第 二 章 习 题

习题 1 (PP.47 2.1.1)用线性元求下列两点边值问题的数值解：

$$\begin{cases} Lu = -u'' + \frac{\pi^2}{4}u = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi x}{2}, 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

要求：

(1) 区间等距剖分成 2 段或 3 段;

(2) 计算总刚度矩阵和总荷载向量所涉及的定积分用两种方法：

1. 精确求解;
2. 用中矩形公式或 Gauss 型求积公式近似计算。

(注：该问题的真解是: $u(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$.)

解：按以下步骤求出线性有限元解函数 $u_h(x)$.

Step 1：写出原问题 (1) 的基于虚功原理的变分形式

试探函数空间和检验函数空间均为：

$$H_E^1(I) = \{u | u \in H^1(I), u(0) = 0\}$$

在 (1) 的第一个式子两边同时乘以检验函数空间 $H_E^1(I)$ 中的任意元素 v，再在区间 $I=(0,1)$ 上积分，可得

$$-\int_0^1 u''vdx+\int_0^1 \frac{\pi^2}{4}uvdx=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}vdx \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}-\int_0^1 u''vdx &= \int_0^1 u'v'dx-vu'\Big|_0^1 \quad (\text{分部积分})\\ &= \int_0^1 u'v'dx-[v(1)u'(1)-v(0)u'(0)]\\ &= \int_0^1 u'v'dx \end{aligned} \tag{3}$$

将 (3) 代入 (2)，可得

$$\int_0^1 (u'v'+\frac{\pi^2}{4}uv)dx=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}vdx$$

记

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + \frac{\pi^2}{4}uv)dx \\ f(v) = \frac{\pi^2}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2} v dx \end{cases}$$

则可以得到原问题 (1) 的等价变分问题： 求 $u \in H_E^1(I)$，使得

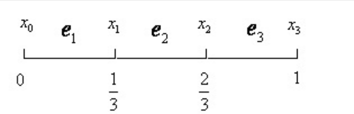
$$a(u,v) = f(v), \forall v \in H_E^1(I) \tag{4}$$

(注：等价性可通过第一章中类似的方法证明.)

Step 2：线性有限元空间的构造

1. 作网格剖分

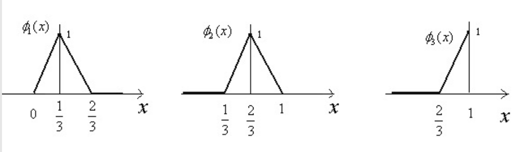
对求解区间 [0, 1] 作等距剖分(以 3 为例)



2. 线性 Lagrange 有限元空间的定义

$$V_E^h = \{u_h \in C(\bar{I}) : u_h|_{e_i} \in P_1(e_i), i = 1,2,3, u_h(0) = 0\}$$

3. 线性 Lagrange 节点基函数的构造



$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2 - 3x, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3 - 3x, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

4. 给出空间 V_E^h 中元素的（整体）表示
对 $\forall u_h \in V_E^h$，有

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{3} u_j \phi_j(x) \tag{5}$$

其中, $u_i = u_h(x_i), i = 1, 2, 3.$

Step 3：写出线性有限元方程

将原变分问题 (4) 中 $H_E^1(I)$ 的试探函数子空间和检验函数子空间均取为 V_E^h，则可得到原问题 (1) 的近似变分问题：求 $u_h \in V_E^h$，使得

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_E^h \tag{6}$$

利用 (5) 并将 v_h 取为 $\phi_i(x), i = 1, 2, 3$, 则上述近似变分问题等价于求 $u_1, u_2, u_3 \in R$，使得

$$a(\sum_{j=1}^{3} u_j\phi_j, \phi_i) = f(\phi_i), i = 1, 2, 3$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{3} a(\phi_j, \phi_i)u_j = f(\phi_i), i = 1, 2, 3$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{3} a(\phi_i, \phi_j)u_j = f(\phi_i), i = 1, 2, 3$$

线性有限元方程为

$$AU = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & a(\phi_1, \phi_3) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & a(\phi_2, \phi_3) \\ a(\phi_3, \phi_1) & a(\phi_3, \phi_2) & a(\phi_3, \phi_3) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(\phi_1) \\ f(\phi_2) \\ f(\phi_3) \end{bmatrix}$$

下面分别按两种方式, 计算总刚度矩阵 A 和总载荷向量 b 的所有元素.

(a) 精确求解

以 $a(\phi_1, \phi_1)$ 和 $f(\phi_1)$ 的计算为例:

$$
\begin{aligned}
a(\phi_1,\phi_1) &= \int_0^1 [({\phi'}_1)^2+\frac{\pi^2}{4}\phi_1^2]dx\\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} [({\phi'}_1)^2+\frac{\pi^2}{4}\phi_1^2]dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [({\phi'}_1)^2+\frac{\pi^2}{4}\phi_1^2]dx\\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} [3^2+\frac{\pi^2}{4}(3x)^2]dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [(-3)^2+\frac{\pi^2}{4}(2-3x)^2]dx\\
&= 6+\frac{\pi^2}{18}\approx 6.54831135
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\phi_1) &= \frac{\pi^2}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\phi_1 dx\\
&= \frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\pi x}{2}(3x)dx+\frac{\pi^2}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \sin\frac{\pi x}{2}(2-3x)dx\\
&= 6-3\sqrt{3}\approx 0.80384757
\end{aligned}
$$

类似可以计算

$$a(\phi_1,\phi_2)=a(\phi_2,\phi_1)=\frac{\pi^2}{72}-3$$

$$a(\phi_1,\phi_3)=a(\phi_3,\phi_1)=0$$

$$a(\phi_2,\phi_2)=6+\frac{\pi^2}{18}$$

$$a(\phi_2,\phi_3)=a(\phi_3,\phi_2)=\frac{\pi^2}{72}-3$$

$$a(\phi_3,\phi_3)=3+\frac{\pi^2}{36}$$

(b) 中矩形公式和 Gauss 型求积公式近似求解

中矩形公式：$\int_a^b g(x)dx \approx (b-a)g(\frac{a+b}{2})$.

以 $a(\phi_1,\phi_1)$ 和 $f(\phi_1)$ 的计算为例：

$$\begin{aligned}
a(\phi_1,\phi_1) &\approx \frac{1}{3}\times[3^2+\frac{\pi^2}{4}\times(3\times\frac{1}{6})^2] \\
&\quad +\frac{1}{3}\times[(-3)^2+\frac{\pi^2}{4}\times(2-3\times\frac{1}{2})^2] \\
&= \frac{1}{3}\times(9+\frac{\pi^2}{16})+\frac{1}{3}\times(9+\frac{\pi^2}{16}) \\
&= \frac{2}{3}\times(9+\frac{\pi^2}{16})\approx 6.411233517
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_h(\phi_1) &\approx \frac{\pi^2}{2}\times\frac{1}{3}\times(\sin\frac{\pi\times\frac{1}{6}}{2})\times(3\times\frac{1}{6}) \\
&\quad +\frac{\pi^2}{2}\times\frac{1}{3}\times(\sin\frac{\pi\times\frac{1}{2}}{2})\times(2-3\times\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\pi^2}{12}\times\sin\frac{\pi}{12}+\frac{\pi^2}{12}\times\sin\frac{\pi}{4}\approx 0.7944421
\end{aligned}$$

Gauss 求积公式:

两点 Gauss 求积公式(推导过程见后):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(\frac{b-a}{2}(-\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{a+b}{2})+f(\frac{b-a}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{a+b}{2})]$$

$$\begin{aligned} a(\phi_1,\phi_1) &= \int_0^1 [(\phi'_1)^2+\frac{\pi^2}{4}\phi_1^2]dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} [3^2+\frac{\pi^2}{4}(3x)^2]dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [(-3)^2+\frac{\pi^2}{4}(2-3x)^2]dx \\ &\triangleq \int_0^{\frac{1}{3}} a_1(x)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} a_2(x)dx \qquad (7) \end{aligned}$$

其中

$$a_1(x)=3^2+\frac{\pi^2}{4}(3x)^2,\ a_2(x)=(-3)^2+\frac{\pi^2}{4}(2-3x)^2$$

(7)⇔

$$\frac{1}{6}[a_1(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{6})+a_1(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{6})]+\frac{1}{6}[a_2(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2})+a_2(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2})] \approx 6.548311337$$

$$\begin{aligned} f_h(\phi_1) &= \frac{\pi^2}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\phi_1 dx \\ &= \frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\pi x}{2}(3x)dx + \frac{\pi^2}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \sin\frac{\pi x}{2}(2-3x)dx \\ &\triangleq \frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} f_1(x)dx + \frac{\pi^2}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_2(x)dx \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$f_1(x) = \sin\frac{\pi x}{2}(3x),\ \ f_2(x) = \sin\frac{\pi x}{2}(2-3x)$$

(8)⇔

$$\frac{\pi^2}{12}[f_1(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{6})+f_1(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{6})]+\frac{\pi^2}{12}[f_2(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2})+f_2(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2})] \approx 0.803890110$$

下面说明梯形求积公式和两点 Gauss 求积公式所得结果的有效位数(以 $f(\phi_1)$ 为例).

梯形求积公式(计算过程略):

$$|f(\phi_1) - f_h(\phi_1)| \approx 0.0186194 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1}.$$

故中矩形公式所得结果的有效位数是 1 位.

两点 Gauss 型求积公式:

$$|f(\phi_1) - f_h(\phi_1)| \approx 0.00004254 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

故两点 Gauss 型求积公式所得结果的有效位数是 3 位.

显然两点 Gauss 型求积公式比梯形公式得到的数值结果更好.

两点 Gauss 求积公式的推导过程.

数值积分法的基本思想：将被积函数在某些节点上的函数值作为加权求和并以该和值作为积分值的近似值.

Gauss 求积公式的目标：选取适当的 x_k, A_k $(k=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{9}$$

具有 $2n-1$ 次代数精度($\rho(x)$ 为权函数, 特别的这里取 $\rho(x)=1$).

方法一：利用两点 Gauss 型求积公式具有 3 次代数精度.

证明: 分别将 $f(x)=x^i(i=0,1,2,3)$ 代入 (9) 并令其精确成立, 则得到含有 4 个方程和 4 个未知数的代数方程组:

$$\int_a^b x^i dx = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^i, \quad i=0,1,2,3.$$

注：上述方程组是非线性的，通常 $n \geq 2$ 就很难求解，故利用 Gauss 点的特性来构造.

为了得到方法二，首先回顾如下内容:

Gauss 点的特点：(“数值计算方法”教材 PP.112 定理 4.7) 互异节点 $x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 是 n 点的 Gauss 求积公式的 Gauss 点的充分必要条件是，$w_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ 与任何次数 $\leq n - 1$ 的多项式关于权函数 $\rho(x)$ 正交，即成立

$$\int_a^b \rho(x) w_n(x) \cdot x^j dx = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, n - 1.$$

Legendre 多项式的特点：定义在 $[-1,1]$ 上的 n 阶 Legendre 多项式

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

是正交的函数系，其 $n+1$ 阶 Legendre 多项式 $p_{n+1}(x)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $q(x)$ 在 $[-1,1]$ 上均正交，即

$$\int_{-1}^{1} p_{n+1}(x)q(x) = 0.$$

积分区间 $[a,b] \to [-1,1]$: 对积分区间 $[a,b]$，作变换 $x = [(a+b)+(b-a)t]/2$ 后变为 $[-1,1]$，积分变为

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt.$$

方法二：Gauss-Legendre 求积公式.

Step 1. 取 $p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ 的两个零点 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 构造求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

对于 $1, x$ 均精确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

Step 2. 由积分区间 $[a,b] \to [0,1]$ 上的变换可知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt \\ &\approx \frac{b-a}{2}[f(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}})] \end{aligned}$$

Step 4: 求解线性有限元方程

有限元方程在各节点处的近似解为:

$$u_h = (0.5057, 0.8759, 1.0114)'.$$

在各节点处真解为:

$$u = (0.5, 0.8660254, 1)'.$$

(下面说明误差函数 $(u-u_h)(x)$ 在某些点逼近情况.
在 $x=\frac{2}{3}$ 节点处:

$$\begin{aligned} |(u-u_h)(x)| &= |0.8660254 - 0.8759| \\ &\approx 0.00987 \leq \frac{1}{2}\times 10^{-1}. \end{aligned}$$

在 $x=1$ 节点处:

$$\begin{aligned} |(u-u_h)(x)| &= |1-1.0114| \\ &\approx 0.0114 \le \frac{1}{2}\times 10^{-1}. \end{aligned}$$

)

习题 2 导出非齐次两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = \alpha, \quad u'(b) + \beta u(b) = \gamma \end{cases} \tag{10}$$

的线性元方程, 其中

(1) 正的光滑函数 $p(x)$, 非负连续函数 $q(x)$ 可自己定义, 如取

$$p(x) = x - a + 1, q(x) = 0$$

(2) $\alpha, \beta \geq 0, \gamma$ 也可自己定义, 如取 $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

解：(针对一般的情形进行讨论.)

方法一：先将两点边值问题 (10) 齐次化。

令 $w(x) = u(x) - \alpha$，则原非齐次两点边值问题变成如下齐次两点边值问题：

$$\begin{cases} Lw = -\frac{d}{dx}(p\frac{dw}{dx}) + qw = f - \alpha q, a < x < b \\ w(a) = 0, w'(b) + \beta w(b) = \gamma - \alpha\beta \end{cases} \tag{11}$$

Step 1：写出原问题 (11) 的等价变分形式（基于虚功原理）

试探函数空间和检验函数空间均为：

$$U = \{w | w \in H^1(I), w(a) = 0\}$$

在 (11) 的第一个式子两边同时乘以检验函数空间 U 中的任意元素 v，再在区间 $I=(a,b)$ 上积分，可得

$$-\int_a^b \left(\frac{d}{dx}(pw')\right)v + qwvdx = \int_0^1 fv - \alpha qvdx \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}
& -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}(pw')\right)vdx \\
= & -\int_a^b vd(pw') \quad (\text{分部积分}) \\
= & \int_a^b pw'v'dx - [p(b)v(b)w'(b) - p(a)v(a)w'(a)] \\
= & \int_a^b pw'v'dx - p(b)v(b)w'(b) \\
= & \int_a^b pw'v'dx - p(b)v(b)(\gamma - \alpha\beta - \beta w(b))
\end{aligned} \tag{13}$$

将 (13) 代入 (12)，可得

$$\int_a^b (pw'v' + qwv)dx + \beta p(b)w(b)v(b) = \int_a^b (f - \alpha q)v dx + (\gamma - \alpha\beta)p(b)v(b)$$

记

$$\begin{cases} a(w,v) = \int_a^b (pw'v' + qwv)dx + \beta p(b)w(b)v(b) \\ f(v) = \int_a^b (f - \alpha q)v dx + (\gamma - \alpha\beta)p(b)v(b) \end{cases}$$

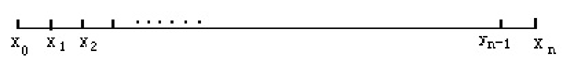
则可以得到问题 (11) 的等价变分问题：求 $w \in U$，使得

$$a(w,v) = f(v), \forall v \in U$$

Step 2：线性有限元空间的构造

1.网格剖分

给定 I 的一个任意剖分： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

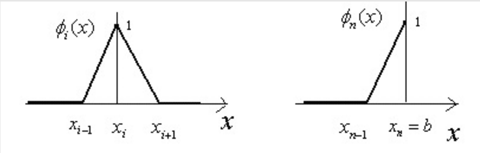


记第 i 个剖分单元 $e_i = [x_{i-1}, x_i]$， $h_i = x_i - x_{i-1}$ 为第 i 个剖分单元的剖分步长。

2. 一次 Lagrange 有限元空间的定义

$$U^h = \{w_h \in C(\bar{I}) : w_h|_{e_i} \in P_1(e_i), i = 1, 2, \cdots, n, w_h(a) = 0\}$$

3. Lagrange 节点基函数的构造



$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 1 - \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h_n}, & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

4. 空间 U^h 中元素的表示

记 $w_i = w_h(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$，则对 $\forall w_h \in U^h$ ，有

$$w_h(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \phi_j(x)$$

Step 3：写出线性有限元方程

在原变分问题中取 U^h 为试探函数子空间和检验函数子空间，则可以得到原问题 (11) 的近似变分问题：求 $w_h \in U^h$，使得

$$a(w_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in U^h$$

利用 $w_h(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \phi_j(x)$ 并将 v_h 取为

$$\phi_i(x), i = 1, 2, \cdots, n$$

则上述近似变分问题等价于求 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in R$，使得

$$a(\sum_{j=1}^{n} w_j \phi_j, \phi_i) = f(\phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i) w_j = f(\phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_i, \phi_j) w_j = f(\phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

写成矩阵形式

$$AW = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & \cdots & a(\phi_1, \phi_n) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & \cdots & a(\phi_2, \phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_n, \phi_1) & a(\phi_n, \phi_2) & \cdots & a(\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix}$$

.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} f(\phi_1) \\ f(\phi_2) \\ \vdots \\ f(\phi_n) \end{bmatrix}$$

方法二：分三步来导出两点边值问题 (10) 所对应的线性有限元方程组。

Step 1：写出原问题 (10) 的等价变分形式（基于虚功原理）

试探函数空间：$U = \{u | u \in H^1(I), u(a) = \alpha\}$.
检验函数空间：$V = \{v | v \in H^1(I), v(a) = 0\}$
在 (10) 的第一个式子两边同时乘以检验函数空间 V 中的任意元素 v，再在区间 $I = (a, b)$ 上积分，可得

$$-\int_a^b \frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})vdx + \int_a^b quv\,dx = \int_a^b fv\,dx \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}
-\int_a^b \frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})vdx &= \int_a^b pu'v'dx - pvu'|_a^b \\
&= \int_a^b pu'v'dx - p(b)v(b)u'(b) \\
&= \int_a^b pu'v'dx - p(b)v(b)[\gamma - \beta u(b)] \\
&= \int_a^b pu'v'dx - \gamma p(b)v(b) + \beta p(b)u(b)v(b)
\end{aligned} \tag{15}$$

将 (15) 代入 (14)，可得

$$\int_a^b (pu'v' + quv)dx + \beta p(b)u(b)v(b) = \int_a^b fv dx + \gamma p(b)v(b)$$

记

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx + \beta p(b)u(b)v(b) \\ f(v) = \int_a^b fv dx + \gamma p(b)v(b) \end{cases}$$

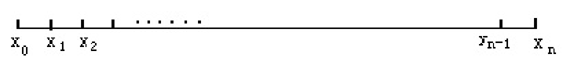
则可以得到原问题 (10) 的等价变分问题：求 $u \in U$，使得

$$a(u,v) = f(v), \forall v \in V \tag{16}$$

Step 2：写出线性有限元方程

1. 网格剖分

给定 I 的一个任意剖分： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$



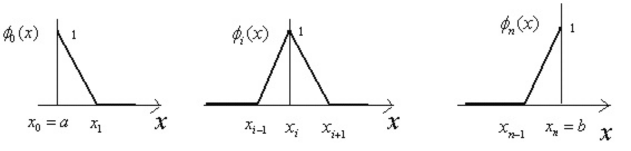
记第 i 个剖分单元 $e_i = [x_{i-1}, x_i]$， $h_i = x_i - x_{i-1}$ 为第 i 个剖分单元的剖分步长。

2. 一次 Lagrange 有限元空间的定义

$$U^h = \{w_h \in C(\bar{I}) : w_h|_{e_i} \in P_1(e_i), i = 1, 2, \cdots, n, w_h(a) = \alpha\}$$

$$V^h = \{w_h \in C(\bar{I}) : w_h|_{e_i} \in P_1(e_i), i = 1, 2, \cdots, n, w_h(a) = 0\}$$

2. 写出线性 Lagrange 节点基函数(与齐次情形相比, 引入 x_0 这一点的节点基函数)



$$\phi_0(x)=\begin{cases}1-\frac{x-x_0}{h_1}, & x_0\le x\le x_1\\ 0, & \text{在别处}\end{cases}$$

$$\phi_i(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\ 1-\frac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0, & \text{在别处}\end{cases}$$

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{n-1}}{h_n}, & x_{n-1}\le x\le x_n\\ 0, & \text{在别处}\end{cases}$$

4. 空间 U^h 中元素的表示

记 $w_i = w_h(x_i), i = 0, 1, 2, \cdots, n$，则对 $\forall w_h \in U^h$，有

$$w_h(x) = \sum_{j=0}^{n} w_j \phi_j(x)$$

Step 3.写出线性有限元方程

在原变分问题中取 U^h 为试探函数子空间和 V^h 检验函数子空间，则可以得到原问题 (10) 的近似变分问题：求 $w_h \in U^h$，使得

$$a(w_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V^h$$

利用 $w_h(x) = \sum_{j=0}^{n} w_j \phi_j(x)$ 并将 v_h 取为

$$\phi_i(x), i = 1, 2, \cdots, n$$

又因为 $w_0=\alpha$ 已知，故上述近似变分问题等价于求 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in R$，使得

$$a(\sum_{j=1}^{n} w_j\phi_j, \phi_i) = f(\phi_i) - \alpha a(\phi_0, \phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i) w_j = f(\phi_i) - \alpha a(\phi_0, \phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_i, \phi_j) w_j = f(\phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

则线性代数系统可表示为

$$AU = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & \cdots & a(\phi_1,\phi_n) \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & \cdots & a(\phi_2,\phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_n,\phi_1) & a(\phi_n,\phi_2) & \cdots & a(\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} f(\phi_1) - \alpha a(\phi_0,\phi_1) \\ f(\phi_2) \\ \vdots \\ f(\phi_n) \end{bmatrix}$$

习题 3 (PP.52 2.2.1) 设 u 是两点边值问题的二次连续可微解, 证明 u_h 一致收敛到 u, 收敛阶为 $O(h)$(即给出 $\|\cdot\|_\infty$ 下的线性有限元函数的误差估计).

知识点回顾: 设 $\{S_n(x)\}(x \in D)$ 是一函数序列, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

解: 由本章第二节的知识可知

$$\|u - u_h\|_1 \leq \beta Ch\|u''\|_{\infty,\bar{I}} = O(h\|u''\|_{\infty,\bar{I}}) \tag{17}$$

利用 $u(a) - u_h(a) = 0$, 对 $\forall x \in [a, b]$, 有

$$u(x) - u_h(x) = \int_a^x (u' - u'_h)dt$$

因此

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u_h(x)| &\leq \int_a^x |u'-u'_h|dt \\
&\leq \int_a^b 1\cdot|u'-u'_h|dx \\
&\leq \left(\int_a^b 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b |u'-u'_h|^2dx\right)^{1/2} \quad (Schwarz\text{不等式}) \\
&= (b-a)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b |u'-u'_h|^2dx\right)^{1/2} \\
&\leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\cdot\|u-u_h\|_{1,\bar{I}}
\end{aligned}
$$

结合 (17) 可知

$$
\|u-u_h\|_\infty = \max_{x\in\bar{I}}|u(x)-u_h(x)| \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\beta Ch\|u''\|_{\infty,\bar{I}} = O(h)
$$

$\square$

习题 1* 设 $u \in H^2(I)\bigcap H_E^1(I)$, 试证明分段线性插值函数 $u_I(x)$ 满足

$$\|u-u_I\|_1 \le Ch\|u''\|_0 = O(h\|u''\|_0). \tag{18}$$

进而有

$$\|u-u_h\|_1 \le O(h\|u''\|_0) \tag{19}$$

(提示：利用带积分余项的 Taylor 展开.)

证明：只需给出其在每个剖分单元 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上的误差估计式(这是因为 $u_I(x)$ 是可以被逐段局部确定的).
在第 i 个单元 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上, 有

$$\begin{aligned} u_I(x) &= u_I(x_{i-1})N_0(\xi)+u_I(x_i)N_1(\xi) \\ &= u(x_{i-1})N_0(\xi)+u(x_i)N_1(\xi) \end{aligned} \tag{20}$$

(知识点回顾： 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域 $U(x_0)$ 内有连续的 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x).$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ 称为积分型余项.)

由带积分余项的 Taylor展开式，对 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$，有

$$u(x_l)=u(x)+u'(x)(x_l-x)+R_l(x),\quad l=i-1,i \tag{21}$$

其中

$$R_l(x)=\frac{1}{2}\int_x^{x_l} u''(t)(x_l-t)dt,\quad (u \in H^2) \tag{22}$$

将 (21) 代入 (20)，可得

$$\begin{aligned} u_I(x) &= u'(x)[(x_{i-1}-x)N_0(\xi)+(x_i-x)N_1(\xi)] \\ &\quad +u(x)[N_0(\xi)+N_1(\xi)]+R_{i-1}(x)N_0(\xi)+R_i(x)N_1(\xi) \end{aligned}$$

利用

$$N_0(\xi) + N_1(\xi) \equiv 1$$

及

$$\begin{aligned}
&(x_{i-1} - x)N_0(\xi) + (x_i - x)N_1(\xi) \\
&= (x_{i-1}N_0(\xi) + x_i N_1(\xi)) - x\,(N_0(\xi) + N_1(\xi)) \\
&= x - x = 0
\end{aligned}$$

因此

$$u_I(x) - u(x) = R_{i-1}(x)N_0(\xi) + R_i(x)N_1(\xi) \tag{23}$$

注意到

$$|N_i(\xi)| \leq 1, i = 0, 1$$

有

$$|u_I(x) - u(x)| \leq |R_{i-1}(x)| + |R_i(x)| \tag{24}$$

由 (22) 及 Schwarz 不等式，有

$$
\begin{aligned}
&|R_l(x)| \leq \tfrac{1}{2}\int_x^{x_l}|u''(t)|\,|(x_l-t)|dt \leq \tfrac{1}{2}h_i\int_x^{x_l}|u''(t)|dt \\
&\leq \tfrac{1}{2}h_i\Big(\int_x^{x_l}1dt\Big)^{1/2}\left(\int_x^{x_l}|u''(t)|^2dt\right)^{1/2} \\
&=\tfrac{1}{2}h_i^{3/2}\left(\int_x^{x_l}|u''(t)|^2dt\right)^{1/2} \\
&\leq \tfrac{1}{2}h_i^{3/2}\|u''\|_{0,I_i}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

结合 (24) 和 (25)，对 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$，有

$$
|u_I(x) - u(x)| \leq c h_i^{3/2}\|u''\|_{0,I_i} \tag{26}
$$

由(26), 有

$$\|u_I - u\|_{0,I_i}^2 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_I - u)^2 dt \leq c{h_i}^4 \|u''\|_{0,I_i}^2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|u_I - u\|_{0,I}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \|u_I - u\|_{0,I_i}^2 \\ &\leq ch^4 \sum_{i=1}^{n} \|u''\|_{0,I_i}^2 = ch^4 \|u''\|_{0,I}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|u_I - u\|_0 \leq ch^2 \|u''\|_0 \tag{27}$$

利用同样的方法可以证明

$$\|u'_I - u'\|_0 \leq ch \|u''\|_0 \tag{28}$$

事实上，对 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$，利用(20)，有

$$u_I'(x) = u(x_{i-1})N_0'(\xi) + u(x_i)N_1'(\xi)$$

再将 (21) 代入上式，有

$$\begin{aligned} u'_I(x) &= u'(x)[(x_{i-1} - x)N_0'(\xi) + (x_i - x)N_1'(\xi)] \\ &\quad + u(x)[N_0'(\xi) + N_1'(\xi)] + R_{i-1}(x)N_0'(\xi) + R_i(x)N_1'(\xi) \end{aligned}$$

由引理 1，有

$$\begin{cases} N_0'(\xi) + N_1'(\xi) = \frac{d1}{dx} = 0 \\ x_{i-1}N_0'(\xi) + x_iN_1'(\xi) = \frac{dx}{dx} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$u_I'(x) - u'(x) = R_{i-1}(x)N_0'(\xi) + R_i(x)N_1'(\xi) \tag{29}$$

注意

$$|N_l'(\xi)| = h_i^{-1}, l = 0, 1 \tag{30}$$

利用(29)与(30)，可得

$$\begin{aligned} |u_I'(x) - u'(x)| &\leq |R_{i-1}(x)| \cdot |N_0'(\xi)| + |R_i(x)| \cdot |N'_1(\xi)| \\ &\leq h_i^{-1}(\,|R_{i-1}(x)| + |R_i(x)|\,) \end{aligned}$$

由此,再利用(25)，可得

$$|u_I'(x) - u'(x)| \leq c{h_i}^{1/2} \|u''\|_{0,I_i}$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \|u_I' - u'\|_{0,I}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \|u_I' - u'\|_{0,I_i}^2 \\ &\leq ch^2 \sum_{i=1}^{n} \|u''\|_{0,I_i}^2 \leq ch^2 \|u''\|_{0,I}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|u_I' - u'\|_{0,I} \leq ch\|u''\|_{0,I} \tag{31}$$

由 (27) 和 (31)，有

$$\|u_I - u\|_{1,I} = (\|u_I - u\|_0^2 + \|u_I' - u'\|_0^2)^{1/2} \leq ch\|u''\|_{0,I} \tag{32}$$

又因为

$$\|u - u_h\|_1 \leq C\|u - u_I\|_1$$

所以函数 $u_h(x)$ 与真解函数 $u(x)$ 之间的误差在空间 H^1 的范数意义下有如下误差估计式

$$\|u - u_h\|_1 \leq C\|u - u_I\|_1 \leq C_1 h\|u''\|_0 \tag{33}$$

$\square$

习题 2* (用更一般的方法(适用于多元有限元函数)，证明第二节中引理 2.)
设标准单元 $e=[0,1]$，则存在正常数C_2，使得对 $\forall w(\xi)\in P_1(e)$，有

$$\int_0^1 \left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 d\xi \leq C_2 \int_0^1 w^2(\xi)d\xi \tag{34}$$

证明：令 $f_1(w) := \int_0^1 (\frac{dw}{d\xi})^2 d\xi$, $f_2(w) := \int_0^1 w^2(\xi)d\xi$ 是关于 $w\in P_1(e)$ 的泛函($P_1(e)$ 表示次数不超过 1 的代数多项式的全体)。
注意对 $\forall w(\xi)\in P_1(e)$，它与其线性插值多项式相等，即

$$w(\xi) = w_0N_0(\xi) + w_1N_1(\xi) \tag{35}$$

这意味着 $w(\xi)$ 与二维向量 $W=(w_0,w_1)$ 一一对应，因此 $f_1(w)$ 和 $f_2(w)$ 可视为关于 W 的二元函数,且满足

$$\begin{cases} f_1(W) := f_1(w_0,w_1) = \int_0^1 \left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 d\xi \geq 0 \\ f_2(W) := f_2(w_0,w_1) = \int_0^1 w^2 d\xi = \|w\|_0^2 \geq 0 \end{cases}$$

这样，原命题就等价于： 存在正常数 C_2，使得对一切的 $W=(w_0,w_1)\in R^2$ ， 均有

$$f_1(W) \leq C_2 f_2(W) \tag{36}$$

若记二元有理函数

$$f_3(W) := \frac{f_1(W)}{f_2(W)}$$

则 (36) 又等价于：存在正常数 C_2 ，使得

$$\sup_{W\in R^2, W\neq 0} \{f_3(W)\} \leq C_2$$

容易验证 $f_3(W)$ 具有伸缩不变性，即

$$f_3(\lambda W) = \frac{f_1(\lambda W)}{f_2(\lambda W)} = \frac{f_1(W)}{f_2(W)} = f_3(W) \tag{37}$$

记 $B = \{W : W \in R^2, \|W\|_2 = \sqrt{w_0^2 + w_1^2} = 1\}$，它是有界闭集（实际上为单位圆）。由 (37)，有

$$\sup_{W \in R^2, \mathrm{W} \neq 0} \{f_3(W)\} = \sup_{W \in R^2, \mathrm{W} \neq 0} \{f_3(\frac{W}{\|W\|_2})\} = \sup_{U \in B} \{f_3(U)\}$$

显然 $f_3(U)$ 是 B 上的连续函数。

事实上，若令

$$\begin{cases} u_0 = \sin\alpha \\ u_1 = \cos\alpha \end{cases}, \alpha \in [0, 2\pi]$$

则 $f_3(U)$，$U = (u_0, u_1)$，可视为闭区间 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数。所以 $f_3(U)$ 在 B 上可以取到最大值 C_2，即有

$$\sup_{U \in B}\{f_3(U)\} = C_2$$

由此便证得引理 2. □