用 u_j^k 表示差分解在网格节点 (x_j, t_k) 处的分量，下面采用逐层计算的思想建立差分方程 (格式).
设从第 0 个时间层到第 $k \geq 0$ 个时间层的差分解分量

$$u_j^i,\ i = 0, \cdots, k;\ j = 0, \cdots, N$$

已经求得.

下面通过对 “适当内节点” 处的微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)$$

进行差分离散,
建立第 $k+1$ 个时间层上的 差分解分量

$$u_j^{k+1},\quad j = 1, \cdots, N-1$$

所满足的关于该内节点的差分方程 (格式).

若上述差分格式中仅涉及当前 (第$k+1$个) 时间层和前一个 (第 k 个) 时间层上差分解分量

$$u_j^k,\ j=0,\cdots,N$$

则称该差分格式为二层格式.

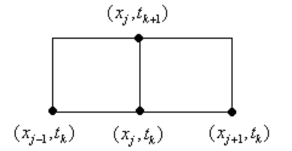
若上述差分格式中除了涉及当前和第 k 个时间层的差分解分量外, 还涉及第$k-1$ 个时间层的差分解分量

$$u_j^{k-1},\ j=0,\cdots,N$$

则称该差分格式为三层格式.

下面首先介绍三种常用的二层格式 (单步法).

(一) 向前差分格式



这时将前面所述的“适当内节点”选为网格节点 (x_j, t_k), 则在该节点处的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_j,t_k)} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j,t_k)} + f(x_j) \tag{6}$$

对 (6) 用直接差分方法进行近似:

$$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_j,t_{k+1}) - u(x_j,t_k)}{\tau} \quad \text{(向前差商)} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{j+1},t_k) - 2u(x_j,t_k) + u(x_{j-1},t_k)}{h^2} \quad \text{(二阶中心差商)} \tag{8}$$

记 $f_j = f(x_j)$，将 (7) 和 (8) 代入 (6), 则有关于 (x_j, t_{k+1}) 的向前差分格式,

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j \tag{9}$$

在 (9) 两边同乘 τ, 整理可得

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j \tag{10}$$

其中，$r = a\frac{\tau}{h^2}$ 称为网格比 (简称网比).

利用(10), 并对初边值条件进行处理, 有

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j, \ j = 1, \cdots, N-1; \ k = 0, \cdots, M-1 \\ u_j^0 = u(x_j, 0) = \phi(x_j), \ j = 1, \cdots, N-1 \\ u_0^k = u(0, t_k) = 0, \ u_N^k = u(l, t_k) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases} \tag{11}$$

令 $N-1$ 维 (第 k 个网格层) 差分解向量和右端向量

$$U^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k)^T,\quad F=(f_1,f_2,\cdots,f_{N-1})^T$$

则向前差分格式 (10) 的矩阵表示为：

$$U^{k+1}=A_0U^k+\tau F \tag{12}$$

其中

$$A_0=\begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

由此可见:

1. 利用 (11) 可逐层求出差分解分量

   在 (11) 中, 取 $k=0$, 利用初值 $u_j^0=\phi(x_j)$ $(j=1,\cdots,N-1)$ 和边值 $u_0^0=u_N^0=0$, 可算出第一层的 u_j^1 $(j=1,\cdots,N-1)$;

   在 (11) 中, 取 $k=1$, 利用 u_j^1 $(j=1,\cdots,N-1)$ 和边值 $u_0^1=u_N^1=0$, 可算出第二层的 u_j^2 $(j=1,\cdots,N-1)$;

   $$\cdots\cdots$$

2. 向前差分格式 (11) 是一种显格式, 即为了求出差分解, 无需求解线性代数方程组.

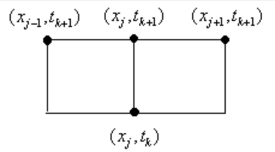
引入向前差分算子 $L_h^{(1)}$, 它满足

$$L_h^{(1)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}.$$

可以证明向前差分格式 (9) 的截断误差为

$$R_j^k(u) = O(\tau + h^2).$$

(二) 向后差分格式



这时将“适当内节点”选为网格节点 (x_j, t_{k+1})，则在该节点处的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_j, t_{k+1})} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j, t_{k+1})} + f(x_j) \tag{13}$$

对 (13) 用直接差分方法进行近似：

$$\frac{\partial u(x_j, t_{k+1})}{\partial t} \approx \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} \quad \text{(向后差商)} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1})}{h^2} \text{(二阶中心差商)} \tag{15}$$

将 (14) 和 (15) 代入 (13), 则有关于 (x_j, t_{k+1}) 的向后差分格式,

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j \tag{16}$$

在 (16) 两边同乘 τ, 整理可得

$$-ru_{j-1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j \tag{17}$$

利用(17), 并对初边值条件进行处理, 有

$$\begin{cases} -ru_{j-1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j, j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ u_j^0 = u(x_j, 0) = \phi(x_j),\ j = 1, \cdots, N-1 \\ u_0^k = u(0, t_k) = 0,\ u_N^k = u(l, t_k) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases} \tag{18}$$

向后差分格式 (17) 的矩阵表示为

$$A_1 U^{k+1} = U^k + \tau F \tag{19}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

由此可见:

1. 利用 (18) 可逐层求出差分解分量
2. 向后差分格式 (18) 是一种隐格式, 即为了求解第 $k+1$ 层上的差分解分量, 需求解线性代数方程组 (19). 注意 (19) 的系数矩阵 A_1 为三对角阵 (对角占优), 因此可以用 "追赶法" 进行求解, 其运算复杂度为 $O(N)$.

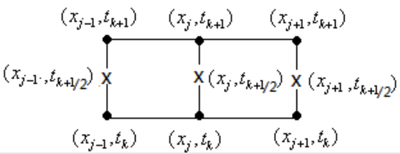
引入向后差分算子 $L_h^{(2)}$, 它满足

$$L_h^{(2)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2}$$

可以证明向后差分格式 (17) 的截断误差为

$$R_j^k(u) = O(\tau + h^2).$$

(三) 六点对称格式 (Crank-Nicholson格式)



这时将“适当内节点”选为“网格节点” $(x_j, t_{k+1/2})$ (网格节点 (x_j, t_k) 和 (x_j, t_{k+1}) 的中点), 则在该节点处的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_j,t_{k+1/2})} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j,t_{k+1/2})} + f(x_j) \tag{20}$$

对 (20) 用直接差分方法进行近似:

$$\frac{\partial u(x_j, t_{k+1/2})}{\partial t} \approx \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} \quad \text{(一阶中心差商)} \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1/2})}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{j+1},t_{k+1/2})-2u(x_j,t_{k+1/2})+u(x_{j-1},t_{k+1/2})}{h^2}$$

由此并利用

$$u(x_{j+m},t_{k+1/2}) \approx \frac{u(x_{j+m},t_k)+u(x_{j+m},t_{k+1})}{2},\quad m=0,\pm 1$$

可得

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_{k+1/2})}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}\right] \tag{22}$$

将 (21) 和 (22) 代入 (20), 则可得关于 (x_j,t_{k+1}) 的六点对称格式,

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}\right]+f_j \tag{23}$$

在 (23) 两边同乘 τ, 整理可得

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^{k}+(1-r)u_j^{k}+\frac{r}{2}u_{j+1}^{k}+\tau f_j \tag{24}$$

利用(24), 并对初边值条件进行处理, 有

$$\begin{cases} -\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^{k}+(1-r)u_j^{k}+\frac{r}{2}u_{j+1}^{k}+\tau f_j \\ \qquad\qquad j=1,\cdots,N-1;\, k=0,\cdots,M-1 \\ u_j^0=u(x_j,0)=\phi(x_j),\ j=1,\cdots,N-1 \\ u_0^k=u(0,t_k)=0,\ u_N^k=u(l,t_k)=0,\ k=0,1,\cdots,M \end{cases} \tag{25}$$

注: 六点对称格式也可通过将向前、向后差分格式 (9) 和 (16) 做算术平均得到.

六点对称格式 (24) 的矩阵表示为

$$A_1 U^{k+1} = A_0 U^k + \tau F \tag{26}$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

由此可知：

1. 利用 u_j^0 和边值便可逐层求得 u_j^k.
2. 六点对称格式 (25) 也是一种隐格式.

引入六点对称差分算子 $L_h^{(3)}$, 它满足

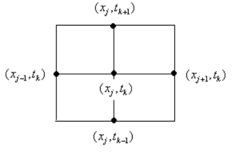
$$L_h^{(3)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}\right]$$

可以证明六点对称格式 (23) 的截断误差为

$$R_j^k(u) = O(\tau^2 + h^2).$$

下面介绍一种三层格式(多步法).

(四) Richardson格式



这时将前面所述的"适当内节点"选为网格节点 (x_j, t_k), 则在该节点处的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_j,t_k)} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j,t_k)} + f(x_j) \tag{27}$$

它是建立Richardson 差分格式的源头.

对 (27) 用直接差分方法进行近似:

$$\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_j,t_{k+1}) - u(x_j,t_{k-1})}{2\tau} \quad \text{(一阶中心差商)} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j,t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{j+1},t_k) - 2u(x_j,t_k) + u(x_{j-1},t_k)}{h^2} \quad \text{(二阶中心差商)} \tag{29}$$

将 (28) 和 (29) 代入 (27), 则有关于 (x_j, t_{k+1}) 的 Richardson 差分格式,

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j \tag{30}$$

在 (30) 两边同乘 τ, 整理可得

$$u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j \tag{31}$$

利用(31), 并对初边值条件进行处理, 有

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ u_j^0 = u(x_j, 0) = \phi(x_j), \; j = 1, \cdots, N-1 \\ u_0^k = u(0, t_k) = 0, \; u_N^k = u(l, t_k) = 0, \; k = 0, 1, \cdots, M \end{cases} \tag{32}$$

Richardson 差分格式 (31) 的矩阵表示为

$$U^{k+1} = A_1 U^k + U^{k-1} + 2\tau F \tag{33}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4r & 2r & & & \\ 2r & -4r & 2r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2r & -4r & 2r \\ & & & 2r & -4r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

由此可见:

1. 为了使计算能够逐层进行, 除初值 u_j^0 外, 还要用到 u_j^1, 这可以用前面介绍的两层格式计算.
2. Richardson 差分格式 (32) 是一种显格式.

引入 Richardson 差分算子 $L_h^{(4)}$, 它满足

$$L_h^{(4)} u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$$

可以证明 Richardson 差分格式 (30) 的截断误差为

$$R_j^k(u) = O(\tau^2 + h^2).$$

习题 1 导出向前（向后）差分格式 (16), 六点对称格式 (23) 及 Richardson 差分格式 (30) 的截断误差.

习题 2 pp.112 3.1.2

注: 除了以上四种差分格式外, 还可以作出许多逼近 (5) 的差分格式, 但并不是每一个差分格式都是可用的. 衡量一个差分格式是否经济适用, 主要由以下几个方面的因素决定:

- 计算简单.

  显格式 (计算最简单): 向前差分格式, Richardson 差分格式;

  隐格式 (若系数矩阵为三对角矩阵, 计算也简单): 向后差分格式, Richardson 差分格式.

- 收敛性和收敛速度.

  截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$: 六点对称格式, Richardson 格式;

  截断误差阶为 $O(\tau + h^2)$: 向前差分格式, 向后差分格式.

- 稳定性.

首先考察 Richardson 差分格式是否按初值稳定.

取关于空间变量 x 所属区域 $[0, l]$ 上的剖分段数 $N = 2M$, 记差分解序列 (或差分解网函数) $\{u_j^k\}$, $\{v_j^k\}$ 分别满足

$$
\begin{cases}
u_j^{k+1} = 2r(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j \\
\qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\
u_j^0 = u(x_j, 0) = 0, \ j = 1, \cdots, N-1 \\
u_0^k = u(0, t_k) = 0, \ u_N^k = u(l, t_k) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M
\end{cases}
$$

和

$$
\begin{cases}
v_j^{k+1} = 2r(v_{j+1}^k - 2v_j^k + v_{j-1}^k) + v_j^{k-1} + 2\tau f_j \\
\qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\
v_j^0 = v(x_j, 0) = \delta_{jM}\varepsilon, , \ j = 1, \cdots, N-1 \\
v_0^k = v(0, t_k) = 0, \ v_N^k = v(l, t_k) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M
\end{cases}
$$

令内节点 (x_j, t_k) 处的误差分量 $e_j^k = v_j^k - u_j^k$, 则误差序列 $\{e_j^k\}$ 满足如下差分方程:

$$\begin{cases} e_j^{k+1} = 2r(e_{j+1}^k - 2e_j^k + e_{j-1}^k) + e_j^{k-1} \\ \qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ e_j^0 = \delta_{jM}\varepsilon,, \ j = 1, \cdots, N-1 \\ e_0^k = 0, \ e_N^k = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases}$$

假设整个计算的过程均是精确的, 且设$e_j^{-1} = 0$, 则当 $r = 1/2$ 时通过计算可知初始误差的传递情况如下表所示:

k \ j	$M-3$	$M-2$	$M-1$	M	$M+1$	$M+2$	$M+3$
0	0	0	0	ε	0	0	0
1	0	0	ε	-2ε	ε	0	0
2	0	ε	-4ε	7ε	-4ε	ε	0
3	ε	-6ε	17ε	-24ε	17ε	-6ε	ε
4	-8ε	31ε	-68ε	89ε	-68ε	31ε	-8ε
5	49ε	-144ε	273ε	388ε	273ε	-144ε	49ε
6	-260ε	641ε	-1096ε	1311ε	-1096ε	641ε	-260ε

从上表可知，误差随着 $k \to \infty$ 无限增长，所以该差分格式是不稳定的. 实际上对于任何 $r > 0$ 都有类似的现象，所以该格式是绝对不稳定的.

由此可知，虽然 Richardson 格式是显格式，且其截断误差的阶为 $O(\tau^2 + h^2)$，但从稳定性方面来看，它是不可用的.

注： 当 $k \to \infty$ 时，意味着 $M \to \infty$，因此 $\tau = O(M^{-1})) \to 0$. 由此并注意 $r = a\frac{\tau}{h^2} = 1/2$ 为一固定值，所以有 $h \to 0$.

接下来考察向前差分格式是否稳定

同样取关于空间变量 x 所属区域 $[0, l]$ 上的剖分段数 $N = 2M$, 记差分解序列 (或差分解网函数) $\{u_j^k\}$, $\{v_j^k\}$ 分别满足

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j, \\ \qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ u_j^0 = u(x_j, 0) = 0, \ j = 1, \cdots, N-1 \\ u_0^k = u(0, t_k) = 0, \ u_N^k = u(l, t_k) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} v_j^{k+1} = rv_{j-1}^k + (1-2r)v_j^k + rv_{j+1}^k + \tau f_j, \\ \qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ v_j^0 = v(x_j, 0) = \delta_{jM}\varepsilon, , \ j = 1, \cdots, N-1 \\ v_0^k = v(0, t_k) = 0, \ v_N^k = v(l, t_k) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases}$$

那么此时误差序列 $\{e_j^k\}$ 满足如下差分方程:

$$\begin{cases} e_j^{k+1} = re_{j-1}^k + (1-2r)e_j^k + re_{j+1}^k, \ j = 1, \cdots, N-1; k = 0, \cdots, M-1 \\ e_j^0 = \delta_{jM}\varepsilon, , \ j = 1, \cdots, N-1 \\ e_0^k = 0, \ \ e_N^k = 0, \ \ k = 0, 1, \cdots, M \end{cases}$$

同样取 $r = 1/2$, 初始误差的传递情况如下表所示:

k \ j	$M-3$	$M-2$	$M-1$	M	$M+1$	$M+2$	$M+3$
0	0	0	0	ε	0	0	0
1	0	0	0.5ε	0	0.5ε	0	0
2	0	0.25ε	0	0.5ε	0	0.25ε	0
3	0.125ε	0	0.375ε	0	0.375ε	0	0.125ε
4	0	0.25ε	0	0.375ε	0	0.25ε	0

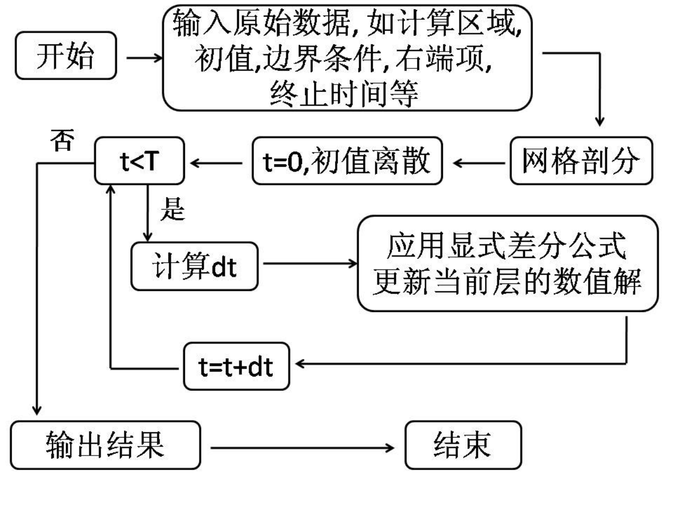
由上表可知, 误差逐渐衰减. 因此当 $r = 1/2$ 时向前差分格式是可取的.

考虑如下热传导问题差分离散的算法实现，

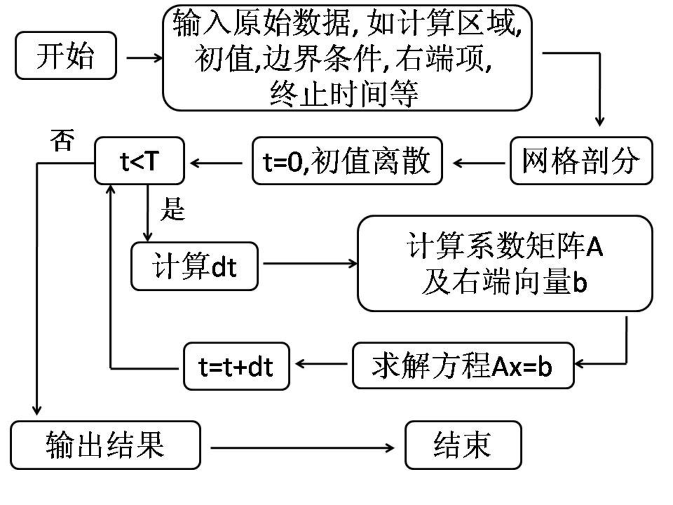
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\\
&u(L,t) = u_L(x), \quad u(R,t) = u_R(x),\\
&u(x,0) = u_0(x).
\end{aligned}
$$

首先给出算法的流程，时间离散方面分别考虑显式、隐式和Crank-Nicolson方法，然后给出实现算法的Matlab代码。

显式算法流程


开始
输入原始数据，如计算区域，初值，边界条件，右端项，终止时间等
网格剖分
t=0,初值离散
t<T
否
是
计算dt
应用显式差分公式更新当前层的数值解
t=t+dt
输出结果
结束

隐式算法流程


开始
输入原始数据，如计算区域，初值，边界条件，右端项，终止时间等
网格剖分
t=0,初值离散
t<T
否
是
计算dt
计算系数矩阵A
及右端向量b
求解方程Ax=b
t=t+dt
输出结果
结束

主测试 matlab 脚本程序

```
%% 一维热传导方程有限差分方法主测试脚本 main_test.m
%   依次测试:
%           向前差分
%           向后差分
%           六点对称格式
%   并可视化数值计算结果。
%
% 作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

td = model_data(); %模型数据结构体

% 向前差分格式
[X,T,U] = heat_equation_fd1d(100,10000,td,'forward');
showvarysolution(X,T,U);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解

% 向后差分格式
[X,T,U] = heat_equation_fd1d(100,100,td,'backward');
showvarysolution(X,T,U);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解
```

主测试 matlab 脚本程序 II

```
% 六点对称格式，即 Crank-Nicholson 格式
[X,T,U] = heat_equation_fd1d(100,100,td,'crank-nicholson');
showvarysolution(X,T,U);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解
```

有限差分方法实现

```
function [X,T,U] = heat_equation_fd1d(NS,NT,td,method)
%% HEAT_EQUATION_FD1D 利用有限差分方法计算一维热传导方程
%
%    输入参数：
%        NT 整型，时间剖分段数
%        NS 整型，空间剖分段数
%        td 结构体，待求解的微分方程模型的已知数据，
%                    如边界、初始、系数和右端项等条件
%        method 字符串，代表求解所用离散格式
%            F 或 f 或 forward :  向前差分格式
%            B 或 b 或 backward :  向后差分格式
%            CN 或 cn 或 crank-nicholson 或 Crank-Nicholson :
%                    -- 六点对称格式( Crank-Nicholson 格式)
%    输出参数：
%        X 长度为的列向量，空间网格剖分N
%        T 第度为的行向量，时间网格剖分M
%        U N*M 矩阵，U(:,i) 表示第  i 个时间层网格部分上的数值解
%
%    作者：魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>
```

有限差分方法实现 II

```
[X,h] = td.space_grid(NS);
[T,tau] = td.time_grid(NT);
N = length(X);M = length(T);
r = td.a*tau/h/h;
if r >= 0.5 && ismember(method,{'F','f','forward'})
    error('时间空间离散不满足向前差分的稳定条件！')
end
U = zeros(N,M);
U(:,1) = td.u_initial(X);
U(1,:) = td.u_left(T);
U(end,:) = td.u_right(T);
switch(method)
    case {'F','f','forward'}
        forward();
    case {'B','b','backward'}
        backward();
    case {'CN','cn','crank-nicholson','Crank-Nicholson'}
        crank_nicholson();
    otherwise
        disp(['Sorry, I do not know your ', method]);
end
```

有限差分方法实现 III

```
%% 向前差分方法
    function forward()
        d = 1 - 2*ones(N-2,1)*r;
        c = ones(N-3,1)*r;
        A = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);
        for i = 2:M
            RHS = tau*td.f(X,T(i));
            RHS(2) = RHS(2) + r*U(1,i-1);
            RHS(end-1) = RHS(end-1) + r*U(end,i-1);
            U(2:end-1,i)=A*U(2:end-1,i-1)+ RHS(2:end-1);
        end
    end
%% 向后差分方法
    function backward()
        d = 1 + 2*ones(N-2,1)*r;
        c = -ones(N-3,1)*r;
        A = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);
        for i = 2:M
            RHS = tau*td.f(X,T(i));
            RHS(2) = RHS(2) + r*U(1,i);
            RHS(end-1) = RHS(end-1) + r*U(end,i);
```

有限差分方法实现 IV

```
            U(2:end-1,i)=A\(U(2:end-1,i-1)+ RHS(2:end-1));
        end
    end
%% 六点对称格式, 即 Crank_Nicholson 格式
    function crank_nicholson()
        d1 = 1 + ones(N-2,1)*r;
        d2 = 1 - ones(N-2,1)*r;
        c = 0.5*ones(N-3,1)*r;
        A1 = diag(-c,-1) + diag(-c,1)+diag(d1);
        A0 = diag(c,-1) + diag(c,1) + diag(d2);
        for i = 2:M
            RHS = tau*td.f(X,T(i));
            RHS(2) = RHS(2) + 0.5*r*(U(1,i)+U(1,i-1));
            RHS(end-1) = RHS(end-1) + ...
                0.5*r*(U(end,i)+U(end,i-1));
            U(2:end-1,i)=A1\(A0*U(2:end-1,i-1)+ RHS(2:end-1));
        end
    end
end
```

可视化

```
function showvarysolution(X,T,U)
%% SHOWVARYSOLUTION 显示数值解随着时间的变化
%
% 输入参数:
%       X 长度为的列向量, 空间网格剖分N
%       T 第度为的行向量, 时间网格剖分M
%       U N*M 矩阵, U(:,i) 表示第  i 个时间层网格部分上的数值解
%
%  作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

M = size(U,2);
figure
xlabel('X');
ylabel('U');
s = [X(1),X(end),min(min(U)),max(max(U))];
axis(s);
for i = 1:M
   plot(X,U(:,i));
   axis(s);
   pause(0.0001);
```

可视化 II

```
    title(['T=',num2str(T(i)),'␣时刻的温度分布'])
end

function showsolution(X,T,U)
%%  SHOWSOLUTION  以二元函数方式显示数值解
%
%  输入参数:
%         X 长度为的列向量, 空间网格剖分N
%         T 第度为的行向量, 时间网格剖分M
%         U N*M 矩阵, U(:,i) 表示第  i 个时间层网格部分上的数值解
%
%   作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

[x,t] = meshgrid(X,T);
mesh(x,t,U');
xlabel('X');
ylabel('T');
zlabel('U(X,T)');

end
```

算例 1：我们利用有限差分法去求解

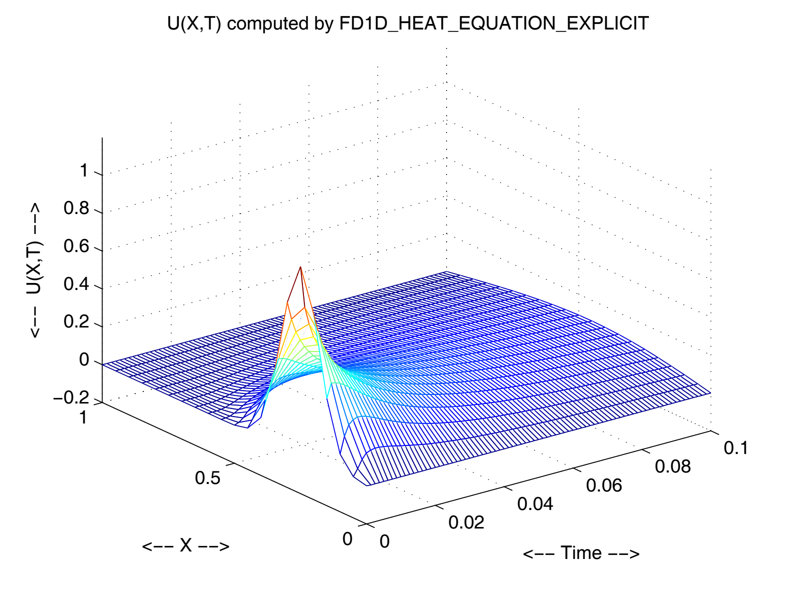
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = e^{-\frac{(x-0.25)^2}{0.01}} + 0.1\sin(20\pi x).
\end{aligned}
$$

其中系数$k = 1$.

模型数据的 Matlab 实现如下：

```
function td = model_data()
% MODEL_DATA 模型数据

td = struct('u_initial',@u_initial,'u_left',@u_left,...
    'u_right',@u_right,'f',@f,'time_grid',@time_grid,...
    'space_grid',@space_grid,'a',1);

    function [T,tau] = time_grid(NT)
        T = linspace(0,0.1,NT);
        tau = 0.1/NT;
```

```
    end
    function [X,h] = space_grid(NS)
        X = linspace(0,1,NS)';
        h = 1/NS;
    end
    function u = u_initial(x)
        u = exp(-(x-0.025).^2/0.01)+0.1*sin(20*pi*x);
    end

    function u = u_left(t)
        u = zeros(size(t));
    end

    function u = u_right(t)
        u = zeros(size(t));
    end

    function f = f(x,t)
        f = zeros(size(x));
    end
end
```


U(X,T) computed by FD1D_HEAT_EQUATION_EXPLICIT
<-- U(X,T) -->
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
1
0.5
0
<-- X -->
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
<-- Time -->

上机实验题目

pp.112 3.1.1

类似于案例 1 中关于两点边值问题（椭圆型微分方程）的有限差分法：

$$\text{相容性}+\text{稳定性} \Rightarrow \text{收敛性}$$

前面格式均满足相容性.

下面重点讨论稳定性.

两种稳定性

记 $N-1$ 维向量

$$U^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k)^T,\quad F=(f_1,f_2,\cdots,f_{N-1})^T$$

前面的二层差分格式可统一表示为:

$$AU^{k+1}=BU^k+\tau F \tag{34}$$

其中 A 和 B 是 $(N-1)\times(N-1)$ 矩阵, 且 A 可逆.
记矩阵 $C=A^{-1}B$, 则 (34) 可以等价的写成

$$U^{k+1}=CU^k+\tau A^{-1}F \tag{35}$$

例如: 对于向前差分格式: $A = I$,

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \\
&= (1-2r)I + rS
\end{aligned}
$$

其中

$$
S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}
$$

故对于向前差分格式

$$C = (1-2r)I + rS$$

类似:

对于向后差分格式:

$$A = (1+2r)I - rS,\ B = I,\ C = [(1+2r)I - rS]^{-1}$$

对于六点对称格式:

$$\begin{aligned} A &= (1+r)I - \frac{r}{2}S,\ B = (1-r)I - \frac{r}{2}S \\ C &= [(1+r)I - \frac{r}{2}S]^{-1}[(1-r)I - \frac{r}{2}S] \end{aligned}$$

对三层或多层格式，总可适当的引进新变量化成二层格式.

以 Richardson 格式为例，其矩阵形式为

$$\begin{cases} U^{k+1} = 2r(S-2I)U^k + U^{k-1} \\ U^k = U^k \end{cases}$$

令 $W^k = (U^k, U^{k-1})^T$，则上述方程组可转化为

$$W^{k+1} = CW^k$$

其中 $2(N-1)$ 阶矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 2r(S-2I) & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

下面分别给出按初值和按右端稳定的概念.

定义： 设任给两初值 W^0 和 V^0，按公式 (35) 分别求得数值解 W^k 和 V^k. 若存在正常数 τ_0 和 K，使得对一切 $0 < \tau \leqslant \tau_0$ 和 $0 < k\tau \leqslant T$，均有

$$\left\| W^k - V^k \right\| \leqslant K \left\| W^0 - V^0 \right\| \tag{37}$$

则称 (35) 关于初值稳定。

因为 W^k 和 V^k 分别是初值为 W^0 和 V^0 时 (35) 的数值解，所以

$$W^k = CW^{k-1} + \tau A^{-1}F$$
$$V^k = CV^{k-1} + \tau A^{-1}F$$

两式相减，得

$$E^k := W^k - V^k = C(W^{k-1} - V^{k-1}) := CE^{k-1}$$

$\Rightarrow$

$$E^k = C^k E^0$$

上式两边取矩阵的欧氏空间 R^{N-1} 中的某种范数，则

$$\left\|E^{k}\right\| \leqslant \left\|C^{k}\right\| \cdot \left\|E^{0}\right\| \tag{38}$$

由 (38) 知: 为了使得 (35) 关于初值稳定, 要求 (传递) 矩阵族 $\{C^{k}\}$ 一致有界, 即存在正常数 τ_0 和 K, 使得

$$\left\|C^{k}\right\| \leqslant K,\ 0 < \tau \leqslant \tau_0, 0 < k\tau \leqslant T \tag{39}$$

其中 (39) 中矩阵范数为向量从属范数.

定义： 设任意给定右端向量 F_1 和 F_2，从初值 U^0 出发，按公式 (35) 分别求得数值解 W^k 和 V^k. 若存在正常数 τ_0 和 M，使得对一切 $0 < \tau \leqslant \tau_0$ 和 $0 < k\tau \leqslant T$，均有

$$\left\| W^k - V^k \right\| \leqslant M \left\| F_1 - F_2 \right\| \tag{40}$$

则称 (35) 关于右端稳定。

因为 W^k 和 V^k 分别是右端向量为 F_1 和 F_2 时 (35) 的数值解，所以

$$W^k = CW^{k-1} + \tau A^{-1} F_1$$

$$V^k = CV^{k-1} + \tau A^{-1} F_2$$

两式相减，得

$$W^k - V^k = C(W^{k-1} - V^{k-1}) + \tau A^{-1}(F_1 - F_2) \tag{41}$$

记 $X^k := W^k - V^k$，$F := F_1 - F_2$，则 (41) 可以改写为

$$X^k = CX^{k-1} + \tau A^{-1} F$$

因此，可递归地得到 (注意 $X^0 = 0$)

$$\begin{aligned} X^k &= CX^{k-1} + \tau A^{-1}F \\ &= C(CX^{k-2} + \tau A^{-1}F) + \tau A^{-1}F \\ &= C^2X^{k-2} + \tau(C+I)A^{-1}F \\ &= \cdots\cdots \\ &= C^kX^0 + \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)A^{-1}F \\ &= \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)A^{-1}F \end{aligned} \tag{42}$$

定理 1 设 $\|A^{-1}\| \le K'$ (不依赖于 τ 的正常数),如果格式 (35) 按初值稳定，且其中的矩阵范数为从属范数，则它亦按右端稳定.

证明: 若格式 (35) 按初值稳定，则有 (39) 成立，即存在正常数 τ_0 和 K，使得

$$\left\|C^k\right\| \leqslant K,\ 0 < \tau \leqslant \tau_0, 0 < k\tau \leqslant T$$

由 (42) 并利用上式，有

$$\begin{aligned}
\left\|X^k\right\| &= \tau \left\|(C^{k-1} + \cdots + C + I)A^{-1}F\right\| \\
&\leq \tau \left(\left\|C^{k-1}\right\| + \cdots + \|C\| + 1\right) \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|F\| \\
&\leq \tau k\tilde{K} \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|F\| \quad (\tilde{K} = \max\{K, 1\}) \\
&\leq T\tilde{K} \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|F\| \qquad (43) \\
&\leq T\tilde{K}K' \cdot \|F\| \qquad (44)
\end{aligned}$$

取 $M = T\tilde{K}K'$, 即得证格式 (35) 按右端稳定. □

注：上述是针对 f 与时间 t 无关的情形进行讨论的，若f 与时间 t 有关，则只需用 $\sup_k \|F^k\|$ 代替上述不等式右端的 F 即可.

下面我们仅讨论按初值稳定.

两类方法:

1. 代数方法
2. Fourier 方法

下面设网比 r 为常数(即系数 a 为常数), 空间变量 $x \in [0, 1]$.

代数方法 (矩阵法) 或直接估计方法

由 (39), 差分格式稳定的充要条件是

$$\left\|C^k\right\| \leqslant K,\ 0 < \tau \leqslant \tau_0, 0 < k\tau \leqslant T$$

一般情况, 直接验证上述条件相当困难, 下面希望给出其它更容易验证的判别条件, 为此首先给出稳定性的必要条件.

命题 1 (必要条件)　差分格式 (35) 稳定的必要条件是，存在与 τ $(0 < \tau \leqslant \tau_0)$ 无关的正常数 M，使得

$$\rho(C) \leqslant 1 + M\tau \tag{45}$$

这里，$\rho(C)$ 为矩阵 C 的谱半径。

证明: 由 (39) 知 (注意矩阵范数 $\|\cdot\|$ 为某种从属范数)

$$\rho^k(C) \leqslant \left\|C^k\right\| \leqslant K,\ 0 < k \leqslant \frac{T}{\tau},\ 0 < \tau \leqslant \tau_0 \tag{46}$$

不妨设 $K > 1$, 且 T 可以被 τ 整除, 在上式中取 $k = T/\tau$, 则有

$$\rho(C) \leqslant K^{\frac{\tau}{T}} = e^{\frac{\tau}{T}\ln K} \tag{47}$$

又当 $\tau_0 \leq \frac{T}{\ln K}$ 时, 对一切 $0 < \tau \leqslant \tau_0$, 有 (注意 $e^x = 1 + xe^{\xi}$),

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tau}{T}\ln K} &= 1 + (\frac{\tau}{T}\ln K)e^{\xi} \leqslant 1 + \tau(\frac{1}{T}\ln K)e^{\frac{\tau_0}{T}\ln K} && (48) \\ &\leqslant 1 + (\frac{e}{T}\ln K)\tau, && (49) \end{aligned}$$

由 (47) 和 (48) 知 ($M = \frac{e}{T}\ln K$)

$$\rho(C) \leqslant 1 + M\tau$$

条件 (45) 称为Von Neumann 条件, 下面我们考虑判断稳定性的充要条件.

定义 若 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $A^HA = AA^H$ 则称 A 为正规矩阵, 这里 A^H 表示 A 的共轭转置, 即 $A^H = \bar{A}^T$.

例如酉矩阵, Hermite 矩阵, 实对称矩阵等均为正规矩阵.

命题 2 (充分条件) 若 $C(\tau)$ 是正规矩阵，则条件 (45) 也是差分格式 (35) 稳定的充分条件。

证明: 此时取 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 2 范数，则有 $\|C(\tau)\| = \rho(C)$，由 (45) 可知 (注意 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \le e,\ x \to 0^+$)

$$
\begin{aligned}
\|C^k(\tau)\| &\le \|C(\tau)\|^k = \rho^k(C) \le (1+M\tau)^k \\
&\le (1+M\tau)^{\frac{T}{\tau}} \le K < \infty.
\end{aligned}
$$

$\square$

推论 1 若 W 是 $N-1$ 阶对称矩阵, $C(\tau)=R(W)$ 是矩阵 W 的实系数有理函数, 则差分格式 (35) 稳定的充要条件是

$$\max_j |R(\lambda_j^W)| \leq 1 + M\tau, \ 0 < \tau \leq \tau_0$$

其中 λ_j^W $(j=1,\cdots,N-1)$ 是 W 的第 j 个特征值.

事实上, 由于W 是对称矩阵, 易知 $C(\tau)$ 也是对称矩阵, 且其特征值为 $R(\lambda_j^W)$, 从而由命题 2 可知

$$\rho(C) = \max_j |R(\lambda_j^W)| \leq 1 + M\tau$$

□

下面，利用 Von Neumann 条件判定前面建立的四种差分格式的稳定性.

注意：由 (36) 定义的矩阵 S 的特征值 (见第四章 4.1 节)

$$\lambda_j^S = 2\cos j\pi h,\quad j = 1,\cdots,N-1,\ h = \frac{1}{N}$$

例 1 向前差分格式

该格式所对应的矩阵 $C = (1-2r)I + rS$ 是对称矩阵 S 的实系数有理函数，因此其特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_j^C &= (1-2r) + r\lambda_j^S \\ &= 1 - 2r(1-\cos j\pi h) \\ &= 1 - 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2},\quad j = 1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

因此，由推论 1 知：向前差分格式稳定的充要条件是 (对一切 $0 < \tau \le \tau_0$)

$$\left|1 - 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\right| \le 1 + M\tau,\ j = 1, \cdots, N-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 - M\tau \le 1 - 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1 + M\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad -M\tau \le 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 2 + M\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \le 1 + \frac{M}{2}\tau \tag{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad r \le \frac{1}{2} \quad \text{(证明见后)} \tag{51}$$

关于 (50) $\Rightarrow$ (51) 的证明.

反证法, 设 $r=\frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, 代入 (50) 得

$$2\times(\frac{1}{2}+\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+\frac{M}{2}\tau,\ 0<\tau\le\tau_0,\ j=1,2,\cdots,N-1$$

即

$$(1+2\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+\frac{M}{2}\tau,\ 0<\tau\le\tau_0,\ j=1,2,\cdots,N-1$$

在上式中取 $j=N-1$ (即 $jh=1-h$), 则其左端为

$$(1+2\varepsilon)(1+O(h))$$

而右端为

$$1+O(\tau)$$

所以当 $\tau\to 0$ 时 (等价 $h\to 0$), 产生矛盾. $\square$

例 2 向后差分格式

这时相应的正规矩阵

$$C = [(1+2r)I - rS]^{-1},$$

其特征值 (对一切 $0 < \tau \le \tau_0$) $\lambda_j^C \le 1, \quad j = 1, \cdots, N-1$
故向后差分格式对于任意 $r > 0$ 恒稳定 (习题).

例 3 六点对称格式

这时相应的正规矩阵

$$C = [(1+r)I - \frac{r}{2}S]^{-1}[(1-r)I - \frac{r}{2}S],$$

其特征值 (对一切 $0 < \tau \le \tau_0$) $\lambda_j^C \le 1, \quad j = 1, \cdots, N-1$
故六点对称格式对于任意 $r > 0$ 恒稳定 (习题).

例 4 Richardson 格式

这时相应的正规矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 2r(S-2I) & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

设 μ 为 C 的特征值, $w=(w_1,w_2)^T$ 为相应的非平凡特征向量, 即 $Cw=\mu w$ 或

$$2r(S-2I)w_1 + w_2 = \mu w_1 \tag{52}$$

$$w_1 = \mu w_2 \tag{53}$$

显然 $w_2 \neq 0$ (否则导出 $w_1=0$, 即 w 为平凡特征向量). 将 (53) 代入 (52), 得

$$2\mu r(S-2I)w_2 + w_2 = \mu^2 w_2$$

$\Leftrightarrow$

$$Sw_2 = (2 + \frac{\mu}{2r} - \frac{1}{2\mu r})w_2.$$

由此可见 $\lambda = 2 + \frac{\mu}{2r} - \frac{1}{2\mu r}$ 是 S 的特征值，而 S 的第 j 个特征值为

$$\lambda_j^S = 2\cos j\pi h, \quad j = 1, \cdots, N-1, \; h = \frac{1}{N},$$

所以，λ_j^S 所对应的矩阵 C 的特征值 μ_j 满足

$$2\cos j\pi h = 2 + \frac{\mu_j}{2r} - \frac{1}{2\mu_j r}$$

两边同时乘以 $2\mu_j r$，则上述方程可表示为

$$\mu_j^2 + 4\mu_j r(1 - \cos j\pi h) - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\mu_j^2 + 8\mu_j r \sin^2 \frac{j\pi h}{2} - 1 = 0$$

由此可得 μ_j 的两个根为

$$\mu_j^m = -4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \pm \sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2}+1}, \quad m=1,2$$

至此就求得了矩阵 C 的所有特征值

$$\mu_j^m,\ j=1,\cdots,N-1;\ m=1,2$$

因此其谱半径 (对于任意 $r>0$)

$$\begin{aligned}\rho(C)=\max_j(|\mu_j^1|,|\mu_j^2|) &= \max_j\left|4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}+\sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2}+1}\right| \\ &> r+\sqrt{1+r^2}>1+r\end{aligned}$$

所以 Richardson 格式恒不稳定.

Fourier 方法

- 二层格式

一般二层格式的矩阵形式为

$$AU^{k+1} = BU^k + \tau F$$

$\Leftrightarrow \quad (j = 1, \cdots, N-1)$

$$a_1 u_{j+1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_{-1} u_{j-1}^{k+1} = b_1 u_{j+1}^k + b_0 u_j^k + b_{-1} u_{j-1}^k + \tau f_j \quad (54)$$

其中

1. $u_0^{k+1} = u_N^{k+1} = 0 = u_0^k = u_N^k$ (齐次边值条件).
2. a_m 和 b_m $(m = 0, \pm 1)$ 不依赖 j 但与 τ (或 h) 有关.

特别

向前差分格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = 0,\ a_0 = 1;\ b_1 = b_{-1} = r,\ b_0 = 1-2r$$

向后差分格式

$$-ru_{j+1^{k+1}} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = -r,\ a_0 = 1+2r;\ b_1 = b_{-1} = 0,\ b_0 = 1$$

六点对称格式

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1} + (1+r)u_j^{k+1} - \frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{j+1}^k + (1-r)u_j^k + \frac{r}{2}u_{j-1}^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = -\frac{r}{2},\ a_0 = 1+r;\ b_1 = b_{-1} = \frac{r}{2},\ b_0 = 1-r$$

按初值稳定的条件为 (K 为正常数)

$$\left\|U^k\right\|_{R^{N-1}} \leq K\left\|U^0\right\|_{R^{N-1}} \tag{55}$$

下面利用 Fourier (级数) 方法, 给出 (55) 的若干等价条件.

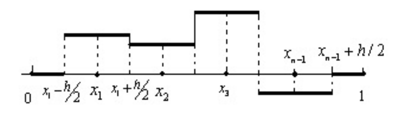
其主要步骤:

Step 1. 通过将第 k 个时间层的差分解向量 U^k 在 $I=[0,1]$ 上延拓, 得到 (55) 的一个等价条件.

将 U^k 延拓成 I 上的阶梯函数

$$u_k(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le x_1-\frac{h}{2}\\ u_1^k, & x_1-\frac{h}{2}\le x\le x_1+\frac{h}{2}\\ \vdots & \\ u_j^k, & x_j-\frac{h}{2}\le x\le x_j+\frac{h}{2}\\ \vdots & \\ u_{N-1}^k, & x_{N-1}-\frac{h}{2}\le x\le x_{N-1}+\frac{h}{2}\\ 0, & x_{N-1}+\frac{h}{2}\le x\le 1 \end{cases} \tag{56}$$

其图像如下：



由 (56) 式，有

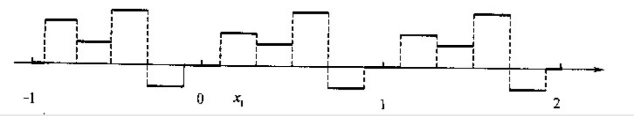
$$\|u_k\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 u_k^2(x)dx = h\sum_{j=1}^{N-1}(u_j^k)^2 = h\left\|U^k\right\|^2_{R^{N-1}}$$

由此知: (55) 等价于

$$\|u_k\|^2_{L^2} \le K^2\|u_0\|^2_{L^2} \tag{57}$$

Step 2 通过将函数 u_k 在 $(-\infty,\infty)$ 上周期延拓, 得到 (57) 的一个等价条件.

由于$u_k(0)=0=u_k(1)$, 所以可将 $u_k(x)$ 周期延拓到整个实轴.



这时差分方程 (54) 在整个实轴上成立, 特别当 $x\in[0,1]$ 时, 有

$$a_1u_{k+1}(x+h)+a_0u_{k+1}(x)+a_{-1}u_{k+1}(x-h)=b_1u_k(x+h)+b_0u_k(x)+b_{-1}u_k(x-h) \tag{58}$$

注: 因为仅考虑按初值稳定, 所以在格式 (54) 中, 不妨设 $f_j=0$.

将 $u_k(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上展开成 Fourier 级数 (这里周期为 1):

$$u_k(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) e^{i2p\pi x}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{59}$$

其中

$$v_k(p) = \int_0^1 u_k(x) e^{-i2p\pi x} dx, \ \ p = 0, \pm 1, \cdots$$

利用 Parseval 等式 (函数 $u_k(x)$ 在区间 $I=[0,1]$ 上的 L^2 范数与相应的 Fourier 系数序列 $\{v_k(p)\}_{p=-\infty}^{\infty}$ 的 l^2 范数的等价性):

$$\|u_k\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_k(p)|^2 \tag{60}$$

和 (57), 按初值稳定的条件又可转化为

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_k(p)|^2 \le K^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_0(p)|^2 \tag{61}$$

Step 3. 利用差分方程 (58) 和 Fourier 级数 (59), 给出 (61) 的关于增长因子的等价条件.

将 (58) 写成等价形式

$$\sum_{m=-1}^{1} a_m u_{k+1}(x+mh) = \sum_{m=-1}^{1} b_m u_k(x+mh)$$

将 (59) 代入上式，可得

$$\sum_{m=-1}^{1} a_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_{k+1}(p) e^{i2p\pi(x+mh)} = \sum_{m=-1}^{1} b_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) e^{i2p\pi(x+mh)}$$

即 (注意 $x_m = mh$)

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_{k+1}(p) \Big(\sum_{m=-1}^{1} a_m e^{i2p\pi x_m} \Big) e^{i2p\pi x} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) \Big(\sum_{m=-1}^{1} b_m e^{i2p\pi x_m} \Big) e^{i2p\pi x}$$

比较上式两边对应的系数，可得

$$v_{k+1}(p) \sum_{m=-1}^{1} a_m e^{i2p\pi x_m} = v_k(p) \sum_{m=-1}^{1} b_m e^{i2p\pi x_m} \tag{62}$$

记

$$G(ph,\tau)=(\sum_{m=-1}^{1}a_m e^{i2p\pi x_m})^{-1}(\sum_{m=-1}^{1}b_m e^{i2p\pi x_m})$$

则由 (62) 有

$$v_{k+1}(p)=G(ph,\tau)v_k(p)$$

此时 (61) 式

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_k(p)|^2\le K^2\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_0(p)|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|G^k(ph,\tau)v_0(p)\right|^2\le K^2\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_0(p)|^2$$

由 $\{v_0(p)\}$ 的任意性知，上式又等价于

$$\left|G^k(ph,\tau)\right|\le K$$

$\Leftrightarrow$

$$|G(ph,\tau)|\le 1+M\tau \tag{63}$$

称 $G(ph,\tau)$ 为增长因子. (63) 也称 Von Neumann 条件.

命题 1 差分格式 (54) 稳定 $\Leftrightarrow G^k(ph,\tau)$ 一致有界 $\Leftrightarrow$ Von Neumann 条件 (63) 成立.

注: 为了计算两层格式

$$a_1 u_{j+1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_{-1} u_{j-1}^{k+1} = b_1 u_{j+1}^k + b_0 u_j^k + b_{-1} u_{j-1}^k \qquad (64)$$

的增长因子, 只需将通项 (分离变量):

$$u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q} e^{i2\pi p(x_{j+m})} = v_{k+q} e^{i2\pi p(x_j+mh)}, \quad q = 0, 1; \ \ m = -1, 0, 1$$

或

$$u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q} e^{i\alpha(x_j+mh)}, \quad \alpha = 2p\pi$$

代入格式 (64) 中, 再消去 $e^{i\alpha x_j}$ 即可求得增长因子。

例 1 向前差分格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k \tag{65}$$

令 $(\alpha = 2p\pi)$

$$u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q}e^{i\alpha(x_j+mh)},\ q = 0,1;\ m = -1,0,1 \tag{66}$$

将 (66) 代入 (65)，可得

$$v_{k+1}e^{i\alpha x_j} = v_k\left[re^{i\alpha(x_j-h)} + (1-2r)e^{i\alpha x_j} + re^{i\alpha(x_j+h)}\right]$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$，得

$$v_{k+1} = v_k\left[1-2r+r(e^{-i\alpha h}+e^{i\alpha h})\right]$$

由上式知，增长因子为

$$
\begin{aligned}
G(ph,\tau) &= 1-2r+r(e^{-i\alpha h}+e^{i\alpha h}) \\
&= 1-2r(1-\cos\alpha h) \\
&= 1-4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}
\end{aligned}
$$

由稳定性条件 (Von Neumann条件):

$$|G(ph,\tau)| \le 1+M\tau$$

即

$$\left|1-4r\sin^2\pi ph\right| \le 1+M\tau$$

因此可得 (参考本章第二节)

$$r \le \frac{1}{2}$$

例 2 向后差分格式

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k \tag{67}$$

令

$$u_{j+m}^{k+q}=v_{k+q}e^{i\alpha(x_j+mh)},\ \ q=0,1;\ \ m=-1,0,1$$

将上式代入 (67)，可得

$$v_{k+1}(-re^{i\alpha(x_j-h)}+(1+2r)e^{i\alpha x_j}-re^{i\alpha(x_j+h)})=v_ke^{i\alpha x_j}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$，得

$$v_{k+1}\left[-re^{-i\alpha h}+(1+2r)-re^{i\alpha h}\right]=v_k$$

由上式知，增长因子为

$$
\begin{aligned}
G(ph,\tau) &= \frac{1}{1+2r-r(e^{-i\alpha h}+e^{i\alpha h})} = \frac{1}{1+2r(1-\cos\alpha h)} \\
&= \frac{1}{1+4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}} = \frac{1}{1+4r\sin^2 ph\pi}
\end{aligned}
$$

由 Von Neumann 条件知

$$
\frac{1}{1+4r\sin^2 ph\pi} \leq 1+M\tau
$$

上式对任意的 $\tau>0$ 均成立，因此，向后差分格式无条件稳定(绝对稳定).

例 3 Grank-Nicholson格式

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j-1}^{k}+(1-r)u_j^{k}+\frac{r}{2}u_{j+1}^{k} \tag{68}$$

将

$$u_{j+m}^{k+q}=v_{k+q}e^{i\alpha(x_j+mh)},\ \ q=0,1;\ \ m=-1,0,1$$

代入 (68)，可得

$$\begin{aligned}&v_{k+1}\left[-\frac{r}{2}e^{i\alpha(x_j-h)}+(1+r)e^{i\alpha x_j}-\frac{r}{2}e^{i\alpha(x_j+h)}\right]\\ =\ &v_k\left[\frac{r}{2}e^{i\alpha(x_j-h)}+(1-r)e^{i\alpha x_j}+\frac{r}{2}e^{i\alpha(x_j+h)}\right]\end{aligned}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$，得

$$v_{k+1}\left[-\frac{r}{2}e^{-i\alpha h}+(1+r)-\frac{r}{2}e^{i\alpha h}\right]=v_k\left[\frac{r}{2}e^{-i\alpha h}+(1-r)+\frac{r}{2}e^{i\alpha h}\right]$$

由上式知，增长因子为

$$
\begin{aligned}
G(ph,\tau) &= \frac{\frac{r}{2}e^{-i\alpha h}+(1-r)+\frac{r}{2}e^{i\alpha h}}{-\frac{r}{2}e^{-i\alpha h}+(1+r)-\frac{r}{2}e^{i\alpha h}} \\
&= \frac{1-r(1-\cos\alpha h)}{1+r(1-\cos\alpha h)} \\
&= \frac{1-2r\sin^2 ph\pi}{1+2r\sin^2 ph\pi}
\end{aligned}
$$

由 Von Neumann 条件知

$$
\frac{1-2r\sin^2 ph\pi}{1+2r\sin^2 ph\pi} \le 1+M\tau
$$

上式对任意的 均成立，因此，Grank-Nicholson 格式无条件稳定(绝对稳定).

- 判定方程组 (或多层格式) 稳定性的 Fourier 方法

设方程组的阶为 $s \geq 2$，即每个点有 s 个自由度。此时，前面标量型抛物方程的二层格式 (设 r 为常数，且不妨设右端函数为零)

$$a_{-1}u_{j-1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_1 u_{j+1}^{k+1} = b_{-1}u_{j-1}^{k} + b_0 u_j^{k} + b_1 u_{j+1}^{k}$$

就变为

$$A_{-1}U_{j-1}^{k+1} + A_0 U_j^{k+1} + A_1 U_{j+1}^{k+1} = B_{-1}U_{j-1}^{k} + B_0 U_j^{k} + B_1 U_{j+1}^{k} \quad (69)$$

其中 A_m, B_m 为 s 阶方阵，U_m 为 s 维向量 $(m = -1, 0, 1)$.

例 4 Richarson格式

$$u_j^{k+1} - 2r(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) - u_j^{k-1} = 0$$

它等价于差分方程组 (阶 $s = 2$):

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2r(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) + w_j^k \\ w_j^{k+1} = u_j^k \end{cases} \tag{70}$$

$\Leftrightarrow$

$$U_j^{k+1} = B_{-1}U_{j-1}^k + B_0 U_j^k + B_1 U_{j+1}^k$$

其中

$$U_j^{k+q} = (u_j^{k+q}, w_j^{k+q})^T, \ \ q = 0, 1$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ B_0 = \begin{pmatrix} -4r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ B_1 = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $(\alpha = 2p\pi)$

$$U_{j+m}^{k+q} = V_{k+q} e^{i\alpha(x_j+mh)}, \;\; q = 0, 1; \;\; m = -1, 0, 1 \tag{71}$$

其中

$$V_{k+q} = (v_{k+q}^1, \cdots, v_{k+q}^s)^T, q = 0, 1$$

特别对 Richarson 格式, 上式等价于

$$\begin{cases} u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q}^1 e^{i\alpha(x_j+mh)}, \\ w_{j+m}^{k+q} = v_{k+q}^2 e^{i\alpha(x_j+mh)}, \end{cases} \quad q = 0, 1; \;\; m = -1, 0, 1 \tag{72}$$

将 (71) 代入 (69) 可求得相应的 s 阶增长矩阵: $G(ph, \tau)$.

例如对于 Richarson 格式, 将 (72) 代入 (70), 可得

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 e^{i\alpha x_j} = 2r\left[v_k^1 e^{i\alpha(x_j-h)} - 2v_k^1 e^{i\alpha x_j} + v_k^1 e^{i\alpha(x_j+h)}\right] + v_k^2 e^{i\alpha x_j} \\ v_{k+1}^2 e^{i\alpha x_j} = v_k^1 e^{i\alpha x_j} \end{cases}$$

约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 得

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = 2r \cdot v_k^1(e^{-i\alpha h} - 2 + e^{i\alpha h}) + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = 4rv_k^1(\cos\alpha h - 1) + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = -8r\sin^2 ph\pi \cdot v_k^1 + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$V_{k+1} = G(ph,\tau)V_k$$

其中，2 阶增长矩阵

$$G(ph,\tau) = \begin{pmatrix} -8\sin^2 ph\pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命题 2 差分格式 (69) 稳定的充要条件是: s 阶增长矩阵族

$$\{G^k(x_p,\tau)=G^k(ph,\tau):\ 0<\tau\le\tau_0, 0<k\tau\le T, p=0,\cdots,N-1\} \quad (73)$$

一致有界.

命题 3 矩阵族 (73) 一致有界的必要条件是 $G(x_p,\tau)$ 的谱半径

$$\rho(G)\le 1+M\tau$$

即 Von Neumann 条件成立. 若 $G(x_p,\tau)$ 是正规矩阵, 则 Von Neumann 条件也是稳定的充分条件.

特别当 $s=2$ 时，有

命题 4 设 $G(x_p,\tau)=(g_{ij})_{2\times 2}$， λ_1 和 λ_2 是 $G(x_p,\tau)$ 的特征值，则差分格式 (69) 稳定的充要条件是:

$$(1)\quad |\lambda_i(x,\tau)|\le 1+M\tau,\ \ i=1,2 \tag{74}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &\|G(x,\tau)-\frac{1}{2}(g_{11}(x,\tau)+g_{22}(x,\tau))\mathrm{I}\|\\ &\le M(\tau+|1-|\lambda_1(x,\tau)||+|\lambda_1(x,\tau)-\lambda_2(x,\tau)|)\end{aligned} \tag{75}$$

其中 I 是二阶单位矩阵.

推论 特别若 $G(x_p,\tau)$ 与 τ 无关，则差分格式 (69) 稳定的充要条件是:

$$(1)\quad |\lambda_i(x)|\le 1,\ \ i=1,2 \tag{76}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &\|G(x)-\frac{1}{2}(g_{11}(x)+g_{22}(x))\mathrm{I}\|\\ &\le M(|1-|\lambda_1(x)||+|\lambda_1(x)-\lambda_2(x)|),\ 0\le x\le 1\end{aligned} \tag{77}$$

例如对于 Richarson 格式, 其相应的增长矩阵

$$G(ph,\tau)=\begin{pmatrix} -8\sin^2 ph\pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $G(ph,\tau)$ 是对称矩阵, 则由命题 3 可知: 该差分格式稳定的充要条件是

$$\rho(G)\leq 1+O(\tau)$$

注意 $G(ph,\tau)$ 的特征根满足:

$$\lambda^2+(8r\sin^2 ph\pi)\lambda-1=0 \tag{78}$$

下面介绍几种利用上述二次多项式方程, 判定 $G(ph,\tau)$ 是否满足 Von Neumann 条件的方法.

方法一：直接利用求根公式

(78) 的两个根分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4r\sin^2 ph\pi + \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \\ \lambda_2 = -4r\sin^2 ph\pi - \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max_p \left| 4r\sin^2 ph\pi + \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \right| \\ &> r + \sqrt{1 + r^2} > 1 + r, \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

即对任意给定的网格比 r，均不满足 Von Neumann 条件，故 Richarson 格式绝对不稳定。

方法二：

引理 2 实系数二次方程 $\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ 的根按模不大于 1 的充要条件是

$$|b| \le 1 - c \le 2. \tag{79}$$

对二次多项式方程 (78)，注意相应的 $c = 1$, 所以对任意给定的网格比 r, $\exists\ p = 0, \pm 1, \cdots$，使得

$$|b| = |-8r\sin^2 ph\pi| > 0 = 1 - c$$

$\Rightarrow$

方程 (78)的根不大于 1, 故 Richarson 格式绝对不稳定.

例 5 考虑逼近热传导方程的 Dufort Frankel 格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=\alpha\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2} \tag{80}$$

引进新变量 $w_j^{k+1}=u_j^k$，将它化为一阶方程组 $(r=\alpha\tau/h^2)$:

$$\begin{cases} u_j^{k+1}=\frac{2r}{1+2r}(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\frac{1-2r}{1+2r}w_j^k \\ w_j^{k+1}=u_j^k, \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} u_j^{k+1} \\ w_j^{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}(\delta_1+\delta_{-1}), & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j^k \\ w_j^k \end{pmatrix}$$

其中 $\delta_{\pm1}u_j=u_{j\pm1}$.

用 Fourier 方法可知增长矩阵

$$G(\alpha h)=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}(e^{i\alpha h}+e^{-i\alpha h}), & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4r}{1+2r}\cos\alpha h, & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

注意 $G(\alpha h)$ 不是正规矩阵和不显含 τ, 所以下面利用命题 4 的推论, 给出 Dufort Frankel 格式稳定的充要条件.

易知矩阵 $G(\alpha h)$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{4r\cos\theta}{1+2r}\lambda - \frac{1-2r}{1+2r} = 0, \ \theta = \alpha h = 2\pi ph \in [0, 2\pi] \qquad (82)$$

由于二次方程 (82) 的系数显然满足 (79)，故 $G(\alpha h)$ 的特征值按模 $\leqslant 1$, 即满足命题 4 的推论 的第一个条件.

其次，注意 (82) 的二根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{4r\cos\theta}{1+2r} \pm \frac{2}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta + (1-2r)^2}$$

二根之差

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{4}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta + (1-2r)^2}$$

而

$$1 - |\lambda_1| = 1 - (\frac{4r\,|\cos\theta|}{1+2r} + \frac{2}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta + (1-2r)^2})$$

令 $\Lambda(\theta) = |1 - |\lambda_1|| + |\lambda_1 - \lambda_2|$，显然

$$\Lambda(\theta) = 1 + |\cos\theta|\,, \quad 当\ r = \tfrac{1}{2}$$

$$\Lambda(\theta) \geq |\lambda_1 - \lambda_2| \geqslant \frac{4\,|1-2r|}{1+2r} > 0, \quad 当\ r \neq \tfrac{1}{2}$$

可见函数 $\Lambda(\theta)$ 对 $\forall r > 0$ 于 $[0, 2\pi]$ 有正的下界 $m > 0$.

另一方面,

$$G(x)-\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22})\mathrm{I}=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}\cos\theta & \frac{\frac{1-2r}{1+2r}}{1} \\ & -\frac{2r}{1+2r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

其 F—模显然有上界 $K>0$.

这样就证得了命题 4 的推论的第二个条件成立. 从而证得 (80) 格式对 $\forall r>0$ 均稳定. □

习题 1 pp.121 3.2.1

收敛性

定理 若差分格式满足相容性和稳定性，则差分解向量一致收敛于真解向量，且有与截断误差相同的收敛阶

由该定理，并利用前面的稳定性结果，有如下结论:

1. 当网比 $r \le \frac{1}{2}$ 时，向前差分格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau + h^2)$;
2. 对于任何网比 $r > 0$，向后差分格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau + h^2)$;
3. 对于任何网比 $r > 0$，六点对称格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^2)$.

其它边界条件的处理

前面仅涉及第一类边界条件，这对有限差分法比较容易处理. 然而对于第二或第三类边界条件，处理起来就要困难些，且可能会出现如下所谓的与内部处理的不协调问题:

离散的源头不一样，具体表现为: 在边界节点处，是从第二或第三类边界条件提供的微分方程出发，进行离散; 在内部节点处，是从原问题在求解域上满足的微分方程出发，进行离散.

这样有时会导致: 降阶现象，破坏对称性等;

今后介绍的广义差分法或有限元法，可以很好地解决这些问题.