

有限差分法

案例 1：弦的平衡问题

1 弦的平衡问题

- 背景问题
- 数学建模
- 有限差分法
- 算法设计与实现
- 数值实验
- 理论分析

设一根长为 l 的弦，水平放置，两端固定在 A, B 两点。现有强度为 $f(x)$ 的小荷载作用在弦上，其作用方向是垂直向下或向上。在该荷载作用下，弦会发生形变，由于荷载强度较小，因而发生的形变也很小，最终会达到平衡。

图(a)和图(b)分别给出了当荷载垂直向下和向上作用在弦上，弦平衡状态下的曲线。

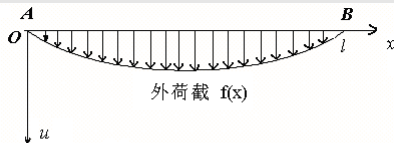


图 (a)

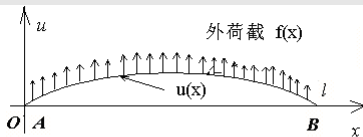


图 (b)

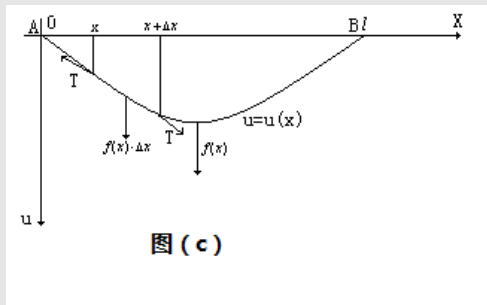
首先建立坐标系

- 1 将 x 轴(即横轴) 的正向取为水平方向向右;
- 2 关于纵轴 (这里记为 u 轴) 的正向, 规定其与荷载作用的方向相同, 这时可能有两种取法:
 - 当荷载垂直向下, u 轴的正向垂直向下(见图(a))
 - 当荷载垂直向上, u 轴的正向垂直向上(见图(b))

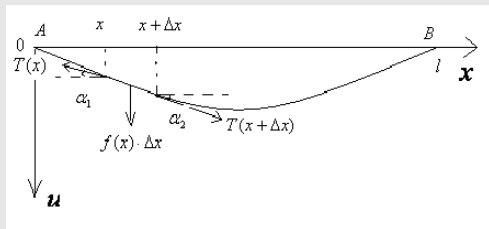
在此坐标系的规定下, 平衡状态下弦的曲线

$$u = u(x) > 0$$

下面从第一个力学原理(力平衡条件)出发, 导出 $u(x)$ 所满足的关系式。采用微元法进行分析, 见图(c)。

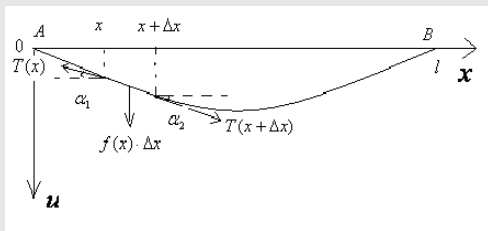


考虑 $[x, x + \Delta x]$ 所对应的弦段



该弦段受以下几个力的作用：

- ▶ 向下的合外力 $f(x)\Delta x$ (设荷载强度在 $[x, x + \Delta x]$ 上变化不大，否则应取其在该微元上的定积分)
- ▶ 两端各有一个张力，其方向是沿着弦的切线向外的，这里设张力的大小为常量 T



该弦段沿水平所受张力的力平衡方程为

$$T \cos \alpha_2 - T \cos \alpha_1 = 0 \quad (1)$$

沿垂直方向上的力与外力平衡，所以有

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 + f(x) \cdot \Delta x = 0$$

上式等价于

$$T \cos \alpha_2 \cdot \tan \alpha_2 - T \cos \alpha_1 \cdot \tan \alpha_1 + f(x) \cdot \Delta x = 0 \quad (2)$$

将(1)代入(2)整理得

$$\cos \alpha_1 \cdot T \cdot [\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1] + f(x) \cdot \Delta x = 0$$

而 $\tan \alpha_1 = u'(x)$, $\tan \alpha_2 = u'(x + \Delta x)$, 在小扰动假设下 ($\cos \alpha_1 \approx 1$), 上式可以改写成

$$T \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} + f(x) \approx 0,$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 可得平衡曲线 u 在点 x 处所满足的关系式

$$-Tu''(x) = f(x), \quad 0 < x < l \quad (3)$$

由已知条件知 u 还应满足边值条件

$$u(0) = 0, u(l) = 0 \quad (4)$$

(3) 和 (4) 便构成了两点边值问题, 可以证明解的存在唯一性

本案例将针对如下两点边值问题介绍有限差分法.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, \quad x \in I, \quad (5)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad (6)$$

其中 $I = (a, b)$ ($a < b$), f 为 $\bar{I} = [a, b]$ 上的连续函数, α, β 为给定常数.

有限差分法的步骤

对给定的微分方程模型：

- ① 对求解区域做网格剖分，得到计算网格
- ② 对微分方程中的各阶导数进行差分离散，得到差分方程
- ③ 根据边界条件，进行边界处理
- ④ 解线性代数方程组，得到数值解向量

将上述前3步工作称为有限差分离散.

1 网格剖分

对求解区间 I 做下图所示的网格剖分



其中

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

称为网格节点; $x_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 被称为第 i 个内部节点; x_0 和 x_n 被称为边界节点.

$l_i = [x_{i-1}, x_i]$ 称为第 i 个 剖分单元;

$h_i = x_i - x_{i-1}$ 称为单元 l_i 的剖分步长;

记 $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i = \frac{b-a}{n}$.

2 导数的差分离散

设 x_i 为任一给定的内部节点, 该点处的微分方程 (5) 为

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x_i) \quad (7)$$

离散的关键: 给出

$$\left[\frac{d^2 u}{dx^2} \right]_i := \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \right]_{x_i}$$

的离散公式.

利用 Taylor 展开, 有

$$u(x_{i\pm 1}) = u(x_i) \pm h \left[\frac{du}{dx} \right]_i + \frac{h^2}{2} \left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]_i \pm \frac{h^3}{6} \left[\frac{d^3u}{dx^3} \right]_i + \frac{h^4}{24} \left[\frac{d^4u}{dx^4} \right]_i + O(h^5) \quad (8)$$

由 (8) 可得

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = \left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]_i + R_i(u) \quad (9)$$

其中

$$R_i(u) = -\frac{h^2}{12} \left[\frac{d^4u}{dx^4} \right]_i + O(h^3) \quad (10)$$

将 (9) 代入 (7) 可得

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i) + R_i(u) \quad (11)$$

在 (11) 中, 丢弃小量 $R_i(u)$, 则得到数值解向量

$$U_{n-1} := (u_1, \dots, u_{n-1})^T \in R^{n-1}$$

在 x_i 处满足的满足的计算公式(格式):

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, i = 1, \dots, n-1 \quad (12)$$

3 边界处理

由 (6) 可得

$$u_0 = \alpha, \quad u_n = \beta \quad (13)$$

称 (12), (13) 为逼近 (5), (6) 的差分方程或差分格式, 并称相应的数值解向量 U_{n-1} 为差分解, u_i 为 $u(x_i)$ 的近似值。

注意 由于 (12) 是用二阶中心差商代替 (5) 中二阶微商得到的, 故也称 (12) 为中心差分格式。

至此就完成了对微分方程模型 (5) (6) 的有限差分离散。

导数差分逼近的其它格式

一阶、二阶导数的差分逼近，DF=前向差分，BD=后向差分，CD=中心差分

导数	有限差分逼近	类型	误差
u_x	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$-\frac{u_{i+2}+4u_{i+1}-3u_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+8u_{i+1}-8u_{i-1}+u_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
u_{xx}	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

4 离散化线性代数方程组及其求解

由 (12), (13) 经过合并同类项得

$$\frac{2}{h^2}u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, \quad i = 1$$

$$\frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i-1} - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \dots, n-2$$

$$\frac{2}{h^2}u_{n-1} - \frac{1}{h^2}u_{n-2} = f_{n-1} + \frac{\beta}{h^2}, \quad i = n-1$$

利用矩阵和向量可将上述线性方程组表示为

$$A_{n-1}U_{n-1} = F_{n-1} \quad (14)$$

其中

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$
$$U_{n-1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad F_{n-1} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

或者可表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & d_1 & c_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & a_2 & d_2 & c_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{n-2} & d_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中

$$a_i = -\frac{1}{h^2}, \quad d_i = \frac{2}{h^2}, \quad c_i = -\frac{1}{h^2}$$

可以证明差分方程(12), (13) (或线性代数方程组(14))的解存在且唯一(见后面介绍的理论部分).

注意线性代数方程组(14)的系数矩阵为三对角矩阵, 下面分别介绍三种求解方法:

- ▶ 追赶法
- ▶ Jacobi 迭代法
- ▶ Gauss-Seidel 迭代法

为叙述方便, 记上述线性代数方程组为

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & d_N \end{bmatrix}$$

特别, 关于对线性系统 (15) $N = n + 1$.

三对角矩阵分解 (Crout 分解)

可将上述三对角矩阵分解为

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & l_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & l_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & u_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

其中

$$\begin{cases} l_1 = d_1, & u_1 = \frac{c_1}{l_1}, \\ l_i = d_i - a_i u_{i-1}, & i = 2, \dots, N, \\ u_i = \frac{c_i}{l_i}, & i = 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

利用矩阵的Crout分解:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & l_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & l_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{l_1} \\ y_i = \frac{b_i - a_i y_{i-1}}{l_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_N = y_N \\ x_i = y_i - u_i x_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \end{cases}$$

即为解三对角方程组的追赶法：

$$\begin{cases} \text{追} : y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow y_N \\ \text{赶} : x_N \rightarrow x_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \end{cases}$$

对一般的 n 阶线性代数方程组

$$Ax = b, \quad A = (a_{ij})_{N \times N}, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$$

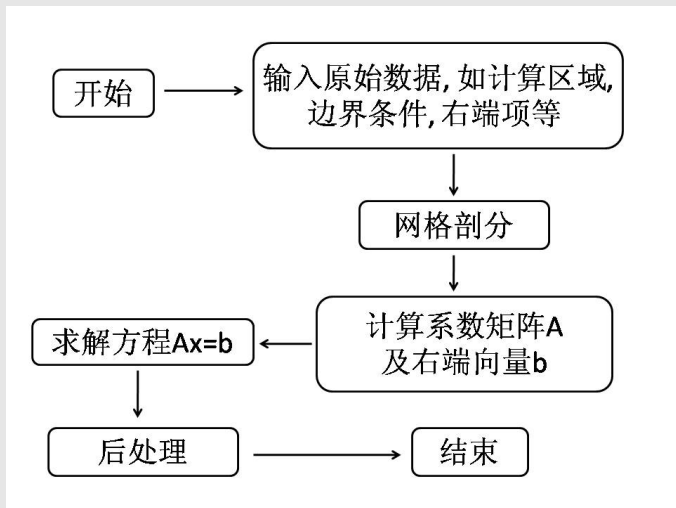
其相应的Jacobi迭代算法为：

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Gauss-Seidel迭代算法为：

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

算法流程



后处理包括：误差估计, 可视化, ...

记误差向量 $e = (e_1, \dots, e_{n-1})^T \in R^{n-1}$, 其中 $e_i = u(x_i) - u_i$ 为真解与数值解在网格节点 x_i 处的误差.

为了度量误差, 引入如下范数(其证明见后面的理论部分)

$$\|e\|_C = \max_{1 \leq i \leq n-1} |e_i|, \quad \|e\|_0^2 = \sum_{i=1}^{n-1} h e_i^2, \quad \|e\|_1^2 = \|e\|_0^2 + |e|_1^2$$

其中

$$|e|_1^2 = \sum_{i=1}^n h \left(\frac{e_i - e_{i-1}}{h} \right)^2$$

对于两点边值问题(5)-(6)，以下是相应的Matlab代码

```
function [x,U] = FD1d_bvp(N, f, a, b,u)
```

```
%*****80
%% FD1d_bvp 利用中心差分格式求解两点边值问题.
%
% 参数:
%     输入参数:
%         整数  $N$ , 网格节点数.
%
%         函数  $f(x)$ , 计算右端函数  $f(x)$ ;
%
%          $a$ , 计算区间左端点
%
%          $b$ , 计算区间右端点
%
%          $u$ , 真解函数
%     输出参数:
%         差分解向量  $U$ .
%
% 均匀剖分区间  $[a, b]$ , 得到网格  $x(i) = a + (i-1) * (b-a) / (N-1)$ 
%
```

```
h=(b-a)/(N-1);
x = (a:h:b)';

%
% 创建线性差分方程组系数矩阵
%

c1 = -1/h/h;
c2 = 2/h/h;
g = [c1*ones(1,N-2), 0];
c = [0, c1*ones(1,N-2)];
d = [1, c2*ones(1,N-2), 1];
A = diag(g, -1)+diag(d)+diag(c,1);

%
% 创建线性差分方程组右端项
%

rhs = f(x);
rhs(1) = u(x(1));
rhs(N) = u(x(N));

%
% 求解上述代数系统.
%

U = A \ rhs;

end
```

算例 1: 我们利用有限差分法去求解

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 16\pi^2 \sin(4\pi x), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

问题的真解为

$$u(x) = \sin(4\pi x)$$

下面给出相应的数值实验代码

```
function f=f(x)
```

```
f=16*pi*pi*sin(4*pi*x);
```

```
end
```



```
function u=u(x)
```

```
u=sin(4*pi*x);
```

```
end
```

```
function [e0,e1,emax] = FD1d_error(x,U,u_exact)
```

```
%% FD1D_ERROR 计算有限差分误差
```

```
%
```

```
%
```

```
% 参数:
```

```
% 输入参数:
```

```
%  $x$ , 网格节点坐标向量
```

```
%  $U$ , 上的有限差分数值解向量  $Ux$ 
```

```
%  $u\_exact$ , 真解函数
```

```
% 输出参数:
```

```
%  $e0$ , 范数误差  $e0L2$ 
```

```
%  $e1$ , 范数误差  $H1$ 
```

```
%  $emax$ , 无穷范数误差  $emaxL$ 
```

```
N = length(x);  
h = (x(end) - x(1))/(N-1);  
ue=u_exact(x);% 真解在网格点处的值  
ee=ue-U;  
  
e0 = h*sum(ee.^2);  
e1 = sum((ee(2:end)-ee(1:end-1)).^2)/h;  
e1 = e1+e0;  
  
e0 = sqrt(e0);  
e1 = sqrt(e1);  
emax=max(abs(ue-U));  
end
```

```
%% 测试脚本 FD1d_bvp_test.m
```

```
% 初始化相关数据
```

```
N = [6,11,21,41,81];  
L = 0;  
R = 1;  
emax = zeros(5,1);  
e0 = zeros(5,1);  
e1 = zeros(5,1);
```

```

%% 求解并计算误差
for i = 1:5
    [x,U] = FD1d_bvp(N(i),@f,L,R,@u);
    [e0(i),e1(i),emax(i)]=FD1d_error(x,U,@u);
    X{i} = x;
    UN{i} = U;
end
ue = u(X{5});

%% 显示真解及不同网格剖分下的数值解
plot(X{5}, ue, '-k*', X{1}, UN{1}, '-ro', X{2},...
    UN{2}, '-gs', X{3}, UN{3}, '-bd',...
    X{4}, UN{4}, '-ch', X{5}, UN{5}, '-mx');
title('The solution plot');
xlabel('x'); ylabel('u');
legend('exact','N=6','N=11','N=21','N=41','N=81');

%% 显示误差
format shorte
disp('          emax          e0          e1');
disp([emax, e0, e1]);

```

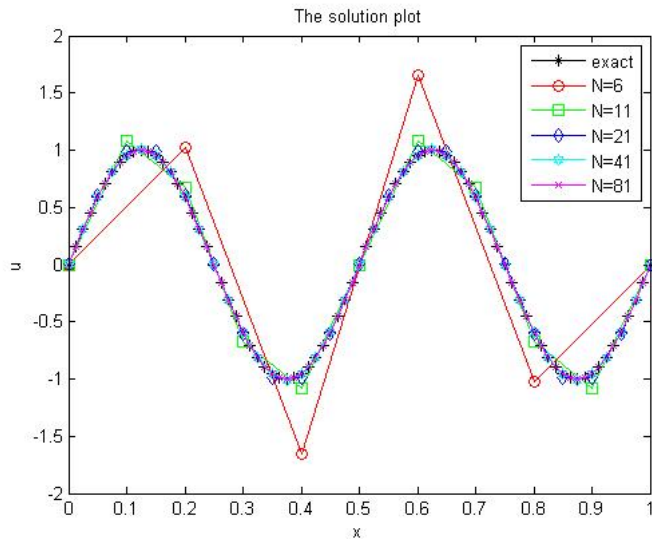
运行脚本测试脚本:

>> FD1d_bvp_test

emax	e0	e1
7.0935e-001	5.2740e-001	5.0435e+000
1.3569e-001	1.0089e-001	1.1903e+000
3.1916e-002	2.3729e-002	2.9427e-001
8.2654e-003	5.8445e-003	7.3376e-002
2.0587e-003	1.4557e-003	1.8332e-002

相邻粗细网格上的误差之比见下表:

N	6	11	21	41	81
$\ u - U\ _c$	0.7093	0.1357	0.0319	0.0083	0.0021
误差比	-	5.23	4.25	3.84	3.95
$\ u - U\ _0$	0.5274	0.1009	0.0237	0.0058	0.0015
误差比	-	5.23	4.25	4.08	3.87
$\ u - U\ _1$	5.0158	1.1860	0.2933	0.0731	0.0183
误差比	-	4.23	4.04	4.01	3.99



上机实践：利用有限差分法去求解

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), \\ u(-1) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

真解为

$$u(x) = e^{-x^2}(1 - x^2)$$

适定性、稳定性与收敛性

针对差分格式 (12) 和 (13):

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$u_0 = \alpha, \quad u_n = \beta$$

或其等价式 (见(15))

$$\begin{cases} d_0 u_0 + c_0 u_1 = \alpha; \\ a_i u_{i-1} + d_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ a_n u_{n-1} + d_n u_n = \beta \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} a_i = -\frac{1}{h^2}, \quad d_i = \frac{2}{h^2}, \quad c_i = -\frac{1}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ d_0 = 1; \quad c_0 = 0; \quad d_n = 1; \quad a_n = 0 \end{cases} \quad (17)$$

讨论

- ① 适定性: 解向量的存在唯一性.
- ② 稳定性: 解向量连续依赖于右端向量 f_i , $i = 1, \dots, n-1$ 和边值 α, β .
- ③ 收敛性: 当 $h \rightarrow 0$ 时, 数值解向量是否收敛于真解向量, 即

$$U_{n-1} = (u_1, \dots, u_{n-1})^T \rightarrow (u(x_1), \dots, u(x_{n-1}))^T?$$

- ④ 收敛速度: 当 $h \rightarrow 0$ 时, 收敛的快慢!

下面关于线性代数方程组 (16) (或差分格式 (12) 和 (13)), 回答上述理论问题.

截断误差

记

$$[Lu]_i := -\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i} \quad L_h u_i := -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

由(7)和(11), 有

$$R_i(u) = L_h u(x_i) - [Lu]_i \quad (18)$$

可见: $R_i(u)$ 为 x_i 处用差分算子 L_h 代替微分算子 L 所产生的误差, 称之为差分方程 (12) 的截断误差.

由 (10) 可知: 若 $u \in C^4(\bar{I})$, 则有 (习题 1)

$$|R_i(u)| \leq Ch^2, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (19)$$

其中 $C = \max_{x \in \bar{I}} \left| \frac{d^4 u(x)}{dx^4} \right|$ 是与 h 无关的正常数.

网函数的概念

(1) 记内节点集合和所有节点的集合

$$I_h = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}, \quad \bar{I}_h = \{x_0, x_n\} \cup I_h$$

(2) 称定义在 I_h 上的函数为 I_h 上的网函数, 记 V_{n-1} 为所有 I_h 上的网函数所构成的线性空间 (简称 I_h 上的网函数空间). 对

$\forall v_h \in V_{n-1}$, 记

$$v_i = v_h(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

注: 类似的可定义 \bar{I}_h 上的网函数空间 V_{n+1} .

对于任意 $v_h \in V_{n-1}$, 引入如下(网函数)范数(习题 2*)

$$\|v_h\|_C = \max_{1 \leq i \leq n-1} |v_i| \quad (20)$$

$$\|v_h\|_0^2 = \sum_{i=1}^{n-1} h v_i^2 \quad (21)$$

$$\|v_h\|_1^2 = \|v_h\|_0^2 + |v_h|_1^2 \quad (22)$$

其中

$$|v_h|_1^2 = \sum_{i=1}^n h \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right)^2 \quad (23)$$

今后若不特别说明, 用 $\|\cdot\|$ 表示上述三种范数中的某一种.

下面定义几种特殊的网函数.

- ① 真解网函数: 由于真解函数 u 的定义域为 $[a, b]$, 特别在 I_h 上有定义, 称 u 是 I_h 上的限制函数为真解网函数, 不妨仍将其记为 u .
- ② 差分解(网)函数: 称由差分解 U_{n-1} 所确定的网函数 u_h 为差分解(网)函数, 即 u_h 满足 $u_h(x_i) = u_i, i = 1, \dots, n-1$.
- ③ 截断误差(网)函数: 称由截断误差向量 $(R_1(u), \dots, R_{n-1}(u))^T$ 所确定的网函数 R_h^u 为截断误差(网)函数, 即有 $R_h^u(x_i) = R_i(u), i = 1, \dots, n-1$.
- ④ 误差(网)函数: 记在 x_i 处的误差 $e_i = u(x_i) - u_i$. 称由误差向量 $(e_1, \dots, e_{n-1})^T$ 所确定的网函数 e_h 为误差(网)函数, 即有 $e_h(x_i) = e_i, i = 1, \dots, n-1$.

收敛性的概念

定义 1 称差分解 u_h 收敛到边值问题的解 u , 如果当 h 充分小时, (12), (13) 的解 u_h 存在, 且有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|e_h\| = 0 \quad (24)$$

可以证明误差(网)函数 e_h 满足如下差分方程

$$\begin{cases} L_h e_i = R_i(u), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ e_0 = e_n = 0, \end{cases} \quad (25)$$

事实上, 注意 $e_i = u(x_i) - u_i$, 以及

$$L_h u(x_i) = f_i + R_i(u), \quad L_h u_i = f_i$$

所以

$$L_h e_i = R_i(u).$$

相容性的概念

为了保证差分解的收敛性, 要求 (25) 所对应的差分算子 L_h 满足一定条件.

定义 2 设 \mathcal{M} 是某一充分光滑的函数类, R_h^u 是截断误差 (网) 函数. 若对任何 $u \in \mathcal{M}$, 恒有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h^u\| = 0, \quad (26)$$

则说差分算子 L_h 逼近微分算子 L , 而称 (26) 为**相容条件**.

由 (19) 知: 若 $u \in \mathcal{M} := \{v : v \in C^4(\bar{I})\}$, 则 L_h 所对应的截断误差函数满足

$$\|R_h^u\|_C = O(h^2), \quad \|R_h^u\|_0 = O(h^2), \quad \|R_h^u\|_1 = O(h).$$

即 L_h 满足相容条件.

关于相容条件的证明 (设 $u \in C^4(\bar{I})$).

仅证明以下估计式成立 ($\|R_h(u)\|_C = O(h^2)$ 可类似证得)

$$\|R_h^u\|_0 = O(h^2), \|R_h^u\|_1 = O(h)$$

为此, 仅需证得

$$\|R_h^u\|_0^2 = O(h^4), |R_h^u|_1^2 = O(h^2)$$

注意 $R_i(u) = O(h^2)$ (见 (10)), 因此

$$\begin{aligned}\|R_h^u\|_0^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} h R_i(u)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} h O(h^4) \\ &= (n-1)h O(h^4) = O(1)O(h^4) = O(h^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|R_h^u|_1^2 &= \sum_{i=1}^n h \left(\frac{R_i(u) - R_{i-1}(u)}{h} \right)^2 = \sum_{i=1}^n h \left(\frac{O(h^2) - O(h^2)}{h} \right)^2 \\ &= nh O(h^2) = O(h^2)\end{aligned}$$

稳定性的概念

定义 3 称差分方程

$$\begin{cases} L_h v_i = f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ v_0 = v_n = 0, \end{cases}$$

关于右端稳定, 如果存在与网格 l_h 及右端 f_h 无关的正常数 M 和 h_0 , 使

$$\|v_h\| \leq M \|f_h\|_R, \quad \text{当 } 0 < h < h_0, \quad (27)$$

其中, 网函数 f_h 和 v_h 满足

$$f_h(x_i) = f_i, \quad v_h(x_i) = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$\|f_h\|_R$ 是关于右端网函数 f_h 的某一范数, 它可以和 $\|\cdot\|$ 相同, 也可以不同.

(27) 通常称为关于差分方程的先验估计.

由 (27) 可得出结论: 解 v_h 连续依赖右端 f_h , 即右端变化小时解的变化也小.

事实上, 设 $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ 是差分方程 (12), (13) 相应于右端 $f_h^{(1)}, f_h^{(2)}$ 的解, 则 $v_h = u_h^{(1)} - u_h^{(2)}$ 满足

$$L_h v_i = f_i^{(1)} - f_i^{(2)}, \quad v_0 = v_n = 0$$

这里 $v_i = v_h(x_i)$, $f_i^{(l)} = f_h^{(l)}(x_i)$, $u_i^{(l)} = u_h^{(l)}(x_i)$, $l = 1, 2$.
由 (27) 可知

$$\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\| = \|v_h\| \leq M \|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_R.$$



适定性理论

定理 1 若满足齐次边值条件(即 $\alpha = 0 = \beta$)的差分方程 (12) (或(16)) 关于右端稳定 (27), 则差分解存在且唯一.

事实上, 只需证明 (12), (13) 相应的齐次方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ u_0 = u_n = 0, \end{cases}$$

只有零解. 注意由于这时 $f_h = (f_1, \dots, f_{n-1})^T = (0, \dots, 0)^T$, 从而

$$\|f_h\|_R = 0$$

由此及 (27) 可知

$$\|u_h\| = 0 \Leftrightarrow u_i \equiv 0, i = 1, 2, \dots, n-1$$

收敛性理论

定理 2 若边值问题的解 u 充分光滑, 差分方程按 $\|\cdot\|_R$ 满足相容条件, 且关于右端稳定, 则差分解 u_h 按 $\|\cdot\|$ 收敛到边值问题的解, 且有和 $\|R_h^u\|_R$ 相同的收敛阶.

事实上, 利用 (27), 并注意误差 (网) 函数 $e_h = u - u_h$ 所满足的差分方程 (25) 的右端所对应的网函数为 R_h^u , 所以有

$$\|e_h\| \leq M \|R_h^u\|_R \quad (28)$$

其中 M 是不依赖 h 的正常数.

由 (28) 及差分方程按 $\|\cdot\|_R$ 满足相容条件, 可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|e_h\| \leq M \lim_{h \rightarrow 0} \|R_h^u\|_R = 0$$

即差分解 u_h 按 $\|\cdot\|$ 收敛到边值问题的解, 且有和截断误差 R_h^u 相同的收敛阶.

由于我们所得到的两点边值问题的差分方程满足相容条件, 特别是对以下三种不同的范数, 其收敛阶分别为

$$\|R_h^u\|_C = O(h^2), \quad \|R_h^u\|_0 = O(h^2), \quad \|R_h^u\|_1 = O(h).$$

因此, 若还能证明上述差分方程关于右端稳定 (后面会对更一般的两点边值问题建立该理论), 则差分解收敛到边值问题的解, 且有和 $\|R_h^u\|$ 相同的收敛阶.

一阶、二阶导数的差分逼近，FD=前向差分，BD=后向差分，CD=中心差分

导数	有限差分逼近	类型	误差
u_x	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$-\frac{u_{i+2}+4u_{i+1}-3u_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+8u_{i+1}-8u_i+u_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
u_{xx}	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

极值定理和稳定性理论

先给出线性代数方程组 (16) 和 (17) (或差分方程 (12), (13)) 的系数矩阵 A 的若干性质:

- 1 A 为稀疏矩阵: 每行最多 3 个非零元素.
- 2 A 的对角元素是正的, 非对角元是非正的.
- 3 对角占优性

$$d_i - |a_i| - |c_i| = d_i + a_i + c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

极值定理

定理 3 (极值定理) 若

$$L_h u_i \leq 0 \text{ (或 } L_h u_i \geq 0), \quad i = 1, \dots, n-1$$

则 u_i 不可能在内点取正的极大 (或负的极小), 除非

$$u_i \equiv \text{常数}, \quad i = 0, \dots, n$$

反证法. 只证明 $L_h u_i \leq 0$ 的情况, $L_h u_i \geq 0$ 的情形完全类似.

设 u_i 在某内节点 x_{i_0} ($1 \leq i_0 \leq n-1$) 处取正的极大值 M , 且 u_i 不恒为常数. 由于

$$\begin{aligned} 0 \geq L_h u_{i_0} &= a_{i_0} u_{i_0-1} + d_{i_0} u_{i_0} + c_{i_0} u_{i_0+1} \\ &\geq (a_{i_0} + d_{i_0} + c_{i_0}) M \geq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

由此可知: 只有当

$$u_{i_0-1} = u_{i_0+1} = M$$

才不会产生矛盾. 这意味着 u_i 在节点 x_{i_0-1} 和 x_{i_0+1} 处也取正的极大值 M .

对节点 x_{i_0-1} 和 x_{i_0+1} (如果是内节点) 重复上述做法, 并不断继续此过程(注意网格节点间的连通性), 则可证明 u_i 在所有的节点处均取正的极大值 M , 这就与 u_i 不恒为常数发生矛盾. □

习题 3: 利用极值定理证明差分方程 (12), (13) 的适定性.

习题 4: 若

$$L_h u_i = f_i \geq 0 \text{ (或 } \leq 0) \quad i = 1, \dots, n-1$$

且

$$u_0 \geq 0 \text{ (或 } \leq 0); u_n \geq 0 \text{ (或 } \leq 0)$$

则

$$u_i \geq 0 \text{ (或 } \leq 0), \quad i = 1, \dots, n-1$$

习题 5* 试证明 A 的逆矩阵是非负矩阵.

A^{-1} 为非负矩阵等价于: 对任意非负向量 $F = (f_1, \dots, f_{n-1})^T$, 线性代数方程组 $AU = F$ 的解向量

$$U = (u_1, \dots, u_{n-1})^T = A^{-1}F \geq 0$$

定理 4 (比较定理) 设序列 (对应于网函数) $\{u_i\}_{i=0}^n$ 和 $\{U_i\}_{i=0}^n$, 满足

$$|L_h u_i| \leq L_h U_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad |u_0| \leq U_0, \quad |u_n| \leq U_n$$

则

$$|u_i| \leq U_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

证明：注意到

$$|L_h u_i| \leq L_h U_i \Leftrightarrow -L_h U_i \leq L_h u_i \leq L_h U_i$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} L_h(u_i - U_i) \leq 0, \\ L_h(u_i + U_i) \geq 0 \end{cases} \quad (30)$$

同样

$$|u_0| \leq U_0, |u_n| \leq U_n$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} u_0 - U_0 \leq 0, \\ u_0 + U_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} u_n - U_n \leq 0, \\ u_n + U_n \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

(30) 和 (31) 等价于

$$\begin{cases} L_h(u_i - U_i) \leq 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ u_0 - U_0 \leq 0, & u_n - U_n \leq 0. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} L_h(u_i + U_i) \geq 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ u_0 + U_0 \geq 0, & u_n + U_n \geq 0. \end{cases}$$

利用习题 4, 有

$$\begin{cases} u_i - U_i \leq 0, \\ u_i + U_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1$$

\Leftrightarrow

$$|u_i| \leq U_i, \quad i = 0, \dots, n$$



习题 6 (关于边界值的稳定性)

试证明差分方程

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ u_0 = \alpha, & u_n = \beta \end{cases}$$

的解 $\{u_i\}$ 满足估计式

$$\|u_h\|_C = \max_{1 \leq i \leq n-1} |u_i| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

稳定性理论

定理 5 (关于右端稳定性定理) 满足齐次边值条件的差分方程 (12) (或(16)), 其中 $\alpha = 0 = \beta$ 的解 u_i 满足估计式

$$\|u_h\|_C = \max_{1 \leq i \leq n-1} |u_i| \leq M \|f_h\|_C$$

其中, M 为与 h 无关的正常数.

证明: 令 $r = \max\{|a|, |b|\}$, 构造序列

$$U_k = \frac{\|f_h\|_C}{2} (r^2 - x_k^2) \geq 0, \quad k = 0, \dots, n$$

对于每个内节点 $x_i \in I_h$, 由 (16) 和(17), 有

$$\begin{aligned}
 L_h U_i &= d_i U_i + a_i U_{i-1} + c_i U_{i+1} = \frac{1}{h^2} [2U_i - U_{i-1} - U_{i+1}] \\
 &= \frac{\|f_h\|_C}{2h^2} [2(r^2 - x_i^2) - (r^2 - x_{i-1}^2) - (r^2 - x_{i+1}^2)] \\
 &= \frac{\|f_h\|_C}{2h^2} [-2x_i^2 + (x_i - h)^2 + (x_i + h)^2] \\
 &= \|f_h\|_C \geq |f_i| = |L_h u_i|
 \end{aligned}$$

又注意在边界节点处有

$$|u_0| = 0 \leq U_0, |u_n| = 0 \leq U_n$$

故由比较定理有 ($M = \frac{r^2}{2}$)

$$|u_i| \leq U_i = \frac{\|f_h\|_C}{2} (r^2 - x_k^2) \leq M \|f_h\|_C, i = 1, \dots, n-1$$

习题 7 pp.113. 3.4.2.

习题 8 pp.114. 3.4.3.