

CALCUL ANALOGIQUE

1. But

Se familiariser avec les techniques du calcul analogique à travers l'étude de quelques phénomènes physiques bien connus.

Décrire les outils nécessaires et leur fonctionnement pour mesurer ces propriétés physiques.

2. Références:

- de base : voir l'expérience "Amplificateur";

- Bulletin de l'Union des Physiciens (abrégé B.U.P.), No 624, mai 1980, p.p. 1095-1133 (J.-C. Trigeassou)

- C. L. Johnson, "Analog computer techniques", Mc Graw Hill, N. Y. 1963 (bibliothèque TP2, No 19)

3. Introduction:

Le calcul analogique est une spécialité peu connue du calcul automatique, éclipsée par le calcul digital ou numérique. A la différence de ce dernier, dont le principe est l'utilisation des niveaux logiques 0 et 1 associés à l'algèbre binaire, le calcul analogique est basé sur une correspondance continue nombre – tension.

Le qualificatif d'analogique peut surprendre, les calculateurs actuels étant plutôt qualifiables de calculateurs à courant continu. Il est nécessaire de revenir en arrière de quelques décennies pour en comprendre la raison. Depuis longtemps, mathématiciens et physiciens ont cherché à automatiser et à simplifier les opérations mathématiques. Les premières tentatives utilisèrent des analogies entre des équations régissant des phénomènes physiques, par exemple entre l'électricité et la mécanique. Ces premiers calculateurs (intégrateurs mécaniques, analyseur différentiel...) furent donc qualifiés d'analogiques. Leur principal défaut résidait dans le fait qu'ils étaient seulement adaptés à la résolution approchée et qualitative de quelques problèmes. Ensuite, grâce à l'électronique, apparurent les premiers calculateurs courant alternatif, dans les années 30, antérieurs au premier ordinateur. Ces calculateurs ont été largement perfectionnés, pour aboutir finalement à un modèle prestigieux des années 60, le calculateur "Analac". Parallèlement se développèrent les calculateurs courant continu, avec de grandes difficultés techniques car on devait amplifier des signaux continus, tâche très délicate avec des composants classiques, tubes et transistors. C'est l'intégration des circuits qui a permis la réalisation d'amplificateurs à courant continu fiables, les amplificateurs opérationnels, autorisant ainsi la fabrication de calculateurs à courant continu précis et d'un prix bien plus bas que les précédents.

Ce rappel historique ne suffisant pas à définir correctement le calcul analogique, comparons-le au calcul digital.

Calculateur digital / Calculateur analogique

-Les informations utilisées se présentent sous forme discrète, elles sont discontinues.

-Les informations utilisées entrent simultanément dans le calculateur et varient continuellement.

-Les opérations mathématiques sont effectuées en séquence.

-Les opérations mathématiques sont effectuées simultanément.

-Un problème à n équations dure environ n fois le temps d'un problème à une équation.

-Un problème à n équations dure le même temps qu'un problème à une équation.

-Intégration approchée.

-Intégration directe par rapport t.

-Très grande précision.

- Précision 10^{-3} à 10^{-4} .

-Traduction du problème en langage machine par programmation.

-Traduction du problème en langage machine par câblage.

-Les résultats sont donnés par valeurs discrètes.

-Les résultats sont donnés sous forme de courbes continues.

-C'est un instrument de calcul scientifique.

- C'est un instrument de simulation.

De cette comparaison, on doit retirer l'idée que le calculateur analogique n'est pas un concurrent, mais plutôt un complément du calculateur digital. Et pour éviter le faux problème de la précision, il serait préférable de parler de simulateur analogique plutôt que de calculateur. Ses avantages fondamentaux sont la rapidité de calcul, la simultanéité des opérations mathématiques et l'intégration directe par rapport au temps. Ses deux principales utilisations sont la résolution des équations différentielles et la simulation de la commande des systèmes (systèmes asservis).

4. Appareillage:

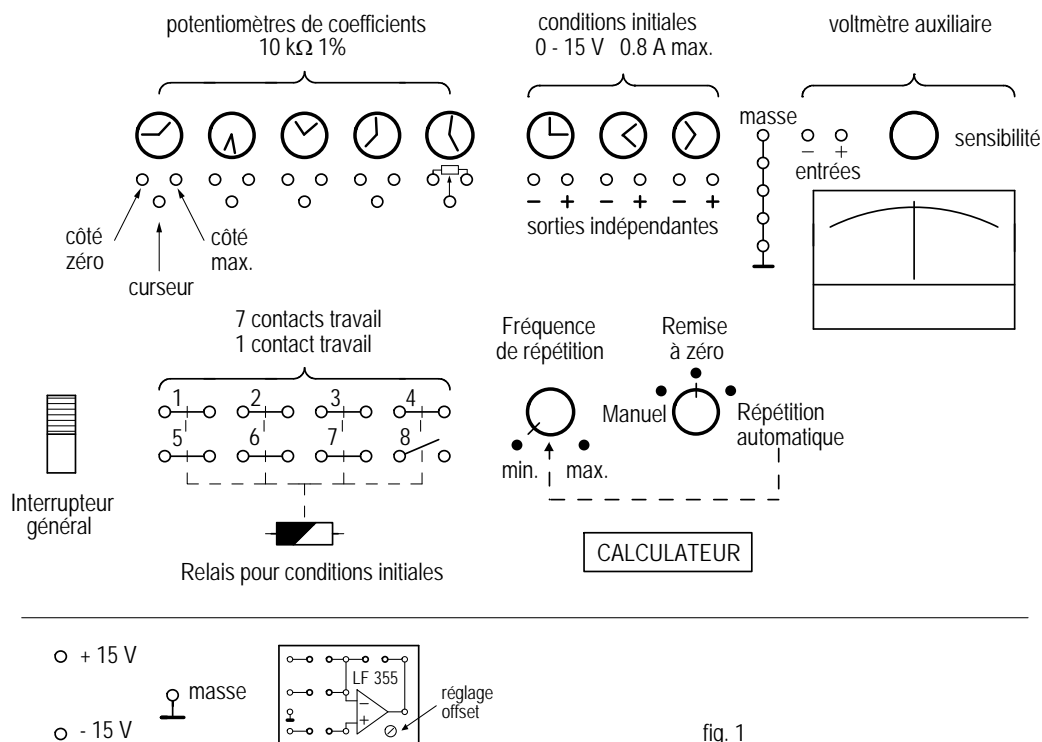


fig. 1

Les éléments du calculateur analogique

Le calcul analogique est basé sur la correspondance nombre tension, les calculs arithmétiques et algébriques étant réalisables grâce à quelques circuits électroniques simples. L'élément fondamental du calculateur est l'amplificateur opérationnel sous forme de circuit intégré, qui a été étudié dans l'expérience "Amplificateur". Les opérations fondamentales réalisables sur une variable e_i sont :

- (a) la multiplication par une constante positive $0 \leq K \leq 1$
- (b) la multiplication par une constante négative $k \leq -1$
- (c) la sommation
- (d) l'intégration par rapport au temps

Elles peuvent souvent être combinées autour d'un seul circuit amplificateur.

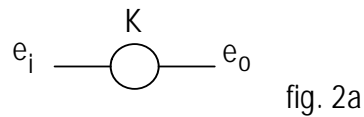
D'autres opérations réalisables sont incluses dans la liste qui suit le titre de la documentation. La précision des multiplicateurs, diviseurs et générateurs de fonctions est cependant inférieure de plusieurs ordres de grandeur à celle des sommateurs / intégrateur

5. Travail à effectuer:

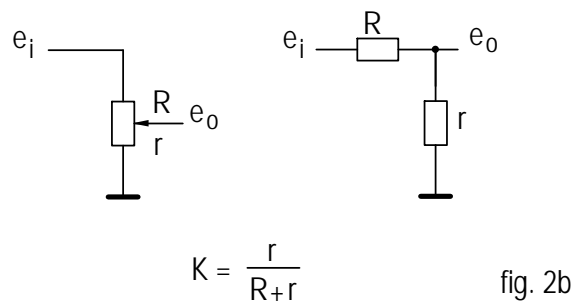
Opération 1: multiplication par une constante positive.

Fonction: $e_o = K e_i$ $0 \leq K \leq 1$

Symbole :



Réalisation : potentiomètre.



Limitations : l'impédance de charge placée à la sortie intervient dans le calcul de r . On peut éviter cette difficulté en faisant suivre le potentiomètre d'un adaptateur d'impédance (décrit plus loin).

Opération 2: multiplication par une constante négative.

Fonction: $e_o = -k e_i$. Cas particulier : inverseur ($k = 1$)

Symbole :

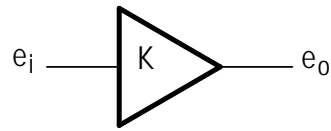


fig. 3a

Réalisation: amplificateur inverseur.

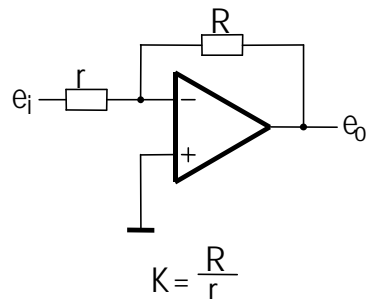


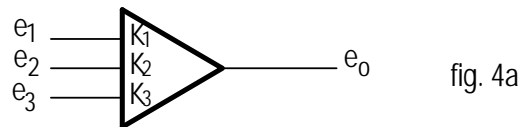
fig. 3b

Limitations : l'impédance d'entrée vue de e_i est égale à r . La précision du gain calculé décroît en fonction de la fréquence. Valeurs usuelles des résistances : 0,1 – 1 MΩ. Voir également l'expérience "Amplificateur".

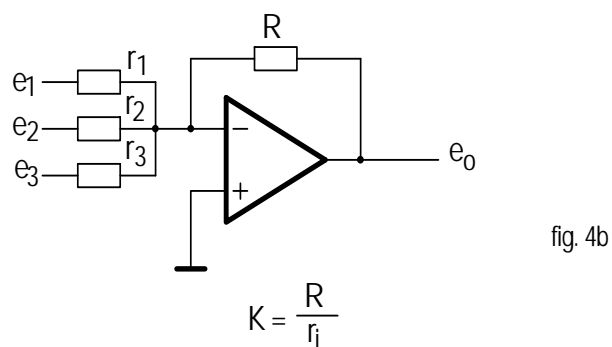
Opération 3: sommation.

Fonction: $e_0 = - (K e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3)$

Symbole :



Réalisation: amplificateur sommateur inverseur.

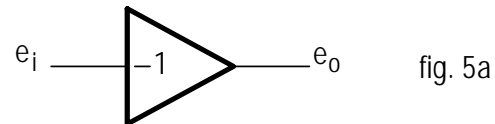


Limitations : comme pour le précédent. En particulier, pour tous les montages amplificateur, $-12V < e_0 < +12V$ et le courant de sortie doit rester inférieur à 10 mA.

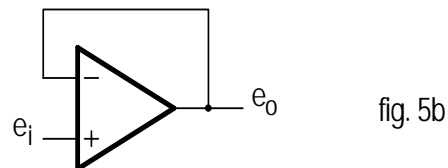
Opération 4: identité (adaptateur d'impédance).

Fonction: $e_o = e_i$

Symbole:



Réalisation :



Limitations: il n'est pas possible de placer un condensateur en série avec l'entrée e_i : le courant de polarisation (bien que minime) doit trouver un chemin. Si le gain en tension est exactement 1, le gain en courant par contre peut être très important:

$$Z_{in} \approx 10^{12} \Omega, \quad Z_{out} \leq 1 \Omega.$$

Opération 5: soustraction.

Fonction: $e_0 = e_2 - e_1$

Symbole:

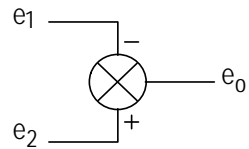


fig. 6a

Réalisation: amplificateur différentiel (autre possibilité : additionneur précédé d'un inverseur sur une entrée).

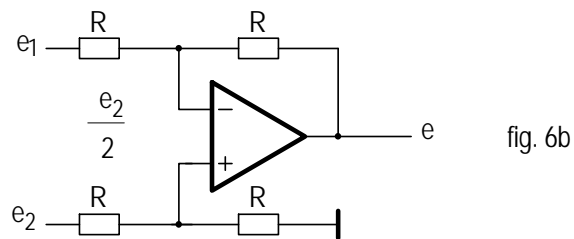


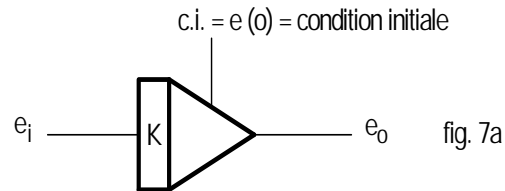
fig. 6b

Limitations: la résistance d'entrée est $2R$ sur l'entrée e_2 . Par contre le courant d'entrée sur e_1 dépend à la fois de e_1 et e_2 . Valeurs usuelles de R : $0,1 - 1 \text{ M}\Omega$

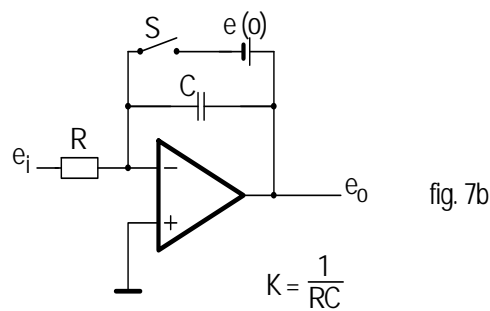
Opération 6: intégration.

Fonction: $e_o = -k \int_0^t e_i dt + e(0)$

Symbole:



Réalisation:



Limitations: les défauts de l'amplificateur opérationnel réel (tension de décalage offset, courant de polarisation i_{bias}) provoquent une dérive de la sortie même lorsque $e_i = 0$

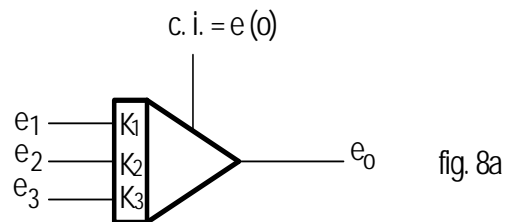
$$|de_o/dt| \leq |e_{offset}| / RC + |i_{bias}|/C$$

On a donc avantage à utiliser des constantes de temps RC assez grandes. Les condensateurs de plus de $\approx 1 \mu F$ sont sans intérêt car leur résistance d'isolement décroît avec la capacité

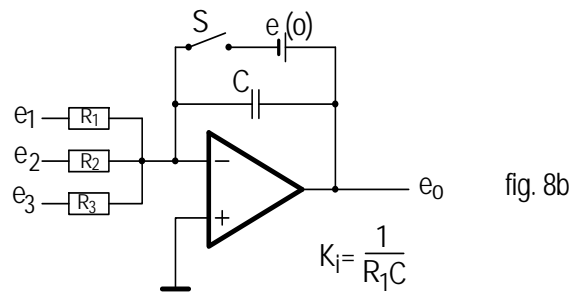
Opération 7: intégrateur sommateur.

Fonction:
$$e_o = - \int_0^t (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3) dt + e(0)$$

Symbole:



Réalisation:



S fermé pour $t < 0$

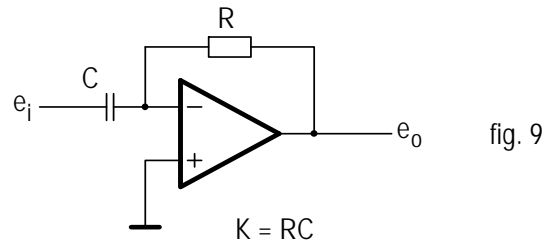
Limitations: comme dans le montage précédent.

Opération 8: dérivation.

Fonction: $e_o = -k \, de_i / dt$

Symbole: —

Réalisation:



Limitations: sérieuses, ce qui explique pourquoi ce montage est rarement utilisé :

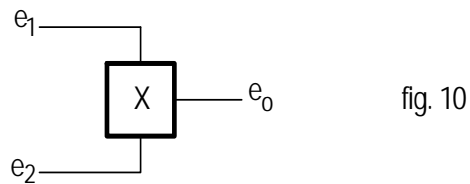
- le gain augmentant considérablement avec la fréquence, le montage est généralement instable;
- le bruit électronique est très fortement amplifié (large bande passante);
- le comportement à haute fréquence redevient celui d'un intégrateur car le gain en boucle ouverte chute de 6 dB/octave.

Si cela n'a pas été fait dans l'expérience "Amplificateur", démontrer les relations précédentes entrée e_o et e_i Admettre que l'amplificateur opérationnel est idéal, donc $G_o = \infty$, $\epsilon = 0$, $Z_{in} = \infty$, $Z_{out} = 0$

Opération 9: multiplication.

Fonction: $e_o = e_1 e_2 / 10$

Symbole:



Réalisation: circuit intégré spécialisé (Voir principe dans B.U.P. p. 1132). Les "quarter square multipliers" sont basés sur la relation $1/4 [(e_1 + e_2)^2 - (e_1 - e_2)^2] = e_1 e_2$.
On obtient un (mauvais) diviseur en plaçant un multiplicateur dans un circuit de contre-réaction.

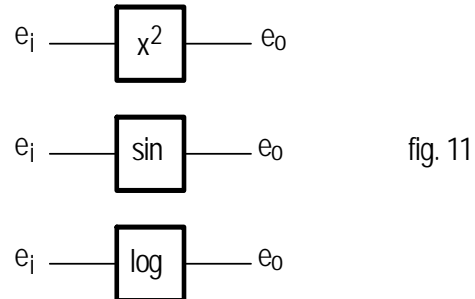
Limitations: la précision est de l'ordre de 1% non pas du résultat, mais du signal de sortie maximum. Ainsi le résultat de la multiplication de 1 V par 1 V peut être entaché d'une erreur de 100 %.

La présence du facteur 1/10 dans la fonction caractéristique est nécessaire car les deux entrées doivent accepter 10 V alors que la sortie est limitée 10 V.

Opération 10: fonctions non linéaires diverses.

Fonction: $e_o = k \sin e_i$, $e_o = k \cos e_i$, $e_o = k \tan e_i$,
 $e_o = k e_i^2$, $e_o = \log(e_i)$, etc.

Symbole:



Réalisation: circuits intégrés spécialisés (par exemple AD639). La caractéristique des diodes à très faible courant inverse peut être logarithmique sur plus de 6 décades.

Limitations: précision.

LE CALCUL ANALOGIQUE

A) Généralités

1. Définition: Fondamentalement, on fait correspondre un nombre et une tension. Technologiquement, le domaine de variation de la tension est limité, dans notre cas :
– $-10\text{ V} < \text{tension} < +10\text{ V}$.

Cette limitation n'existant pas pour les nombres, on est alors amené à établir une échelle arbitraire de correspondance. Par exemple, la tension $+5\text{ V}$ représentera le nombre $+5$, $+50$ ou tout autre nombre positif si on le désire. Il se pose donc un problème de calibration des équations mathématiques pour assurer leur comptabilité avec le calculateur.

2. Traitement d'un problème: Traiter un problème en calcul analogique revient à utiliser un certain nombre d'opérateurs élémentaires (sommateurs, intégrateurs, etc.) et les associer suivant un schéma particulier.

Le câblage du calcul analogique correspond à la programmation du calcul digital.

Remarque: dans un opérateur, l'information circule toujours de l'entrée vers la sortie, dans le sens des flèches.

3. Résultats d'un problème: Les résultats d'un problème sont des tensions ou plus exactement des suites continues de tensions. Les résultats apparaîtront donc sur des voltmètres (numériques de préférence) sur un oscilloscope.

B) Résolution de problèmes élémentaires

Précautions générales:

- En début de séance, annuler la tension de décalage sur les amplificateurs dont on va se servir. Pour cela, réaliser un amplificateur de gain 10 et régler le potentiomètre ajustable de façon à lire $0,0\text{ mV}$ à la sortie.
- S'assurer avec le voltmètre de panneau que la tension à la sortie de chaque amplificateur ne passe jamais en saturation (c'est-à-dire $|e_o| > 10\text{ V}$) en cours de fonctionnement.
- Si un montage est correct mais refuse de fonctionner, vérifier à l'oscilloscope qu'aucun amplificateur n'oscille à haute fréquence ($> \approx 100\text{ kHz}$). Si c'est le cas, écarter les fils qui pourraient transporter des signaux d'entrée et de sortie en phase, ou raccourcir les fils reliés aux entrées d'amplificateurs.

Manipulation 1: addition de deux variables.

Soit $S = 5,05 + 1,82$. Le schéma symbolique est :

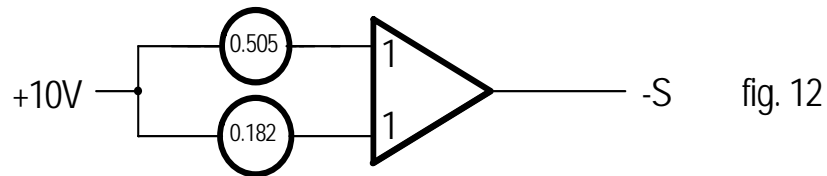
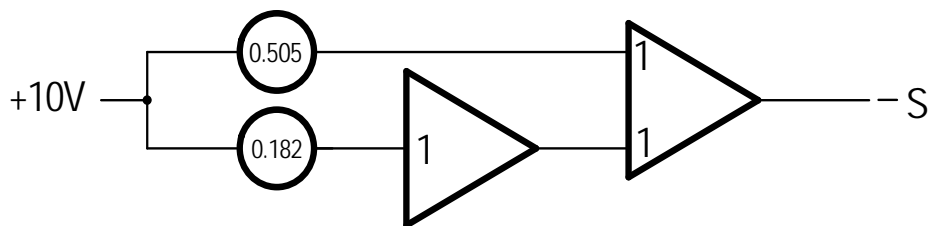


fig. 12

Réaliser le montage ($R=1\text{ k}\Omega$) et vérifier le résultat. Modifier les variables et estimer la précision. Mettre en évidence les limitations (par exemple additionner $0,01 + 0,005$ ou $8 + 7$)

Manipulation 2: soustraction de 2 variables.

Soit $S = 5,05 - 1,82$. On peut opérer de deux façons :



ou

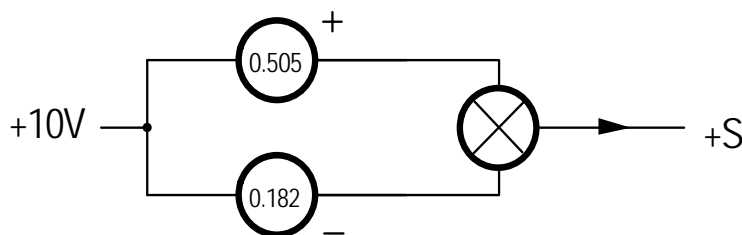


fig. 13

Vérifier le résultat avec l'un ou l'autre des montages. ($R = 1\text{ K}\Omega$)

Utilisation de l'oscilloscope

L'oscilloscope est utile pendant la phase de mise au point. Accélérer l'échelle de temps d'un facteur 10 en remplaçant tous les condensateurs du schéma par des condensateurs de capacité 10 fois plus faible. Faire fonctionner le calculateur de façon cyclique en passant de "RAZ" à "REPETITION" (la fréquence de répétition est ajustable).

C) Equation différentielle du 1er ordre

Cas général: une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, s'écrit :

$$a y(x) + b \frac{dy}{dx} = f(x)$$

On va utiliser la propriété de l'opérateur d'intégration, telle que l'entrée est la dérivée du signal de sortie : $E = dS/dt$.

L'intégration s'effectuant par rapport au temps, la variable x devient nécessairement la variable temps. On résoudra donc le problème :

$$a y(t) + b \frac{dy}{dt} = f(t)$$

Modifions l'écriture de l'équation pour faire apparaître dy/dt , soit $-dy/dt = \{a y(t) - f(t)\} / b$

On traduit cette relation sous la forme d'un schéma contenant un seul intégrateur, d'entrée $-dy/dt$, de sortie $y(t)$, valable pour $a \geq 1$ et $b \geq 1$:

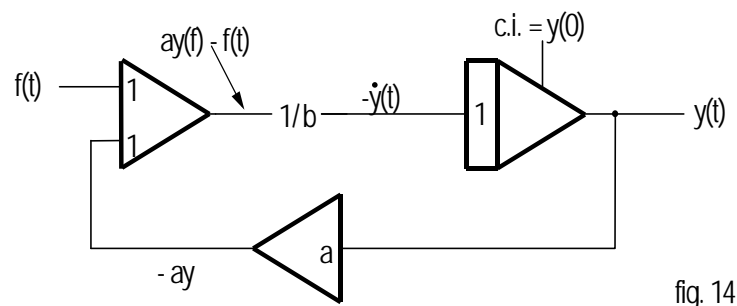


fig. 14

Suivant le signe et la valeur de a et de b , on peut être amené à modifier le schéma en intercalant des potentiomètres et des inverseurs.

La condition initiale (c.i.) de l'intégrateur représente la valeur initiale de y , soit $y(0)$.

Le traitement du problème débute lorsque l'on passe sur la position "MANUEL" du commutateur du relais. On enregistre la suite des valeurs de y en Y sur le support à disposition (imprimante via la copie d'écran), le déplacement en X étant commandé par une base de temps comme précédemment.

Manipulation 3: charge et décharge d'un condensateur.

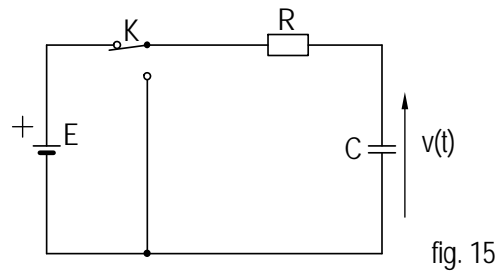


fig. 15

- charge: $E = RC \frac{dv}{dt} + v$
- décharge: $0 = RC \frac{dv}{dt} + v$

Considérons la charge du condensateur. Soient $E=6$ volts et $\tau=RC=5$ s. Donc $f(t)=6=cte$; $a=1$; $b=5$.

Réaliser le montage opérationnel avec les valeurs adéquates. Imprimer la solution.

Faire varier les paramètres dans la plage $1 < \tau < 10$ s.

Charge avec $y(0) = 0$ et $y(0) > 0$.

Décharge avec $y(0) = 6$ et $f(t) = 0$.

D) Equation différentielle du 2eme ordre

Cas général: une équation différentielle du deuxième ordre, à coefficients constants, s'écrit:

$$a y(x) + b \frac{dy}{dx} + c \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

ou: $a y(t) + b \frac{dy}{dt} + c \frac{d^2y}{dt^2} = f(t)$, avec $x = t$.

Il est nécessaire d'employer deux intégrateurs, un premier d'entrée d^2y/dt^2 , de sortie dy/dt , un second d'entrée dy/dt , de sortie y .

Modifions l'écriture pour faire apparaître d^2y/dt^2 , soit: $d^2y/dt^2 = \{f(t) - a y(t) - b dy/dt\} / c$

ce qui correspond au schéma suivant si $a, b, c \geq 1$:

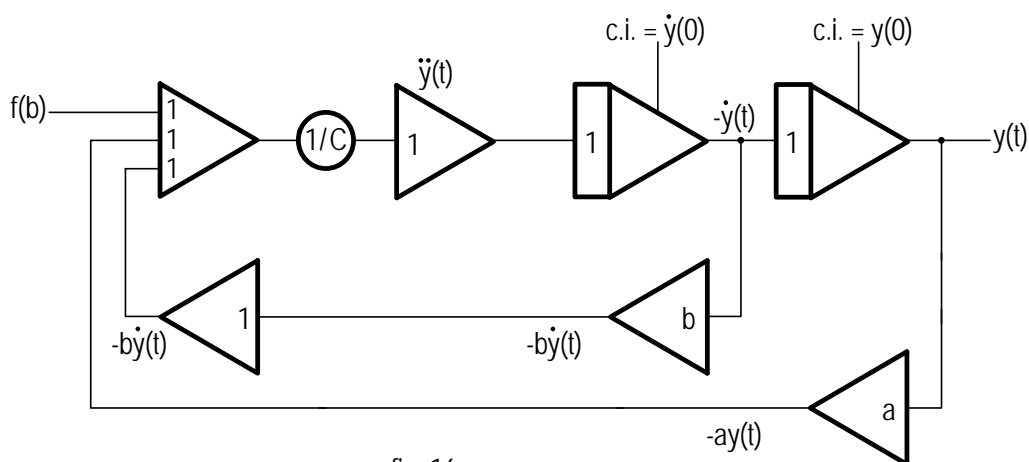


fig. 16

Si $0 \leq b \leq 1$ par exemple, les deux inverseurs sur le canal dy/dt peuvent être remplacés par un potentiomètre.

Manipulation 4: application à la chute libre.

L'équation à résoudre est $d^2y/dt^2 = -g$. Le schéma général se simplifie :

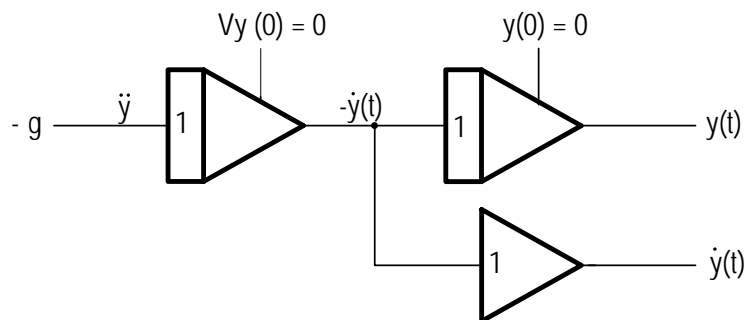


fig. 17

Imprimer $dy/dt = f(t)$ et $dy/dt = f(y)$ avec $-g = -0,981$ V, ce qui revient à représenter 10 m par 1 volt.

Générer la variable t à l'aide de la base de temps décrite précédemment (manipulation 2).

Si la tension de décalage des amplificateurs est correctement ajustée, $y(t) \equiv 0$ si $g = 0$. Si ce n'est pas le cas, procéder au réglage.

Manipulation 5: chute avec frottement visqueux.

L'équation à résoudre est $md^2y/dt^2 + rdy/dt + mg = 0$. Le nouveau terme de frottement demande un amplificateur supplémentaire:

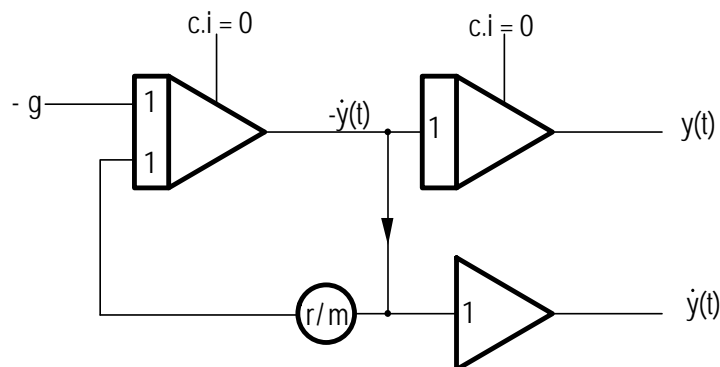


fig. 18

Avec des conditions initiales nulles, imprimer $y(t)$, $dy/dt = f(t)$, $dy/dt = f(y)$.

Etudier l'influence de r ($r/m = 0; 0,1; 0,2; 0,5; 1$).

Remarque : d^2y/dt^2 n'apparaît nulle part dans ce schéma (qui n'est pas unique). Pour vérifier que l'équation différentielle est cependant bien représentée.

Manipulation 6: trajectoire de tir avec frottement.

Les équations de mouvement dans le plan x,y sont :

$$\begin{aligned} m d^2x/dt^2 + r dx/dt &= 0 \\ m d^2y/dt^2 + r dy/dt + mg &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} (dx/dt)(0) &= v_{ox}, \quad x(0) = 0 \\ (dy/dt)(0) &= v_{oy}, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

Le schéma correspondant sera :

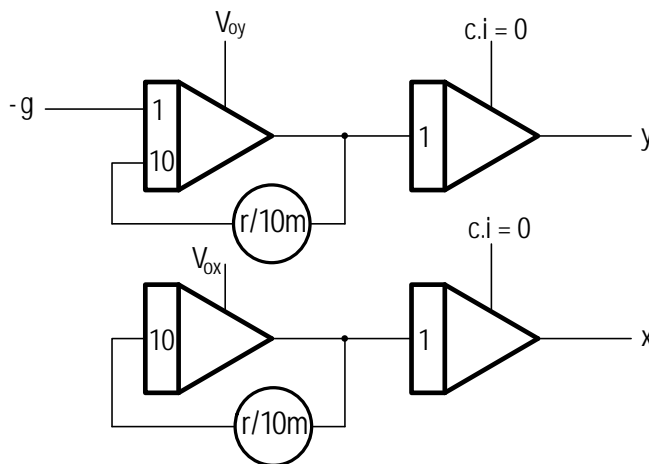


fig. 19

On ne s'intéresse qu'à la trajectoire, donc dx/dt , dy/dt et t sont inutiles. Choisir pour v_0 un module constant de 10 unités et calculer v_{ox} et v_{oy} pour simuler les angles de tir de 0, 10, 20, 30, 45, 60 et 90 degrés avec la verticale. Imprimer $y(x)$ en l'absence de frottement. Mettre en évidence la parabole de sûreté (J. Rossel, Physique générale, chap. II, paragraphes 3,4). Etudier l'influence du frottement, $0 \leq r/m \leq 10$, pour l'angle de tir de 45 degrés.

Manipulation 8: particule dans un champ électromagnétique.

Equation vectorielle du mouvement:

$$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = e (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Choisissons un mouvement dans le plan x,y :

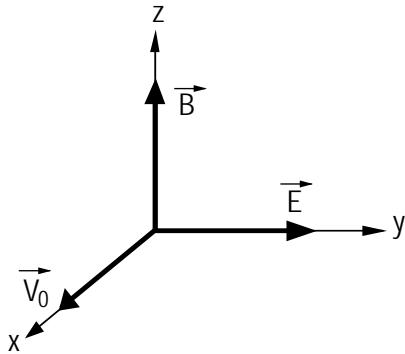


fig. 21

on obtient alors les équations scalaires:

$$\begin{aligned} B \frac{dy}{dt} &= (m/e) \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = b \frac{dy}{dt} \\ E - B \frac{dx}{dt} &= (m/e) \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a - b \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

où $b \equiv eB/m$, $a \equiv eE/m$; les conditions initiales sont $(dx/dt)(0) = v_0$, $(dy/dt)(0) = 0$, $x(0) = 0, y(0) = 0$.

On aboutit au schéma suivant :

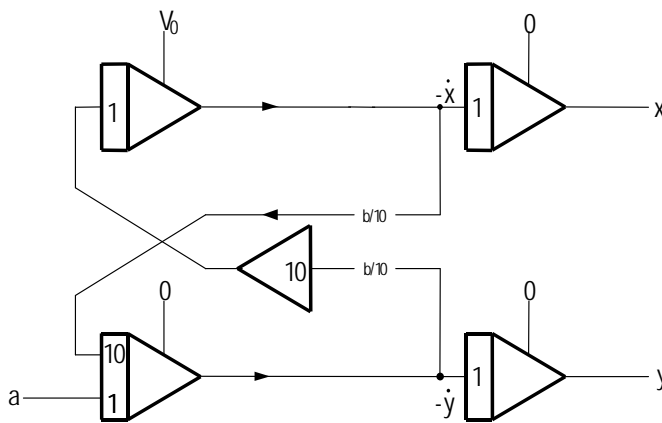


fig. 22

Imprimer y(x). Etudier l'influence

- du champ électrique seul,
- du champ magnétique seul,
- des champs combinés,
- de la vitesse initiale.

6. Matériel à disposition:

- ❑ Un module de base sur rack avec tension de +15V à –15V variable, des potentiomètres, relais et connecteurs intégrés.
- ❑ Un générateur de fréquence
- ❑ Un multimètre
- ❑ Un oscilloscope
- ❑ Une imprimante laser
- ❑ Des boîtiers avec un ampli op intégré type LF355
- ❑ Des boîtiers à borniers
- ❑ Des supports pour divers valeurs de composants type résistances, condensateurs
- ❑ Des câbles BNC et des fils de connection

- ❑ Un capacimètre (se trouve dans l'expérience ampli op juste à coté)

Ne pas mesurer les valeurs des résistances et condensateurs branchés, de fausses valeurs apparaîtront et peuvent endommager les appareils de mesure.

Toujours décharger les condensateurs avant de les mesurer.

Version A.J. 24.10.1985/hg
Mise à jour A.J. 27.11.1985
Mise à jour sept. 2003
Mise en page juillet 2003 lw
Mise à jour juillet 2007 lw