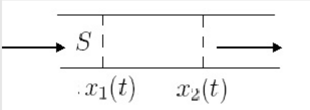
有限差分法

案例 4：一维激波管问题

1. 一维激波管问题
   - 背景问题
   - 数学建模
   - 一维声波方程的若干理论
   - 有限差分方法
   - 算法设计与实现
   - 数值实验
   - 理论分析

设流体在一直长细管内流动, 细管的截面积为 S.



将 x 轴的正向取为水平方向向右，设流体密度 ρ、 速度 u 和压力(强) p 仅与时间变量 t 和空间变量 x 有关, 即

$$\rho = \rho(x,t),\ \ u = u(x,t), p = p(x,t)$$

采用微元法进行分析.

对任意给定的时间 t, 考虑微元("控制体"或"质团")

$$I := [x_1(t), x_2(t)] \times S$$

下面利用质量、动量和能量守恒定律, 建立数学模型.

预备知识

对任意一阶连续可微函数 $f(x,t)$, 有恒等式

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f dx\right) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x}] dx \tag{1}$$

事实上, 注意速度 $u(x(t),t) = x'(t)$, 则由数学分析可知: (1) 的左端为

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(x_2(t),t)\cdot x_2'(t) - f(x_1(t),t)\cdot x_1'(t) \\
= & \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(x_2(t),t)\cdot u(x_2(t),t) - f(x_1(t),t)\cdot u(x_1(t),t) \\
= & \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x}] dx
\end{aligned}$$

质量守恒(连续性)方程

质量守恒定律：控制体 I 中质团的质量不变，即

$$\frac{d}{dt}\left(S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho dx\right)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho dx\right)=0$$

$\Rightarrow$ (利用 (1), 其中 $f:=\rho$)

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}]dx=0$$

由 $x_1(t), x_2(t)$ 的任意性，可得(守恒微分形式的连续性方程)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

动量守恒(运动)方程

动量守恒定律：合力做的冲量＝动量的变化

从 t 到 $t+\Delta t$:

质团的界面 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 处的压力差产生的冲量为

$$\Delta t \cdot S(p(x_1(t),t) - p(x_2(t),t)) = -\Delta t \cdot S \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

质团的动量 $S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u dx$ 的变化为

$$S(\int_{x_1(t+\Delta t)}^{x_2(t+\Delta t)} \rho u dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u dx)$$

所以由动量守恒定律可知

$$-\Delta t \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \int_{x_1(t+\Delta t)}^{x_2(t+\Delta t)} \rho u dx - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u dx$$

令 $\Delta t \to 0$, 则有

$$-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{d(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u dx)}{dt}$$

利用 (1) (其中 $f := \rho u$), 则可得

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x}] dx = 0$$

由 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的任意性, 可得(守恒微分形式的运动方程)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

能量方程

能量守恒定律：外力所作的功＝能量的变化率

压力 $p(x_1(t), t)$ 和 $p(x_2(t), t)$ 对质团所作的功为

$$p(x_1(t), t) \cdot S \cdot u(x_1(t), t) - p(x_2(t), t) \cdot S \cdot u(x_2(t), t) = -S \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(pu)}{\partial x} dx$$

注意单位质量流体所含的能量

$$E = e + \frac{1}{2}u^2$$

其中，e 为内能，$\frac{1}{2}u^2$ 为动能. 所以质团总能量为

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} S\rho E dx = S \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho E dx$$

由能量守恒定律, 有

$$-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(pu)}{\partial x}dx = \frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho E dx$$

利用 (1) (其中 $f := \rho E$), 有
$\Rightarrow$

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x})dx = 0.$$

$\Rightarrow$ (守恒微分形式的能量方程)

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

联立(2), (3) 和 (4), 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

上述方程组中只有三个方程, 但含有四个未知量 ρ, u, p, E 或 ρ, u, p, e, 因此还不够成一个封闭系统.

为了求解出 ρ, u, p, E 四个未知量, 还需要加入状态方程. 特别对理想气体其状态方程为

$$
p = (\gamma - 1)\rho e
$$

其中 $\gamma > 1$ 表绝热指数 (比热比).

进一步, 若还是完全理想气体均熵(或等熵)流, 则其状态方程可简化为

$$p = c\rho^{\gamma}$$

其中 c 为一正常数.

由此, 并联立连续性和运动方程, 则流体方程可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \\ p = c\rho^{\gamma} \end{cases}$$

若在初始时刻还假设:

1) 管内流体是均匀气体且是静止的: $u(x,0) = u_0 = 0$, 密度 $\rho_0 := \rho(x,0)$, 压强 $p_0 := p(x,0)$ 和声速 c_0 均为常数;

2) 气体做微小扰动;

则可导出如下一维声波方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{{c_0}^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_0^2}{\rho_0} \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \tag{6}$$

关于一维声波方程的初边值问题提法，以及相应适定性理论，后面将做专题讨论.

特征与 Riemann 不变量

考虑一维声波方程 (5).

由于 A 的两个特征值

$$\lambda_1 = -c_0, \quad \lambda_2 = c_0$$

所以 (5) 是 (狭义) 双曲方程组.

λ_1 和 λ_2 所对应的左特征行向量分别为

$$\alpha_1 = (\rho_0, -c_0), \quad \alpha_2 = (\rho_0, c_0)$$

将 $\alpha_i, i = 1, 2$ 作用于方程 (5) 两端, 得

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_i A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \alpha_i \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

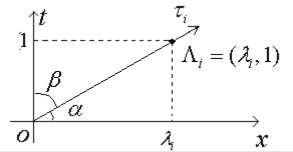
$$\alpha_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

令特征方向:

$$\Lambda_i := (\lambda_i, 1), \quad i = 1, 2$$

则单位特征方向

$$\tau_i := \frac{\Lambda_i}{|\Lambda_i|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 + 1}}(\lambda_i, 1) := (\cos\alpha, \cos\beta)$$



注意

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \tau_i} &= \cos\alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial U}{\partial t} \\
&= (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})(\cos\alpha, \cos\beta)^T \\
&= (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})\frac{(\Lambda_i)^T}{|\Lambda_i|} \\
&= \frac{1}{|\Lambda_i|}(\lambda_i\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t})
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial U}{\partial x} = |\Lambda_i|\frac{\partial U}{\partial \tau_i}$$

由此，并结合 (7)，可得

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial \tau_i} = 0, \;\; i = 1, 2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial r_i}{\partial \tau_i} = 0, \;\; i = 1, 2 \tag{8}$$

其中

$$r_1 = \alpha_1 U = \rho_0 u - c_0 \rho, \quad r_2 = \alpha_2 U = \rho_0 u + c_0 \rho \tag{9}$$

由 (8) 可知:

1. 当 (x,t) 落在斜率为
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{c_0}$$
的某条特征线时 r_1 为常数.

2. 当 (x,t) 落在斜率为
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{c_0}$$
的某条特征线时 r_2 为常数.

称由 (9) 定义的 r_1, r_2 为一维声波方程 (5) 的 Riemann 不变量.

初边值问题的适定性

考虑一维声波方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + A\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in G \\ U(x,0) = U_0(x) = (0,\rho_0)^T, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ U(0,t) = ?, \ \ U(1,t) = ? \end{cases} \tag{10}$$

其中, A 由 (6) 定义, 求解域 $G = (0,1) \times (0,T)$.

问: 在什么样的边界条件下, 初边值问题(10) 是适定的.

下面利用特征与 Riemann 不变量理论回答之.

初边值问题的适定性

注意 对于任一点 $P(x,t)$，有

1. 在过该点且斜率为

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{c_0}$$

的特征线 1 上，$r_1 = \rho_0 u - c_0 \rho$ 为常数.

2. 在过该点且斜率为

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{c_0}$$

的特征线 2 上，$r_2 = \rho_0 u + c_0 \rho$ 为常数.

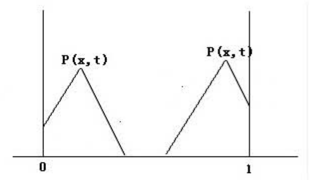
初边值问题的适定性

由于当点 $P(x,t)$ 充分靠近左边界时，过该点的特征线 2 穿过左边界，所以为了使得问题适定，需要在左边界上加上限制条件

$$r_2 = \rho_0 u + c_0\rho = \text{已知值}$$

同理，为了使得问题适定，需要在右边界上加上限制条件

$$r_1 = \rho_0 u - c_0\rho = \text{已知值}$$



初边值问题的适定性

综上可知: 一维声波方程初边值问题

$$
\begin{cases}
\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in G \\
U(x,0) = U_0(x) = (0,\rho_0)^T \\
r_2(0,t) = \text{已知值} \\
r_1(1,t) = \text{已知值}
\end{cases}
\tag{11}
$$

满足适当性.

下面讨论如何利用有限差分法数值求解该问题.

双曲型方程与椭圆型方程的区别

与椭圆型方程不同, 双曲型方程具有如下特性:

1. 特征和特征关系;
2. 初值函数的函数性质 (如间断、弱间断) 沿特征传播, 所以解一般没有光滑性;
3. 解对初值局部依赖.

因此在建立双曲型方程的差分格式时, 要充分考虑这些特性.

特征方法

由前面分析知：一维声波方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow$ (见(8) 和 (9))

$$\frac{\partial r_i}{\partial \tau_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha\frac{\partial r_i}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2+1}}(\lambda_i\frac{\partial r_i}{\partial x} + \frac{\partial r_i}{\partial t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial r_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial r_i}{\partial x} = 0$$

其中$\lambda_{1,2} = \mp c_0$ 为常量.

由此可知: 一维声波方程初边值问题(11), 可化为如下两个独立的标量型双曲方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial r_1}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial r_1}{\partial x} = 0 \\
r_1(x,0) = \rho_0 u(x,0) - c_0 \rho(x,0) = -c_0 \rho_0 \\
r_1(1,t) = \text{已知值}
\end{cases} \tag{12}
$$

和

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial r_2}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \\
r_2(x,0) = \rho_0 u(x,0) + c_0 \rho(x,0) = c_0 \rho_0 \\
r_2(0,t) = \text{已知值}
\end{cases} \tag{13}
$$

结论: 一维声波方程的求解问题, 可本质性地转换为如下一阶双曲型方程的求解.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ (x,t) \in G \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = \phi_0(t), \ \text{如果}\ a > 0; \ u(1,t) = \phi_1(t), \ \text{如果}\ a < 0 \end{cases} \tag{14}$$

其中, 求解域 $G := \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$, u_0, ϕ_0, ϕ_1 为已知函数,

$$\text{常量}\ a \leftrightarrow \text{特征值}\ \lambda_i; \quad \text{方向}\ (a,1) \leftrightarrow \text{特征方向}\ (\lambda_i,1)$$

函数 $u \leftrightarrow$ Riemann 不变量 r_i, 其在平行于特征方向 $(a,1)$ 的特征线上为常量.

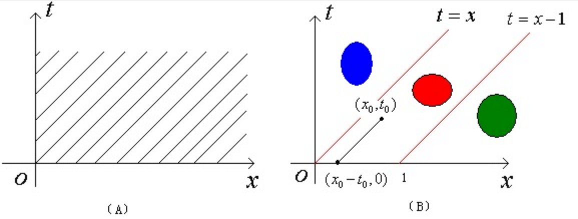
例 1: 试证明混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |x-1|, \quad u(0,t) = 1 \end{cases} \tag{15}$$

的真解为: 对 $\forall t > 0$, 有

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \\ 1-(x-t), & t < x \leqslant t+1, \\ (x-t)-1, & x > t+1 \end{cases} \tag{16}$$

证明. 注意: 特性方向为 $(1,1)$, 下图 (A) 给出了平行于特征方向的特征线族. 分别记 $t=x$ 和 $t=x-1$ 为直线 1 和 直线 2, 下图 (B) 给出了由这两条直线划分的三个子区域.



利用 u 在特征线上为常量, 则对 $\forall t_0>0$, 有

$$u(x_0,t_0)=\begin{cases} u(0,t_0)=1, & x_0\leqslant t_0,\\ u(x_0-t_0,0)=1-(x_0-t_0), & t_0<x_0\leqslant t_0+1,\\ u(x_0-t_0,0)=(x_0-t_0)-1, & x_0>t_0+1,\end{cases}$$

直接差分化方法

下面讨论求解一阶双曲型方程 (14) 的有限差分格式.

对求解域 $G = (0,1) \times (0,T]$ 作均匀网格剖分.

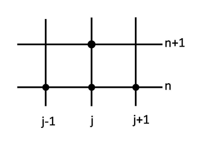
节点：

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \cdots, N$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \cdots, M$$

其中空间和时间步长：$h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$.

考虑网格点 (x_j, t_n) 处的微分方程: $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.



自然有三种两层显式差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad \text{如果 } a > 0, \text{ 为迎风格式} \tag{17}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad \text{如果 } a < 0, \text{ 为迎风格式} \tag{18}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \tag{19}$$

截断误差分别为

$$O(\tau + h),\ O(\tau + h),\ O(\tau + h^2)$$

记网比 $r = a\frac{\tau}{h}$, 则 (17), (18) 和 (19) 分别等价于

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-r)u_j^n \tag{20}$$

$$u_j^{n+1} = (1+r)u_j^n - ru_{j+1}^n \tag{21}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2}(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) \tag{22}$$

积分守恒差分格式

考察拟线性守恒型 (或散度型) 微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

设 G 是 x, t 平面任一有界域, 利用 Green 公式, 有(其中 $\Gamma = \partial G$)

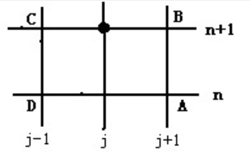
$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x}\right) dxdt = \int_\Gamma (f(u), u) \cdot \vec{n} ds = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_\Gamma (f(u), u) \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{24}$$

(1) Lax 格式 (显格式)

设网格如下图所示



取 G 为以 $A(j+1,n)$, $B(j+1,n+1)$, $C(j-1,n+1)$ 和 $D(j-1,n)$ 为顶点的矩形, $\Gamma=\widehat{ABCDA}$ 为其边界.

则由 (24), 有

$$\left(\int_{DA}+\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}\right)(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=0 \tag{25}$$

注意在直线 DA 上 $\vec{n}=(0,-1)$, $ds=dx$, 所以

$$\int_{DA}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{DA}(f(u),u)\cdot(0,-1)dx=\int_{DA}-udx$$

类似的可得

$$\int_{AB}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{AB}(f(u),u)\cdot(1,0)dt=\int_{AB}f(u)dt$$
$$\int_{BC}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{BC}(f(u),u)\cdot(0,1)(-dx)=\int_{BC}u(-dx)$$
$$\int_{CD}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{CD}(f(u),u)\cdot(-1,0)(-dt)=\int_{CD}-f(u)(-dt)$$

这样由 (25) 可得

$$-\int_{DA} u dx + \int_{AB} f(u) dt - \int_{BC} u dx + \int_{CD} f(u) dt = 0 \tag{26}$$

对 (26) 的左端各个积分项分别采用如下数值积分公式:

$$\begin{aligned}
-\int_{DA} u dx &\approx -\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)\cdot 2h \quad \text{(梯形公式)} \\
-\int_{BC} u dx &\approx -u_j^{n+1}\int_{BC} dx = u_j^{n+1}\cdot 2h \quad \text{(中矩形公式)} \\
\int_{AB} f(u) dt &\approx f(u_{j+1}^n)\cdot \tau \quad \text{(下矩形公式)} \\
\int_{CD} f(u) dt &\approx -f(u_{j-1}^n)\cdot \tau \quad \text{(下矩形公式)}
\end{aligned}$$

将上述近似式代人 (26), 则可得 Lax (Lax-Friedrichs) 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h} = 0$$

它可改写为 (其中 $f_j^n = f(x_j, u_j^n)$, $r = \frac{\tau}{h}$)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{r}{2}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) \tag{27}$$

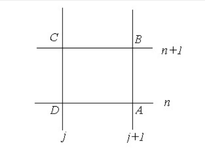
可以证明 Lax-Friedrichs 格式截断误差的阶为

$$O(\tau + h^2)$$

特别当 $f(u) = au$ 时, 可得到一阶双曲型方程 (14) 的 Lax 格式.

(2) Box 格式 (隐格式)

取 G 为以$A(j,n)$, $B(j,n+1)$, $C(j-1,n+1)$ 和 $D(j-1,n)$ 为顶点的矩形, 记 $\Gamma=\widehat{ABCDA}$ 为其边界.



则由 (24), 及类似于Lax 格式的推导 (各项积分均用梯形公式进行近似), 可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\tau}+\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{h}-\frac{f_j^{n+1}-f_{j-1}^{n+1}}{h}=0 \tag{28}$$

其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$.

黏性差分格式

黏性差分格式的构造分两步.

1. 通过引入含二阶空间偏导数的小参数项 (称为黏性项), 使双曲型方程成为一带小参数的抛物方程.
2. 利用中心差商代替导数, 选取小参数 (粘性系数), 建立相应的差分格式.

下面对于线性模型问题 (14), 给出该格式的构造过程.

引入黏性项，使得 (14) 成为如下带小参数的抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0$$

特别，取 $\varepsilon = \frac{h}{2}|a(x)|$，并利用中心差商代替偏导数，可得格式 (称为Lax-wendroff 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2}|a_j|\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}$$

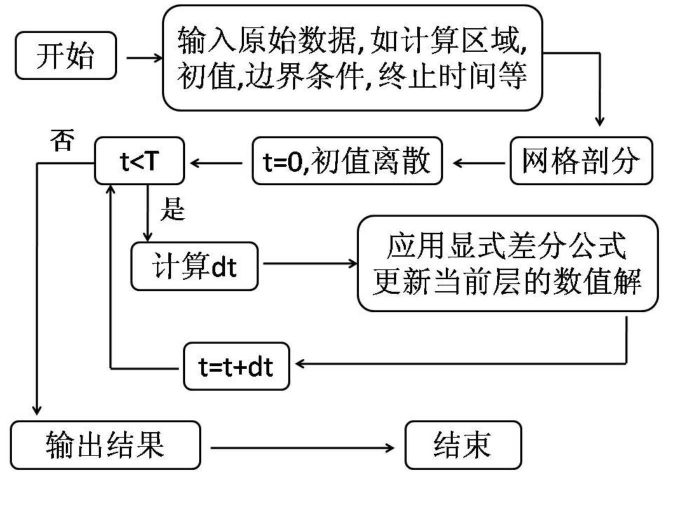
或

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a_j\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2}a_j\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{2h^2}, & a \geqslant 0 \\ \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a_j\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h} = -\frac{h}{2}a_j\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{2h^2}, & a < 0 \end{cases}$$

考虑如下混合问题差分离散的算法实现,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \phi(t) \end{cases}$$

显式算法流程


开始
输入原始数据,如计算区域,初值,边界条件,终止时间等
网格剖分
t=0,初值离散
t<T
否
是
计算dt
应用显式差分公式更新当前层的数值解
t=t+dt
输出结果
结束

算例：利用有限差分法去求解混合问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |x-1|, \quad u(0,t) = 1 \end{cases}$$

其真解为(见前面的例 1)

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \ t \geqslant 0 \\ 1 - x + t, & t < x \leqslant t + 1, \ t \geqslant 0 \\ x - t - 1, & x > t + 1, \ t \geqslant 0 \end{cases}$$

该模型的 Matlab 代码实现如下：

```
function pde = model_data()
% MODEL_DATA 模型数据

TI = 0;
TF = 1;
SI = 0;
SF = 2;
pde = struct('u_exact',@u_exact,'u_initial',@u_initial,...
    'u_left',@u_left,'time_grid',@time_grid,'space_grid',
    @space_grid,'a',1);

    function [T,tau] = time_grid(NT)
        T = linspace(TI,TF,NT+1);
        tau = (TF - TI)/NT;
    end
    function [X,h] = space_grid(NS)
        X = linspace(SI,SF,NS+1)';
        h = (SF - SI)/NS;
    end
    function U = u_exact(X,T)
      [x,t] = meshgrid(X,T);
      U = zeros(size(x));
      case1 = (x <= t);
      case2 = (x > t+1);
```

```
        case3 = ~case1 & ~case2;
        U(case1) = 1;
        U(case3) = 1-x(case3)+t(case3);
        U(case2) = x(case2) - t(case2) -1;
        U = U';
    end
    function u = u_initial(x)
        u = abs(x-1);
    end

    function u = u_left(t)
        u = ones(size(t));
    end

end
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现

```
function [X,T,U] = advection_fd1d(NS,NT,pde,method)
%% WAVE_EQUATION_FD1D 利用有限差分方法计算一维双曲方程
%
%    输入参数:
%        NS 整型, 空间剖分段数.
%        NT 整型, 时间剖分段数.
%        pde 结构体, 待求解的微分方程模型的已知数据,
%                    如边界、初始、系数和右端项等条件.
%        method 字符串, 代表求解所用格式
%            'explicity' 或 'e' 或 'E' : 显式迎风格式
%            'implicity' 或 'i' 或 'I' : 隐式迎风格式
%            'explicity center' 或 'ec' 或 'EC' : 显式中心格式
%            'implicity center' 或 'ic' 或 'IC': 隐式中心格式
%            'leap frog' 或 'lf' 或 'LF' : 跳蛙格式
%    输出参数:
%        X 长度为 NS+1 的列向量, 空间网格剖分
%        T 长度为 NT+1 的行向量, 时间网格剖分
%        U (NS+1)*(NT+1) 矩阵, U(:,i) 表示第 i 个时间层网格部分上的数值解
%
%    作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 II

```
[X,h] = pde.space_grid(NS);
[T,tau] = pde.time_grid(NT);
N = length(X);M = length(T);


U = zeros(N,M);
% 初值条件
U(:,1) = pde.u_initial(X);
a = pde.a;
r = a*tau/h;
% 边值条件
if a >= 0 % 左边值条件
   U(1,:) = pde.u_left(T);
else
   U(end,:) = pde.u_right(T); %右边值条件
end



%%
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 III

```
switch(method)
    case {'explicity','e','E'}
        explicity();
    case {'implicity','i','I'}
        implicity();
    case {'explicity␣center', 'ec','EC'}
        explicity_center();
    case {'implicity␣center', 'ic','IC'}
        implicity_center();
    case {'leap␣frog','lf','LF'}
        leap_frog();
    otherwise
        disp(['Sorry,␣I␣do␣not␣know␣your␣', method]);
end

    function explicity()
        for i = 2:M
            if a > 0
                U(2:end,i) = U(2:end,i-1) - r*(U(2:end,i-1) - U(1:
    end-1,i-1));
            else
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 IV

```
            U(1:end-1,i) = U(1:end-1,i-1) - r*(U(2:end,i-1) -
U(1:end-1,i-1));
        end
    end
end

function implicity()
    if a > 0
        d = (1+r)*ones(N-1,1);
        c = -r*ones(N-2,1);
        A = diag(d) + diag(c,-1);
        for i = 2:M
            F = zeros(N-1,1);
            F(1) = r*U(1,i);
            U(2:end,i) = A\(U(2:end,i-1)+F);
        end
    else
        d = (1-r)*ones(N-1,1);
        c = r*ones(N-2,1);
        A = diag(d) + diag(c,1);
        for i = 2:M
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 V

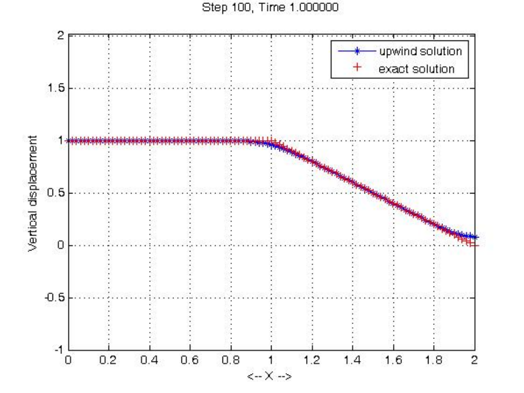
```
                F = zeros(N-1,1);
                F(end) = -r*U(end,i);
                U(1:end-1,i) = A\(U(1:end-1,i-1)+F);
            end
        end
    end
    function explicity_center()

    end
    function implicity_center()

    end
    function leap_frog()

    end


end
```

主测试脚本

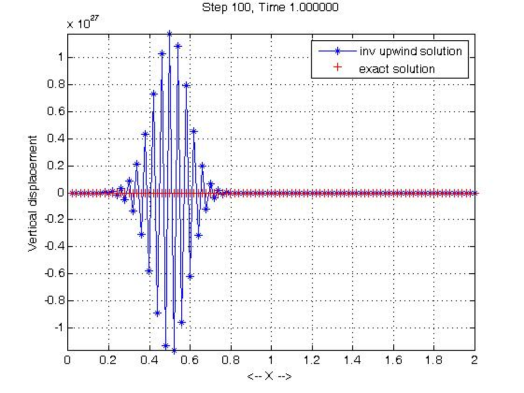
```
%% 一维双曲方程有限差分方法主测试脚本 main_test.m
%   依次测试:
%         显格式
%         隐格式
%   并可视化数值计算结果。
%
% 作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

pde = model_data(); %模型数据结构体

% 显格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'explicity');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解

% 隐格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'implicity');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,UE);% 以随时间变化方式显示数值解
```

主测试脚本 II

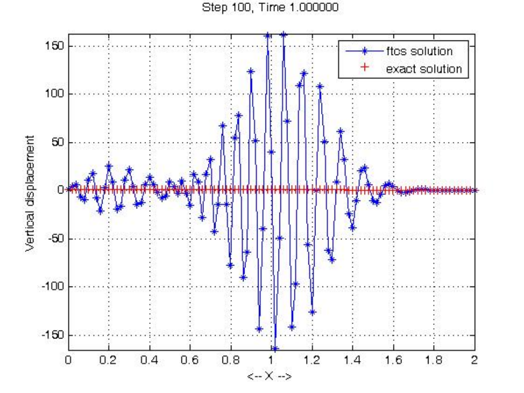
```
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解
```



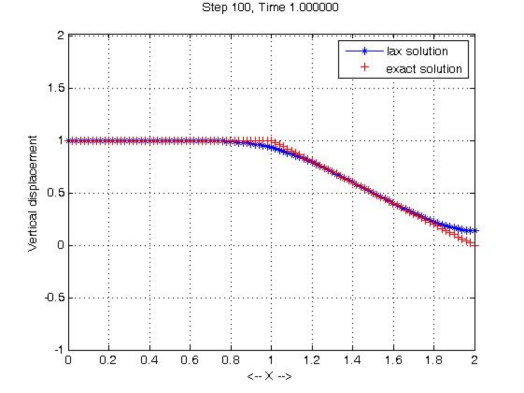
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$



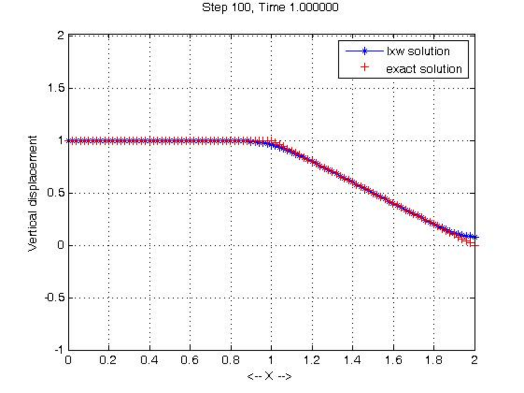
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$



$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$



$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\frac{h}{2}a\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$$

稳定性分析

Fourier 分析: 将 $u_{j+m}^{n+q} = v_{n+q} e^{i\alpha(x_j + mh)}$ 代入 (见 (20))

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1-r) u_j^n$$

可得

$$v_{n+1} e^{i\alpha x_j} = \left(r e^{i\alpha(x_j - h)} + (1-r) e^{i\alpha x_j} \right) v_n$$

$\Rightarrow$

$$v_{n+1} = \left(r e^{-i\alpha h} + (1-r) \right) v_n$$

由此求得该格式的增长因子, 再由 Von Neumann 条件可知: 差分格式 (20) 稳定的充要条件是

$$\left| r e^{-i\alpha h} + (1-r) \right| \leqslant 1 \iff \left| r e^{-i\alpha h} + (1-r) \right|^2 \leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$|r(\cos\alpha h-1)+1-ir\sin\alpha h|^2\leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$[r(\cos\alpha h-1)+1]^2+r^2\sin^2\alpha h\leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2(\cos\alpha h-1)^2+2r(\cos\alpha h-1)+r^2\sin^2 ah\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$2r^2-2r^2\cos\alpha h+2r(\cos\alpha h-1)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(r^2-r)(1-\cos\alpha h)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2\leqslant r \quad\Leftrightarrow\quad a^2\frac{\tau^2}{h^2}\leqslant a\frac{\tau}{h}$$

$\Leftrightarrow$

$$a\geqslant 0,\quad |r|=a\frac{\tau}{h}\leqslant 1 \tag{29}$$

类似分析可知:

格式 (21) 稳定的充要条件是:

$$a \leqslant 0, \quad |r| = -a\frac{\tau}{h} \leqslant 1 \tag{30}$$

格式 (22) 对一切 $r \neq 0$ 均不稳定.

由此可得如下结论: 当 $a \geq 0$ 时只有 (20) 可用, 当 $a \leq 0$ 时只有 (21) 可用.

习题 1 导出格式 (21) 和格式 (22) 的稳定条件.

类似的，由 Fourier 分析可知：

Lax-Friedrichs 格式稳定性条件是：

$$|a|\frac{\tau}{h} \leqslant 1$$

Box 格式是无条件稳定的

Lax-wendroff 格式稳定性条件为

$$|a|\frac{\tau}{h} \leqslant 1.$$

下面对 $a \geqslant 0$ 的情形, 讨论稳定条件 (29) 与特征性质的关系.

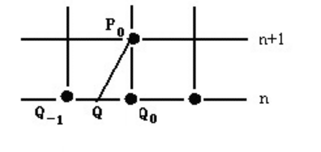
考察点 P_0 处的数值解 u_j^{n+1}, 它与第 n 个时间层上的第 j 和 $j \pm 1$ 个点处的值

$$u_j^n, \quad u_{j\pm1}^n$$

有关.

$$|r| = a\frac{\tau}{h} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \text{特征线的斜率}\ \frac{1}{a} \geq \frac{\tau}{h}$$

所以 Q 介于 Q_{-1} 到 Q_0 之间.



注意 $u(P_0)=u(Q)$, 所以点 P_0 处的数值解 u_j^{n+1} 用 u_{j-1}^n 和 u_j^n 作线性(内)插值是合适的，即

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= (u_{j-1}^n \cdot QQ_0 + u_j^n \cdot Q_{-1}Q)/h \\
&= (u_{j-1}^n \cdot a\tau + u_j^n \cdot (h - a\tau))/h \\
&= r u_{j-1}^n + (1-r)u_j^n
\end{aligned}
$$

上式也就是 (20).

类似的也可对稳定条件 (30) 做同样的分析, 此时过 P_0 的特征偏右, 与 $t = t_n$ 的交点 Q 落在 Q_0 右侧. 容易验证利用线性 (内) 插可得出 u_j^{n+1} 满足 (21).

这说明差分格式 (20), (21) 与特征走向有关, 按照气体力学的含义 (a 表示气流速度), 称之为迎风格式.

用同样的思想可构造变系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

的差分格式. 此时 a 可能变号, 因此相应的迎风格式为

$$\begin{cases}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0, & a_j\geqslant 0\\ \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0, & a_j<0\end{cases}\tag{31}$$

其中 $a_j=a(x_j)$.

习题 2 试求下列混合问题的解 (右边界条件)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ -} \infty < x < 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = |x+1| \ \ u(0,t) = 1 \end{cases}$$