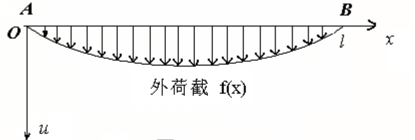
有限元法

制作人: 舒适　魏华祎　易年余

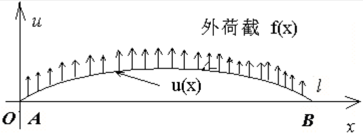
案例 5：弦的平衡问题

1. 弦平衡问题
   - 背景问题
   - 数学建模
   - Sobolev 空间
   - 虚功原理与极小位能原理
   - Ritz-Galerkin 方法
   - Galerkin 算法设计、实现与数值实验
   - 理论分析
   - 有限元方法
   - 有限元算法设计与实现、数值实验
   - 理论分析

设一根长 $l=1$ 的弦，水平放置，两端固定在 A, B 两点，小荷载 $f(x)$ 作用在弦上，在荷载作用下，弦会发生形变，最终会达到平衡.



图（a）



图（b）

数学模型

在案例 1 中, 已利用力平衡原理导出了该问题的数学模型, 即位移函数 u 满足如下两点边值问题 ($I=(0,1)$)

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f, \quad x\in I, \tag{1}$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=0 \tag{2}$$

下面利用极小位能原理, 推导弦平衡问题的另一重要数学模型.

极小位能原理

考虑弦在任一位置 $w = w(x)$ 时, 有

1. 弦所对应的内能 (或应变能)

$$W_n = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx$$

2. 弦克服外力所作的功为:

$$W_w = -\int_0^l f \cdot w dx$$

总能量 (位能) 为

$$J(w) = W_n + W_w = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx - \int_0^l f \cdot w dx \tag{3}$$

记弦的平衡位置所在的曲线为u，由极小位能原理知： 在满足边值条件 (2) 的一切可能位置中，弦平衡位置的位能达到极小，即：

$$J(u) = \min_w J(w) \tag{4}$$

上述模型是不完备（严格）：自变量函数 w 的所属空间?

力平衡方程

$$-Tu''(x) = f(x), 0 < x < l$$

对解空间的光滑性要求比极小问题对解空间的光滑性要求要高.

极小问题: w, $w' \in L^2(I)$.

下面需要引入弱意义下的导数, 以及相应的函数空间（Sobolev 空间）.

Sobolev 空间简史

前苏联数学家 S.L. Sobolev 从1938年开始，在研究弹性体中的波动等问题时，建立了一系列新的概念，如广义解、广义导数、嵌入定理等。以泛函分析为工具发展了一套新型的可微函数空间 $W^{k,p}(\Omega)$ (Sobolev 空间) 理论，该理论同时也为微分方程的近代研究奠定了理论基础.

后来许多学者改进和推广了 Sobolev 的工作，如 1956—1958: 引进了"分数次求导"的概念，建立了分数次 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$.

$L^2(I)$ 空间

Hilbert 空间

$$L^2(I), I = (a, b)$$

内积和范数

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \ \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Schwartz 不等式: $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

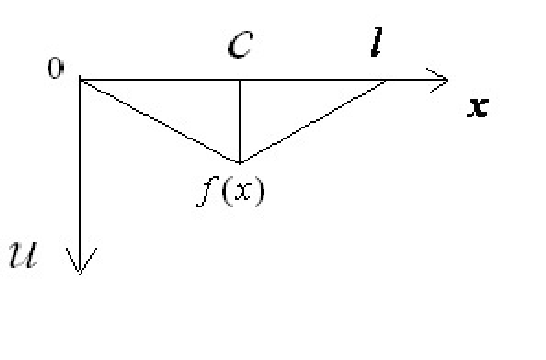
一阶广义导数

为什么要引入一阶广义导数？ 记空间

$$W = \{w : w, w' \in L^2(I)\}$$

如果 w' 为通常意义下的导函数（即逐点有定义的导函数），则

(i) 可能会丢失一些有很好物理背景的极小解.



(ii) 函数空间 $C^1([0,1])$，在一种自然的范数

$$\|w\|_1 = \left\{ \int_I [w^2 + (w')^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

下是不完备的.

广义导数是通过一个关于某一检验 (test) 函数空间的 “积分恒等式” 来定义的.

定义检验函数空间 $C_0^\infty(I)$：在区间 I 上无穷次可微，且在端点 a, b 的某一邻域内等于零的函数类.

例 1 $I = (-1, 1)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} exp(-\frac{1}{\eta^2 - x^2}), & |x| < \eta, \\ 0, & \text{在别处}. \end{cases}$$

其中 $\eta = 1/2$.

可以证明

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(I)$$

空间 $C_0^\infty(I)$ 的特点:

在 $L^2(I)$ 中稠密

充分光滑

各阶导函数在边界点上为 0

下面引出所需要的积分恒等式.

设 $u(x), v(x) \in C^1[a,b]$, 则有如下分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

上述假设条件可适当的减弱, 如可减弱为(习题*):

设函数 $u, v \in C(\bar{I})$, u', v' 在 $\bar{I}$ 上仅有有限个不连续点, 且在这些点左右极限存在 (对边界点仅要求单边极限存在).

$\Rightarrow$

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(I) \tag{6}$$

习题 设 $f \in C(\bar{I})$, $I = (a, b)$, f' 仅在 $x_c = \frac{a+b}{2}$ 处有间断，且该点左右极限存在，试证明

$f' \in L^2(I)$, 且对 $\forall\varphi \in C_0^\infty(I)$, 以下积分恒等式成立

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(I)$$

一阶广义导数的定义：

设$f(x) \in L^2(I)$，若存在 $g(x) \in L^2(I)$，使等式

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \tag{7}$$

恒成立，则称 $f(x)$ 在 I 上有一阶广义导数 $g(x)$, 仍记为

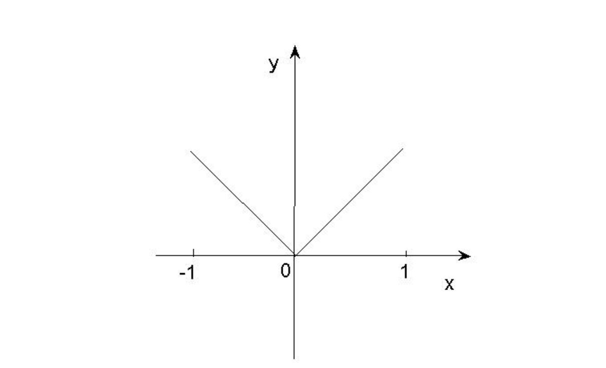
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x)$$

一阶广义导数和一阶常义导数的区别与联系：

1) 若 $f(x)$ 有通常意义下属于 $L^2(I)$ 的导数 $f'(x)$，则 $f'(x)$ 也是 $f(x)$ 的一阶广义导数，但反之不然；

2) 同一函数的广义导数可能不唯一.

例 2 试考察函数 $f(x) = |x|, x \in \bar{I},\ I = (-1, 1)$ 的一阶广义导数和常义导数。



解: 显然 $f(x) \in C(\bar{I}) \subset L^2(I)$.

对$\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$，有

$$
\begin{aligned}
-\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= [(x\varphi(x))|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx] \\
&\quad -[(x\varphi(x))|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx] \\
&= -\int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}
$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ c & x = 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

容易验证 $g(x) \in L^2(I)$, 所以它是 $f(x)$ 的一阶广义导数。

注意 $f(x)$ 在 0 点处的导数没定义, 这说明有广义导数, 不一定有常义导数.

又由于 c 是任意有限数, 故在逐点意义下, 广义导数不唯一.

结论: 同一函数的广义导数在相差一个零测度集意义下是唯一的(几乎处处相等).

变分法的基本引理: 设 $f \in L^2(I)$ 满足

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

则 $f(x)$ 几乎处处为0.

习题 设$f \in C(\bar{I})$, 试证明该引理（见书）.

利用变分法的基本引理可证明上述结论.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为 $f(x)$ 的一阶广义导数，则

$$\int_a^b g_1(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$\int_a^b g_2(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

两式相减，得

$$\int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]\varphi(x)dx = 0$$

$\Rightarrow$

$$g_1 = g_2, \quad a.e.$$

例 3　试证明阶梯函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

不存在广义导数。

反证法: 设 $f(x)$ 有广义导数 $g(x)$, 则 $g\in L^2(I)$ 满足

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx &= -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx\\ &= -\int_{0}^{1}\varphi'(x)dx\\ &= -\varphi(x)|_0^1=\varphi(0)\end{aligned}\tag{8}$$

从而 $g(x)=\delta(x)$ ($\delta-$函数).

利用 (8),

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| &= |\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx| \\ &\leq ||g(x)|| \cdot ||\varphi(x)|| \end{aligned} \tag{9}$$

特别对$0 < \varepsilon < 1$，取 $C_0^\infty(I)$ 中的函数

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right) & |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

注意 $\varphi_\varepsilon(0) = e^{-1}$, 以及

$$
\begin{aligned}
||\varphi_\varepsilon||^2 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[\exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right)\right]^2 dx \\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left(-\frac{2}{1-(x/\varepsilon)^2}\right) dx \\
&= \varepsilon\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right) dt < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

则有

$$
e^{-1} \le \sqrt{2\varepsilon}||g(x)||
$$

从而导致矛盾. □

习题 试给出分(有限)段代数多项式函数具有一阶广义导数的充要条件, 并证明之.

利用一阶广义导数, 可定义区间 I 上的一阶 Sobolev 空间 $H^1(I)$

$$H^1(I) := \{f | f \in L^2(I), f' \in L^2(I)\}$$

其中, f' 为 f 的一阶广义导数.

$H^1(I)$: 线性空间, 引入内积

$$(f,g)_1=\int_a^b[f(x)g(x)+f'(x)g'(x)]dx,\ \forall f,g\in H^1(I)$$

范数

$$||f||_1=\sqrt{(f,f)_1}=\{\int_a^b[f^2+(f')^2]dx\}^{\frac{1}{2}},\forall f\in H^1(I)$$

可以证明 $H^1(I)$ 是完备内积空间: Hilbert 空间.

类似地，可定义(习题*)

(1) m 阶广义导数 (P.15 习题1.2.1, 仅要求 $m=2$)、 m 阶 Sobolev 空间 $H^m(I)$ ；

(2) 多元函数的广义偏导数.

极小问题的严格描述

定义 $H^1(I)$ 的子空间

$$H_0^1(I) := \{v | v \in H^1(I),\ v(a) = 0 = v(b)\}$$

极小问题 (4) 的严格描述： 求 $u \in H_0^1(I)$， $I = (0, l)$ 使得

$$J(u) = \min_{w \in H_0^1(I)} J(w) \tag{10}$$

其中

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx - \int_0^l f \cdot w dx$$

等价变分问题

由于极小问题(10) 和两点边值问题

$$-Tu''(x) = f(x),\ \ 0 < x < l \tag{11}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{12}$$

刻划同一物理背景问题，所以存在等价性.

下面，将针对一类更广泛的两点边值问题，建立两种等价变分问题，并回答上述等价性.

考察问题 (A)——两点（混合）边值问题：

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \ \ a < x < b \tag{13}$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0 \tag{14}$$

其中，$f \in L^2(I)$，且 (A) 满足椭圆型条件:

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{I}), p(x) \geq p_{\min} > 0 \\ q \in C^0(\bar{I}), q(x) \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

引入解$u(x)$ 所属函数空间—-试探 (trival) 函数空间

$$H_E^1(I) := \{u : u \in H^1(I), \ \ u(a) = 0\}$$

.

一、 建立问题 (A) 的第一种等价问题

线性代数方程组求解问题: 求 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T \in R^n$, 满足

$$Ax^* = b \tag{16}$$

其中

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in R^n, \ A = (a_{ij})_{n\times n}$$

第一种等价问题 (习题): 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$(Ax^*, x) = (b, x), \ \forall x \in R^n \tag{17}$$

将问题 (16)与问题 (A) 比较:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{解向量所属的空间 } R^n & \leftrightarrow & \text{解函数所属的空间 } H_E^1(I) \\
\text{系数矩阵 } A & \leftrightarrow & \text{微分算子 } L \\
\text{右端向量 } b & \leftrightarrow & \text{右端函数 } f
\end{array}
$$

等价问题(17)中, 任意向量 x 所属的空间 R^n 被称为检验 (test) 空间. 问题 (A) 所对应的 test 函数空间应为 $H_E^1(I)$.

注意: 检验函数与试探函数空间不一定相同.

下面从形式上推导问题 (A) 的第一种等价问题.

由 (13), 有

$$\int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu]vdx = \int_a^b fvdx, \ \forall v \in H_E^1(I) \tag{18}$$

应用分部积分公式

$$\begin{aligned} \int_a^b -\tfrac{d}{dx}(p\tfrac{du}{dx})vdx &= -v(p\tfrac{du}{dx})\big|_a^b + \int_a^b p\tfrac{du}{dx}\cdot\tfrac{dv}{dx}dx \\ &= \int_a^b p\tfrac{du}{dx}\cdot\tfrac{dv}{dx}dx - B(a,b) \end{aligned}$$

其中由边值条件 $v(a)=0, u'(b)=0$ 有

$$B(a,b) := [p(b)v(b)u'(b) - p(a)v(a)u'(a)] = 0$$

因此得到等价问题（B）： 求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$a(u,v) = (f,v),\ \forall v \in H_E^1(I) \tag{19}$$

其中

$$a(u,v) = \int_a^b [p\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + quv]dx \tag{20}$$

$$(f,v) = \int_a^b fv\,dx \tag{21}$$

称方程 (19) 为变分方程 (或虚功方程).

关于泛函 $a(u,v)$ 的若干性质

性质1（双线性）

对$\forall c_1, c_2 \in R^1, u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H_E^1(I)$，成立

$$a(c_1u_1 + c_2u_2, v) = c_1a(u_1, v) + c_2a(u_2, v)$$
$$a(u, c_1v_1 + c_2v_2) = c_1a(u, v_1) + c_2a(u, v_2)$$

性质2（对称性）

$$a(u, v) = a(v, u)$$

性质3（正定性或强制性）

$$a(u,u) \geq \gamma \|u\|_1^2, \forall u \in H_E^1$$

这里，$\|\cdot\|_1$为$H^1(I)$中的范数，即

$$\|u\|_1 = [\int_a^b (u^2 + (u')^2) dx]^{1/2}$$

其中，γ是与 u 无关的正常数.

证明：由 $a(u,v)$ 的定义及椭圆型条件，有

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_a^b (qu^2 + p(u')^2)dx \\ &\geq \int_a^b p(u')^2 dx \\ &\geq p_{\min} \int_a^b (u')^2 dx \end{aligned} \tag{22}$$

注意

$$u(x) = \int_a^x u'(x)dx \tag{23}$$

利用 Schwarz 不等式，有

$$|u(x)| = \left|\int_a^x u'(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^x 1^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^x (u')^2 dx}$$

$\Rightarrow$

$$u^2 \le (x-a)\int_a^b (u')^2 dx$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b u^2 dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b (u')^2 dx$$

即

$$\int_a^b (u')^2 dx \ge \frac{2}{(b-a)^2} \cdot \int_a^b u^2 dx \tag{24}$$

由 (22) 和 (24) 式，可得

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &\geq p_{\min}\int_a^b (u')^2 dx \\
&= \tfrac{1}{2}p_{\min}\cdot\left[\int_a^b (u')^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] \\
&\geq \tfrac{1}{2}p_{\min}\cdot\left[\tfrac{2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] \\
&\geq \gamma\cdot\left[\int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] = \gamma\cdot\|u\|_1^2
\end{aligned}
$$

其中

$$
\gamma = \min\left(p_{\min}\frac{1}{(b-a)^2}, \frac{1}{2}p_{\min}\right)
$$

与 u 无关. □

性质4 （连续性或有界性）

$$a(u, v) \leq M\|u\|_1\|v\|_1$$

其中, M 是与 u, v 无关的正常数.

虚功原理

定理（虚功原理） 设$u \in C^2(\bar{I}), p \in C^1(\bar{I}), q \in C^0(\bar{I})$，则 u是问题 (A) 的解的充分必要条件是, u 是问题 (B) 的解.

证明： 必要性显然成立, 下面证明充分性. 若 $u \in C^2(\bar{I})$ 是问题 (B) 的解, 则 $u \in H_E^1(I) \cap C^2(\bar{I})$, 且成立

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b (p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv - fv)dx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$p\frac{du}{dx}v|_a^b + \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f]vdx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$p(b)u'(b)v(b) + \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f]vdx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I) \quad (25)$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b (-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f)vdx = 0, \ \forall v \in C_0^\infty(I)$$

由 $u \in C^2(\bar{I}), p \in C^1(\bar{I}), q \in C^0(\bar{I})$ 及变分法基本引理知

$$-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f \tag{26}$$

将 (26) 代入 (25)，得

$$p(b)v(b)u'(b) = 0, \forall v \in H_E^1(I)$$

从而

$$u'(b) = 0$$

即 u 是问题 (A) 的解.

□

二、建立问题 (A) 的第二种等价问题

从形式上推导出问题 (A) 的第二种等价问题: 求泛函极小问题.

关键: 泛函 $J(u)$ 的构造.

考察线性代数方程组求解问题: 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$Ax^* = b$$

第二种等价问题 (习题): 设A为对称正定矩阵, 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$J(x^*) = \min_{x \in R^n} J(x) \tag{27}$$

其中

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \tag{28}$$

$$
\begin{array}{ccc}
R^n & \leftrightarrow & H_E^1(I) \\
A & \leftrightarrow & L \\
b & \leftrightarrow & f
\end{array}
$$

可形式上给出问题 (A) 所对应的泛函

$$
J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u), \ \forall u \in H_E^1(I) \tag{29}
$$

这里

$$
Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu \tag{30}
$$

又考察弦平衡问题. 两点边值问题中微分方程 (见(11))

$$Lu := -Tu''(x) = f(x)$$

相应的极小问题(见 (10)) 中的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^l T(u')^2 dx - \int_0^l f \cdot u dx, \ \forall u \in H_0^1(I)$$

注意

$$(Lu, u) = \int_0^l T(u')^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(I) \tag{31}$$

所以也有

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u), \ \forall u \in H_0^1(I)$$

关于(31) 的证明. 事实上,

$$\begin{aligned}(Lu,u) &= \int_0^l (-Tu''u)dx = -T\int_0^l u du' \\ &= -T[(u\cdot u')|_0^l - \int_0^l (u'\cdot u')dx] \\ &= \int_0^l T(u')^2 dx\end{aligned}$$

$\square$

利用 (29) 定义的 $J(u)$, 并注意

$$(Lu, u) = a(u, u), \quad \forall u \in H_E^1(I) \tag{32}$$

所以问题 (A) 所对应的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u), \ \forall u \in H_E^1(I) \tag{33}$$

关于 (32) 的证明.

利用边值条件 $u(a)=0, u'(b)=0$, 容易验证

$$
\begin{aligned}
(Lu, u) &= \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu]udx \\
&= \int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2 + qu^2)dx - u(p\frac{du}{dx})|_a^b \\
&= \int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2 + qu^2)dx \\
&= a(u, u)
\end{aligned}
$$

$\square$

因此问题 (A) 的第二种等价问题 (C) 为： 求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$J(u) = \min_{v \in H_E^1(I)} J(v) \tag{34}$$

其中泛函 $J(\cdot)$ 由 (33) 定义.

定理（极小位能原理） 设$u \in C^2(\bar{I})$，则 u 是问题 (A) 的解的充分必要条件是， u 是问题 (C) 的解.

证明：只需证明问题 (C) 的解与问题 (B) 的解的等价性.

设$u \in C^2(\bar{I})$，则 u 是问题 (C) 的解的充分必要条件是

$$u \in H_E^1(I)$$

$$J(u+tv) \geq J(u), \forall v \in H_E^1(I), t \in R$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}a(u+tv,u+tv)-(f,u+tv) \\ &-[\tfrac{1}{2}a(u,u)-(f,u)] \geq 0, \forall v \in H_E^1(I), t \in R \end{aligned} \tag{35}$$

利用$a(\cdot,\cdot)$ 的对称性，有

$$\begin{aligned} &a(u+tv,u+tv) \\ &= a(u,u)+ta(u,v)+ta(v,u)+t^2a(v,v) \\ &= a(u,u)+2ta(u,v)+t^2a(v,v) \end{aligned}$$

将上式代入(35)

$\Leftrightarrow$

$$t[a(u,v)-(f,v)]+\frac{t^2}{2}a(v,v)\geq 0,\ \forall v\in H_E^1(I), t\in R \tag{36}$$

$\Leftrightarrow$

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_E^1(I) \tag{37}$$

事实上，显然有 (37)$\Rightarrow$ (36)，下面证明

$$(36)\Rightarrow(37)$$

只需对 $v\neq 0$ 的情形证明之.

反证法: 若存在$\bar{v} \in H_E^1(I)$, 使

$$\alpha := a(u, \bar{v}) - (f, \bar{v}) \neq 0$$

不妨设$\alpha < 0$(否则, 令$\bar{v} = -\bar{v}$), 则由 (36) 式知

$$t[a(u, \bar{v}) - (f, \bar{v})] + \frac{t^2}{2} a(\bar{v}, \bar{v}) = \alpha t + \beta t^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathrm{R} \tag{38}$$

其中, $\alpha, \beta := a(\bar{v}, \bar{v})/2 > 0$(利用 $a(\bar{v}, \bar{v})$ 的强制性) 均不依赖于 t.

注意: 显然存在充分小的 $t > 0$ 使得 (36) 不成立. $\square$

注意：虚功原理比极小位能原理 (要求对称) 应用要广.

习题 试对问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx}) + u = 6, \quad 1 < x < 2 \\ u(1) = 8, \quad u'(2) + 2u(2) = 3 \end{cases}$$

建立相应虚功原理或极小位能原理。

综上: 为两点边值问题 (A) :

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \ \ a < x < b$$
$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

建立两种等价问题:

变分问题（B）: 求 $u \in H_E^1(I)$, 使

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in H_E^1(I)$$

极小问题 (C) 为: 求 $u \in H_E^1(I)$, 使

$$J(u) = \min_{v \in H_E^1(I)} J(v)$$

冯康原理:

同一物理问题可以有许多不同的数学形式，它们在数学上是等价的，但在实践中并不等效.

从不同的数学形式可能导致不同的数值计算方法，原问题的基本特征在离散后应尽可能得到保持.

分别从微分方程边值问题的等价问题（B）和（C）出发，可以给出相应的数值求解方法：Galerkin 方法和 Ritz 方法。

Ritz: 德国光学家，Ritz方法于 19 世纪末提出

Galerkin：俄国工程师，Galerkin 方法于 1906 年提出
是Ritz方法的推广

下面主要介绍 Galerkin 方法.

Galerkin 方法

Galerkin方法（一种数值求解方法）的基本思想：

将试探函数空间和检验函数空间 $H_E^1(I)$ (无限维) 分别用其适当的有限维子空间 V_n 近似代替.

将无限计算问题化为有限计算问题.

设 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 是 V_n 的一组基，则对 $\forall u_n \in V_n$，有

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$$

变分问题 (B) 的近似变分问题为：求 $u_n \in V_n$，使得

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n), \forall v_n \in V_n$$

$\Leftrightarrow$ 求 $u_n \in V_n$，使得

$$a(u_n, \phi_i) = (f, \phi_i), \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{39}$$

$\Leftrightarrow$ 求 $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$ 中的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i) c_j = (f, \phi_i), i = 1, 2, \cdots, n \tag{40}$$

Ritz 方法

Ritz 方法（一种数值求解方法）的基本思想：

将函数空间 $H_E^1(I)$ 用有限维子空间 V_n 近似代替.
极小问题 (C) 的近似问题：求 $u_n \in V_n$，使得

$$J(u_n) = \min_{v_n \in V_n} J(v_n)$$

注意

$$J(u_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a(\phi_i, \phi_j) c_i c_j - \sum_{i=1}^{n} c_i (\phi_i, f)$$

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i(x) \text{ 是最小值函数} \Leftrightarrow \text{系数 } c_1,\cdots c_n, \text{ 满足(习题)}$$

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j}=0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n}a(\phi_j,\phi_i)c_j=(f,\phi_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

由此知: Ritz 方法与 Galerkin 方法导出数值解满足的计算公式完全相同, 习惯上称方程 (40) 为Ritz-Galerkin 方程, 并称相应的数值解为 Galerkin (或 Ritz) 数值解.

Ritz 方法与 Galerkin 方法的比较

Galerkin 方法： 方法推导更直接，适用面更广，如不要求 $a(u,v)$ 对称.

Ritz 方法：力学意义更明确，理论基础比较容易建立.

例. 两点边值问题:

$$\begin{cases} Lu := -u'' + u' + u = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u'(1) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

与之相对应的双线性形式为

$$a(u,v) = \int_a^b (u'v' + u'v + uv)dx$$

注意：当 Ritz-Galerkin 方法用于非齐次边值问题时，试探和检验函数空间不相同，但通过齐次化处理后，可转化为相同情形.

例如对上例，令 $w = u - (1 - x)$ 则

$$\begin{cases} Lw = -w'' + w' + w = g, & 0 < x < 1 \\ w(0) = 0, w'(1) = 1 \end{cases}$$

其中 $g(x) = f(x) + x$.

w 满足齐次本质边界条件.

考虑如下两点边值问题

$$\begin{cases} Lu := u'' + u = -x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

其真解为$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$

令 $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), u(0) = u(1) = 0\}$, 则上述边值问题 (形式上)的基于虚功方程的变分问题为:

求 $u \in H_0^1(I)$, 满足

$$a(u, v) = -(x, v), \forall v \in H_0^1(I), \tag{43}$$

其中

$$a(u, v) = (Lu, v) = \int_0^1 (-u'v' + uv)dx \tag{44}$$

记 $\omega(x)=x(1-x)$, 引入 $H_0^1(I)$ 的 n 维近似 (代数多项式) 子空间

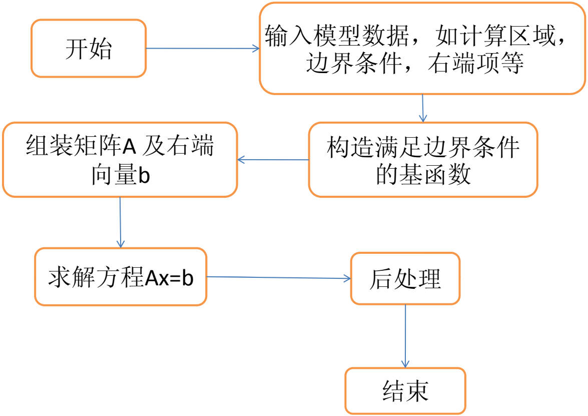
$$U_n=\{\phi_1,\cdots,\phi_n\},\ \phi_i=\omega(x)x^{i-1},\ i=1,\cdots,n$$

利用 Ritz-Galerkin 计算公式 (40) 可知: 问题 (42) 关于 U_n 下的近似变分问题解 $u_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\phi_i(x)$ 中的系数 $c=(c_1,\cdots c_n)^T\in R^n$ 满足

$$\sum_{j=1}^{n}a(\phi_j,\phi_i)c_j=-(x,\phi_i),i=1,2,\cdots,n$$

下面首先给出求 Galerkin 数值解的算法流程，然后再给出实现算法的 Matlab 代码，最后给出数值实验结果.

算法流程


开始
输入模型数据，如计算区域，边界条件，右端项等
构造满足边界条件的基函数
组装矩阵A 及右端向量b
求解方程Ax=b
后处理
结束

算法实现 I

```
function Galerkin_test
%% 准备初始数据

% 微分方程模型数据。函数 modeldata 返回一个结构体 pde
% pde.f : 右端项函数
% pde.exactu : 真解函数
% pde.Du : 真解导数
pde = modeldata();

% 区间
I = [0,1];

% 空间维数（基函数个数）
n = 2;

% 积分精度
option.quadOrder = 10;

%% Galerkin 方法求解
uh = Galerkin(pde,I,n,option);
```

算法实现 II

```
%% 显示数值解图像
showsolution(uh,'-k');

%% 计算代表点处真解和数值解
x = [1/4;1/2;3/4];
[v,~] = basis(x,n);
format shorte
u = pde.exactu(x)
ux = v'*uh
```

```
function pde = modeldata()
%% MODELDATA
%  u(x) = sin(x)/sin(1) - x
%  Du(x) = cos(x)/sin(1)
%  f(x) = -x

pde = struct('exactu',@exactu,'f',@f,'Du',@Du);
%% 精确解
function z = exactu(x)
z = sin(x)/sin(1) - x;
end
%% 右端项
function z = f(x)
z = -x;
end
%% 精确解梯度
function z = Du(x)
z = cos(x)/sin(1);
end
end
```

```
function [phi,gradPhi] = basis(x,n)
%% BASIS 计算 n 维空间 n 个基函数在 m(=length(x)) 个点上的取值
%
%  H_0^1([0,1]) 的 n 维近似子空间， 取 w(x) = x*(1-x), n 个基函数分别为:
%          phi_i = w(x)*x^{i-1}, i = 1, 2,..., n
%
%  输入:
%   x(1:m,1): 点
%   n: 空间维数
%
%  输出:
%   phi(1:n,1:m): phi(i,j) 为第 i 个基函数在第 j 个点在处的函数值.
%   gradPhi(1:n,1:m): gradPhi(i,j) 为第 i 个基函数在第 j 个点处的导数值.


m = length(x);% 点的个数

%% 函数值
w = x.*(1-x);
v = ones(n,m);
v(2:end,:) = bsxfun(@times,v(2:end,:),x');
v = cumprod(v,1);
phi = bsxfun(@times,v,w');
```

```
%% 函数梯度值
gw = 1-2*x;
gv = [zeros(1,m);v(1:end-1,:)];
gv(3:end,:) = bsxfun(@times,(2:n-1)', gv(3:end,:));
gradPhi = bsxfun(@times,v,gw') + bsxfun(@times,gv,w');
```

```
function uh = Galerkin(pde,I,n,option)
%% GALERKIN 组装矩阵 A 和右端向量 b ，并求解
%
%   pde: 模型数据
%   I  : 区间
%   n  : 空间维数

% 区间长度
h = I(2) - I(1);

% 区间 [0,1] 上的 Gauss 积分点及权重
[lambda, weight] = quadpts1d(option.quadOrder);
%积分点个数
nQuad = length(weight);

%% 构造 A 和 b
A = zeros(n,n);
b = zeros(n,1);
for q = 1:nQuad
  gx = lambda(q);
  w = weight(q);
  [phi,gradPhi] = basis(gx,n);
  A = A+(-gradPhi*gradPhi' + phi*phi')*w;
  b = b + pde.f(gx)*phi*w;
```

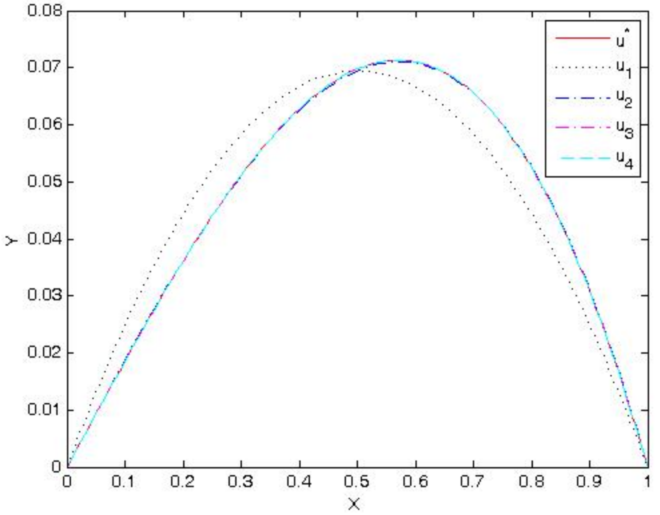
```
end
A = h*A;
b = h*b;

%% 求解
uh = A\b;
```

实验结果 I

下面分别给出了 $n=1,2,3,4$ 时, Galerkin 数值解 $u_n(x)$ 与真解 u^* 在三个代表点处的值:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
u^*	4.401365432e-002	6.974696366e-002	6.00561663e-002
u_1	5.208333333e-002	6.944444444e-002	5.20833333e-002
u_2	4.408028455e-002	6.944444444e-002	6.00863821e-002
u_3	4.403238182e-002	6.974637681e-002	6.00384793e-002
u_4	4.401416668e-002	6.974637681e-002	6.00566945e-002

实验结果 II


0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
Y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
X
u^*
u_1
u_2
u_3
u_4

由该例子可见： 尽管 $a(u,v)$ 不满足强制性条件 (从而不满足虚功原理的假设条件), 即 Galerkin 方法的 源头没理论基础， 但就算法本身而言, Galerkin 方法仍然可用 (因为对真解有逼近), 因此， Galerkin 方法 的适应范围可以比理论上的假设条件更广。

习题 1 试举一反例说明 $a(u,v) = \int_0^1 (-u'v' + uv)dx$ 不满足强制性.

Galerkin (或 Ritz) 方法的适定性

定理. 基于 Galerkin (或 Ritz) 数值解存在且唯一。

证明：只需证明方程 (40) 的系数矩阵 A 正定，即

$$(Aw, w) \geq 0, \ \forall w \in R^n, \quad (Aw, w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$$

注意：对 $\forall w := (w_1, \cdots, w_n)^T$，令函数

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$$

有

$$(Aw, w) = a(u_n, u_n) \tag{45}$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
Aw &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} w_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} w_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} w_j)^T \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a(\phi_1, \phi_j) w_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a(\phi_n, \phi_j) w_j)^T \\
&= (a(\phi_1, \sum_{j=1}^{n} w_j \phi_j), \cdots, a(\phi_n, \sum_{j=1}^{n} w_j \phi_j))^T \\
&= (a(\phi_1, u_n), \cdots, a(\phi_n, u_n))^T
\end{aligned}
$$

因此

$$
(Aw, w) = \sum_{i=1}^{n} w_i a(\phi_i, u_n) = a(\sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i, u_n) = a(u_n, u_n)
$$

$\square$

利用 (45) 和 $a(\cdot,\cdot)$ 的强制性，可得

$$(Aw,w) = a(u_n,u_n) \geq \gamma\|u_n\|_1^2 \geq 0,\ \forall w \in R^n$$

且

$$(Aw,w) = 0 \Leftrightarrow u_n \equiv 0$$

又由于 $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i(x)$, 而 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是 V_n 的一组基，所以

$$u_n \equiv 0 \Leftrightarrow w_i = 0, i = 1(1)n \Leftrightarrow w = \vec{0}$$

这样就证得了 A 的正定性. $\square$

Galerkin (或 Ritz) 数值解的收敛性

设 u 是变分问题 (B) 的真解函数，即满足

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_E^1(I) \tag{46}$$

u_n是 Galerkin 数值解函数，即满足

$$a(u_n,v_n)=(f,v_n),\forall v_n\in V_n \tag{47}$$

利用 (46) 和 (47)，并注意 $V_n\subset H_E^1(I)$，可得 (正交投影性质):

$$a(u-u_n,v_n)=0,\forall v_n\in V_n \tag{48}$$

$\Rightarrow$ (利用(48))

$$\begin{aligned}\|u-u_n\|_1^2 &\le \gamma^{-1}a(u-u_n,u-u_n)\\ &= \gamma^{-1}a(u-u_n,u)=\gamma^{-1}a(u-u_n,u-v_n)\\ &\le \gamma^{-1}M\|u-u_n\|_1\|u-v_n\|_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (拟最佳逼近性)

$$\|u-u_n\|_1 \le C\inf_{v_n\in V_n}\|u-v_n\|_1 \tag{49}$$

完全性: $\{\phi_i\}_1^\infty$ 的一切可能的线性组合于 $H_E^1(I)$ 中稠密.

定理. 若 $\{\phi_i\}_1^\infty$ 于 $H_E^1(I)$ 中是完全的, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0$$

事实上，由完全性知：对于真解函数 $u \in H_E^1(I)$，存在函数序列

$$\{\psi_n\}_1^\infty,\ \psi_n \in V_n = span\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} \|u - \psi_n\|_1 = 0$$

$\Rightarrow$ (利用(49))

$$\|u - u_n\|_1 \le C \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1 \le C \|u - \psi_n\|_1$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0$$

$\square$

Ritz-Galerkin 法的主要困难

1. 近似子空间 (或基函数) 的合理选取
2. 数值积分计算量大
3. 代数方程组求解困难

线性有限元空间

对求解区间 I 做网格剖分

1. 网格剖分节点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

称 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 为第 i 个内部节点, x_0 和 x_n 为边界节点;

2. 网格剖分单元 分别称 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 和 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 为第 i 个 剖分单元 和 剖分步长.

记 $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$.

定义

$$V_E^h = \left\{ u_h \in C(\bar{I}) : \ u_h|_{I_i} \in P_1(I_i), 1 \le i \le n, \ u_h(a) = 0 \right\}$$

$P_1(I_i)$: I_i 上线性代数多项式的全体.

称 V_E^h 为 1 次 Lagrange 型有限元空间 (简称线性元空间).

线性元空间 V_E^h 的维数

$$m := \dim V_E^h = 2n - (n-1) - 1 = n$$

V_E^h 中的函数在 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上形如：$a_i + b_i x$.
记 $u_i = u_h(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 对任给的 $u_h \in V_E^h$, 分别按两种形式给出其表示式.

(a) 分段线性表示（单元形状函数）

单元形状函数 $u_h^k(x)$: 为 $u_h(x)$ 在 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ 上的限制函数.

由 Lagrange 插值公式

$$u_h^k(x) = u_{k-1} l_{k,0}(x) + u_k l_{k,1}(x), \;\; x \in I_k$$

其中

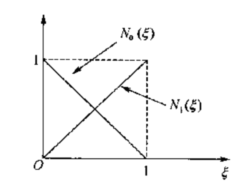
$$l_{k,0}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}, \quad l_{k,1}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

为关于插值点 x_{k-1} 和 x_k 的 1 次 Lagrange 因子.

单元形状函数的另一种表示公式

在参考 (或标准) 单元 $[0,1]$ 上求得所谓的标准插值基函数:

$$N_0(\xi) = 1 - \xi, \;\; N_1(\xi) = \xi$$



引入仿射变换:

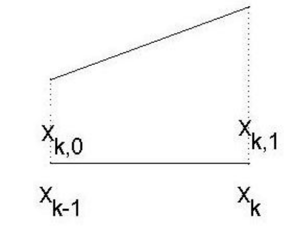
$$\xi = F_k(x) := \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \; : \; I_k \to [0,1] \tag{50}$$

逆变换

$$x = X(\xi) := x_{k-1} N_0(\xi) + x_k N_1(\xi), \;\; [0,1] \to I_k \tag{51}$$

单元形状函数

$$u_h^k(x) = u_{k-1}N_0(\xi) + u_k N_1(\xi), \;\; x \in I_k \tag{52}$$



$u_h(x)$ 可分段线性表示为

$$u_h(x) = \begin{cases} u_h^1(x), x \in I_1 \\ u_h^2(x), x \in I_2 \\ \vdots \\ u_h^n(x), x \in I_n \end{cases}$$

(b) 整体表示

关键: 给出线性元空间 V_E^h 的一组基函数.

在每个非本质边界插值点 x_i 处, 引入函数

$$\phi_i(x) \in V_E^h, \quad i = 1, \cdots, n$$

满足插值条件

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{53}$$

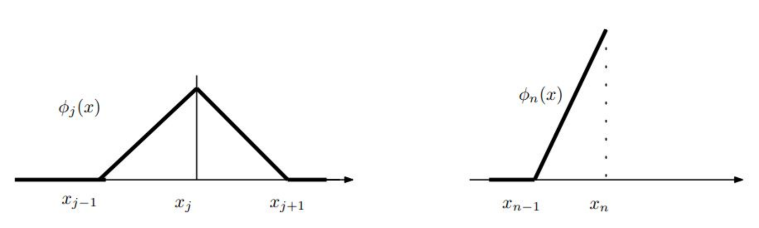
经简单计算, 可得

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h_i}, & x_{i-1} \le x < x_i, \\ 1 - \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{在别处}, \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \phi_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_n}{h_n}, & x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & \text{在别处}. \end{cases} \end{cases} \tag{54}$$

借助于仿射变换 (50) 及 $[0,1]$ 上的标准插值基函数，则 (54) 也可表示为

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\phi_i(x) = \begin{cases} N_1(\xi), & \xi = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \le x < x_i, \\ N_0(\xi), & \xi = \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, \quad x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{在别处}, \end{cases} \\
\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\
\phi_n(x) = \begin{cases} N_1(\xi), & \xi = \frac{x-x_{n-1}}{h_n}, \quad x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & \text{在别处}, \end{cases}
\end{array}
\right.
\tag{55}
$$

其几何形状如下图所示



易知 $\{\phi_i(x),\quad i=1,2,\cdots,n\}$ 是一组线性无关的函数系，即构成了线性元空间 V_E^h 中一组基，称之为线性元空间 V_E^h 的 Lagrange 节点基函数.

事实上，若

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) \equiv 0$$

特别地，取 $x = x_i$ 代入上式，可得 $c_i = 0$, 这样就证得了 $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ 是一组线性无关的函数系。 $\square$

利用 (53), 易验证

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i(x). \tag{56}$$

至此, 解决了 $H_E^1(I)$ 的有限维子空间 (线性元空间) 的构造问题. 下面利用 Galerkin 方法求解问题 (A).

基于 Galerkin 方法的线性有限元方程

1) 等价变分问题

基于虚功原理的等价变分问题 (问题 (B)): 求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_E^1(I) \tag{57}$$

其中

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_a^b \left[p \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + quv\right] dx \\ (f, v) = \int_a^b fv dx \end{cases} \tag{58}$$

下面给出基于 $H_E^1(I)$的子空间 V_E^h (线性元空间) 的 Galerkin 数值解计算公式.

2) 近似变分问题

问题（B）的近似变分问题： 求 $u_h(x) \in V_E^h$，使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_E^h \tag{59}$$

3) 线性有限元方程

将 $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i(x)$ 代入 (59)，并将 v_h 取为基函数 ϕ_j, 则有

$$a(\sum_{i=1}^{n} u_i\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} a(\phi_i, \phi_j)u_i = (f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{60}$$

$\Leftrightarrow$ (注意: 当 $|j - i| \geq 2$ 时, $\phi_i \cdot \phi_j = 0$)

1. 当 $2 \le j \le n-1$ 时，方程 (60) 的左端只有三个非零系数：$a(\phi_j, \phi_j)$ 和 $a(\phi_{j\pm 1}, \phi_j)$.
2. 当 $j=1$ 时，方程 (60) 的左端只有两个非零系数：$a(\phi_1, \phi_1)$ 和 $a(\phi_2, \phi_1)$.
3. 当 $j=n$ 时，方程 (60) 的左端只有两个非零系数：$a(\phi_n, \phi_n)$ 和 $a(\phi_{n-1}, \phi_n)$.

基于线性元子空间的 Galerkin 数值解满足的计算公式:

$$KU = b \tag{61}$$

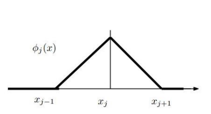
其中 n 阶方阵 $K=(a_{i,j})$ 和 n 维向量 $b=(b_1, \cdots, b_n)^T$ 分别为

$$K = \begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & & \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & a(\phi_2,\phi_3) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & a(\phi_{n-1},\phi_{n-2}) & a(\phi_{n-1},\phi_{n-1}) & a(\phi_{n-1},\phi_n) \\ & & a(\phi_n,\phi_{n-1}) & a(\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix}$$

利用一般的 Galerkin 理论可知 (61) 的解存在且唯一.

利用 (55) 和 (58)



$$a(u,v)=\int_a^b\left[p\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+quv\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
a_{jj} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [p(\phi_j')^2 + q(\phi_j)^2]dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} [p(\phi_j')^2 + q(\phi_j)^2]dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [p(\frac{dN_1(\xi)}{dx})^2 + q(N_1(\xi))^2]dx \ \ (\text{这里 } \xi = \tfrac{x-x_{j-1}}{h_j}) \\
&\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} [p(\frac{dN_0(\xi)}{dx})^2 + q(N_0(\xi))^2]dx \ \ (\text{这里 } \xi = \tfrac{x-x_j}{h_{j+1}}) \\
&= a(N_1, N_1)_{I_j} + a(N_0, N_0)_{I_{j+1}} \qquad (62)
\end{aligned}
$$

类似可得 (习题):

1. 矩阵非对角元素 $a_{j,j-1} := a(\phi_{j-1}, \phi_j)$ $(j = 2, \cdots, n$)的表示式为

$$a_{j,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} [p(\phi'_{j-1}\phi'_j) + q(\phi_{j-1}\phi_j)]dx = a(N_0, N_1)_{I_j} \tag{63}$$

2. 由对称性知：矩阵非对角元素 $a_{j,j+1} := a(\phi_{j+1}, \phi_j)$ $(j = 1, \cdots, n-1)$的表示式为

$$a_{j,j+1} = a(N_1, N_0)_{I_{j+1}} \tag{64}$$

方程的右端项 $(j = 1, \cdots, n-1)$

$$
\begin{aligned}
b_j := \int_a^b f\phi_j dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\phi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\phi_j(x)dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)N_1(\xi)dx \ \ (\text{这里 } \xi = \tfrac{x-x_{j-1}}{h_j}) \\
&\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)N_0(\xi)dx \ \ (\text{这里 } \xi = \tfrac{x-x_j}{h_{j+1}}) \\
&= (f, N_1)_{I_j} + (f, N_0)_{I_{j+1}} \qquad (65)
\end{aligned}
$$

$$
b_n = (f, N_1)_{I_n} = h_n \int_0^1 f(x_{n-1} + h_n\xi)N_1(\xi)d\xi
$$

习题 1 （P.47. 2.1.1）仅要求

（1）网格剖分：作 2 或 3 段的等距剖分；

（2）利用中矩形公式计算积分 (65)。

习题 2* 导出非齐次两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, & a < x < b \\ u(a) = \gamma, \quad u'(b) + \alpha u(b) = \beta \end{cases}$$

的线性元方程, 其中

(1) 正的光滑函数 $p(x)$, 非负连续函数 $q(x)$ 可自己定义，如取

$$p(x) = x - a + 1, q(x) = 0$$

(2) $\gamma, \alpha \geq 0, \beta$ 也可自己定义，如取 $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

$$
\begin{aligned}
a(u_h, v_h)_{I_k} &= a(u_{k-1}N_0 + u_k N_1, v_{k-1}N_0 + v_k N_1)_{I_k} \\
&= a(N_0, N_0)_{I_k} u_{k-1} v_{k-1} + a(N_1, N_0)_{I_k} u_k v_{k-1} \\
&\quad + a(N_0, N_1)_{I_k} u_{k-1} v_k + a(N_1, N_1)_{I_k} u_k v_k \\
&= (v_{k-1}, v_k) K^{I_k} \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中

$$
K^{I_k} := \begin{bmatrix} a_{11}^{I_k} & a_{12}^{I_k} \\ a_{21}^{I_k} & a_{22}^{I_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(N_0, N_0)_{I_k} & a(N_1, N_0)_{I_k} \\ a(N_0, N_1)_{I_k} & a(N_1, N_1)_{I_k} \end{bmatrix} \tag{66}
$$

称为单元刚度矩阵.

$$
\begin{aligned}
(f, v_h)_{I_k} &= (f, v_{k-1}N_0 + v_k N_1) \\
&= (f, N_0)_{I_k} v_{k-1} + (f, N_1)_{I_k} v_k \\
&= (v_{k-1}, v_k)\, b^{I_k}
\end{aligned}
$$

其中

$$
b^{I_k} = \begin{pmatrix} b_1^{I_k} \\ b_2^{I_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, N_0)_{I_k} \\ (f, N_1)_{I_k} \end{pmatrix} \tag{67}
$$

称为单元荷载向量.

由 (62), (63), (64) 和 (66) 可知：总刚度矩阵的元素与单元刚度矩阵的元素有如下关系：

1. 矩阵对角元 $a_{jj} = a_{22}^{I_j} + a_{11}^{I_{j+1}}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \cdots, n-1;$
2. 矩阵非对角元 $a_{j,j-1} = a_{21}^{I_j}, \quad \forall j = 2, 3, \cdots, n;$
3. 矩阵非对角元 $a_{j,j+1} = a_{12}^{I_{j+1}}, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n-1;$
4. 矩阵对角元 $a_{n,n} = a_{22}^{I_n}.$

单元刚度矩阵对总刚度矩阵的叠加方式

当 $j=1$ 时，

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & a_{22}^{l_1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

当 $j=2,\cdots,n$ 时，

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{l_j} & a_{12}^{l_j} \\ a_{21}^{l_j} & a_{22}^{l_j} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} & \cdots \\ \cdots & a_{j,j-1} & a_{j,j} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

单元载荷向量对总载荷向量的叠加方式

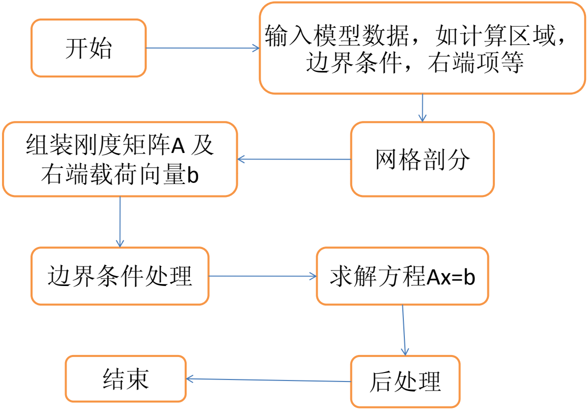
当 $j=1$ 时,

$$\begin{pmatrix} * \\ b_2^{l_1} \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

当 $j=2,\cdots,n$ 时,

$$\begin{pmatrix} b_1^{l_j} \\ b_2^{l_j} \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{j-1} \\ b_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

算法流程


开始
输入模型数据，如计算区域，边界条件，右端项等
网格剖分
组装刚度矩阵A 及右端载荷向量b
边界条件处理
求解方程Ax=b
后处理
结束

代码实现 I

```
%% 准备初始数据

% 区间[a,b]
a = 0;
b = 1;

%网格剖分尺寸
h = 0.1;

% 微分方程模型数据。函数 sindata 返回一个结构体 pde
% pde.f : 右端项函数
% pde.exactu : 真解函数
% pde.Du : 真解导数
% pde.g_D: D 氏边界条件函数
pde = sindata();

% 设定积分精度Gauss
option.fQuadOrder = 3;
option.errQuadOder = 3;
```

代码实现 II

```
%% 网格剖分
[node,elem,bdFlag] = intervalmesh(a,b,h);

%% 组装刚度矩阵及右端向量、边界条件处理、求解Ab
uh = Poisson1d(node, elem, pde, bdFlag,option);

%% 计算 L2 和 H1 误差、结果可视化
errL2 = getL2error1d(node,elem,pde.exactu,uh,option.errQuadOder);
errH1 = getH1error1d(node,elem,pde.Du,uh,option.errQuadOder);
showsolution1d(node,elem,uh,'-+k');
```

模型数据 I

```
function pde = sindata( )
%% SINDATA
%
%   u  = sin(pi*x)
%   f  = pi*pi*sin(pi*x)
%   Du  = pi*cos(pi*x)
%

pde = struct('f',@f,'exactu',@exactu,'g_D',@g_D,'Du',@Du);

% right hand side function
function z = f(p)
    x = p;
    z = pi*pi*sin(pi*x);
end
% exact solution
function z = exactu(p)
    x = p;
    z = sin(pi*x);
end
```

模型数据 II

```
% Dirichlet boundary condition
function z = g_D(p)
    x = p;
    z = exactu(p);
end
% Derivative of the exact solution
function z = Du(p)
    x = p;
    z = pi*cos(pi*x);
end

end
```

网格剖分 I

```
function [node,elem,bdFlag] = intervalmesh(a,b,h)
%% INTERVALMESH the uniform mesh on interval [a,b] with size h.
%
% node(1:N,1): node(i) is the coordinate of i-th
% mesh point.
%
% elem(1:NT,1:2): elem(j,1:2) are the indexes of the two end
% vertices of j-th elements.
%

node = a:h:b;
node = node';
N = length(node);
elem = [1:N-1;2:N];
elem = elem';
bdFlag = false(N,1);
bdFlag([1,N]) = true;
```

网格剖分 I

```
function [node,elem,bdFlag] = intervalmesh(a,b,h)
%% INTERVALMESH the uniform mesh on interval [a,b] with size h.
%
% node(1:N,1): node(i) is the coordinate of i-th
% mesh point.
%
% elem(1:NT,1:2): elem(j,1:2) are the indexes of the two end
% vertices of j-th elements.
%

node = a:h:b;
node = node';
N = length(node);
elem = [1:N-1;2:N];
elem = elem';
bdFlag = false(N,1);
bdFlag([1,N]) = true;
```

sparse函数介绍 I

sparse 是 Matlab 中生成稀疏矩阵(只存储非零元素的矩阵)的函数，下面给出三种基本用法：

A = sparse(N,N): 生成一个规模 N*N 的稀疏矩阵，所有元素为0

A = sparse(B): 把 B 转化为相同规模的稀疏矩阵 A

A = sparse(rows,cols,vals,N,N): 通过三元数组组装稀疏矩阵 A

sparse函数介绍 II

```
>> B
B =
     1     0     0
     0     0     2
     3     0     0

>> [rows,cols,vals] = find(B)
rows =      cols =        vals =
     1           1             1
     3           1             3
     2           3             2
```

sparse函数介绍 III

```
>> A = sparse(rows,cols,vals,3,3)

A =

   (1,1)        1
   (3,1)        3
   (2,3)        2
```

accumarray函数介绍 I

accumarray 是 Matlab 中生成满矩阵的函数，基本用法如下：

$A =$ accumarray(subs,vals,[N,1]): 生成一个长度为 N 的列向量，其中 subs 和 vals 是相同长度的向量.

```
>> [subs, vals]
ans =
     1      2.5000
     2      1.3000
     1      2.5000
     4      4.1000
     5      5.1000
```

accumarray函数介绍 II

```
>> b = accumarray(subs,vals,[4,1])

b =

    5.0000
    1.3000
    3
    4.1000
    5.1000
```

组装刚度矩阵、右端项及求解 I

```
function uh = Poisson1d(node, elem, pde, bdFlag,option)
%% POISSON1D solve 1d Poisson equation by P1 linear element.
%
%   uh = Poisson1d(node,elem,pde, bdFlag) produces linear
%   finite element approximation of 1d Poisson equation.

N = size(node,1); NT = size(elem,1); Ndof = N;
%% Compute geometric quantities and gradient of local basis
lens = node(elem(:,2))-node(elem(:,1));
Dphi = [-1./lens,1./lens];

%% Assemble stiffness matrix
A = sparse(Ndof,Ndof);
for i = 1:2
    for j = i:2
        Aij = Dphi(:,i).*Dphi(:,j).*lens;
        if (j==i)
            A = A + sparse(elem(:,i), elem(:,j),Aij,Ndof,Ndof);
        else
```

组装刚度矩阵、右端项及求解 II

```
            A = A + sparse([elem(:,i);elem(:,j)],[elem(:,j);elem
    (:,i)],...
                [Aij; Aij],Ndof,Ndof);
        end
    end
end

%% Assemble the right hand side
[lambda,weight] = quadpts1d(option.fQuadOrder);
nQuad = length(weight);
phi = lambda;
bt = zeros(NT,2);
for i = 1:nQuad
    px = node(elem(:,1))*phi(i,1) + node(elem(:,2))*phi(i,2);
    fp = pde.f(px);
    for k = 1:2
        bt(:,k) = bt(:,k) + weight(i)*fp.*phi(i,k);
    end
end
bt = bt.*repmat(lens,1,2);
b = accumarray(elem(:),bt(:),[Ndof 1]);
```

组装刚度矩阵、右端项及求解 III

```
clear bt px;

%% modify left-hand vector
isFixed = bdFlag;
isFree = ~isFixed;
uh = zeros(Ndof,1);
uh(isFixed) = pde.g_D(node(isFixed));
b = b - A*uh;

%% solve
uh(isFree) = A(isFree,isFree)\b(isFree);
```

计算误差 I

```
function err = getL2error1d(node,elem, exactu, uh, quadOrder)
%% GETL2ERROR1D L2 norm of approximation of linear fintie
%% element
%
% compute L2 error element-wise using quadrature rule with order
% quadOrder

NT = size(elem,1);
err = zeros(NT,1);
[lambda,weight] = quadpts1d(quadOrder);

% basis function at quadrature points
phi = lambda;

nQuad = length(weight);
for i = 1:nQuad
    uhp = uh(elem(:,1))*phi(i,1) + uh(elem(:,2))*phi(i,2);
    px = node(elem(:,1))*phi(i,1) + node(elem(:,2))*phi(i,2);
    err = err + weight(i)*(exactu(px) - uhp).^2;
end
```

计算误差 II

```
lens = node(elem(:,2)) - node(elem(:,1));
err = err.*lens;
err = sqrt(sum(err));

function err = getH1error1d(node,elem,Du,uh,quadOrder)
%% GETH1ERROR1D H1 norm of approximation error of linear finite
%% element
%
% compute H1 error element-wise using quadrature rule
% with order quadOrder

NT = size(elem,1);
err = zeros(NT,1);
[lambda,weight] = quadpts1d(quadOrder);
phi = lambda;
lens = node(elem(:,2))-node(elem(:,1));
Dphi = [-1./lens,1./lens];

nQuad = length(weight);
Duh = uh(elem(:,1)).*Dphi(:,1) + uh(elem(:,2)).*Dphi(:,2);
```

计算误差 III

```
for i = 1:nQuad
    px = node(elem(:,1))*phi(i,1) + node(elem(:,2))*phi(i,2);
    err = err + weight(i)*(Du(px)-Duh).^2;
end

err = err.*lens;
err = sqrt(sum(err));
```

算例 1：我们利用有限元法去求解

$$-u''(x) = 16\pi^2 \sin(4\pi x),$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

问题的真解为

$$u(x) = \sin(4\pi x)$$

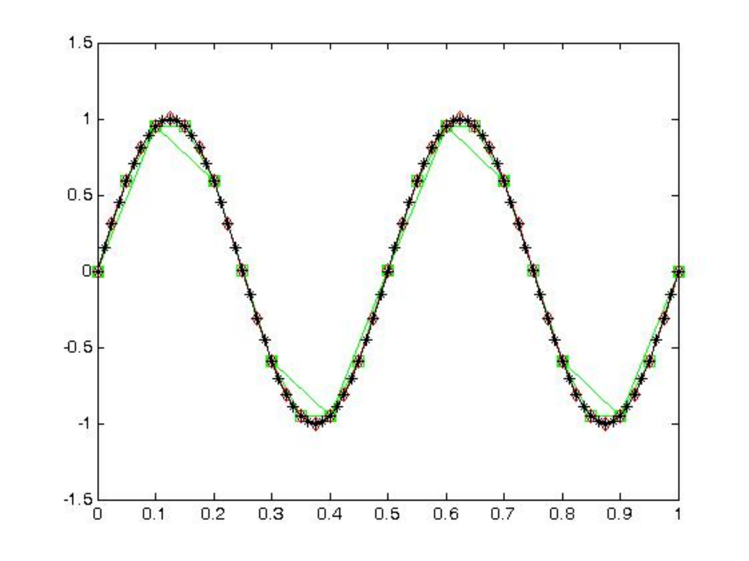
```
function pde = sin4pidata( )
%% SINDATA
%
%   u = sin(4*pi*x)
%   f = 16*pi*pi*sin(4*pi*x)
%   Du = 4*pi*cos(4*pi*x)
%

pde = struct('f',@f,'exactu',@exactu,'g_D',@g_D,'Du',@Du);

% right hand side function
```

```
function z = f(p)
    x = p;
    z = 16*pi*pi*sin(4*pi*x);
end
% exact solution
function z = exactu(p)
    x = p;
    z = sin(4*pi*x);
end
% Dirichlet boundary condition
function z = g_D(p)
    x = p;
    z = exactu(p);
end
% Derivative of the exact solution
function z = Du(p)
    x = p;
    z = 4*pi*cos(4*pi*x);
end

end
```

```
function [N,errL2,errH1] = femtest1d()
%% the initial data
h = 0.1;
a = 0;
b = 1;
pde = sin4pidata();
option.fQuadOrder = 3;
option.errQuadOder = 3;


maxIt = 5;
errL2 = zeros(maxIt,1);
errH1 = zeros(maxIt,1);
N = zeros(maxIt,1);

for i = 1:maxIt
    [node,elem, bdFlag] = intervalmesh(a,b,h/2^(i-1));
    uh = Poisson1d(node,elem,pde,bdFlag,option);
    N(i) = size(elem,1);

    name = ['solution' int2str(N(i))];
    save(name,'node','elem','uh');
    errL2(i) = getL2error1d(node,elem,pde.exactu,uh,option.
    errQuadOder);
```

```
    errH1(i) = getH1error1d(node,elem,pde.Du,uh,option.
    errQuadOder);

end
```

有限元解



误差

可得如下结果

N	10	20	40	80	160
$\|u-u_h\|_0$	8.8574e-2	2.2976e-2	5.7977e-3	1.4528e-3	3.6341e-4
误差比	-	3.8551	3.9630	3.9907	3.9977
$\lvert u-u_h\rvert_1$	3.1532	1.6029	8.0475e-1	4.0279e-1	2.0145e-1
误差比	-	1.9672	1.9918	1.9979	1.9995

Table: 其中N是单元个数。

设h为单元尺寸，由以上数据结果可知：

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_0 &\approx O(h^2) = O(N^{-2}) \\
|u-u_h|_0 &\approx O(h^1) = O(N^{-1})
\end{aligned}
$$

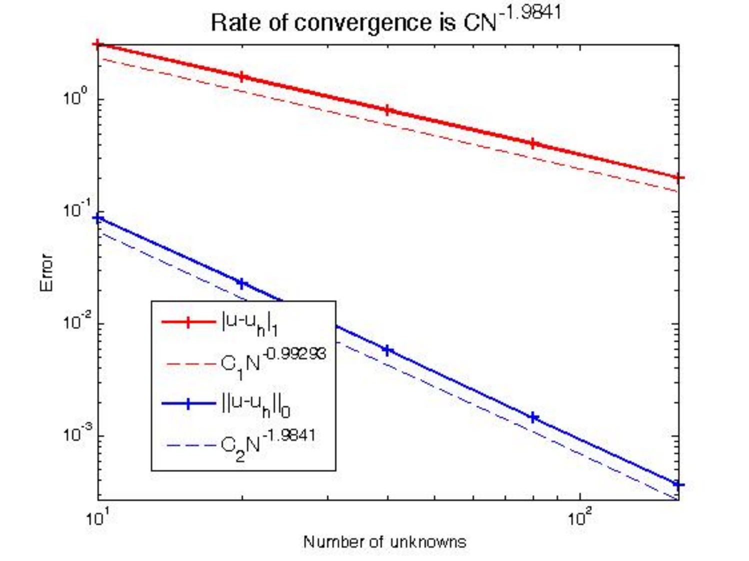
数据分析

给定单元个数向量 N 和 误差向量 err，我们可以利用 Matlab 中的：

polyfit: 多项式拟合函数。例子：
p = polyfit(log(N),log(err),1)

loglog : X和Y轴都取log的画图函数。
loglog(N,err,'-*')

对上述计算结果进行数据分析和可视化。


Rate of convergence is CN^-1.9841
Error
Number of unknowns
|u-u_h|_1
C_1N^-0.99293
||u-u_h||_0
C_2N^-1.9841

线性元误差估计

给定两点边值问题 (A)

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = 0, u'(b) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

设 u_h 是 u 的线性元解函数, 下面分别在两种不同的范数下,

$$\|\cdot\|_1 \text{ 和 } \|\cdot\|_0$$

给出有限元函数的误差估计.

线性元误差估计

- H_1 范数 $(\|\cdot\|_1)$ 下的误差估计

由 Ritz-Galerkin 理论，有

$$a(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_E^h \tag{69}$$

Image/2-3-1.png

拟最佳逼近性质

$$\|u-u_h\|_1 \leq \beta \inf_{\forall v_h \in V_E^h} \|u-v_h\|_1 \tag{70}$$

称 $u_I(x) \in V_E^h$ 为 $u(x) \in H_E^1 \cap C(\bar{I})$ 的分段线性插值函数，如果它满足

$$u_I(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \cdots, n \tag{71}$$

当 $x \in I_k, k = 1, \cdots, n$ 时，有

$$\begin{aligned} u_I(x) &= u_I(x_{k-1})N_0(\xi) + u_I(x_k)N_1(\xi) \\ &= u(x_{k-1})N_0(\xi) + u(x_k)N_1(\xi) \end{aligned}$$

$$x = x_{k-1}N_0(\xi) + x_k N_1(\xi)$$

利用 (70)，有

$$\|u-u_h\|_1 \le \beta \|u-u_I\|_1 \tag{72}$$

设 $u \in C^2(\bar{I})$, 下面给出 $\|u-u_I\|_1$ 的估计.

首先给出$\|u-u_I\|_0^2$ 的估计. 对 $\forall x \in I_i$, 有

$$u(x)-u_I(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2} u''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$\Rightarrow$

$$|u(x)-u_I(x)| \le \frac{h_i^2}{2} \max_{x \in I_i} |u''(x)| \le \frac{h^2}{2} \max_{x \in \bar{I}} |u''(x)| := \frac{h^2}{2} \|u''\|_{\infty, \bar{I}}$$

$\Rightarrow$

$$\|u-u_I\|_0^2 \leq \frac{b-a}{4}h^4\|u''\|_{\infty,\bar{I}}^2 \tag{73}$$

接着给出 $\|u'-u_I'\|_0^2$ 的估计. 易知: $\exists \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$u_I'(\eta_i) = u'(\eta_i). \tag{74}$$

$\Rightarrow$

$$u'(x) = u'(\eta_i) + (x-\eta_i)u''(\gamma_i) = u_I'(x) + (x-\eta_i)u''(\gamma_i) \ \gamma_i \in I_i$$

$\Rightarrow$

$$|u'(x) - u_I'(x)| \leq h|u''(\gamma_i)| \leq h\|u''\|_{\infty,\bar{I}}$$

$\Rightarrow$

$$\|u' - u_I'\|_0^2 \le (b-a)h^2\|u''\|_{\infty,\bar{I}}^2$$

由上式和 (73) 可得

$$\|u - u_I\|_1 \le Ch\|u''\|_{\infty,\bar{I}} = O(h\|u''\|_{\infty,\bar{I}})$$

结合上式和 (72) 可得

$$\|u - u_h\|_1 \le O(h\|u''\|_{\infty,\bar{I}})$$

进而得到了线性元的收敛性.

习题 1* 设 $u \in H^2(I) \bigcap H_E^1(I)$, 试证明分段线性插值函数 $u_I(x)$ 满足

$$\|u - u_I\|_1 \leq Ch\|u''\|_0 = O(h\|u''\|_0). \tag{75}$$

进而有

$$\|u - u_h\|_1 \leq O(h\|u''\|_0) \tag{76}$$

(提示：利用带积分余项的 Taylor 展开)

2. L^2 范数 ($\|\cdot\|_0$) 下的误差估计

首先给出微分方程先验估计理论.

引理 1 设问题 (68) 中的 $f, q \in C(\bar{I})$, $p \in C^1(\bar{I})$, $p \geq p_{\min} > 0$, $q \geq 0$, $I = (a, b)$ ，则解函数 $u(x) \in C^2(\bar{I})$，且满足

$$\|u''\|_0 \leq C\|f\|_0 \tag{77}$$

证明：关于 $u(x) \in C^2(\bar{I})$ 可见常微理论，下面证明 (77)。

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_E^1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq \gamma^{-1} a(u, u) = \gamma^{-1}(f, u) \\ &\leq \gamma^{-1}\|u\|_0\|f\|_0 \leq \gamma^{-1}\|u\|_1\|f\|_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|u\|_1 \leq \gamma^{-1}\|f\|_0$$

因为函数 $u(x)$ 满足 (68)，即

$$-p(x)u''(x) = p'(x)u'(x) - q(x)u(x) + f(x)$$

$\Rightarrow$

$$\|u''\|_0 \leq C[\|f\|_0 + \|u\|_1] \leq C_2\|f\|_0$$

利用 Nitsche (尼采)技巧（对偶论证法），给出 $\|u-u_h\|_0$ 的估计.
引入辅助函数 $w(x)$，满足

$$a(v,w)=(u-u_h,v),\forall v\in H_E^1$$

特取 $v=u-u_h$，并利用正交投影性质 (69), 有

$$\|u-u_h\|_0^2=(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,w)=a(u-u_h,w-w_I)$$

进一步，利用双线性泛函的有界性，(75), (76) 和 (77)，可得

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_0^2 &\le M\|w-w_I\|_1\cdot\|u-u_h\|_1 \le O(h^2\|w''\|_0\cdot\|u''\|_0)\\
&\le O(h^2\|u-u_h\|_0\cdot\|f\|_0)
\end{aligned}
$$

将上式两边同时除以 $\|u-u_h\|_0$ 可得

$$
\|u-u_h\|_0 \le O(h^2\|f\|_0)
$$

$\square$

习题 2 P52. 2.2.1 (即给出 $\|\cdot\|_\infty$ 下的线性有限元函数的误差估计)