有限差分法

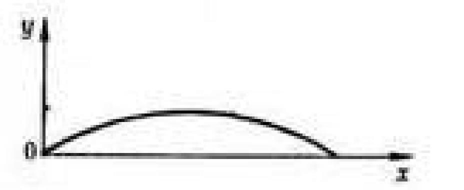
案例 3：弦的横振动问题

1. 弦的横振动问题
   - 背景问题
   - 数学建模
   - 波动方程及其特征
   - 有限差分方法
   - 算法设计与实现
   - 数值实验
   - 理论分析

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦，在平衡位置附近作微小的振动 (以某种方式激发，在同一平面内，弦上各点的振动方向相互平行，且与波的传播方向垂直)，求弦上各点的运动规律。

将 x 轴的正向取为水平方向 (或纵向) 向右，弦的左端点为原点，弦的右端点为其长度 L，如下图所示。

设$u(x,t)$表示弦上各点在t时刻沿垂直于 x 方向 (或横向) 的位移。

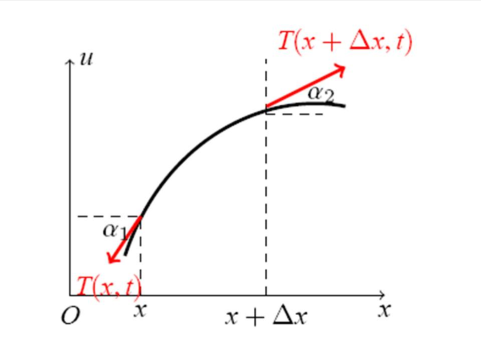


下面基于如下假设来建立弦的振动方程.

1. 弦是均匀的, 且弦的截面直径与弦的长度相比可以忽略. 即可将其视为一根曲线, 其中 线密度 ρ 是常数.
2. 弦在一平面内作微小横振动. 即弦位置始终在同一平面内一条直线附近, 且弦上各点均在垂直于该直线的方向上微小的振动.
3. 弦是柔软的, 它在形变时不抵抗弯曲. 即弦上各点间的张力方向与弦的切线方向一致, 弦上每一点所受张力与时间无关, 跟张力相比, 弦的重量完全可以略去.

采用微元法进行分析，考虑微元

$$[x, x + \Delta x] \times [t, t + \Delta t]$$



利用微小振动和张力与时间无关且方向沿着切线方向假设，可以证明：若弦不受水平方向 (x 方向或纵向) 外力的作用，则

张力 T 可以近似视为常数.

事实上，由假设 3 知：弦段在纵向的合力为 (注意弦没有水平方向的外力)

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1$$

又由假设 2 知

$$\cos\alpha_1 \approx 1, \quad \cos\alpha_2 \approx 1$$

由力的平衡原理，有

$$T(x+\Delta x) - T(x) \approx 0 \iff T(x+\Delta x) \approx T(x)$$

□

在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 上的冲量为

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+\Delta t} (T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1)dw \\
&= \int_t^{t+\Delta t} T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, w)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, w)}{\partial x}\right] dw \\
&= \int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdw
\end{aligned}$$

其中利用了

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx tan\alpha_1 = \frac{\partial u(x, w)}{\partial x} \\
\sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx tan\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x, w)}{\partial x}
\end{aligned}$$

在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 上增加的动量为

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\Delta x}\rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx\\ &\quad=\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}\rho\frac{\partial^2 u(x,w)}{\partial t^2}dwdx.\end{aligned}$$

假设弦振动的过程中没有受 u 方向(或横向)外力的作用，则由动量守恒定律：合力做的冲量＝动量的变化

$\Rightarrow$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}\left[\rho\frac{\partial^2 u(x,w)}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u(x,w)}{\partial x^2}\right]dxdw=0$$

由$\Delta x, \Delta t$的任意性知

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \Leftrightarrow u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

其中 $a^2=T/\rho$.

若弦振动的过程中还受横向外力的作用，并记 $F(x,t)$ 为单位长度所受的横向外力，则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)/\rho = f(x,t).$$

初始条件：弦在初始时刻$t=0$的位置和速度

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \phi(x) \qquad (0 \le x \le L).$$

边界条件:

- 第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）

$$u(0,t)=0, \qquad u(L,t)=0.$$

- 第二类边界条件（Neuman 边界条件）

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \text{或者} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu(t).$$

- 第三类边界条件（Robin 边界条件）

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma_1 u\right)\right|_{x=0}=\mu(t), \quad \text{或者} \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma_2 u\right)\right|_{x=L}=\nu(t).$$

其中σ_1,σ_2为已知正数。

弦的振动方程和初始条件、边界条件结合起来，得到定解问题，称为初边值问题，或混合问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \phi(x), & 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

考虑二阶线性双曲型方程最简单模型 (波动方程初值问题)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \phi_0(x), u_t(x,0) = \phi_1(x), -\infty < x < \infty \tag{3}$$

其中 $a > 0$ 是常数.

两个 特征方向:

$$\frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{a} \tag{4}$$

对应两族特征线

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2$$

利用上述变量代换将方程 (2) 变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c_1 \partial c_2} = 0$$

从而方程 (2) 的通解为

$$u = f_1(c_1) + f_2(c_2) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \tag{5}$$

利用 (5) 和初值条件 (3) 可导出模型问题的解析解表示式.

D'Alembert (达朗贝尔) 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \phi_1(\xi)d\xi \qquad (6)$$

证明：由初值条件 (3) 和 (5) 有：

$$f_1(x) + f_2(x) = \phi_0(x) \qquad (7)$$
$$-af'_1(x) + af'_2(x) = \phi_1(x) \qquad (8)$$

分别作 $a\cdot(7)' + (8)$，以及 $a\cdot(7)' - (8)$，得

$$\begin{cases} af'_2(x) = \frac{1}{2}(a\phi'_0(x) + \phi_1(x)) \\ af'_1(x) = \frac{1}{2}(a\phi'_0(x) - \phi_1(x)) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x (a\phi'_0(\xi) - \phi_1(\xi))d\xi + f_1(0) \\ f_2(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x (a\phi'_0(\xi) + \phi_1(\xi))d\xi + f_2(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

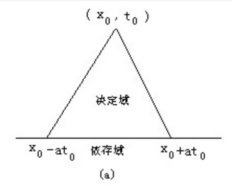
$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}(\phi_0(x) - \phi_0(0)) - \frac{1}{2a}\int_0^x \phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + f_1(0) \\ f_2(x) = \frac{1}{2}(\phi_0(x) - \phi_0(0)) + \frac{1}{2a}\int_0^x \phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + f_2(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (注意：$f_1(0) + f_2(0) = \phi_0(0)$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f_1(x-at) + f_2(x+at) \\ &= \frac{1}{2}[\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \phi_1(\xi)d\xi \end{aligned}$$

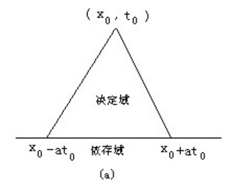
$\square$

由 D'Alembert 公式可得到如下依存域，决定域和影响域的概念.

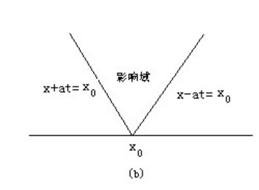


依存域: u 在点 (x_0, t_0) 处的值仅依赖于初值函数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ 在该 (局部) 区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 的值, 与区间外的初值无关, 故称 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 为点 (x_0, t_0) 的依存域. (见上图(a))

说明了双曲型方程的重要特征：解的局部依赖性；利用该特性知：$t = t_n$ 时间层上的某个空间点 x_j 的数值解只与 $t = t_{n-1}$ 上的 x_j 的小邻域上的值有关，并且时间步长越小，该小邻域就越小.



决定域: 区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的初值不仅确定 $u(x_0, t_0)$, 而且确定了 u 在以 $(x_0 - at_0, 0)$, $(x_0 + at_0, 0)$, (x_0, t_0) 为顶点的三角形域内的值, 故称此三角形域为区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 的决定域. (见上图(a))



影响域: 对于 x 轴上任一点 $(x_0, 0)$, 依存域包含 $(x_0, 0)$ 的一切点 (x, t) 的集合是以 $(x_0, 0)$ 为顶点, 过该点的特征 $x - at = x_0$ 和 $x + at = x_0 (t > 0)$ 为边的角形域, 称之为 $(x_0, 0)$ 的影响域. (见上图(b))

可见: 初值函数在 $(x_0, 0)$ 处的值, 随着时间 t 的增大, 在 t 时间层的影响区间越来越大.

下面，首先针对波动方程初值问题 (见 (2), (3)):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \phi_0(x), u_t(x,0) = \phi_1(x), -\infty < x < \infty$$

介绍有限差分法.

网格剖分

对求解域 $G = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ 作均匀网格剖分.

节点:

$$x_j = jh, \quad j = 0, \pm 1, \cdots$$

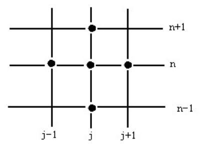
$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \cdots$$

其中空间和时间步长: h, τ.

显格式

在节点 (x_j, t_n) 处对微分方程 (2) 进行离散

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 0, \pm 1, \cdots; n = 1, 2 \cdots \tag{9}$$



关于节点 (x_j, t_n) 的差分方程 (9) 的 截断误差 为 $O(\tau^2 + h^2)$.
利用初始条件可导出在前两个时间层上的离散格式：

$$u_j^0 = \phi_0(x_j) \tag{10}$$

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \phi_1(x_j) \tag{11}$$

相应截断误差为 $O(\tau)$.

为了提高精度，我们采用如下改进的方案逼近初始时刻的 u_t.

用中心差商代替 u_t, 得

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = \phi_1(x_j) \tag{12}$$

在 (9) 中令 $n = 0$,

$$\frac{u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}$$

利用 (12), 消去 u_j^{-1}, 得到格式($r = a\tau/h$ 是网比)

$$u_j^1 = \frac{r^2}{2}[\phi_0(x_{j-1}) + \phi_0(x_{j+1})] + (1 - r^2)\phi_0(x_j) + \tau\phi_1(x_j) \tag{13}$$

其截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

接着, 针对如下一维弦振动方程初边值问题(或混合问题):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in (0,L), t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \phi(x), & 0 < x < L, \\ u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

给出其有限差分格式.

取 $h = L/J, \tau = T/N$.

这时关于第 $n+1$ 层, 第j 个节点处的差分格式由 (9) 变为

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} - a^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}=f_j^n,$$
$$j=1,\cdots N-1;\ n=1,2\cdots,J-1$$

边值条件为:

$$u_0^n=\alpha(n\tau),\ u_J^n=\beta(n\tau),\ n=0,1\cdots,J$$

初值条件: 由 (10) 和 (11) 变为

$$u_j^0 = \phi_0(x_j),\ \frac{u_j^1-u_j^0}{\tau}=\phi_1(x_j),\ \ j=1,\cdots N-1$$

隐格式

对格式 (9) 作以下修改：将第 n 层沿 x 方向的二阶中心差商，用第 $n-1$ 层、n 层、$n+1$ 层的沿 x 方向的二阶中心差商作加权平均代替，

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2} &= a^2\Big[\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\ &\quad+(1-2\theta)\frac{u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n}}{h^2} \\ &\quad+\theta\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\Big] \qquad (15)\end{aligned}$$

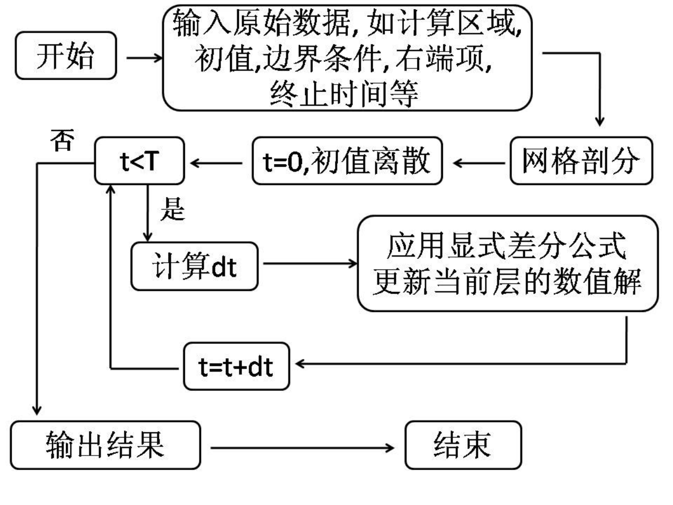
其中 $0\le\theta\le1$，显然当 $\theta=0$ 时为显格式.

考虑如下波动方程差分离散的算法实现，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\
&u(L,t) = u_L(x), \quad u(R,t) = u_R(x), \\
&u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

首先给出显模式算法的流程，然后给出实现算法的Matlab代码.

显格式算法流程


开始
输入原始数据,如计算区域,初值,边界条件,右端项,终止时间等
网格剖分
t=0,初值离散
t<T
否
是
计算dt
应用显式差分公式更新当前层的数值解
t=t+dt
输出结果
结束

Matlab 实现

```
function [X,T,U] = wave_equation_fd1d(NS,NT,pde,theta)
%% WAVE_EQUATION_FD1D 利用有限差分方法计算一维弦振动方程
%
%   输入参数:
%       NS 整型, 空间剖分段数.
%       NT 整型, 时间剖分段数.
%       pde 结构体, 待求解的微分方程模型的已知数据,
%                     如边界、初始、系数和右端项等条件.
%       theta 双精度类型,  隐格式参数,  在 [0,1] 之间,
%               当 theta=0 时, 格式为显格式.
%   输出参数:
%       X 长度为 NS+1 的列向量, 空间网格剖分
%       T 长度为 NT+1 的行向量, 时间网格剖分
%       U (NS+1)*(NT+1) 矩阵, U(:,i) 表示第 i 个时间层网格部分上的数值解
%
%   作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

if nargin < 4
    theta = 0; % 默认用显格式
end
```

Matlab 实现 II

```
[X,h] = pde.space_grid(NS);
[T,tau] = pde.time_grid(NT);
N = length(X);M = length(T);
r = pde.a()*tau/h;
if r >=1 && theta==0
   error('时间空间离散不满足显格式的稳定条件! ')
end
r2 = r*r;
U = zeros(N,M);
% 初值条件
U(:,1) = pde.u_initial(X);
U(2:end-1,2) = r2/2*(U(1:end-2,1)+U(3:end,1)) + (1-r2)*U(2:end
    -1,1)...
    + tau*pde.udt_initial(X(2:end-1));
% 边值条件
U(1,:) = pde.u_left(T);
U(end,:) = pde.u_right(T);

%% 隐格式
d = 1 + 2*ones(N-2,1)*r2*theta;
c = -ones(N-3,1)*r2*theta;
```

Matlab 实现 III

```
A2 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);

d = 2 - 2*ones(N-2,1)*r2*(1-2*theta);
c = ones(N-3,1)*r2*(1-2*theta);
A1 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);

d = -1 - 2*ones(N-2,1)*r2*theta;
c = ones(N-3,1)*r2*theta;
A0 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);
for i=3:M
    RHS = tau*tau*pde.f(X,T(i));
    RHS(2) = RHS(2) + theta*r2*U(1,i) + ...
        (1-2*theta)*r2*U(1,i-1)+ theta*r2*U(1,i-2);
    RHS(end-1) = RHS(end-1) + theta*r2*U(end,i) + ...
        (1-2*theta)*r2*U(end,i-1)+ theta*r2*U(end,i-2);
    U(2:end-1,i) = A2\(A1*U(2:end-1,i-1) + A0*U(2:end-1,i-2)+RHS
    (2:end-1));
end

end
```

算例 1：我们利用有限差分法去求解

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} \frac{0.5}{7}x, & x < 0.7\\ \frac{0.5}{3}(1-x), & x \geq 0.7 \end{cases}\\
&u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

其中系数$a^2 = 1$.

其 Matlab 代码表示如下：

```
function pde = model_data()
% MODEL_DATA 模型数据

pde = struct('u_initial',@u_initial,'udt_initial',@udt_initial
    ,...
    'u_left',@u_left,'u_right',@u_right,'f',@f,'time_grid',...
    @time_grid,'space_grid',@space_grid,'a',@a);

    function [T,tau] = time_grid(NT)
        T = linspace(0,4,NT+1);
        tau = 4/NT;
    end
    function [X,h] = space_grid(NS)
        X = linspace(0,1,NS+1)';
        h = 1/NS;
    end
    function u = u_initial(x)
        u = zeros(size(x));
        u(x < 0.7) = 0.5/7*x(x<0.7);
        u(x >= 0.7) = 0.5/3*(1-x(x>=0.7));
    end

    function u =udt_initial(x)
       u = zeros(size(x));
```

```
    end
    function u = u_left(t)
        u = zeros(size(t));
    end
    function u = u_right(t)
        u = zeros(size(t));
    end
    function f = f(x,t)
        f = zeros(size(x));
    end
    function a = a()
        a = 1;
    end
end
```

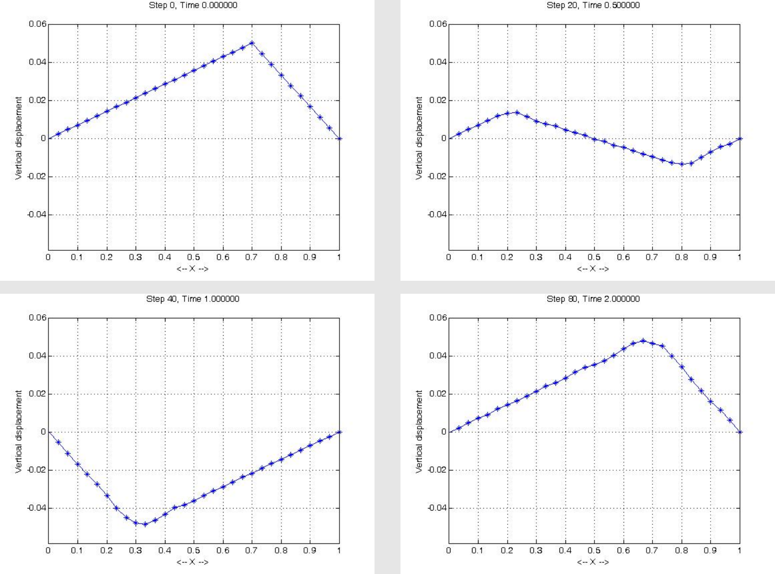
主测试脚本

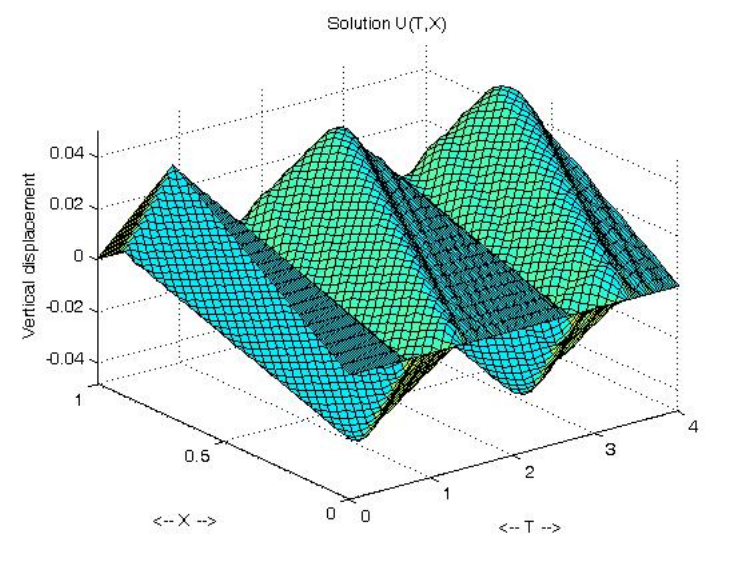
```
%% 一维一维弦振动方程有限差分方法主测试脚本 main_test.m
%    依次测试:
%         显格式 (theta = 0)
%         隐格式(theta = 0.5)
%    并可视化数值计算结果。
%
% 作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

pde = model_data(); %模型数据结构体

% 显格式
[X,T,U] = wave_equation_fd1d(100,800,pde);
showvarysolution(X,T,U);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解

% 隐格式
[X,T,U] = wave_equation_fd1d(100,400,pde,0.5);
showvarysolution(X,T,U);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解
```


Step 0, Time 0.000000
Step 20, Time 0.500000
Step 40, Time 1.000000
Step 80, Time 2.000000
Vertical displacement
<-- X -->


Solution U(T,X)
Vertical displacement
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
1
0.5
0
<-- X -->
0
1
2
3
4
<-- T -->

显格式 (9) 的稳定性分析

考虑周期边界条件的初边值问题 (即 $\alpha(t)=\beta(t)$)，且 $L=1$.

先将三层格式 (9) 化为两层格式. 为此回顾连续问题 (波动方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

引入辅助函数

$$v=\frac{\partial u}{\partial t},\quad w=a\frac{\partial u}{\partial x}$$

则可将波动方程写为如下一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{16}$$

若令 $U = (v, w)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

则 (16) 可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} - A\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

类似地，对三层格式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

引入辅助序列

$$v_l^m = \frac{u_l^m - u_l^{m-1}}{\tau}, \quad w_{l-\frac{1}{2}}^m = a\frac{u_l^m - u_{l-1}^m}{h}$$

则可将 (9)写成如下二层格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = a\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} = a\frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} \end{cases} \tag{17}$$

接着利用 Fourier 方法分析 (17) 的稳定性.

将 (17) 等价写为$(r = a\frac{\tau}{h})$

$$\begin{cases} v_j^{n+1} - v_j^n = r\left(w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\ w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n = r\left(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}\right) \end{cases} \tag{18}$$

令通项

$$v_{j+m}^{n+q} = \mu_{n+q}^1 e^{i\alpha(x_j+x_m)}, \quad w_{j+m}^{n+q} = \mu_{n+q}^2 e^{i\alpha(x_j+x_m)}, \quad \alpha = 2p\pi$$

代入 (18)，可得

$$\begin{cases} (\mu_{n+1}^1 - \mu_n^1)e^{i\alpha x_j} = r(e^{i\alpha\frac{h}{2}} - e^{-i\alpha\frac{h}{2}})\mu_n^2 e^{i\alpha x_j} \\ (\mu_{n+1}^2 - \mu_n^2)e^{i\alpha x_{j-1/2}} = r(e^{i\alpha\frac{h}{2}} - e^{-i\alpha\frac{h}{2}})\mu_{n+1}^1 e^{i\alpha x_{j-1/2}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (令 $c = 2r\sin\theta, \theta = \pi ph$)

$$\begin{cases} \mu_{n+1}^1 - \mu_n^1 = ic\mu_n^2 \\ \mu_{n+1}^2 - \mu_n^2 = ic\mu_{n+1}^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mu_{n+1}^1 = \mu_n^1 + ic\mu_n^2 \\ \mu_{n+1}^2 = \mu_n^2 + ic\mu_{n+1}^1 = ic\mu_n^1 + (1-c^2)\mu_n^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \mu_{n+1}^1 \\ \mu_{n+1}^2 \end{pmatrix} = G(c)\begin{pmatrix} \mu_n^1 \\ \mu_n^2 \end{pmatrix}$$

其中,

$$G(c) = \begin{pmatrix} 1 & ic \\ ic & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

因为 $ic \neq \overline{ic} = -ic$，所以

$$G(c) \neq (G(c))^H$$

又注意 $s = 2$ 以及增长矩阵 (与 τ 无关), 所以由案例 2 中命题 4 的推论可知:

差分格式 (17) (或 (18)) 稳定的充要条件是上述矩阵 G 的特征值满足

$$\begin{aligned}
&(1) \quad |\lambda_i(x)| \leq 1, \ i = 1, 2 \\
&(2) \quad \|G(x) - \frac{1}{2}(g_{11}(x) + g_{22}(x))\mathrm{I}\| \leq \mathrm{M}(|1 - |\lambda_1(\mathrm{x})|| + |\lambda_1(\mathrm{x}) - \lambda_2(\mathrm{x})|)
\end{aligned}$$

$G(c)$ 的特征方程为：

$$\lambda^2 - (2 - c^2)\lambda + 1 = 0 \tag{19}$$

由(案例 2 中引理 2)知: $G(c)$ 的特征根满足上述稳定性条件 (1)的充要条件是

$$|b| = \left|2 - c^2\right| \leqslant 1 - (-1) = 2$$

$\Leftrightarrow$ (注意 $c = 2r\sin\theta, \theta = \pi ph$)

$$\left|1 - 2r^2\sin^2\pi ph\right| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow \ r^2\sin^2\pi ph \leq 1, \ \ p = 0, \pm 1, \cdots$$

$\Leftrightarrow$

$$r \leqslant 1$$

下面接着讨论上述稳定性条件 (2) 对 r 的要求.

注意方程 (19) 的二根为 (因为由 $r \leqslant 1$ 知 $c^2 = 4r^2 \sin^2\theta \leqslant 4$)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[(2-c^2) \pm i\,|c|\sqrt{4-c^2}]$$

可知: $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, $|\lambda_2| = |\lambda_1| = 1$, 从而有

$$1 - |\lambda_1| = 0; \quad |\lambda_1 - \lambda_2| = |c|\sqrt{4-c^2} \tag{20}$$

另一方面 (注意 $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - c^2$)

$$G - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22})I = G - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c^2 & ic \\ ic & -\frac{1}{2}c^2 \end{bmatrix}$$

其 F-模为

$$\left\| G - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22})I \right\|_F = |c|\,(2 + \frac{1}{2}c^2)^{1/2} \tag{21}$$

由 (20) 和 (21) 知: 稳定性条件 (2)成立的充要条件是: 存在正常数 $M > 0$ 使得

$$|c|\,(2 + \frac{1}{2}c^2)^{1/2} \leqslant M\,|\lambda_1 - \lambda_2| = M\,|c|\,\sqrt{4 - c^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$(2 + \frac{1}{2}c^2)^{1/2} \leqslant M\sqrt{4 - c^2} \tag{22}$$

下面分两种情况讨论 (22) 是否成立.

当 $r<1$ 时, (22) 显然成立. 事实上, 注意 $c^2=4r^2\sin^2\theta$, 这时有

$$(2+\frac{1}{2}c^2)^{1/2}<2, \quad 2\sqrt{1-r^2}\leqslant\sqrt{4-c^2}$$

所以可取 (与 τ 无关) 的正常数 $M=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$, 使得 (22) 成立.

当 $r=1$ 时, (22) 不成立. 事实上, 若 $h\to 0$ (或 $\tau\to 0$), 总存在 p 使得相应的 $\theta\to\frac{\pi}{2}(\theta=\pi ph)$, 即 $c^2\to 4$. 这时 (22) 的左端 $\to 4$, 右端 $\to 0$, 所以 (22) 不成立, 即当 $r=1$ 时格式 (17) 不稳定.

综上可知: 差分格式 (17) 稳定的充要条件是网比

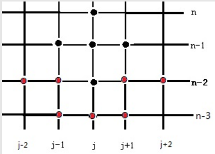
$$r=a\tau/h<1$$

下面，给出稳定条件 $r<1$ 的几何解释.

差分格式 (8) 的等价式可写为：

$$u_j^n = r^2(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + 2(1-r^2)u_j^{n-1} - u_j^{n-2}$$

由此知: 节点 (x_j, t^n) 处的差分解分量 u_j^n 与第 $n-1$ 个时间层的三个节点 (见实心黑点) 处的差分解分量有关;



继续传递知: u_j^n 与又与第 $n-2$ 个时间层的五个节点处的差分解分量有关.

依次递推：知 u_j^n 依赖初始层的数值解：

$$u_j^0, u_{j\pm1}^0, u_{j\pm2}^0, \cdots, u_{j\pm n}^0$$

即点 (x_j, t_n) 的差分解 u_j^n 的依存域为

$$[x_{j-n}, x_{j+n}] = [x_j - nh, x_j + nh] = [x_j - \frac{h}{\tau} t_n, x_j + \frac{h}{\tau} t_n]$$

而由前面知：点 (x_j, t_n) 处的真解的依存域为

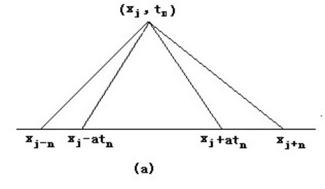
$$[x_j - at_n, x_j + at_n]$$

易知点 (x_j, t_n) 与数值解和真解的依存域的端点的连线的斜率分别为：$\pm\frac{\tau}{h}$ 和 $\pm a^{-1}$.

注意： $r = a\frac{\tau}{h}$， 所以 $r < 1$, 表示

$$\frac{\tau}{h} < a^{-1}$$

即数值解的依存域(严格)包含了真解的依存域 (见下图).

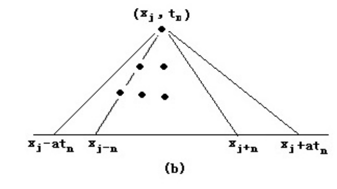


$r < 1$ 又称 Courant 条件或 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件.

反之若 $r > 1$, 表示

$$\frac{\tau}{h} > a^{-1}$$

即真解的依存域包含了数值解的依存域 (见下图).



则在网格比 r 不变的情况下, 当 $\tau \to 0$ (则 $h \to 0$)时, 由于初始函数在区间 $[x_j - at_n, x_{j-n})$ 和 $(x_{j+n}, x_j + at_n]$ 的值的改变, 不影响点 (x_j, t_n) 处的数值解 u_j^n 的值, 但确影响点 (x_j, t_n) 处的真解的值, 所以收敛性无法保证, 自然稳定性也没有 (因为稳定+相容 =收敛).

隐格式 (15) 的稳定性分析

当 $\theta \neq 0$ 时, (15) 为隐格式. 特别取 $\theta = 0.25$,

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} &= a^2[1/4\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\ &+ 1/2\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2} \\ &+ 1/4\frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2}]\end{aligned}$$

引入辅助序列

$$\begin{cases} v_j^k = \frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} \\ w_{j+\frac{1}{2}}^k = a\frac{\left(u_{j+1}^k - u_j^k\right) + \left(u_{j+1}^{k-1} - u_j^{k-1}\right)}{2h} \end{cases}$$

则上述差分格式可写为二层格式(证明见习题 1)

$$\begin{cases} \dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau} = a\dfrac{w_{j+\frac12}^n - w_{j-\frac12}^n + w_{j+\frac12}^{n+1} - w_{j-\frac12}^{n+1}}{2h} \\ \dfrac{w_{j-\frac12}^{n+1} - w_{j-\frac12}^n}{\tau} = a\dfrac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1} + v_j^n - v_{j-1}^n}{2h} \end{cases} \tag{23}$$

差分格式 (23) 的增长矩阵为

$$G(\alpha h) = \begin{pmatrix} \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} & \frac{ic}{1+c^2/4} \\ \frac{ic}{1+c^2/4} & \frac{1-c^2/4}{1+c^2/4} \end{pmatrix}, \quad c = 2r\sin\frac{\alpha h}{2}$$

容易验证 $G(\alpha h)$ 是酉矩阵, 且差分方程满足 Von Neumann 条件, 故 (23) 绝对稳定.(证明见习题 2)

习题 1 证明当 $\theta=0.25$ 时，差分格式 (15) 等价于 (23).

习题 2 证明 (23) 绝对稳定.

习题 3 试证明三层差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}=\frac{a^2}{16}\left[3\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+10\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right.$$
$$\left.+3\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right] \tag{24}$$

等价于如下两层差分格式：

$$\begin{cases} \dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}=\dfrac{a}{2}\dfrac{(w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n)+3(w_{j+1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n+1})}{2h} \\ \dfrac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\tau}=\dfrac{a}{2}\dfrac{(v_j^{n+1}-v_{j-1}^{n+1})+3(v_j^n-v_{j-1}^n)}{2h} \end{cases} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases} v_j^k=\dfrac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau} \\ w_{j+1/2}^k=\dfrac{a}{2}\dfrac{\left(u_{j+1}^k-u_j^k\right)+3\left(u_{j+1}^{k-1}-u_j^{k-1}\right)}{2h} \end{cases} \tag{26}$$