BnF Gallica

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

Source gallica.bnf.fr / École nationale des ponts et chaussées

BnF Gallica

. Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1836.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisation.commerciale@bnf.fr.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Source gallica.bnf.fr / École nationale des ponts et chaussées

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Ancien Elève de l'École Polytechnique, répétiteur d'Analyse à cette École.

TOME PREMIER.

ANNÉE 1836.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1836

KRAUS REPRINT

Nendeln / Liechtenstein

1979

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of

KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln / Liechtenstein

1979

Printed in Germany

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT ..... Page I
Note sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles; par M. *Coriolis* 5
Note sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences; par M. *Libri* 10
Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus; par M. *Liouville* 14
Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles; par M. *Liouville* 33
Note sur la chaînette d'égale résistance; par M. *Coriolis* 75
Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique; par M. *Lamé* 77
Note sur une méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires; par M. *Favre-Rollin* 88
Mémoire sur les rapports et les restes des quantités incommensurables; par M. *Léger* 93
Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier; par M. *Liouville* 100
Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre; par M. *Sturm* 106
Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyer; par M. *Chasles* ... 187
Note sur les rayons de courbure des sections coniques; par M. *Transon* ... 191
Formule pour la transformation d'une classe d'intégrales définies; par M. *Jacobi* 195
Note sur le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes; par M. *Liouville* 197
Mémoire sur les équations générales du mouvement; par M. *Ampère* ... 211
Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies; par M. *Plucker* 229
Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable; par M. *Liouville* 253

Théorème sur les quantités incommensurables ; par M. *Lebesgue*..... 266
Démonstration d'un théorème dû à M. Sturm, et relatif à une classe de fonctions transcendantes ; par M. *Liouville*..... 269
Démonstration d'un théorème de M. Cauchy, relatif aux racines imaginaires des équations ; par MM. *Sturm* et *Liouville*..... 278
Autres démonstrations du même théorème ; par M. *Sturm*..... 290
Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide, autour d'un point fixe ; par M. *St.-Guilhem*..... 309
Note relative à la détermination des plans principaux, d'une surface du second degré, rapportée à trois axes quelconques ; par M. *St.-Guilhem*. 317
Géométrie. Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. — Géométrie de la sphère. — Hyperboloïde à une nappe ; par M. *Chasles*..... 324
Démonstration du parallélogramme des forces ; par M. *Aimé*..... 335
Intégration de l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} + P\frac{d^m y}{dx^m} + Q\frac{d^n y}{dx^n} + \text{etc.} = V$, dans laquelle on suppose p, q, m, n, etc., des nombres entiers, P, Q, etc., des coefficiens constans, et V une fonction quelconque de la variable indépendante x ; par M. *Favre-Rollin*..... 339
Note sur la résolution des équations numériques ; par M. *Vincent*..... 341
Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles ; par M. *Sturm*. 373
Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de Mécanique céleste ; par M. *Liouville*..... 445
Errata..... 459

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

AVERTISSEMENT.

Toutes les personnes qui ont une teinture même légère des Mathématiques connaissent le succès mérité qu'ont obtenu les Annales fondées en 1810 par M. Gergonne, et continuées par lui pendant vingt ans avec un zèle qu'on ne peut trop louer, et un talent qui a triomphé des plus grands obstacles. Mais depuis 1831 ce recueil a cessé de paraître : les fonctions de recteur d'Académie ont malheureusement absorbé tout le temps de son illustre rédacteur, et ont enlevé aux sciences un homme qui leur a rendu et qui pouvait leur rendre encore d'éminents services.

M. Gergonne ayant bien voulu nous dire lui-même qu'il verrait avec plaisir un nouveau journal succéder au sien, nous croyons avoir le droit de nous annoncer aujourd'hui comme ses continuateurs.

Notre Journal sera mensuel comme celui de M. Gergonne. Le premier cahier paraîtra en janvier 1836, et les suivants de mois en mois, avec toute l'exactitude désirable. Ces cahiers

seront de grandeur inégale, et varieront de 32 à 40 pages in-4°, suivant la nature des mémoires qu'ils renfermeront. Leur ensemble formera chaque année un fort volume contenant toutes les planches nécessaires pour l'intelligence du texte.

Les articles que nous admettrons dans notre recueil embrasseront l'ensemble des Mathématiques pures et appliquées. On y traitera indifféremment et les questions les plus nouvelles soulevées par les géomètres, et les plus minutieux détails de l'enseignement mathématique des colléges. Toutefois, quand il s'agira d'articles élémentaires, nous tâcherons d'éviter les répétitions fastidieuses d'objets trop connus; car s'il est bon de revenir de temps à autre sur les élémens des sciences, il faut que ce soit pour les perfectionner, et non pour y changer çà et là quelques mots et quelques phrases; ce qui par malheur est arrivé trop souvent.

Il existe un grand nombre de lettres inédites écrites par Huygens et Leibnitz sur diverses questions scientifiques. Nous avons accepté avec empressement l'offre bienveillante que M. Libri nous a faite de nous les communiquer, et nous les insérerons dans notre Journal; ce sera le placer, pour ainsi dire, sous le haut patronage de ces génies du 17e siècle, qui ont si puissamment contribué aux progrès des Mathématiques, et dans les œuvres desquels aujourd'hui même on trouve encore le germe de plus d'une théorie neuve et profonde.

Nous nous bornerons, en général, à publier les mémoires qui nous seront adressés, et nous rendrons rarement compte de ceux qui pourront être insérés dans d'autres recueils. Néanmoins, si l'analyse d'un ouvrage nouveau nous paraît pouvoir donner lieu à des observations utiles, nous la publierons sans scrupule, mettant alors dans nos critiques

non-seulement de l'impartialité, mais encore de la bienveillance, et cherchant à faire ressortir le bien plutôt qu'à censurer le mal.

Depuis quelques années un singulier esprit de dénigrement s'est emparé de quelques critiques, et nous avons vu tour à tour accabler d'injures les hommes qui dans les divers genres de sciences ont le plus dignement soutenu l'honneur de la France. Ici notre profession de foi sera nette et positive : ce style tranchant et absolu, si fort à la mode à présent, ne sera jamais le nôtre, car il déshonore à la fois le caractère et le talent de ceux qui l'adoptent.

« Toutes ces critiques, dit un auteur célèbre, sont le par-
» tage de quatre ou cinq petits auteurs infortunés qui n'ont
» jamais pu par eux-mêmes exciter la curiosité du public.
» Ils attendent toujours l'occasion de quelque ouvrage qui
» réussisse pour l'attaquer, non point par jalousie; car sur
» quel fondement seraient-ils jaloux? mais dans l'espérance
» qu'on se donnera la peine de leur répondre, et qu'on
» les tirera de l'oubli où leurs propres ouvrages les auraient
» laissés toute leur vie. »

L'éditeur mettra tous ses soins à rendre son Journal digne de l'attention des savants. On conçoit néanmoins qu'il ne pourra, dans certains cas, ni refuser tel article qui lui semblera mauvais à lui-même, ni surtout corriger dans un bon mémoire telle ou telle phrase qu'il désapprouvera. Les esprits justes sentiront que l'éditeur doit être jugé sur l'ensemble et non sur les détails du recueil qu'il dirige, et que la responsabilité des mauvais articles qui pourront s'y glisser reste tout entière à leurs auteurs. Et si par hasard une polémique vient à s'engager entre deux géomètres, on comprend aussi qu'il ne lui appartiendra pas de s'interposer

dans la querelle ; il devra se borner alors à jouer le rôle de spectateur et à transmettre fidèlement au public les pièces du procès.

On voit assez qu'il est ici question d'une entreprise vraiment scientifique, et non d'une spéculation mercantile. C'est maintenant aux géomètres, et surtout aux géomètres français, qu'il appartient de faire prospérer cette entreprise. Les plus distingués d'entre eux nous ont déjà promis des articles, et, sans aucun doute, ils tiendront leur promesse. Nous osons dire que leur réputation y est intéressée : la chute d'un Journal utile qu'ils auraient refusé de soutenir ne serait honorable ni pour eux ni pour la France.

NOTE

Sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles ;

PAR G. CORIOLIS.

Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre, et que le frottement y soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il s'est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de sa tangente sera toujours celle de la partie du fil tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule.

Si donc on peut donner au fil, dans cette partie, une direction qui résulte de l'équation différentielle d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre en prenant pour abscisses les arcs comptés sur la base du cylindre.

Cette considération conduit à un tracé assez simple de plusieurs courbes.

On voit de suite que l'exponentielle dont l'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}, \quad \text{ou } y\,\frac{dx}{dy} = a,$$

peut se décrire en enroulant sur un cylindre un fil tendu qui passe toujours par un point fixe. Ce point doit être à la distance a de la génératrice du cylindre qui se trouve dans le plan tangent mené par ce point.

J'ai fait construire, d'après cette remarque, une machine au moyen

de laquelle un fil tendu par un léger poids s'enroule ou se déroule autour d'un cylindre en passant par un petit trou percé dans une plaque mobile qu'on approche ou qu'on écarte à volonté du cylindre. Une aiguille et un cadran indiquent les tours et fractions de tours dont on a tourné le cylindre. Ce sont ces quantités qui représentent les exposants. Une échelle placée contre la génératrice du cylindre, sur laquelle se trouve toujours le point où le fil s'en sépare, indique, à partir du zéro de l'échelle, les exponentielles qui répondent aux exposants indiqués sur le cadran. On conçoit comment cette machine opère facilement tous les calculs d'intérêts composés. La marche de l'aiguille répond aux durées des placemens, et les nombres qu'on lit sur l'échelle, au point où le fil se sépare du cylindre, indiquent ce que sont devenues les sommes placées, ou ce qu'elles doivent être pour l'escompte (1).

La chaînette, dont l'équation différentielle est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1},$$

ou bien

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a,$$

se décrira d'une manière analogue à la logarithmique. Il suffira de placer dans un plan tangent au cylindre une poulie dont le centre soit sur la génératrice de contact et dont a soit le rayon. En faisant dérouler sur cette poulie le fil qui s'enroule sur le cylindre, il s'y pliera suivant une chaînette.

Si l'on avait l'équation différentielle

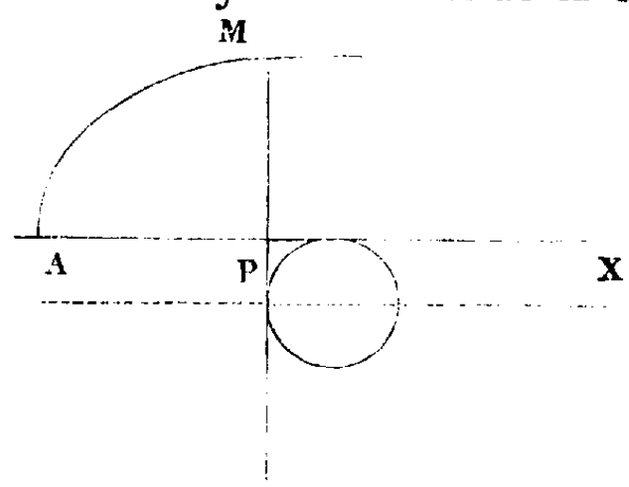
$$\frac{dy}{dx} = yf(x),$$

ou bien, en posant $\frac{1}{f(x)} = \varphi(x)$,

$$y\frac{dx}{dy} = \varphi(x),$$

(1) Le modèle de cette machine fait partie de la collection de l'École Polytechnique.

on décrirait encore assez facilement la courbe qui répond à cette équation au moyen du relief de la courbe dont l'ordonnée est $\varphi(x)$.



Pour cela, il suffirait d'avoir d'abord une règle AMX dont un côté AX serait droit et l'autre AM formerait la courbe dont $\varphi(x) - r$ serait l'ordonnée, r étant le rayon du cylindre. Ensuite, on ferait tourner le cylindre en appliquant contre sa base la règle AX. Si le fil qui s'enroule reste dans le plan vertical PM, ce qui est facile à obtenir en l'appliquant contre un plan fixe, et qu'il passe ainsi sur la courbe AM en M, il est clair qu'il formera sur le cylindre une courbe telle qu'en se déroulant sur un plan elle satisferait à l'équation différentielle ci-dessus, puisque la sous-tangente PM serait égale à $\varphi(x)$, x étant l'abscisse mesurée sur la base circulaire du cylindre.

Il ne serait pas impossible non plus de décrire les courbes données en général par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Pour cela, on concevrait d'abord une surface exécutée en relief ayant pour ordonnée

$$\frac{y}{f(x, y)}.$$

Ce relief tiendrait à une règle AX, comme tout à l'heure la courbe AM; mais il n'y serait fixé que dans le sens des x; dans celui de l'axe des y, que je suppose ici vertical, c'est-à-dire parallèle à l'axe du cylindre, il serait parfaitement libre de monter et de descendre. Le mécanisme, pour cela, peut se disposer de plusieurs manières très faciles à exécuter.

Pendant qu'on tournerait le cylindre, en faisant avancer la règle qui tient au relief dans le sens de l'axe des x, et en la pressant contre la base du cylindre, on aurait soin de tenir le relief à la main à une hauteur telle que l'axe des x fût toujours à la hauteur du point où le fil quitte le cylindre, c'est-à-dire du point décrivant la courbe en question. Alors, si le fil tendu, en quittant le cylindre, va passer par

le point où la surface du relief est rencontrée par une perpendiculaire fixe PM; la courbe suivant laquelle il se pliera sur le cylindre, en la rapportant aux arcs de cercle pour abscisses, aura effectivement pour équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y);$$

car la sous-tangente sera toujours

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x,y)}.$$

On devra placer le solide du relief au dehors de l'espace APM, et faire passer le fil à l'extrémité d'une tige PM, qui, par l'action d'un poids ou d'un petit ressort de pression, sera forcé d'appuyer en M contre le relief.

On peut s'arranger facilement pour que le petit poids p qui tiendra le fil tendu serve en même temps à appliquer la tige PM contre la surface. Il suffira de conduire d'abord le fil à travers un très petit trou percé à l'extrémité M de la tige, puis de le renvoyer horizontalement à l'autre extrémité N, où il passera sur une poulie tenant à cette même tige, pour revenir passer sur une autre poulie fixe en-dessous de P et tout auprès, et pour soutenir le poids p; celui-ci tirera la tige de N en M avec la force $2p$, et de M en N avec la force plus petite

$$p(1 + \cos\alpha),$$

α étant ici l'angle dont la tangente $= \frac{dy}{dx}$. La tige sera donc toujours pressée contre le relief.

Pour que ce moyen de description de courbe soit praticable, il faut que le fil une fois appliqué sur le cylindre, ne s'y dérange pas par l'effet de la flexion qu'il y prend. Il y a pour cela une relation nécessaire entre le rayon r du cylindre et la nature de la courbe représentée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Soient M un point quelconque, MM′ un élément, et ρ le rayon de

courbure en M de la courbe AMB formée par le fil enroulé sur le cylindre. Deux tensions contraires sollicitent l'élément MM′ à ses deux bouts : ces deux tensions donnent lieu à une résultante dont la direction coïnciderait avec le rayon ρ, si le frottement dans le sens du fil était nul : quelle que soit l'intensité du frottement, la direction de cette résultante sera située dans le plan osculateur de la courbe AMB et fera avec le plan tangent en M au cylindre un certain angle ε. Cela posé, pour que le fil ne glisse pas sur la surface du cylindre, il faudra évidemment que l'on ait

$$\operatorname{tang} \varepsilon > \mu,$$

μ étant le rapport du frottement à la pression. On devra donc choisir le rayon r de manière que l'inégalité $\operatorname{tang} \varepsilon > \mu$ soit toujours satisfaite.

NOTE

Sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences ;

PAR GUILLAUME LIBRI.

Je crois avoir été le premier à appeler l'attention des géomètres sur les rapports qui existent entre les racines des équations algébriques et les intégrales particulières des équations différentielles linéaires. Dans un mémoire qui a paru dans le Xe volume du *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, j'ai montré comment on pouvait, à l'aide des intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire, diminuer d'autant d'unités l'ordre de cette équation que l'on connaissait d'intégrales particulières, et j'ai indiqué le moyen de former les coefficiens des équations de cette nature en fonctions symétriques de toutes les intégrales particulières. On a pu remarquer, dans le même mémoire, que ces fonctions symétriques étaient douées de propriétés bien plus étendues et plus générales que celles dont jouissent les fonctions symétriques des équations algébriques. La similitude entre ces deux classes d'équations s'étend très loin, et permet de traiter les équations différentielles linéaires par des méthodes analogues à celles que l'on emploie dans la théorie des équations algébriques.

Lagrange, à l'aide de la variation des constantes arbitraires, est parvenu à démontrer que si dans une équation différentielle linéaire de l'ordre n et de la forme

$$Y_n = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots + a_n y = \varphi(x),$$

on connaît $n-m$ valeurs de y, propres à satisfaire à l'équation $Y_n = 0$, on peut toujours réduire l'équation $Y_n = \varphi(x)$ à une autre équation différentielle linéaire de l'ordre $n-(n-m)=m$. Ce théorème célèbre, qui porte le nom de son inventeur, et qui ne forme que la première proposition de la théorie des équations différentielles linéaires, telle que je l'ai présentée, se démontre d'une manière si simple et si générale en considérant les intégrales particulières comme les racines des équations différentielles auxquelles elles satisfont, que j'ai pensé qu'il y aurait quelque avantage à reproduire ici ma démonstration toute seule, en montrant en même temps comment on peut l'appliquer aux équations linéaires aux différences finies, ce que je n'avais pas fait dans le Mémoire déjà cité.

Soit l'équation différentielle linéaire de l'ordre n,

$$(1)\ldots \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots + a_n y = \varphi(x),$$

que nous écrirons pour plus de simplicité,

$$Y_n = \varphi(x),$$

en indiquant par Y_n son premier membre; et soit y_1 une valeur de y qui satisfasse à l'équation $Y_n = 0$. Si dans l'équation $Y_n = \varphi(x)$, on fait $y = y_1 \int z dx$, z étant une nouvelle variable, on aura (en se rappelant que l'on a en général $d^p uv = ud^p v + pdud^{p-1} + \ldots\ldots + pdvd^{p-1}u + vd^p u$) une équation ordonnée par les différentielles descendantes de z, de la forme

$$(2)\ldots \quad y_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \left(n \frac{dy_1}{dx} + a_1 y_1\right) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} \ldots\ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \ldots + a_n y_1\right) \int z dx = \varphi(x).$$

Dans cette équation, il est clair que le coefficient de $\int z dx$ est égal à zéro, puisque ce coefficient n'est autre chose que la fonction Y_n dans laquelle on a écrit y_1 au lieu de y; ce qui, par hypothèse, rend identiquement nulle cette fonction. Maintenant y_1 et ses différentielles sont des fonctions connues de x: si l'on divise donc l'équation (2) par

y_1, on aura une nouvelle équation en z, qui sera linéaire et de l'ordre $n-1$, de la forme

$$(3)\ldots\quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + A_1 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + A_2 \frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} \ldots + A_{n-1} z = \frac{\varphi(x)}{y_1},$$

en appelant A_1, $A_2, \ldots A_{n-1}$, les coefficiens de l'équation (2) divisée par y. On voit donc comment, sans faire varier les constantes arbitraires, on peut réduire l'équation linéaire (2) du degré n à une autre équation (3) également linéaire de l'ordre $n-1$, lorsqu'on connaît une intégrale particulière de l'équation (1) dans laquelle on a supposé le second membre égal à zéro.

Si l'on connaissait une seconde intégrale particulière y_2 de l'équation $Y_2 = 0$, il faudrait faire encore $y = y_1 \int z dx$, et partant $z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$, et donner à y la valeur y_2; car si l'on prenait une seconde fois la valeur y_1 qui a été déjà employée, on aurait $z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_1}\right) = \frac{d}{dx}.\ 1 = 0$. Et cette intégrale particulière, qui réduirait à zéro le premier membre de l'équation (3), ne pourrait nous conduire à aucune nouvelle simplification.

On voit maintenant comment, par des transformations successives, on peut dans tous les cas, diminuer d'autant d'unités l'ordre de l'équation (1) que l'on connaît de valeurs qui, substituées pour y dans le premier membre de cette équation, le rendent identiquement égal à zéro.

On peut appliquer la même démonstration aux équations linéaires aux différences finies. Soit en effet l'équation

$$(4)\ldots\quad \Delta^n y_x + a_1\, \Delta^{n-1} y_x + a_2\, \Delta^{n-2} y_x \ldots + a_n y_x = f(x);$$

et soit y une valeur de y_x telle que l'on ait

$$(5)\ldots\quad \Delta^n y + a_1\, \Delta^{n-1} y + a_2\, \Delta^{n-2} y \ldots + a_n y = 0;$$

si dans l'équation (4) on fait $y_x = y \Sigma z_x$, on la transformera encore en une autre équation aux différences, de la forme

$$(6)\ldots\quad y\Delta^{n-1} z_x + B_1 \Delta^{n-2} z_x \ldots + (\Delta^n y + a_1 \Delta^{n-1} y \ldots + a_n y)\Sigma z_x = f(x);$$

(dans laquelle les coefficiens sont des fonctions connues de y qu'il est

inutile de développer à cause de leur complication, et que nous appellerons B_1, B_2, etc., pour simplifier, en n'écrivant que le coefficient de Σz_x dont la forme est très simple) et comme le coefficient de Σz_x est égal à zéro par l'équation (5), il en résulte que l'on peut encore diminuer d'une unité l'ordre d'une équation linéaire aux différences, lorsqu'on connaît une intégrale particulière du premier membre, égalé à zéro, de la même équation.

On pourrait répéter le même raisonnement, et l'on démontrerait en général le théorème de Lagrange pour les équations aux différences finies de tous les ordres. On pourrait de plus former les coefficiens de ces équations en fonctions symétriques des intégrales particulières, et exprimer l'intégrale générale en fonction du second membre de l'équation proposée, et des intégrales particulières de l'équation que l'on obtient en égalant le premier membre de la première équation à zéro. Mais je reviendrai plus tard sur ce sujet; je n'ai voulu, dans cette note, qu'appeler de nouveau l'attention des géomètres sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et celle des équations linéaires, et je n'ai donné la démonstration du théorème de Lagrange, que comme un exemple de la méthode que j'avais employée.

MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. On connaît la méthode dont les géomètres ont surtout fait usage dans ces dernières années, pour intégrer les équations aux différences partielles auxquelles on ramène la solution de la plupart des problèmes physico-mathématiques. Cette méthode consiste, comme on sait, à représenter l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles par la somme d'un nombre infini d'intégrales particulières contenant chacune une ou plusieurs constantes arbitraires, et à disposer ensuite de ces constantes de manière à satisfaire aux conditions définies propres à chaque cas. Ainsi, dans la *Théorie de la chaleur* que nous prendrons pour exemple, si l'on veut déterminer, en fonction du temps t et de l'abscisse x, la température u qui a lieu en chaque point d'une barre métallique homogène (recouverte d'une substance non conductrice) dont l'état initial est connu et dont les deux bouts sont entretenus à la température fixe 0°, on aura d'abord l'équation aux différences partielles $\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$, a^2 étant le rapport de la conductibilité intérieure de cette barre à sa chaleur spécifique. En plaçant l'origine des coordonnées à l'une des extrémités de la barre, et nommant l l'abscisse de l'autre extrémité, il faudra ensuite satisfaire aux deux conditions définies $u=0$ pour $x=0$, $u=0$ pour $x=l$, et à la condition de l'état initial que l'on peut écrire ainsi $u=f(x)$ pour $t=0$. Or, pour cela, on observera que l'intégrale complète de

l'équation $\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$ peut être représentée par l'expression sommatoire $u = \Sigma e^{-m^2 t}(A_m \sin amx + B_m \cos amx)$, le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles des constantes m, A_m, B_m. Pour que cette valeur se réduise à zéro, quel que soit le temps t, lorsqu'on y pose $x=0$ ou $x=l$, il faut que l'on ait $B_m = 0$, et qu'en outre les valeurs de m satisfassent à l'équation $\sin aml = 0$, laquelle donne $m=0$, $m = \pm \frac{\pi}{al}$, $m = \pm \frac{2\pi}{al}, \ldots$ Comme les termes de la valeur de u relatifs à deux valeurs de m égales et de signes contraires, peuvent être groupés en un seul, et que le terme relatif à $m = 0$ disparaît de lui-même, nous écrirons simplement $u = \Sigma A_i e^{-\frac{i^2 t}{a^2 l^2}} \sin \frac{i\pi x}{l}$, ayant soin de remplacer A_m par A_i pour la régularité de la notation. Et actuellement le signe Σ ne s'étendra plus qu'aux valeurs de i comprises dans la série des nombres entiers positifs 1, 2, 3,... Il reste encore à satisfaire à la condition relative à l'état initial, ou autrement dit, il reste encore à trouver une fonction A_i telle que l'on ait, entre les limites $x=0$, $x=l$, l'égalité $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$. Pour plus de commodité, je développe dans le second membre la série représentée par le signe Σ, et j'ai

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_i \sin \frac{i\pi x}{l} + \ldots$$

Je multiplie les deux membres par $\sin \frac{i\pi x}{l} dx$, et j'intègre par rapport à x entre les limites $x=0$, $x=l$. Cette intégration fait disparaître tous les coefficiens A_1, A_2,... excepté A_i, et l'on obtient sur-le-champ $A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx$. En adoptant cette valeur de A_i, on aura sans aucun doute $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$, pourvu toutefois que la fonction $f(x)$ s'annulle aux deux limites $x=0$, $x=l$, comme la série qui doit la représenter entre ces deux limites.

2. L'exemple précédent nous montre comment on est conduit à développer une fonction $f(x)$ en série de sinus, sinon pour toutes les valeurs réelles de x, du moins pour les valeurs de cette variable qui sont comprises entre deux limites données. D'après la manière

dont nous avons été amenés à poser l'égalité $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$, on voit *à priori* que cette égalité est possible, entre les limites $x=0$, $x=l$, quelle que soit la fonction $f(x)$; ou du moins la possibilité d'une telle équation paraît une conséquence naturelle de ce fait évident, que le problème de la détermination du mouvement de la chaleur dans une barre homogène doit être résoluble, quelle que soit la fonction $f(x)$ qui représente l'état initial des températures.

Mais au lieu de regarder les égalités de la forme

$$f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

comme le résultat de l'intégration d'une équation aux différences partielles servant à résoudre un problème physico-mathématique, on s'est aussi proposé de les considérer en elles-mêmes, abstraction faite des questions particulières où elles se présentent; et cette idée a donné naissance à la belle théorie des séries périodiques que M. Poisson a exposée d'abord dans le 19e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, et qu'il a reproduite récemment dans son ouvrage sur la chaleur.

Cette théorie des séries périodiques, ainsi traitée comme un point d'analyse pure, en devient à la fois plus élégante et plus rigoureuse: mais, telle que M. Poisson l'a donnée dans les mémoires cités, elle se borne aux développemens des fonctions ou parties de fonctions d'une variable x en séries de sinus et de cosinus des multiples entiers d'un arc proportionnel à x; et elle ne s'étend en aucune manière aux autres séries de sinus et de cosinus que l'on rencontre aussi dans certaines questions de la *Théorie de la chaleur* et dans lesquelles les arcs successifs s'obtiennent en multipliant la variable x par les diverses racines d'une équation transcendante.

Je me propose ici de faire connaître une méthode au moyen de laquelle on effectuera d'une manière directe les développemens des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus (*). Pour trouver cette méthode, il m'a suffi de modifier légèrement un procédé fort ingénieux dont M. Poisson a fait usage dans ses deux pre-

(*) Dans ses *Exercices mathématiques*, M. Cauchy a traité la même question par une méthode fondée sur le *calcul des résidus*.

miers Mémoires sur la *Théorie de la chaleur*. La modification dont je parle consiste surtout en ce que j'ai pris pour point de départ la formule

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y) dy,$$

ou

$$\begin{aligned} fx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos zy f(y) dy \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} \sin zy f(y) dy, \end{aligned}$$

par laquelle Fourier représente une fonction quelconque $f(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x, c'est-à-dire depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$. Cette formule, en effet, renferme implicitement toutes les séries de sinus et de cosinus que les géomètres ont imaginées pour le développement des fonctions ou parties de fonctions; et il ne s'agit pour ainsi dire que de savoir lui donner successivement, par des transformations convenables, la forme propre à chacune de ces séries.

3. Essayons de faire comprendre *à priori* par quelle raison métaphysique la formule de Fourier renferme implicitement toutes les séries de sinus et de cosinus d'arcs proportionnels à x que l'on pourra trouver pour développer, entre certaines limites des valeurs de la variable, une fonction $f(x)$ arbitrairement donnée entre ces limites. Supposons pour cela que de $x = l'$ à $x = l$, on ait

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \Sigma(\mathrm{A} \cos \rho x + \mathrm{B} \sin \rho x),$$

le signe Σ s'étendant à un nombre infini de valeurs de ρ liées entre elles par une loi quelconque, assujetties par exemple à être les diverses racines positives d'une même équation transcendante $\Pi(\rho) = 0$; et A, B, désignant des fonctions de ρ convenablement choisies. Puisque la fonction $f(x)$ n'est donnée que depuis $x = l'$ jusqu'à $x = l$, rien ne nous empêche d'en disposer hors de ces limites, et d'attribuer à la caractéristique f une signification telle que l'équation (A) subsiste pour toutes les valeurs réelles de x. Ce sera alors proprement l'équation (A) qui nous fera connaître le sens que nous devons attacher à cette caractéristique, et ce sens sera tel que l'équation dont il s'agit ait toujours lieu de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

Nous pouvons aussi remplacer la lettre ρ par une autre lettre z, et supposer que le signe Σ, relatif à z, s'étende non plus seulement à toutes les valeurs de cette lettre comprises dans les racines positives de l'équation $\Pi(\rho)=0$, mais bien à toutes les valeurs possibles qui se succèdent d'une manière continue depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, pourvu toutefois que nous remplacions A et B par des fonctions U et V de z telles que l'on ait en général $U=0$, $V=0$, lorsque z diffère de ρ, et $U=A$, $V=B$, lorsque $z=\rho$, c'est-à-dire lorsque z se trouve égal à une des racines positives de l'équation $\Pi(\rho)=0$.

Mais, au lieu de U et V, il sera plus convenable d'écrire Udz, Vdz, et de remplacer le signe Σ par le signe $\int$. On aura ainsi

$$f(x) = \int_0^\infty \cos zx . Udz + \int_0^\infty \sin zx . Vdz.$$

Les deux lettres U et V désigneront alors des fonctions de z qui seront généralement nulles excepté lorsque la variable z différera infiniment peu d'une des racines de l'équation $\Pi(\rho)=0$, et qui au contraire deviendront infinies lorsqu'on aura $z=\rho$, en sorte que les élémens Udz, Vdz (ou plutôt les intégrales $\int Udz$, $\int Vdz$, prises entre des limites infiniment resserrées) aient alors une valeur sensible.

Or la formule

$$f(x) = \int_0^\infty \cos zx . Udz + \int_0^\infty \sin zx . Vdz,$$

ne peut s'accorder avec celle de Fourier qu'autant que l'on a

$$U = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos zy f(y)dy, \quad V = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin zy f(y)dy.$$

Nous voyons par là, d'une part, que la formule de Fourier renferme implicitement tous les développemens possibles des fonctions en séries de sinus et de cosinus d'arcs proportionnels à la variable; et d'autre part, que toutes les fois qu'il s'agira d'en transformer le second membre en sorte que l'intégrale relative à z soit remplacée par un signe Σ relatif aux diverses racines d'une équation transcendante $\Pi(\rho)=0$, le caractère auquel on reconnaîtra que cette transformation peut s'effectuer sera le suivant : *savoir que les deux intégrales* $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos zy f(y)dy$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin zy f(y)dy$, *soient généralement égales à zéro, excepté pour les valeurs de* z *infiniment peu différentes de* ρ, *et au contraire égales à l'infini pour* $z = \rho$; ce qui aura lieu si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, sont elles-mêmes nulles ou infinies, suivant que l'on a z différent de ρ ou $z = \rho$.

4. La formule

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy,$$

servant de base à nos recherches, nous rappellerons ici la démonstration que Deflers en a donnée. Soit u la valeur du second membre de l'équation (1); il s'agit de prouver que l'on a $u = f(x)$. Effectuons d'abord l'intégration par rapport à z, non pas depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, mais depuis $z = 0$ jusqu'à une valeur indéterminée de z que nous traiterons comme infinie dans l'intégration relative à y. Nous aurons ainsi

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z(y-x)}{y-x} f(y)dy,$$

et en posant $y = x + \frac{\theta}{z}$, il nous viendra

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} f\left(x + \frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

Or, puisque z est une quantité infinie, on a $f\left(x + \frac{\theta}{z}\right) = f(x)$, excepté pour les valeurs de θ qui sont elles-mêmes infinies, valeurs dont on peut faire abstraction dans l'intégrale définie qui nous occupe, parce que le facteur $\frac{\sin\theta}{\theta}$ rend infiniment petits et négligeables les élémens qui leur correspondent. Il restera donc simplement

$$u = \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta d\theta}{\theta} = f(x);$$

ce qui coïncide avec la formule (1).

5. Maintenant, si l'on veut développer en série de sinus et de cosinus, entre deux limites l' et l, une fonction $f(x)$ donnée entre ces

deux limites, rien n'empêchera de faire usage pour ce développement de la formule (1); et comme cette formule renferme les parties de $f(x)$ relatives aux valeurs de x plus petites que l' et celles relatives aux valeurs de x plus grandes que l, on pourra se donner les unes et les autres arbitrairement. En disposant de diverses manières de ces parties indéterminées de la fonction $f(x)$, on sera conduit à diverses formules où il sera aisé en général de réduire l'intégration définie relative à z à une sommation finie relative aux diverses racines d'une certaine équation transcendante; d'où naîtront tous les développemens connus de la fonction en séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x.

Pour présenter cette méthode de la manière la plus générale, concevons qu'après s'être donné à volonté une définition de la fonction $f(x)$ qui permette de la calculer pour les valeurs de x non comprises entre l' et l, lorsqu'elle est déjà connue entre ces deux limites, on pose

$$\int_0^{\infty} e^{-hy} f(y)dy = p, \quad \int_0^{-\infty} e^{hy} f(y)dy = q,$$

h étant une constante réelle et positive, ou du moins une constante dont la partie réelle soit positive. Concevons de plus que l'on soit parvenu à mettre les valeurs de p et q sous la forme

$$p = \frac{\Psi(h)}{\varphi(h)}, \quad q = \frac{\Psi(-h)}{\varphi(-h)},$$

$\varphi(h)$ et $\Psi(h)$ étant des fonctions de h sans dénominateur, et tout-à-fait déterminées à l'aide des seules valeurs de la fonction $f(x)$ comprises entre les deux limites $x = l'$, $x = l$, pour lesquelles cette fonction est donnée *à priori*.

Cela posé, je dis qu'il sera toujours facile, entre les limites l' et l, d'exprimer la fonction $f(x)$ en série de la forme $\Sigma(A\cos\rho x + B\sin\rho x)$, le signe Σ se rapportant à toutes les racines réelles et positives de l'équation transcendante $\varphi(\rho\sqrt{-1}) = 0$. On y parviendra, en effet, en transformant convenablement la formule de Fourier, et en éliminant l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy$, qu'elle contient, à l'aide

d'une analyse très singulière que nous empruntons à peu près textuellement au 19e cahier du *Journal de l'École polytechnique* (*).

6. Pour déduire des valeurs de p et q celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, je désigne par g une quantité positive que l'on prendra aussi petite qu'on voudra; je fais $h=g+z\sqrt{-1}$ dans la valeur de p, et $h=g-z\sqrt{-1}$ dans la valeur de q; on aura

$$p = \frac{\psi(z\sqrt{-1}+g)}{\varphi(z\sqrt{-1}+g)}, \quad q = \frac{\psi(z\sqrt{-1}-g)}{\varphi(z\sqrt{-1}-g)},$$

et, d'après les intégrales définies que représentent p et q, si l'on fait $g=0$ dans la différence $p-q$, il est évident qu'elle se changera dans l'intégrale demandée. Cette intégrale sera donc la limite de la valeur de $p-q$ par rapport à g; ainsi, en regardant g comme une quantité infiniment petite que l'on fera tout-à-fait nulle à la fin du calcul, on aura

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy = \frac{\psi(z\sqrt{-1}+g)}{\varphi(z\sqrt{-1}+g)} - \frac{\psi(z\sqrt{-1}-g)}{\varphi(z\sqrt{-1}-g)}.$$

Mais cette quantité s'évanouit en même temps que g, excepté pour les valeurs de z qui rendent nul le dénominateur $\varphi(z\sqrt{-1})$; cette intégrale, et par suite celles de

$$\cos zy . f(y)dy, \quad \sin zy . f(y)dy, \quad \cos z(y-x) . f(y)dy,$$

prises entre les mêmes limites $\pm\infty$ sont donc généralement égales à zéro; et il n'y a d'exception que pour certaines valeurs de z pour lesquelles ces intégrales deviennent infinies. La nature de la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy$ étant ainsi connue, il s'agit présentement d'effectuer l'intégration relative à z qui se trouve indiquée dans l'expression de $f(x)$ donnée par la formule de Fourier.

7. Il sera nécessaire, pour cette opération, de conserver la quantité g dans la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy$; nous ferons $g=0$, après

(*) *Voyez* pages 31, 32, 33. Nous avons, sans aucun scrupule, emprunté les phrases mêmes de M. Poisson, inventeur de la méthode.

avoir achevé le calcul; jusque là nous traiterons seulement g comme une quantité infiniment petite. Or il est évident que les portions de l'intégrale relative à z, qui répondent à des valeurs de cette variable infiniment peu différentes des racines de l'équation $\varphi(z\sqrt{-1})=0$, sont les seules qui pourront ne pas s'évanouir en même temps que g; si donc nous désignons par ρ l'une de ces racines, et que nous fassions $z=\rho+z'$, il ne faudra donner à la variable z' que des valeurs infiniment petites, positives ou négatives, et prendre successivement pour ρ toutes les racines positives de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$; on ne prendra pas les racines négatives, parce que, dans l'intégration, la variable z ne doit recevoir que des valeurs réelles et positives; et par la même raison, lorsque l'on prendra la racine $\rho=0$, on ne donnera à z' que des valeurs positives. Faisons donc $z=\rho+z'$, et soit alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy = Z, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy\sqrt{-1}} f(y)dy = Z',$$

d'où il résultera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy = \frac{1}{2} Ze^{x(\rho+z')\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} Z'e^{-x(\rho+z')\sqrt{-1}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), et négligeant la variable z' en dehors de Z et Z', il vient

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \Sigma \left(e^{\rho x\sqrt{-1}} \int Zdz' + e^{-\rho x\sqrt{-1}} \int Z'dz'\right),$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs positives de ρ, y compris $\rho=0$.

Maintenant soit $\frac{d\varphi(h)}{dh}=\varphi'(h)$; mettons $\rho+z'$ à la place de z dans le second membre de l'équation (2); en traitant z' et g comme des quantités infiniment petites, on aura

$$\varphi(z\sqrt{-1}\pm g) = (z'\sqrt{-1}\pm g)\varphi'(\rho\sqrt{-1}),$$
$$\Psi(z\sqrt{-1}\pm g) = \Psi(\rho\sqrt{-1}),$$

et il en résultera

$$Z = \frac{2g\Psi(\rho\sqrt{-1})}{(g^2+z'^2)\varphi'(\rho\sqrt{-1})};$$

si donc on prend une quantité positive δ, et qu'on intègre depuis $z'=-\delta$ jusqu'à $z'=+\delta$, on aura

$$\int Zdz' = \frac{4\Psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} \text{ arc tang } \frac{\delta}{g},$$

et dans le cas de $\rho=0$, l'intégrale ne devant être prise que depuis $z'=0$ jusqu'à $z'=+\delta$, sa valeur sera réduite à moitié. Faisons actuellement $g=0$; cette valeur de $\int Zdz'$ deviendra

$$\int Zdz' = \frac{2\pi\Psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})}.$$

On en conclura celle de $\int Z'dz'$, en y changeant le signe de $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$\int Z'dz' = \frac{2\pi\Psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})},$$

d'où l'on conclut

$$f(x) = \Sigma\left[\frac{e^{\rho x\sqrt{-1}}\Psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} + \frac{e^{-\rho x\sqrt{-1}}\Psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})}\right],$$

en se rappelant toutefois que dans la somme Σ on ne devra prendre que la moitié du terme qui se rapporte à $\rho=0$.

Si l'on remplace maintenant les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus, la fonction $f(x)$ se trouvera mise sous la forme demandée

$$(\alpha) \qquad f(x) = \Sigma(A\cos\rho x + B\sin\rho x),$$

A et B ayant les valeurs suivantes :

$$(\beta) \quad \begin{cases} A = \dfrac{\Psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} + \dfrac{\Psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})}, \\ B = \sqrt{-1}\left[\dfrac{\Psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} - \dfrac{\Psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})}\right]; \end{cases}$$

dans lesquelles ρ désigne une quelconque des racines positives de l'équation transcendante $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$, mais qu'il faudra réduire à moitié dans le cas particulier où l'on aura $\rho=0$.

8. Admettons par exemple que pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites l' et l que nous prendrons la première égale à zéro et la seconde quelconque, on se donne les deux conditions $f(y)=f(-y)$, $f(l+y)=-f(l-y)$, lesquelles entraînent la condition particulière $f(l)=0$, que nous supposerons remplie. Si l'on multiplie par $e^{-hy}dy$ les deux membres de l'équation $f(y)=f(-y)$ et qu'on intègre ensuite depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(y)dy=\int_0^\infty e^{-hy}f(-y)dy.$$

Le premier membre est précisément égal à la quantité représentée ci-dessus par p (*voyez* n° 5), et il est aisé de voir que le second est égal à $-q$; on a donc d'abord $p=-q$.

En multipliant de même par $e^{-hy}dy$ et intégrant les deux membres de l'équation $f(l+y)=-f(l-y)$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy=-\int^\infty e^{hy}f(l-y)dy.$$

on a d'ailleurs identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy=e^{hl}\left[p-\int_0^l e^{-hy}f(y)dy\right];$$

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy=-e^{-hl}\left[q-\int_0^l e^{hy}f(y)dy\right];$$

l'égalité précédente devient donc

$$e^{hl}\left[p-\int_0^l e^{-hy}f(y)dy\right]=e^{-hl}\left[q-\int_0^l e^{hy}f(y)dy\right];$$

et en ayant égard à l'équation $p=-q$, et posant

$$\int_0^l(e^{h(l-y)}-e^{h(y-l)})f(y)dy=\Psi(h),\quad e^{hl}+e^{-hl}=\varphi(h),$$

on en tire les valeurs de p et q sous la forme $p=\frac{\Psi(h)}{\varphi(h)}$, $q=\frac{\Psi(-h)}{\varphi(-h)}$ exi-

gée pour le succès de notre méthode. D'après ces valeurs de $\Psi(h)$, $\varphi(h)$, l'équation qui détermine les valeurs de ρ est $\cos \rho l = 0$, et l'on en tire, en se bornant aux racines positives, $\rho = \frac{\pi}{2l}$, $\rho = \frac{3\pi}{2l}$, $\rho = \frac{5\pi}{2l}$, ...

On a de plus,

$$\Psi(\rho\sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1}\int_0^l \sin\rho(l-y)f(y)dy,$$
$$\varphi'(\rho\sqrt{-1}) = 2l\sqrt{-1}\sin\rho l.$$

En observant que la quantité $\sin\rho(l-y) = \sin\rho l\cos\rho y - \cos\rho l\sin\rho y$ se réduit à $\sin\rho l\cos\rho y$, puisque $\cos\rho l = 0$, la valeur de $\Psi(\rho\sqrt{-1})$ devient plus simplement

$$\Psi(\rho\sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1}\sin\rho l\int_0^l \cos\rho y f(y)dy.$$

La formule (α) nous donne d'après cela

$$f(x) = \frac{2}{l}\Sigma\cos\rho x\int_0^l \cos\rho y f(y)dy,$$

ce qui est exact, en effet, entre les limites $x=0$, $x=l$, comme on peut s'en assurer par d'autres méthodes, pour une fonction $f(x)$ assujettie à la condition $f(l)=0$.

9. Supposons en second lieu que pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites l' et l que nous prendrons égales et de signes contraires en sorte que l'on ait $l'=-l$, on se donne les deux conditions

$$f(l+y) + f(l-y) = 0,$$
$$f(-l+y) + f(-l-y) = 0;$$

lesquelles renferment implicitement ces deux conditions particulières $f(l)=0$, $f(-l)=0$.

On a identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy = e^{hl}\left[p-\int_0^l e^{-hy}f(y)dy\right],$$
$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy = -e^{-hl}\left[q-\int_0^l e^{hy}f(y)dy\right].$$

Or, si l'on multiplie par $e^{-hy}dy$, et si l'on intègre entre les limites $y=0$, $y=\infty$, les deux membres de l'équation $f(l+y)=-f(l-y)$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy = -\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy.$$

En remplaçant ces deux intégrales définies par leurs valeurs, on aura

$$e^{hl}p - e^{-hl}q = e^{hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy - e^{-hl}\int_0^l e^{hy}f(y)dy.$$

En opérant d'une manière semblable sur l'égalité $f(-l+y)+f(-l-y)=0$, on trouvera de même

$$e^{-hl}p - e^{hl}q = e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy - e^{hl}\int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy,$$

équation qui du reste se déduit de la précédente, en y changeant l en $-l$. Ces deux équations ne renferment, outre p et q, que des quantités connues, puisque la fonction $f(y)$ est donnée entre les limites $y=-l$, $y=+l$, et il est évident que l'on en déduira les valeurs de p et q sous la forme $p=\frac{\psi(h)}{\varphi(h)}$, $q=\frac{\psi(-h)}{\varphi(-h)}$; on continuera ensuite le calcul comme il a été dit n° 7.

10. Mais sans nous arrêter là-dessus davantage, passons à un autre exemple beaucoup plus intéressant, et qui d'ailleurs comprend le précédent comme cas particulier. A cet effet, posons encore $l'=-l$, et pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites $y=-l$, $y=+l$, donnons-nous ces deux conditions

$$(a)\begin{cases} \mathcal{E}f(l+y) + \frac{df(l+y)}{dy} + \mathcal{E}f(l-y) - \frac{df(l-y)}{dy} = 0, \\ \mathcal{E}'f(-l+y) - \frac{df(-l+y)}{dy} + \mathcal{E}'f(-l-y) + \frac{df(-l-y)}{dy} = 0, \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ étant deux constantes positives.

Ces deux conditions supposent que la fonction $f(x)$ soit telle que l'on ait

$$\frac{df(x)}{dx} + \mathcal{E} f(x) = 0 \text{ pour } x = l,$$

$$\frac{df(x)}{dx} - \mathcal{E}' f(x) = 0 \text{ pour } x = -l;$$

et nous admettrons qu'en effet ces deux égalités ont lieu.

Cela posé, pour obtenir les valeurs de p et q, rappelons-nous d'abord que l'on a identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)dy = e^{hl}\left[p - \int_0^l e^{-hy} f(y)dy\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)dy = -e^{-hl}\left[q - \int_0^l e^{hy} f(y)\,dy\right].$$

Mettons ensuite, avec M. Poisson (*), la première des équations (a) sous la forme

$$e^{-\mathcal{E}y} d[e^{\mathcal{E}y} f(l+y)] = e^{\mathcal{E}y} d[e^{-\mathcal{E}y} f(l-y)];$$

multiplions ses deux membres par $e^{-hy}dy$, puis intégrons par parties; nous aurons

$$e^{-yh} f(l+y) + (h+\mathcal{E})\int e^{-hy} f(l+y)dy = C + e^{-hy} f(l-y) + (h-\mathcal{E})\int e^{-hy} f(l-y)dy.$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, page 30. Cette méthode consiste essentiellement à multiplier par $e^{-hy}dy$ et à intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$ les deux membres des équations (a), puis à exprimer toutes les intégrales en fonction de p, q et de quantités connues. En observant que par des intégrations par parties on ramène l'intégrale de $e^{-hy}\frac{d^n F(y)}{dx^n}dy$ à l'intégrale de e^{-hy} F $(y)\,dy$, on comprendra que ce procédé réussirait encore en général et fournirait les valeurs de p, q, si les équations (a) renfermaient, sous forme linéaire, outre la différentielle première df de la fonction désignée par la caractéristique f, les différentielles d^2f, ... d^nf d'un ordre quelconque multipliées par des coefficients constants.

Si les intégrales sont prises depuis $y=0$, la constante arbitraire C sera égale à zéro, et si elles s'étendent jusqu'à $y=\infty$, les termes qui sont hors du signe $\int$ s'évanouiront à cette seconde limite. On aura donc alors

$$(h+\mathcal{E})\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy = (h-\mathcal{E})\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy,$$

équation qui devient, en vertu des précédentes,

$$(h+\mathcal{E})e^{hl}p + (h-\mathcal{E})e^{-hl}q = (h+\mathcal{E})e^{hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy$$
$$+ (h-\mathcal{E})e^{-hl}\int_0^l e^{hy}f(y)dy.$$

Par un procédé semblable on déduira de la seconde des équations (a) une autre relation entre p et q, qui s'obtient aussi en changeant dans celle-ci $\mathcal{E}$ en $-\mathcal{E}'$ et l en $-l$, ce qui donne

$$(h-\mathcal{E}')e^{-hl}p + (h+\mathcal{E}')e^{hl}q = (h-\mathcal{E}')e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy$$
$$+ (h+\mathcal{E}')\, e^{hl}\int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy,$$

De ces deux équations on tirera les valeurs de p et q sous la forme demandée

$$p = \frac{\Psi(h)}{\varphi(h)}, \quad q = \frac{\Psi(-h)}{\varphi(-h)},$$

en faisant pour abréger

$$(h+\mathcal{E})(h+\mathcal{E}')e^{2hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy-(h-\mathcal{E})(h-\mathcal{E}')e^{-2hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy$$
$$+(h-\mathcal{E})(h+\mathcal{E}')\left[\int_0^l e^{hy}f(y)dy-\int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy\right] = \Psi(h),$$

$$(h+\mathcal{E})(h+\mathcal{E}')\, e^{2hl}-(h-\mathcal{E})(h-\mathcal{E}')\, e^{-2hl} = \varphi(h).$$

L'équation de laquelle dépendent les valeurs de ρ sera donc

$$\frac{\varphi(\rho\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = (\mathcal{E}\mathcal{E}' - \rho^2)\sin 2\rho l + (\mathcal{E}+\mathcal{E}')\rho\cos 2\rho l = 0.$$

On aura en outre

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(\rho\sqrt{-1})=[\mathcal{E}+\mathcal{E}'+2l(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)]\cos\rho l-[2+2l(\mathcal{E}+\mathcal{E}')]\rho\sin 2\rho l,$$

et $\varphi'(-\rho\sqrt{-1})=\varphi'(\rho\sqrt{-1})$. Quant aux valeurs de $\Psi(\rho\sqrt{-1})$, $\Psi(-\rho\sqrt{-1})$, il est aisé de les former; toutefois, je me dispenserai de les écrire à cause de leur complication. Lorsqu'on les aura obtenues, les équations ($\mathcal{E}$) du n° 7 nous donneront les coefficiens A, B; et la formule (α) nous fournira ensuite le développement de $f(x)$.

11. Les expressions de A et B contiennent en dénominateur la dérivée $\varphi'(\rho\sqrt{-1})$; si donc deux des racines positives de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ se trouvaient égales entre elles, ces coefficiens deviendraient infinis. Mais pour que cette circonstance pût se présenter dans l'exemple que nous traitons, il faudrait que l'on eût à la fois

$$(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)\sin 2\rho l+(\mathcal{E}+\mathcal{E}')\rho\cos 2\rho l=0,$$
$$[\mathcal{E}+\mathcal{E}'+2l(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)]\cos 2\rho l-[2+2l(\mathcal{E}+\mathcal{E}')]\rho\sin 2\rho l=0;$$

égalant entre elles les deux valeurs de tang $2\rho l$ fournies par ces deux équations, on aurait donc

$$(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)[\mathcal{E}+\mathcal{E}'+2l(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)]+(\mathcal{E}+\mathcal{E}')[2+2l(\mathcal{E}+\mathcal{E}')]\rho^2=0,$$

ou bien

$$2l(\mathcal{E}\mathcal{E}'-\rho^2)^2+2l(\mathcal{E}+\mathcal{E}')^2\rho^2+(\mathcal{E}+\mathcal{E}')(\mathcal{E}\mathcal{E}'+\rho^2)=0;$$

or, cette dernière égalité est absurde quand on a $\mathcal{E}>0$, $\mathcal{E}'>0$ (comme nous l'avons supposé n° 10), puisque son premier membre est la somme de trois quantités positives; et lorsqu'une des deux constantes $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, est nulle, ou lorsque toutes les deux le sont, elle ne peut être satisfaite qu'en posant $\rho=0$. L'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ n'a donc pas de racines positives égales lorsque les constantes $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont >0; il est aisé de s'assurer que ce théorème subsiste encore si l'une seulement de ces constantes est nulle, l'autre restant positive, car la racine nulle que prend dans cette circonstance l'équation que nous discutons est évidemment une racine simple; il n'en est plus de même quand on a à la fois $\mathcal{E}=0$, $\mathcal{E}'=0$: il y a alors une racine triple égale à zéro;

mais alors aussi les deux quantités $\Psi(h)$, $\varphi(h)$, possèdent le facteur commun h^2 que l'on doit supprimer pour réduire les fractions p, q, à leur plus simple expression; cette réduction faite, l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ se trouvera débarrassée de deux de ses racines nulles et n'aura plus que des racines toutes inégales entre elles.

12. Nous avons vu précédemment (n° 10) que la fonction $f(x)$ que nous venons de développer dans la série $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$ doit être regardée comme assujettie aux deux conditions particulières

$$\frac{df(x)}{dx}+\mathcal{E}f(x)=0 \text{ pour } x=l,$$

$$\frac{df(x)}{dx}-\mathcal{E}'f(x)=0 \text{ pour } x=-l.$$

Ces deux conditions devront être satisfaites si l'on remplace $f(x)$ par sa valeur $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$; mais il est assez remarquable que chaque terme $A\cos\rho x+B\sin\rho x$ de la série satisfasse isolément à cette relation, en sorte que si l'on pose $v=A\cos\rho x+B\sin\rho x$, on aura

$$\frac{dv}{dx}+\mathcal{E}v=0 \text{ pour } x=l, \text{ et } \frac{dv}{dx}-\mathcal{E}'v=0 \text{ pour } x=-l \text{ (*)}.$$

Les divers termes de la série $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$, jouissent de plusieurs autres propriétés remarquables qui sont connues depuis long-temps. Soient par exemple v et v' deux termes de la série répondant à deux racines différentes ρ et ρ'; je dis que l'on aura $\int_{-l}^{+l} vv'dx=0$. En effet, des deux équations $\frac{d^2v}{dx^2}=-\rho^2v$, $\frac{d^2v'}{dx^2}=-\rho'^2v'$, qui ont évidemment lieu, on déduit

$$(\rho^2-\rho'^2)vv'=v\frac{d^2v'}{dx^2}-v'\frac{d^2v}{dx^2};$$

en intégrant il vient donc

(*) Pour la démonstration de ce théorème nous renverrons aux calculs développés à la page 37 du 19e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

$$(\rho^2-\rho'^2)\int vv'dx = v\frac{dv'}{dx} - v'\frac{dv}{dx}.$$

Si maintenant on prend $-l$ et $+l$ pour les deux limites de l'intégrale, je dis que le second membre se réduit à zéro. Pour le montrer, j'observe que pour $x=l$ on a $\frac{dv}{dx}+\mathcal{E}v=0$, $\frac{dv'}{dx}+\mathcal{E}'v'=0$; or, si après avoir multiplié la première de ces deux égalités par v' et la seconde par v, on les retranche, il en résulte $v\frac{dv'}{dx}-v'\frac{dv}{dx}=0$ pour $x=l$; pour $x=-l$ on a $\frac{dv}{dx}-\mathcal{E}'v=0$, $\frac{dv'}{dx}-\mathcal{E}'v'=0$, d'où l'on tire de même $v\frac{dv'}{dx}-v'\frac{dv}{dx}=0$. On conclut de là que le produit $(\rho^2-\rho'^2)\int_{-l}^{+l}vv'dx$ est constamment égal à zéro; et par suite, si les deux racines ρ et ρ' sont différentes, on a $\int_{-l}^{+l}vv'dx=0$.

On sait comment M. Poisson s'est servi de l'égalité $\int_{-l}^{+l}vv'dx=0$ pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$; nous ne rapporterons pas ici sa démonstration qui est connue de tous les géomètres, et qui d'ailleurs est de pure curiosité dans notre théorie, puisque nous n'avons besoin que des racines positives de cette équation, en sorte qu'il nous importe peu qu'elle ait ou n'ait pas de racines imaginaires.

13. Il nous serait aisé de donner beaucoup d'autres développemens de la fonction $f(x)$ en séries de sinus et de cosinus; nous pourrions, par exemple, déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites $-l$, $+l$, en employant, au lieu des équations (a), d'autres équations aux différences mêlées qui contiendraient les différentielles de $f(y)$ d'un ordre supérieur au premier. Mais il serait fort inutile de généraliser ainsi les résultats que nous avons obtenus dans ce Mémoire. Nous n'avons eu pour but que de développer avec soin et de présenter sous un nouveau jour une méthode très ingénieuse à laquelle les géomètres n'avaient pas fait assez attention. Plus tard nous reviendrons sur ce sujet, et en partant d'un autre principe nous montrerons comment

on peut arriver d'une manière à la fois directe et rigoureuse, non-seulement aux développemens des fonctions en séries de sinus et de cosinus, mais encore à ces développemens plus compliqués formés de suites infinies dont chaque terme est l'intégrale d'une équation différentielle du second ordre, et qui se présentent en analyse quand on cherche à déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène primitivement échauffée d'une manière quelconque (*).

(*) Le Mémoire que j'annonce ici et qui roule sur *les développemens des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable*, a été présenté le 30 novembre dernier à l'Académie des Sciences.

MÉMOIRE

Sur une question d'Analyse aux différences partielles;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 17 mars 1834.)

I.

La question d'analyse aux différences partielles à laquelle se rapportent les recherches suivantes, peut être utile dans plusieurs théories physiques, et spécialement dans celle de la chaleur. Le titre placé en tête de ce Mémoire montre assez que je veux la considérer sous un point de vue purement mathématique, abstraction faite de ses applications. Néanmoins, il sera bon d'indiquer en peu de mots la nature des problèmes qui m'ont conduit à m'en occuper.

Les lois de la distribution variable ou permanente du calorique dans les substances solides dépendent, comme on sait, d'une équation aux différences partielles qu'il s'agit d'intégrer, et d'une ou de plusieurs conditions particulières relatives, soit à la surface du corps, soit à l'état initial des températures. Ces conditions définies servent à déterminer les quantités arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie. Lorsque le système dans lequel la chaleur se propage est placé dans un milieu de température donnée, l'équation relative à la surface a pour coefficient d'un de ses termes le pouvoir rayonnant; et si l'on veut laisser à la question toute la généralité qu'elle comporte, il faut regarder ce pouvoir rayonnant comme une fonction connue quelconque des coordonnées de chaque point de la surface; car en

supposant même qu'il s'agisse d'un corps homogène, la quantité de chaleur émise au dehors par un élément superficiel de grandeur constante, varie, toutes choses égales d'ailleurs, avec le degré de poli ou la coloration de cet élément.

Lorsqu'on étudie, par exemple, le mouvement de la chaleur dans une barre d'un très petit diamètre, le pouvoir rayonnant doit être regardé comme une fonction arbitraire de l'abscisse ; et si l'on remplaçait cette fonction arbitraire par une simple constante, on restreindrait beaucoup l'étendue de la solution. Au reste, dans le cas d'une barre très mince, l'introduction d'une fonction arbitraire pour représenter le pouvoir rayonnant et même pour représenter la chaleur spécifique et la conductibilité intérieure, ne complique pas beaucoup les calculs, du moins tant qu'on se borne à établir des formules algébriques, sans essayer de les réduire en nombres. C'est ce que j'ai fait voir dans un Mémoire présenté il y a plusieurs années à l'Académie des Sciences, et ce que M. Sturm a prouvé aussi, à peu près à la même époque, par une marche très différente de celle que j'ai suivie, quoiqu'elle conduise aux mêmes résultats. Mais en général on peut dire que la détermination des lois du mouvement de la chaleur dans un corps solide de forme donnée, se complique beaucoup dès qu'on représente le pouvoir rayonnant h propre à chaque point de la surface de ce corps par une fonction quelconque $f(x)$ de l'abscisse correspondante à ce point. Aussi voyons-nous que jusqu'à ce jour les géomètres ont regardé la lettre h comme exprimant une constante, même dans la théorie des températures terrestres où il serait intéressant d'examiner les effets produits par la variabilité de h.

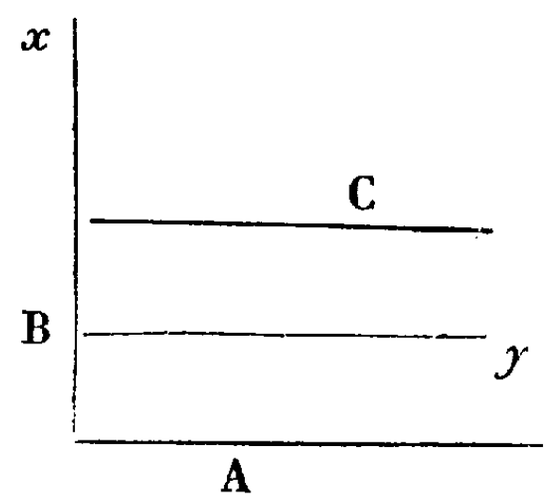
En cherchant à résoudre divers problèmes dans lesquels je regardais la quantité h comme variable, je suis tombé sur la question d'analyse aux différences partielles dont je ferai le sujet de ce Mémoire. Cette question a pour objet de déterminer les coefficiens des termes successifs d'une série de quantités périodiques, au moyen d'une équation de condition à laquelle cette série doit satisfaire entre deux limites données.

Une des équations de condition dont je parle est, par exemple, de la forme :

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\, \Sigma A_m \cos mx = F(x),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m exprimées par les nombres impairs 1, 3, 5..... L'équation (A) doit subsister pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$: les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont connues, et il s'agit de déterminer les coefficiens A_1, A_3, A_5,... A_m... Cela serait facile par les méthodes ordinaires si l'on avait $f(x)=$ constante; mais quand $f(x)$ est variable, la chose devient plus délicate.

Il est aisé de trouver dans la Théorie de la Chaleur un problème qui conduise à l'équation (A). Pour cela, généralisons celui que Fourier a résolu dans le chapitre III de son ouvrage. Ce problème a, comme on sait, pour objet d'exprimer le mouvement permanent de la chaleur dans une lame rectangulaire infinie.



Nous supposerons avec l'illustre auteur, que les deux arètes parallèles et infinies A et C qui comprennent le rectangle, sont retenues par une cause quelconque à la température fixe 0°; mais quant à l'arète transversale B, au lieu de la regarder comme entretenue aussi à une température fixe 1°, nous admettrons qu'elle rayonne dans un milieu dont la température est donnée pour chaque point, et nous représenterons son pouvoir émissif par une fonction arbitraire variant d'un point à l'autre de B. La lame étant d'ailleurs homogène, si nous plaçons l'origine des coordonnées au milieu de l'arète B, et si nous comptons les abscisses x le long de cette arète, tandis que les ordonnées y seront comptées dans une direction normale à celle-là, il est visible que la température permanente u qui répond au point M dont les coordonnées sont x et y, sera déterminée par l'équation aux diffé-

rences partielles :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

En choisissant l'unité de longueur de telle manière que l'arète B, interceptée entre les faces A et C, soit égale à $\pi = 3,1415\ldots\ldots$, on aura $u=0$ pour $x=\pm\frac{\pi}{2}$, puisque les faces A et C sont entretenues à 0°; à cause de l'action de ces mêmes arètes, la portion du rectangle située à une distance infinie de B doit aussi être à 0°. Ainsi, l'on doit avoir $u=0$ pour $y=+\infty$. Le long de l'arète B, il y a une autre condition définie, savoir :

$$k\frac{du}{dy}=h(u-\zeta) \text{ pour } y=0 \text{ de } x=-\frac{\pi}{2} \text{ à } x=\frac{\pi}{2},$$

les deux quantités positives h et k désignant le pouvoir émissif et la conductibilité intérieure, tandis que ζ désigne la température du milieu ambiant. D'après nos hypothèses, h et ζ sont des fonctions de x. Nous pouvons donc poser

$$\frac{h}{k}=f(x), \quad \frac{h\zeta}{k}=F(x),$$

et l'équation dont il s'agit deviendra

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0.$$

Les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont jusqu'ici des fonctions quelconques; mais, pour plus de simplicité, nous les regarderons désormais comme des fonctions paires de x, en sorte que l'on ait $f(-x)=f(x)$, $F(-x)=F(x)$; la température u sera aussi dès lors une fonction paire de x. Par conséquent la question se réduit à trouver pour la température u une fonction paire de x, qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

qui s'annule, quel que soit y quand $x=\frac{\pi}{2}$, et quel que soit x quand

$y = +\infty$; et qui, en outre, lorsqu'on a $y = 0$, satisfasse à l'égalité

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Or, on trouve que toutes ces conditions seront remplies en posant

$$u = \Sigma A_m e^{-my} \cos mx;$$

m étant un quelconque des nombres entiers impairs 1, 3, 5..... et A_m représentant une fonction de m tellement choisie que, pour les valeurs de x renfermées entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ait

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\, \Sigma A_m \cos mx = F(x).$$

Pour déterminer la fonction inconnue A_m dont la valeur de u dépend, il est donc nécessaire de traiter l'équation (A) dans laquelle $f(x)$ est une fonction positive arbitraire de x.

Si la longueur de l'arète B que nous avons supposée égale à π, était au contraire égale à $2l$, au lieu de l'équation (A), on aurait à traiter une équation de condition de la forme

$$\text{(B)} \qquad \Sigma A_m . \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l} + f(x)\, \Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l} = F(x).$$

En supposant la longueur l infinie, transformant les sommes en intégrales, et substituant à la lettre A_m une fonction $\varphi(\theta)d\theta$ de la variable $\theta = \frac{m\pi}{2l}$ à laquelle se rapporte l'intégration, l'égalité précédente deviendra

$$\text{(C)} \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos \theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta x = F(x).$$

Il s'agira donc alors de trouver une fonction $\varphi(\theta)$ qui satisfasse à l'équation (C); et cette fonction une fois déterminée, la température u d'un point quelconque du solide, sera fournie par la formule générale

$$u = \int_0^\infty \varphi(\theta) e^{-\theta y} . \cos \theta x d\theta.$$

Nous avons restreint tout à l'heure la généralité de notre problème en supposant la chaleur distribuée symétriquement de part et d'autre de l'axe qui s'élève au milieu de l'arète B, normalement à cette arète; admettons maintenant que cette symétrie n'existe pas. Il sera plus commode de placer dans ce cas l'origine des coordonnées au point où les deux faces A et B se rencontrent; d'après cela nous choisirons l'arète A pour axe des y et l'arète B pour axe des x.

L'équation indéfinie à laquelle la température u doit satisfaire sera encore

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

mais les conditions définies prendront la forme

$$u = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et pour } x = \pi,$$

$$u = 0 \text{ pour } y = +\infty,$$

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0, \text{ pour } y = 0, \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \pi.$$

Nous n'avons pas besoin d'avertir que la longueur de l'arète B est, comme précédemment, représentée par le nombre π. La valeur de u qu'on déduit de ces équations est la suivante :

$$u = \Sigma A_m e^{-my} \sin mx,$$

m désignant un quelconque des nombres entiers successifs 1, 2, 3, 4, 5..... ; et A_m étant une fonction de m qui doit être telle que pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π, on ait

$$\text{(D)} \qquad \Sigma A_m m \sin mx + f(x)\ \Sigma A_m \sin mx = F(x).$$

Pour obtenir la valeur de A_m et par suite la valeur de u, il est donc nécessaire de savoir résoudre les équations de la forme (D).

Considérons actuellement l'état permanent de la chaleur dans un cercle dont le contour rayonne dans un milieu de température donnée, et nous tomberons de nouveau sur une équation semblable aux précédentes, quoique un peu plus générale. En effet, soit u la température fixe d'un point quelconque M du cercle; désignons par r le rayon vecteur OM mené du point M au centre O, et par x l'angle

que ce rayon vecteur forme avec une droite invariable OX. L'équation indéfinie du mouvement permanent de la chaleur dans un plan, pouvant, comme on le sait, être mise sous la forme

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = 0;$$

il s'agira d'abord d'intégrer cette équation. Or, si l'on effectue cette intégration en ayant égard à ces deux circonstances particulières à notre problème, 1° que la valeur de u ne devienne pas infinie quand on y fait $r=0$; 2° que cette valeur reste la même quand on change x en $x+2\pi$, on trouvera pour l'expression générale de u

$$u = \Sigma r^m (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

m désignant un nombre entier quelconque y compris zéro, et A_m, B_m des fonctions inconnues de m. Il reste encore à satisfaire à l'équation relative à la surface, laquelle, en prenant pour unité de longueur le rayon du cercle, est de la forme

$$k\frac{du}{dr} + h(u-\zeta) = 0 \quad \text{pour } r=1, \text{ de } x=-\pi \text{ à } x=+\pi,$$

k et h désignant la conductibilité intérieure et le pouvoir rayonnant, tandis que ζ représente la température du milieu en contact avec la circonférence du cercle. Nous supposerons que h et ζ sont des fonctions données de l'angle x, et nous poserons

$$\frac{h}{k} = f(x), \quad \frac{h\zeta}{k} = F(x).$$

En mettant donc, au lieu de u et $\frac{du}{dr}$ leurs valeurs dans notre équation définie, elle deviendra

$$\text{(E)}\ \Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx) + f(x)\,\Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx) = F(x);$$

et il faudra en faire usage de manière à déterminer les deux coefficiens A_m et B_m.

Les cinq équations que nous avons dénotées par les cinq premières lettres de l'alphabet, répondent à un nombre égal de problèmes dont

nous allons essayer de donner la solution. Nous traiterons d'abord le problème (A), qui renferme implicitement (B) et (C), par deux méthodes différentes qui nous conduiront aux mêmes résultats. La seconde de ces deux méthodes étant plus abrégée que l'autre, c'est elle que nous appliquerons ensuite aux derniers problèmes (D), (E).

II.

PREMIÈRE SOLUTION DU PROBLÈME (A).

Soient m un nombre impair quelconque, et $A_1, A_3, A_5 \ldots A_m \ldots$ des coefficiens constans inconnus; faisons

$$A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m \cos mx,$$

et

$$A_1 \cos x + 3A_3 \cos 3x + 5A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m m \cos mx.$$

Désignons par $F(x)$, $f(x)$, deux fonctions de x, dont on connaisse les valeurs depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$. Cela posé, notre problème peut s'énoncer de la manière suivante.

PROBLÈME.

On demande de trouver la valeur de A_m *qui satisfait à l'équation*

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\ \Sigma A_m \cos mx = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Néanmoins, pour rendre cet énoncé plus précis, il faut ajouter les remarques suivantes qui dérivent de la nature même de la question.

1°. Le problème qui, dans le n° I, nous a conduits à l'équation (A), nous montre que la quantité $\cos mx$ est la limite vers laquelle tend le produit $e^{-my} \cos mx$, quand la grandeur positive y devient infiniment petite. En posant $e^{-y}=p$, p sera un nombre infiniment peu inférieur à l'unité, et nous aurons $e^{-my} \cos mx = p^m \cos mx$. Il résulte de là que si nos séries périodiques deviennent indéterminées, nous

pourrons et nous devrons même en multiplier les divers termes par les puissances successives d'une quantité infiniment peu différente de l'unité, ce qui détruira l'indétermination.

2°. Les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont données en *nombres finis* pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Le cas où ces fonctions deviendraient infinies, dans l'intervalle cité, doit être exclu formellement comme contraire à la nature physique du problème qui nous a fourni l'équation (A).

3°. La fonction $f(x)$ est en outre constamment positive, puisqu'elle exprime le rapport du pouvoir rayonnant à la conductibilité.

4°. La fonction $F(x)$ peut être indifféremment positive ou négative; mais nous la supposerons nulle à la limite $x=\frac{\pi}{2}$, en sorte qu'on ait $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. En effet, le premier membre de l'équation (A) s'annule pour la valeur particulière $x=\frac{\pi}{2}$; si donc on n'admettait pas la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, l'analyse paraîtrait se contredire, puisque le second membre ne s'annulant pas pour cette même valeur, cesserait alors d'être égal au premier.

Si la fonction $f(x)$ se réduisait à une quantité constante β, l'équation (A) pourrait être écrite ainsi

$$\Sigma A_m (m+\beta) \cos mx = F(x);$$

et par la méthode ordinaire on en déduirait

$$A_m = \frac{4}{\pi(m+\beta)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) \cos mx dx;$$

mais cette méthode est impraticable sitôt qu'on cesse d'avoir $f(x)$ = constante. Il faut donc recourir à d'autres procédés.

D'abord, j'observe que la fonction $F(x)$ qui, par hypothèse, satisfait à la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, peut être exprimée entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, par une série de cosinus, puisque l'on a la formule

connue

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu d\mu,$$

m désignant, comme ci-dessus, un nombre impair quelconque.

Quant à la fonction $f(x)$, nous pouvons, entre les mêmes limites, la développer sous la forme

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots.$$

ou, pour abréger,

$$f(x) = \Sigma R_n \cos nx,$$

n désignant un quelconque des nombres pairs 0, 2, 4, 6..., et R_n étant un coefficient déterminé par l'égalité

$$R_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mu) \cos n\mu d\mu,$$

dont le second membre doit néanmoins être réduit à moitié lorsque $n = 0$. En remplaçant $f(x)$ et $F(x)$ par leurs valeurs dans l'équation (A), cette équation devient

$$(A') \Sigma A_m m \cos mx + \Sigma R_n \cos nx \Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos n\mu d\mu,$$

et l'on peut s'assurer que si l'équation (A') a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, elle aura également lieu quand x se trouvera en-deçà ou au-delà de ces limites. Tel est l'avantage que l'on trouve à substituer aux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ les séries de cosinus équivalentes; et c'est en cela que consiste l'esprit de ces substitutions.

Le produit

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx,$$

qui n'est autre chose que le produit des deux quantités

$$R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots.$$

et

$$A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + A_5 \cos 5x + \ldots + A_m \cos mx + \ldots$$

peut être effectué en général; si l'on fait usage de la formule

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \cos (m+n)x + \frac{1}{2} \cos (m-n)x,$$

on ramène ce produit à la forme

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.};$$

on peut donc poser

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.};$$

et en effectuant les calculs, on obtient aisément

$$a_1 = R_0 A_1 + \frac{R_2}{2} (A_3 + A_1) + \frac{R_4}{2} (A_5 + A_3) + \ldots\ldots$$

$$a_3 = R_0 A_3 + \frac{R_2}{2} (A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2} (A_7 + A_1) + \ldots\ldots$$

$$a_5 = R_0 A_5 + \frac{R_2}{2} (A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2} (A_9 + A_1) + \ldots\ldots$$

.....

Ces valeurs de a_1, a_3, a_5,.. dépendent des quantités A_1, A_3, A_5, ... A_m.... ; mais pour bien mettre en évidence la loi régulière de leur formation, il convient d'introduire aussi dans le calcul les quantités A_{-1}, A_{-3},... A_{-m},... Ces quantités n'ont aucun sens par elles-mêmes; voici quelle signification nous leur attribuerons dans la suite. Il faut concevoir une fonction $\varphi(m)$ telle que l'on ait en général $A_m = \varphi(m)$, quand m est un quelconque des nombres impairs 1, 3, 5... A présent, si dans la fonction analytique $\varphi(m)$ on remplace m par $-m$, le résultat de la substitution sera $\varphi(-m)$. Or, c'est précisément ce résultat que désormais nous dénoterons par A_{-m}, en posant en conséquence

$$A_{-1} = \varphi(-1), \quad A_{-3} = \varphi(-3), \ldots \quad A_{-m} = \varphi(-m) \ldots$$

Introduisant dans nos calculs les quantités A_{-1}, A_{-3},.... A_{-m},...

nous pourrons mettre les valeurs de $a_1, a_3, a_5, \ldots$ sous la forme

$$a_1 = b_1 + R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_3 + A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_5 + A_{-3}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{1+n} + A_{1-n}) + \ldots$$

$$a_3 = b_3 + R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_7 + A_{-1}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{3+n} + A_{3-n}) + \ldots$$

$$a_5 = b_5 + R_0 A_5 + \frac{R_2}{2}(A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2}(A_9 + A_1) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{5+n} + A_{5-n}) + \ldots$$

. . . . . .

$b_1, b_3, b_5, \ldots$ étant exprimés comme il suit :

$$b_1 = \frac{R_2}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_6}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots.$$

$$b_3 = \frac{R_4}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_6}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_8}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots.$$

$$b_5 = \frac{R_6}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_8}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_{10}}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots.$$

. . . . . .

La loi de formation des quantités $b_1, b_3, b_5, \ldots$ et $a_1, a_3, a_5, \ldots$ est facile à apercevoir, et l'emploi des signes A_{-1}, A_{-3}, etc., n'a pas peu contribué à rendre cette loi évidente. En adoptant pour $a_1, a_3, a_5, \ldots$, les valeurs ci-dessus, le produit $\Sigma R_n \cos nx\, \Sigma A_m \cos mx$ est égal à

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.}$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$X = b_1 \cos x + b_3 \cos 3x + b_5 \cos 5x + \ldots,$$

$$Y = \Sigma \cos mx \left[R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \text{etc.} \right],$$

on aura

$$\Sigma R_n \cos nx\, \Sigma A_m \cos mx = X + Y,$$

et l'équation (A′) deviendra

$$(A \quad \Sigma A_m m \cos mx + X + Y = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu d\mu.$$

Dorénavant c'est à l'équation (A″) que nous nous proposerons de satisfaire.

Dans le cas très particulier où l'on a $f(x) =$ constante, on peut, comme on l'a dit plus haut, trouver par les méthodes ordinaires la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (A″). En examinant attentivement cette valeur, on en conclut par induction que, dans le cas le plus général où $f(x)$ est une fonction quelconque de x, il doit être permis de poser

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant des fonctions inconnues de μ, indépendantes de m, qu'il s'agit de déterminer, en sorte que l'équation (A″) ait lieu. Toutefois, on pourrait douter *à priori* de la possibilité d'écrire la valeur de A_m sous la forme précédente; mais comme nous arriverons par notre analyse à calculer P et Q, il nous sera facile de vérifier *à posteriori* l'exactitude de notre hypothèse.

Posons donc

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

et voyons s'il existe en effet des fonctions de μ, indépendantes de m, qui, mises au lieu de P et Q, rendent la valeur de A_m propre à satisfaire à l'équation (A″).

Pour cela, calculons successivement, et mettons sous leur forme la plus simple les trois quantités $\Sigma A_m m\cos mx$, X, Y, dont se compose le premier membre de l'équation (A″).

En premier lieu nous aurons

$$\Sigma A_m m\cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu);$$

or il vient, en intégrant par parties,

$$\int P\cos m\mu d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$

et

$$\int Q\sin m\mu d\mu = \frac{Q\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu}\,d\mu.$$

Si donc on se rappelle que m est un nombre impair, et si l'on suppose

les fonctions P et Q assujetties aux conditions

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad Q = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P \cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin m\mu \frac{dP}{d\mu} d\mu,$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q \sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} d\mu;$$

d'où résulte

$$\Sigma A_m m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left(\cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\right).$$

Le terme Y est également très simple à former. En effet, on a

$$Y = \Sigma \cos mx \left(R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \ldots\right).$$

Les quantités A_{m+2}, A_{m-2}, A_{m+4}, A_{m-4}, etc., se déduisent de l'expression générale de A_m, en donnant à l'indice m une valeur convenable; et en observant que l'on a

$$\cos(m+n)\mu + \cos(m-n)\mu = 2\cos m\mu \cos n\mu,$$
$$\sin(m+n)\mu + \sin(m-n)\mu = 2\sin m\mu \cos n\mu,$$

on obtient sans difficulté

$$A_{m+2} + A_{m-2} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \cos 2\mu (P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

$$A_{m+4} + A_{m-4} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \cos 4\mu (P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

. . . . . .

Au moyen de ces valeurs, je calcule celle de la quantité

$$R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \ldots\ldots$$

et je la trouve égale à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu)\,(\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2\cos 2\mu + \mathrm{R}_4\cos 4\mu + \text{etc.}).$$

Si l'on se rappelle maintenant que la série

$$\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2\cos 2\mu + \mathrm{R}_4\cos 4\mu + \ldots\ldots$$

est précisément le développement de la fonction $f(\mu)$ entre les limites $\mu = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, on verra que l'expression précédente se réduit à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,[\mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu + \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu].$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{Y} = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,[\mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu + \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu].$$

Calculons maintenant la valeur de X. Or cette valeur, réduite en série, est exprimée par l'égalité

$$\mathrm{X} = b_1\cos x + b_3\cos 3x + b_5\cos 5x + \ldots\ldots$$

Les coefficiens b_1, b_3, b_5, ... sont eux-mêmes exprimés par séries. Ainsi l'on a

$$b_1 = \frac{\mathrm{R}_2}{2}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_{-1}) + \frac{\mathrm{R}_4}{2}(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_{-3}) + \frac{\mathrm{R}_6}{2}(\mathrm{A}_5 - \mathrm{A}_{-5}) + \ldots$$

En mettant pour A_1, A_3, A_5, ... A_{-1}, A_{-3}, A_{-5}, ... leurs valeurs, cette valeur de b_1 devient

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}\,d\mu\,(\mathrm{R}_2\sin\mu + \mathrm{R}_4\sin 3\mu + \mathrm{R}_6\sin 5\mu + \ldots).$$

On trouvera de même

$$b_4 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_4 \sin\mu + R_6 \sin 3\mu + R_8 \sin 5\mu + \ldots),$$

$$b_6 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_6 \sin\mu + R_8 \sin 3\mu + R_{10} \sin 5\mu + \ldots).$$

. . . . . .

Si l'on multiplie ces valeurs de b_1, b_3, b_5,... par les facteurs respectifs $\cos x$, $\cos 3x$, $\cos 5x$,... qu'on pourra faire passer sous le signe $\int$, puisqu'on ajoute les produits obtenus, la somme ainsi formée sera égale à X. En ordonnant la quantité placée sous le signe $\int$ par rapport aux lettres R_2, R_4, R_6,..., on pourra donc écrire X ainsi qu'il suit :

$$X = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_2 M_2 + R_4 M_4 + R_6 M_6 + R_8 M_8 + \ldots),$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8,.... étant

$$\begin{aligned}
M_2 &= \cos x \sin\mu, \\
M_4 &= \cos x \sin 3\mu + \cos 3x \sin\mu, \\
M_6 &= \cos x \sin 5\mu + \cos 3x \sin 3\mu + \cos 5x \sin\mu, \\
M_8 &= \cos x \sin 7\mu + \cos 3x \sin 5\mu + \cos 5x \sin 3\mu + \cos 7x \sin\mu,
\end{aligned}$$

. . . . . .

En observant que si p désigne un nombre entier, on a en général

$$\cos x \sin(2p-1)\mu + \cos 3x \sin(2p-3)\mu + \ldots$$
$$\ldots + \cos(2p-1)x \sin\mu = \frac{\cos x \sin\mu\,(\cos 2px - \cos 2p\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu}.$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8,.... se simplifient et deviennent

$$M_2 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 2x - \cos 2\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_4 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 4x - \cos 4\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_6 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 6x - \cos 6\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_8 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 8x - \cos 8\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

. . . . . .

Substituons ces valeurs dans celle de X, et rappelons-nous que l'on a

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \text{etc.}$$
$$f(\mu) = R_0 + R_2 \cos 2\mu + R_4 \cos 4\mu + \text{etc.};$$

nous obtiendrons

$$X = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q \cos x \sin \mu [f(x) - f(\mu)]\, d\mu}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

ou bien en remplaçant, ce qui est permis, la lettre μ par la lettre α, et désignant par Q_α ce que devient Q en vertu de ce changement,

$$X = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos x \sin \alpha [f(x) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2x - \cos 2\alpha}.$$

La fonction désignée par X est une fonction paire de x, qui s'évanouit pour $x = \frac{\pi}{2}$. Entre les deux limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on peut donc la développer en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x; et par la méthode ordinaire, on trouve

$$X = \frac{16}{\pi^2} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu\, d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos \mu \sin \alpha [f(\mu) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}.$$

Les expressions des trois quantités $\Sigma A_m m \cos mx$, X et Y une fois formées, il faut les reporter dans l'équation (A''). Pour simplifier l'écriture, posons

$$U = \frac{dQ}{d\mu} + P f(\mu) - F(\mu) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos \mu \sin \alpha [f(\mu) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$
$$V = \frac{dP}{d\mu} - Q f(\mu),$$

et nous verrons facilement, qu'après avoir effectué la substitution dont il s'agit, on peut mettre l'équation (A'') sous la forme

$$\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\, (U \cos m\mu - V \sin m\mu) = 0.$$

Or, cette dernière égalité sera évidemment satisfaite si les valeurs de P et Q sont telles qu'on ait à la fois $U = 0$ et $V = 0$.

Donc la détermination des deux quantités P et Q dépend des deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha\,[f(\mu) - f(\alpha)]\,d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

auxquelles il ne faut pas oublier de joindre les conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad Q = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

que nous avons supposées satisfaites en effectuant ci-dessus une intégration par parties. Les équations auxquelles nous venons d'arriver sont remarquables en ce que la fonction Q se trouve placée à la fois sous un signe d'intégration définie et hors de ce même signe. Plusieurs questions d'Analyse élevée mènent à de semblables égalités, et nous avons déjà eu l'occasion d'en traiter quelques-unes, lorsque nous nous sommes occupés des différentielles à indices quelconques.

Lorsque la fonction $f(x)$ est égale à une constante h, nos équations deviennent

$$\frac{dQ}{d\mu} + hP = F(\mu), \quad \frac{dP}{d\mu} - hQ = 0.$$

Il est très facile de les intégrer, et la valeur de A_m à laquelle elles conduisent, coïncide, après quelques transformations, avec celle que fournit la méthode ordinaire. Mais il est inutile d'entrer ici dans le détail de ces transformations qui n'ont rien de remarquable.

Si l'on veut vérifier l'exactitude de nos équations en les appliquant à un exemple dans lequel $f(x)$ soit une quantité variable, et qui cependant n'exige pas de calculs compliqués, on n'a qu'à faire $f(x) = \cos^2 x$, et $F(x) = \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{3}\cos^5 x$. On trouve alors $P = -\frac{1}{3}\cos^3\mu$, $Q = \sin\mu$, valeurs dont il est aisé de constater l'exactitude en les substituant dans nos équations. Il résulte donc de notre analyse, qu'en posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\sin u \sin m\mu - \frac{1}{3}\cos^3\mu \cos m\mu),$$

on doit avoir

$$\Sigma A_m m \cos mx + \cos^2 x\ \Sigma A_m \cos mx = \tfrac{3}{2}\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x.$$

D'après la valeur de A_m, la quantité $\Sigma A_m \cos mx$ est la différence de deux autres quantités dont la première, savoir :

$$\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \sin \mu \sin m\mu$$

est égale à $\cos x$; et dont la seconde, savoir :

$$\frac{4}{3\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\mu \cos m\mu d\mu$$

est égale à $\frac{1}{3}\cos^3 x$. On a par conséquent

$$\Sigma A_m \cos mx = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{12}\cos 3x;$$

d'où

$$\Sigma A_m m \cos mx = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x.$$

L'équation que nous voulons vérifier devient donc

$$\tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x + \cos^2 x(\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x) = \tfrac{3}{2}\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x.$$

Or, en effectuant les calculs et remettant pour $\cos 3x$ sa valeur $4\cos^3 x - 3\cos x$, on trouve qu'elle est identique, comme cela doit être.

Pour montrer comment nos équations font connaître les valeurs de P et Q, je vais considérer le cas particulier très simple où l'on a

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x.$$

De cette valeur de $f(x)$ il résulte que

$$\frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} = R_2.$$

Les équations en P et Q sont donc ici

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4R_2\cos\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha,$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0.$$

Posons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha = C$; C sera une constante inconnue que nous déterminerons à la fin du calcul. Si nous divisons maintenant nos deux équations par $f(\mu)$, et si nous posons $f(\mu)d\mu = d\theta$, θ désignant une nouvelle variable égale à $R_0\mu + \frac{R_2}{2}\sin 2\mu$, elles deviendront

$$\frac{dQ}{d\theta} + P = \frac{F(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4CR_2\cos\mu}{\pi f(\mu)},$$
$$\frac{dP}{d\theta} - Q = 0;$$

ou bien en éliminant Q

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \frac{F(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4CR_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}.$$

Cette équation du second ordre est facile à intégrer, soit par la méthode ordinaire, soit en procédant comme on va le voir.

L'égalité $\theta = R_0\mu + \frac{R_2}{2}\sin 2\mu = \int_0^\mu f(\mu)d\mu$, dans laquelle $f(\mu)$ est une fonction toujours positive depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{\pi}{2}$, nous prouve que θ est une fonction positive croissante dans le même intervalle, en sorte qu'elle grandit par degrés insensibles depuis $\theta = 0$ jusqu'à la valeur extrême $\theta = \frac{R_0\pi}{2}$ que nous désignerons par ω. En vertu de cette même égalité μ est une fonction de θ, et l'on peut en dire autant des deux quantités $\frac{F(\mu)}{f(\mu)}$, $\frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}$. De plus, ces deux quantités s'évanouissent lorsqu'on a $\mu = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \omega$. Donc entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \omega$, on peut, par les méthodes connues, développer $\frac{F(\mu)}{f(\mu)}$, $\frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}$ en séries de la forme

$$\frac{F(\mu)}{f(\mu)} = \Sigma H \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}, \qquad \frac{2R_2\cos u}{\pi f(\mu)} = \Sigma K \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

m désignant un nombre impair quelconque. On aura ensuite

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \Sigma H \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega} - C\Sigma K \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

et l'on satisfera à cette équation en posant

$$P = 4\omega^2\Sigma \frac{H\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} - 4C\omega^2\Sigma \frac{K\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

La valeur de P, différentiée par rapport à θ, fournit celle de Q. Ainsi l'on a

$$Q = -2\omega\pi\Sigma \frac{mH\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} + 2C\omega\pi\Sigma \frac{mK\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

Quoique la valeur de P ne soit qu'une intégrale particulière de l'équation du second ordre qui détermine P, cette intégrale particulière suffit pour le moment; car les conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \omega,$$
$$Q = 0 \text{ pour } \mu = 0 \text{ ou } \theta = 0,$$

qui doivent servir à déterminer les deux constantes arbitraires, sont ici satisfaites d'elles-mêmes.

La quantité inconnue C qui reste encore dans nos formules doit être telle que l'on ait $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha = C$. En formant l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha$, et l'égalant à C, nous déterminerons donc cette constante et nous trouverons

$$C = -\frac{2\omega\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha\, \Sigma \frac{mH\sin\frac{m\pi\theta_\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}}{1 - 2\omega\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha\, \Sigma \frac{mK\sin\frac{m\pi\theta_\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}},$$

θ_α étant ce que devient θ lorsqu'on y remplace μ par α, en sorte que $\theta_\alpha = R_0\alpha + \frac{R_2}{2}\sin 2\alpha$. La valeur de C étant ainsi connue, il ne reste plus rien d'indéterminé dans les expressions de P et Q; et la recherche de ces expressions est terminée.

En général les équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha[f(\mu) - f(\mu)]d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

feront connaître les valeurs de P et Q sous forme finie toutes les fois que la fraction

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos\mu \sin\alpha[f(\mu) - f(\alpha)]}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}$$

pourra être ramenée à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. En effet, dans cette hypothèse, si l'on pose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2, \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

on aura

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) - \ldots - C_n\Psi_n(\mu)$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0;$$

ces deux équations différentielles du second ordre sont faciles à intégrer, puisqu'en posant $\int_0^\mu f(\mu)d\mu = \theta$, et prenant θ pour variable indépendante, les coefficiens des quantités P, Q, et de leurs différentielles $\frac{dP}{d\theta}$, $\frac{dQ}{d\theta}$, se réduisent à de simples constantes. L'intégration effectuée, on détermine d'abord les deux constantes arbitraires que

cette intégration introduit, en faisant usage des conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$. Ensuite on chassera $C_1, C_2 \ldots C_n$ en ayant égard aux n égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_1(\alpha) d\alpha = C_1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_2(\alpha) d\alpha = C_2, \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_n(\alpha) d\alpha = C_n,$$

et quand on aura terminé ces calculs d'élimination, les valeurs de P et Q, en général, ne renfermeront plus rien d'indéterminé (*).

Reste à savoir maintenant dans quel cas la fonction

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos\mu \sin\alpha\,[f(\mu) - f(\alpha)]}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

ou, ce qui revient au même, la fonction

$$\frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos^2\mu - \cos^2\alpha}$$

(*) Si pourtant les n équations de condition $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_1(\alpha) d\alpha = C_1$, etc., rentraient les unes dans les autres, quelques-unes des constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$, resteraient indéterminées dans les valeurs de P et Q, et par suite dans la valeur de A_m. Sans doute une telle circonstance ne se présente jamais dans la théorie de la chaleur, c'est-à-dire lorsque la fonction $f(x)$, qui exprime dans cette théorie le rapport du pouvoir rayonnant à la chaleur spécifique, est une fonction positive; mais lorsqu'on regarde la fonction $f(x)$ comme susceptible de prendre des valeurs négatives, le problème qui consiste à trouver la valeur de A_m satisfaisant à l'équation (A) peut très bien devenir indéterminé. Et, par exemple, si l'on pose $f(x) = -3$, $F(x) = 0$, l'équation (A) prendra la forme $\Sigma A_m m \cos mx - 3\Sigma A_m \cos mx = 0$, et il est clair qu'on y satisfera en égalant à zéro les coefficiens $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ et à une constante quelconque le coefficient A_3. En continuant à regarder la valeur de $f(x)$ comme susceptible de prendre une valeur négative, il pourra aussi arriver que nos équations de condition soient incompatibles, et alors il n'existera aucune valeur de A_m satisfaisant à l'équation (A). On aura un exemple simple du cas dont je parle en faisant $f(x) = -3$, $F(x) = \cos 3x$, car l'équation (A) deviendra $\Sigma A_m m \cos mx - 3\Sigma A_m \cos mx = \cos 3x$, ou bien $\Sigma A_m (m - 3) \cos mx = \cos 3x$, égalité évidemment absurde, puisque le coefficient de $\cos 3x$ est égal à zéro dans le premier membre, et égal à l'unité dans le second membre.

peut être ramenée à la forme citée. Or, je dis que cela arrivera toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de $\cos^2 x$.

Supposons, en effet, qu'on ait $f(\mu) = \frac{f_1(\mu)}{f_2(\mu)}$, $f_1(\mu)$ et $f_2(\mu)$ désignant des fonctions entières de $\cos^2\mu$. On aura, en changeant μ en α $f(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}$.

Par conséquent

$$\frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos^2\mu - \cos^2\alpha} = \frac{f_1(\mu) f_2(\alpha) - f_1(\alpha) f_2(\mu)}{f_2(\mu) f_2(\alpha)\ (\cos^2\mu - \cos^2\alpha)}.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit évidemment de faire voir que la quantité

$$\frac{f_1(\mu) f_2(\alpha) - f_1(\alpha) f_2(\mu)}{\cos^2\mu - \cos^2\alpha}$$

est réductible à la forme $\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha)$. Or, rien n'est plus facile; en effet, la fonction $f_1(\mu) f_2(\alpha) - f_1(\alpha) f_2(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos^2\mu$, $\cos^2\alpha$, et s'annulant quand on a $\cos^2\mu = \cos^2\alpha$, elle doit être divisible par $\cos^2\mu - \cos^2\alpha$, et le résultat de la division ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A \cos^{2p}\mu \cos^{2q}\alpha$.

Les équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha\,[f(\mu) - f(\alpha)]\,d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

s'intégreront donc sous forme finie par notre méthode toutes les fois que le pouvoir rayonnant $f(x)$ sera exprimé par une fonction rationnelle quelconque de $\cos^2 x$. A plus forte raison s'intégreront-elles si la valeur de $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx,$$

n désignant un nombre pair; car le second membre peut être réduit à une fonction entière de $\cos^2 x$.

Maintenant, quelle que soit la valeur de $f(x)$, nous pouvons toujours la développer en série, et poser

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots$$

En prenant dans le second membre un certain nombre limité de termes, on aura une première valeur approchée de $f(x)$; en la traitant comme si elle était rigoureusement exacte, on pourra donc en déduire aussi des valeurs approchées de P et Q; et il ne restera plus qu'à les corriger par la méthode connue des approximations successives.

En résumé, nous sommes parvenus à obtenir, dans tous les cas possibles, les valeurs de P et Q exactes ou indéfiniment approchées, et par conséquent à trouver la valeur de A_m qui satisfait à l'équation

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\ \Sigma A_m \cos mx = F(x).$$

La valeur de A_m est égale à $\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P \cos m\mu + Q \sin m\mu)$; elle s'exprime sous forme finie toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\cos^2 x$. La méthode qui nous a conduits à ces résultats est directe, mais un peu longue. Quand on examine avec soin la forme des équations qui déterminent P et Q, on en découvre une autre beaucoup plus simple que je vais exposer.

III.

SECONDE SOLUTION DU PROBLÈME (A). — SOLUTIONS DES PROBLÈMES (B) ET (C).

Pour satisfaire à l'équation (A), nous remplacerons, comme tout à l'heure, $F(x)$ par son développement, et posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P \cos m\mu + Q \sin m\mu),$$

nous chercherons à déterminer les deux fonctions P et Q, en sorte que l'on ait

$$\Sigma A_m m \cos mx + f(x)\ \Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu F(\mu)d\mu.$$

Si nous admettons que P et Q satisfassent aux conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad Q = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

une intégration par parties nous donnera de suite

$$\Sigma A_m m \cos mx = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left(\cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\right).$$

En désignant par P_x ce que devient P quand on y change μ en x, nous voyons que P_x s'évanouit à la limite $x = \frac{\pi}{2}$. On peut donc développer P_x en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x, ce qui donne

$$P_x = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \cos m\mu d\mu.$$

On aura de même

$$P_x f(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} P f(\mu) \cos m\mu d\mu;$$

et il en résulte, en mettant pour P_x sa valeur,

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \cos m\mu d\mu = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} P f(\mu) \cos m\mu d\mu.$$

D'un autre côté, on a l'équation identique

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q \sin m\mu d\mu = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q f(\mu) \sin m\mu d\mu$$
$$+ \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)] \sin m\mu d\mu.$$

En l'ajoutant membre à membre à la précédente, on obtient d'une part la quantité

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \cos m\mu d\mu + \frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q \sin m\mu d\mu,$$

qui, d'après la valeur de A_m, est précisément égale à $f(x)\,\Sigma A_m \cos mx$; et d'autre part la quantité

$$\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,[P f(\mu)\cos m\mu + Q f(\mu)\sin m\mu]$$

$$+\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\sin m\mu d\mu,$$

laquelle doit par conséquent être équivalente aussi à $f(x)\,\Sigma A_m \cos mx$.

Après avoir ainsi formé les valeurs de $\Sigma A_m m \cos mx$, $f(x)\Sigma A_m \cos mx$, je les ajoute, et en faisant pour plus de simplicité

$$X = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{2} d\mu\,\left\{\cos m\mu\left[P f(\mu) + \frac{dQ}{d\mu}\right] + \sin m\mu\left[Q f(\mu) - \frac{dP}{d\mu}\right]\right\},$$

$$Y = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\sin m\mu d\mu,$$

je trouve

$$\Sigma A_m m \cos mx + f(x)\,\Sigma A_m \cos mx = X + Y.$$

En comparant cette équation à celle du problème, il vient

$$X + Y = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu\, F(\mu) d\mu.$$

La valeur de X est mise sous une forme convenable; mais il n'en est pas de même de celle de Y. Pour atteindre le but que nous nous proposons, il est nécessaire d'intervertir l'ordre des signes Σ et $\int$, ce qui donne

$$Y = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\,d\mu\,\Sigma \cos mx \sin m\mu.$$

Par les méthodes connues pour la sommation des séries on obtient

$$[f(x) - f(\mu)]\,\Sigma \cos mx \sin m\mu = \frac{[f(x) - f(\mu)]\sin\mu\cos x}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

et il est bon d'observer que, à cause du facteur $f(x) - f(\mu)$ qui s'é-

vanouit lorsque $x = \mu$, la fraction placée dans le second membre ne devient jamais infinie. Je porte cette fraction dans la valeur de Y, et je substitue en même temps à la lettre μ une autre lettre α, ce qui est indifférent. Il vient ainsi

$$Y = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \frac{[f(x) - f(\alpha)]\sin\alpha\cos x\,d\alpha}{\cos 2x - \cos 2\alpha},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Mais la fonction Y ayant $\cos x$ pour facteur s'évanouit quand $x = \frac{\pi}{2}$: donc entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on peut développer cette fonction en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x. La méthode ordinaire appliquée ici nous donne

$$Y = \frac{16}{\pi^2}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu\,.\,d\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha[f(\mu) - f(\alpha)]\sin\alpha\cos\mu\,d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

et c'est sous cette forme que la valeur de Y doit être employée.

Remettons-la en effet, ainsi que celle de X, dans l'équation

$$X + Y = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu\,F(\mu)\,d\mu,$$

et le résultat de la substitution sera

$$\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(U\cos m\mu - V\sin m\mu) = 0,$$

U et V ayant les valeurs que voici

$$U = \frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha\cos\mu\sin\alpha[f(\mu) - f(\alpha)]\,d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$V = \frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu).$$

Or, il est évident que l'équation

$$\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(U\cos m\mu - V\sin m\mu) = 0$$

sera satisfaite si U et V sont nuls à la fois. Donc les deux équations $U = 0$, $V = 0$, sont celles qui doivent déterminer les inconnues P et Q, pourvu qu'on y joigne toutefois les conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$; ce qui coïncide avec les résultats obtenus dans le numéro précédent.

Le problème (A) une fois résolu, on en déduit bien aisément les solutions des problèmes (B) et (C). Le premier de ces nouveaux problèmes peut être énoncé comme ceci :

PROBLÈME.

Soient m *un nombre impair quelconque, et* $A_1, A_3, \ldots A_m \ldots$ *des coefficiens constans inconnus. On propose de trouver la valeur de* A_m *qui satisfait à l'équation*

$$\text{(B)} \qquad \Sigma A_m \cdot \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l} + f(x) \Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l} = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x = 0$, $x = l$.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive, et nous regardons la fonction $F(x)$ comme assujettie à la condition $F(l) = 0$.

Pour ramener ce problème au précédent, il suffira de poser $\frac{\pi x}{2l} = y$, puis de multiplier par $\frac{2l}{\pi}$ l'équation (B); il viendra

$$\Sigma A_m m \cos my + \frac{2l}{\pi} f\left(\frac{2ly}{\pi}\right) \Sigma A_m \cos my = \frac{2l}{\pi} F\left(\frac{2ly}{\pi}\right),$$

et cette nouvelle équation devra subsister entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, comme l'équation (A) dont nous nous sommes occupés tout à l'heure. Par conséquent, si nous posons

$$A_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \, (P \cos m\mu + Q \sin m\mu) d\mu,$$

P et Q devront satisfaire aux deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+\frac{2l}{\pi}Pf\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)=\frac{2l}{\pi}F\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)-\frac{8l}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha\cos\mu\sin\alpha\left[f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)-f\left(\frac{2l\alpha}{\pi}\right)\right]d}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu}-\frac{2l}{\pi}Qf\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)=0.$$

On les simplifiera un peu en changeant les variables α et μ en d'autres variables α', μ' liées aux deux autres par les égalités

$$\alpha=\frac{\pi\alpha'}{2l},\quad \mu=\frac{\pi\mu'}{2l},$$

ou, ce qui revient au même, en remplaçant partout α et μ par $\frac{\pi\alpha}{2l}$, $\frac{\pi\mu}{2l}$, ce qui exige que l'on prenne o et l au lieu de o et $\frac{\pi}{2}$ pour limites des intégrales définies. Par ces changemens on trouvera

$$A_m=\frac{2}{l}\int_0^l d\mu\left(P\cos\frac{m\pi\mu}{2l}+Q\sin\frac{m\pi\mu}{2l}\right),$$

P et Q étant deux fonctions de μ déterminées par les deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu)=F(\mu)-\frac{2}{l}\int_0^l\frac{Q_\alpha\cos\frac{\pi\mu}{2l}\sin\frac{\pi\alpha}{2l}\left[f(\mu)-f(\alpha)\right]d\alpha}{\cos\frac{\pi\mu}{l}-\cos\frac{\pi\alpha}{l}},$$

$$\frac{dP}{d\mu}-Qf(\mu)=0;$$

auxquelles toutefois il faudra joindre les deux conditions définies $P=0$ pour $\mu=l$, $Q=0$ pour $\mu=0$.

En supposant la longueur l infiniment grande, la valeur de A_m deviendra infiniment petite, et la somme $\Sigma A_m\cos mx$ se transformera en une intégrale. On posera alors $\frac{m\pi}{2l}=\theta$, et l'on regardera θ comme une variable continue : puisque l'accroissement constant de m est $=2$, l'accroissement constant de θ sera égal à $\frac{\pi}{l}$, et il faudra poser $d\theta=\frac{\pi}{l}$. En faisant donc $A_m=\varphi(\theta)d\theta$, les deux sommes $\Sigma A_m\cos\frac{m\pi x}{2l}$, $\Sigma A_m\frac{m\pi}{2l}\cos\frac{m\pi x}{2l}$

se transformeront dans les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty \varphi(\theta)\cos\theta x d\theta, \quad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta)\cos\theta x d\theta,$$

et l'équation (B) deviendra

$$\int_0^\infty \theta\varphi(\theta)\cos\theta x d\theta + f(x)\int_0^\infty \varphi(\theta)\cos\theta x d\theta = \mathrm{F}(x).$$

Cela posé, proposons-nous le problème suivant:

PROBLÈME.

Trouver la fonction $\varphi(\theta)$ qui satisfait à l'équation

$$\text{(C)} \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta)\cos\theta x d\theta + f(x)\int_0^\infty \varphi(\theta)\cos\theta x d\theta = \mathrm{F}(x)$$

pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

D'après ce qui précède, la valeur cherchée de $\varphi(\theta)$ s'obtiendra en divisant par $d\theta$ ou par $\frac{\pi}{l}$ la valeur de A_m, après qu'on y aura fait $\frac{m\pi}{2l} = \theta$, et $l = \infty$. On aura donc

$$\varphi(\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\mu\ (\mathrm{P}\cos\mu\theta + \mathrm{Q}\sin\mu\theta),$$

et les valeurs de P et Q seront fournies par les deux équations écrites plus haut. Mais en y introduisant la condition $l = \infty$, la première de ces équations change un peu de forme. En effet, lorsque l devient une quantité infiniment grande, il est aisé de s'assurer qu'on a

$$\frac{2}{l}\cdot\frac{\cos\frac{\pi\mu}{2l}\sin\frac{\pi\alpha}{2l}}{\cos\frac{\pi\mu}{2l} - \cos\frac{\pi\alpha}{2l}} = -\frac{8\alpha}{\pi(\mu^2-\alpha^2)}.$$

L'équation dont nous parlons devient par conséquent

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu) = \mathrm{F}(\mu) + \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\mathrm{Q}_\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\mu^2-\alpha^2}.$$

et il faudra y joindre l'autre équation $\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0$, et les conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \infty$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$. Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de plus grands détails, on comprendra que ces égalités permettent de trouver les valeurs finies de P et Q toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de x^2. Dans tous les autres cas il sera aisé d'obtenir ces mêmes valeurs par la méthode des approximations successives.

IV.

SOLUTION DU PROBLÈME (D).

Appliquons maintenant notre seconde méthode à la solution du problème (D) dont voici l'énoncé.

PROBLÈME.

Soient m *un quelconque des nombres entiers successifs* 1, 2, 3, 4, 5,... et $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_m \ldots$ *des coefficiens constans inconnus. On propose de déterminer ces coefficiens, de telle manière que l'on ait*

$$\Sigma A_m m \sin mx + f(x)\ \Sigma A_m \sin mx = F(x);$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre* 0 *et* π.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive. La fonction $F(x)$ peut être positive ou négative; mais comme le premier membre s'évanouit pour $x = 0$ et pour $x = \pi$, nous admettrons qu'on a $F(0) = 0$ et $F(\pi) = 0$.

Les conditions $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$ étant satisfaites, on peut développer $F(x)$ en une série de sinus pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π. Le développement est de la forme

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\ \Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu F(\mu) d\mu.$$

L'équation (D) devient donc

$$(D')\quad \Sigma A_m m \sin mx + f(x)\ \Sigma A_m \sin mx = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu F(\mu) d\mu.$$

Pour y satisfaire, nous poserons

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant deux fonctions de μ qu'il s'agit de déterminer convenablement.

En intégrant par parties on a

$$\int P\cos m\mu d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$
$$\int Q\sin m\mu d\mu = -\frac{Q\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu}\,d\mu.$$

Si donc on se rappelle que m est un nombre entier, et si l'on suppose la fonction Q assujettie aux deux conditions

$$Q = 0 \text{ pour } \mu = 0, \quad Q = 0 \text{ pour } \mu = \pi,$$

il viendra

$$\int_0^\pi P\cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^\pi \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$
$$\int_0^\pi Q\sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^\pi \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu}\,d\mu,$$

et l'on aura

$$A_m = \frac{2}{\pi m}\int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\right).$$

Cette valeur de A_m nous donne tout de suite

$$\Sigma A_m m\sin mx = \frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\right).$$

D'autre part, on a

$$f(x)\,\Sigma A_m \sin mx = \frac{2f(x)}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu)$$

Cette valeur se compose de deux parties que nous allons considérer l'une après l'autre. La seconde, savoir,

$$\frac{2f(x)}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi Q\sin m\mu d\mu,$$

est la plus simple à traiter. Comme la fonction Q est nulle aux deux limites $\mu = 0$, $\mu = \pi$, et qu'il en est de même du produit $Qf(\mu)$, il en résulte que si l'on désigne par Q_x ce que devient Q en y changeant μ en x, on aura

$$Q_x = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q \sin m\mu d\mu,$$

$$Q_x f(x) = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q\, f(\mu) \sin m\mu d\mu.$$

En multipliant la première de ces égalités par $f(x)$, et la comparant ensuite à la seconde, on en déduit

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q \sin m\mu d\mu = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q\, f(\mu) \sin m\mu d\mu.$$

L'autre quantité, savoir,

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P \cos m\mu d\mu,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi P f(\mu) \cos m\mu d\mu + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P[f(x) - f(\mu)] d\mu\, \Sigma \sin mx \cos m\mu,$$

ou bien, en observant que l'on a

$$\Sigma \sin mx \cos m\mu = -\frac{\sin x}{2(\cos x - \cos \mu)},$$

sous cette autre forme

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P f(\mu) \cos m\mu d\mu - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{P \sin x[f(x) - f(\mu)] d\mu}{\cos x - \cos \mu};$$

le dernier terme ne change pas de valeur si l'on remplace la lettre μ par la lettre α. En nommant P_α ce que P devient en vertu de ce changement, il est alors égal à

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x[f(x) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos x - \cos \alpha}.$$

C'est une fonction de x qui s'évanouit, à cause du facteur $\sin x$, aux deux limites $x = 0$, $x = \pi$, et que, par conséquent, on peut, entre ces limites, développer en une série de sinus. Effectuant le développement par le procédé ordinaire, nous aurons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x[f(x) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos x - \cos \alpha} = \frac{2}{\pi^2} \Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu d\mu \int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin \mu[f(\mu) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos \mu - \cos \alpha}.$$

La valeur de la quantité

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P \cos m\mu d\mu$$

est donc

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu d\mu-\frac{2}{\pi^2}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \sin m\mu d\mu\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha},$$

et il faut ajouter à cette dernière expression l'expression suivante :

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu d\mu,$$

pour composer, d'après ce qu'on a vu, la valeur de $f(x)\,\Sigma\mathrm{A}_m\sin mx$.

Ayant écrit ainsi sous forme convenable cette valeur et celle de $\Sigma\mathrm{A}_m m\sin mx$, reportons-les dans l'équation (D′), et cette équation deviendra

$$\Sigma\sin mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\mathrm{U}\cos m\mu-\mathrm{V}\sin m\mu)=0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes,

$$\mathrm{U}=\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu}+\mathrm{P}f(\mu),$$

$$\mathrm{V}=\frac{d\mathrm{P}}{d\mu}-\mathrm{Q}f(\mu)+\mathrm{F}(\mu)+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha}.$$

Or il est clair que l'équation du problème sera satisfaite si l'on a $\mathrm{U}=0$ et $\mathrm{V}=0$. Donc les fonctions P et Q, desquelles dépend la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (D), sont fournies par les deux équations

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu}+\mathrm{P}f()=0,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu}-\mathrm{Q}f(\mu)+\mathrm{F}(\mu)+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha}=0,$$

auxquelles il faut joindre les deux conditions particulières

$$\mathrm{Q}=0 \text{ pour } \mu=0,$$
$$\mathrm{Q}=0 \text{ pour } \mu=\pi,$$

que précédemment nous avons supposées remplies.

Ces équations s'intègrent évidemment sous forme finie toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, de $\cos x$. Et lorsque cela n'a pas lieu, il est du moins toujours facile d'obtenir les valeurs de P et Q exprimées en séries convergentes par la méthode connue des approximations successives.

Nous appliquerons nos équations à un seul exemple extrêmement simple; et quoique, dans cet exemple, la fonction $f(x)$ ne reste pas constamment positive entre les limites $x=0$, $x=\pi$, comme l'exige la nature physique du problème, nous les verrons néanmoins se vérifier. Nous poserons $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x+\sin x\cos x$; les valeurs de P et Q fournies par notre analyse seront $P=-1$, $Q=\sin\mu$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier par la substitution dans nos équations. Il résulte de là que l'équation

$$\Sigma A_m m\sin mx + \cos x\,\Sigma A_m \sin mx = \sin x + \sin x\cos x$$

doit être satisfaite en posant

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\mu(\sin\mu\sin m\mu - \cos m\mu).$$

Or cela arrive en effet, car on déduit de là

$$\Sigma A_m \sin mx = \sin x,\quad \Sigma A_m m\sin mx = \sin x,$$

valeurs qui, substituées dans l'égalité qu'on veut vérifier, rendent les deux membres identiquement égaux.

V.

SOLUTION DU PROBLÈME (E).

Notre méthode résout aussi le problème (E) sans que l'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle. Voici comment ce problème doit être énoncé.

PROBLÈME.

Soient m *un quelconque des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5,.. *et* $A_0, A_1, \ldots A_m, \ldots B_1, B_2, \ldots B_m, \ldots$ *des coefficients constants inconnus : on propose de déterminer ces coefficients de manière à satisfaire à l'équation*

$$(E)\ \Sigma m(A_m\cos mx + B_m\sin mx) + f(x)\Sigma(A_m\cos mx + B_m\sin mx) = F(x),$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x=-\pi$, $x=+\pi$.

D'après la nature de la question qui conduit à l'équation (E), la fonction $f(x)$ est toujours positive entre les limites $x=-\pi$, $x=\pi$. De plus, les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$, sont assujetties à satisfaire aux conditions $f(\pi)=f(-\pi)$, $F(\pi)=F(-\pi)$.

Puisque la fonction $F(x)$ prend la même valeur aux deux limites $x=-\pi$, $x=\pi$, on peut, entre ces limites, la développer en une série de cosinus de la forme

$$F(x) = \Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\, F(\mu) \cos m(x-\mu),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m comprises dans la série 0, 1, 2, 3,... et $\frac{1}{a_m}$ désignant l'intégrale définie $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx dx$, laquelle est égale à 2π quand $m=0$ et seulement égale à π lorsque m est un nombre entier positif quelconque.

Cela posé, je fais

$$A_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu (P \cos m\mu - Q \sin m\mu),$$

$$B_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu (P \sin m\mu + Q \cos m\mu);$$

P et Q représentant deux fonctions de μ dont je pourrai disposer à volonté par la suite, mais que j'assujettis dès à présent à ne pas changer de valeur lorsqu'on y pose successivement $\mu=\pi$ et $\mu=-\pi$, de telle manière que l'on ait

$$P_\pi = P_{-\pi}, \quad Q_\pi = Q_{-\pi}.$$

En intégrant par parties, et ayant égard à ces conditions, il vient

$$A_m = -\frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\sin m\mu \frac{dP}{d\mu} + \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right),$$

$$B_m = \frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\cos m\mu \frac{dP}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Sigma m (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

on la trouve égale à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left[\sin m(x-\mu) \frac{dP}{d\mu} - \cos m(x-\mu) \frac{dQ}{d\mu} \right].$$

Quant à l'autre quantité

$$f(x) \Sigma (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

il faut y substituer les valeurs primitives de A_m, B_m, et elle devient

$$f(x) \Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu [P \cos m(x-\mu) + Q \sin m(x-\mu)].$$

Elle se compose donc de deux parties, savoir,

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x-\mu)d\mu, \quad f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x-\mu)d\mu,$$

dont je vais successivement m'occuper.

La première peut être mise sous une forme convenable par la transformation que voici. Soit P_x ce que devient P lorsqu'on y change μ en x. Puisque l'on a $\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{-\pi}$, $f(\pi) = f(-\pi)$, on a aussi $\mathrm{P}_\pi f(\pi) = \mathrm{P}_{-\pi} f(-\pi)$. Il résulte de là que la fonction P_x est égale à la série $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x-\mu)d\mu$, et que par suite le produit de $f(x)$ par cette série est égal à $\mathrm{P}_x f(x)$, c'est-à-dire à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P} f(\mu)\cos m(x-\mu)d\mu.$$

Relativement à la seconde partie, savoir,

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x-\mu)d\mu,$$

elle est évidemment équivalente à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q} f(\mu)\sin m(x-\mu)d\mu + \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu).$$

Il est aisé de s'assurer que

$$\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin(x-\mu)}{1-\cos(x-\mu)};$$

on a donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\sin(x-\mu)d\mu}{1-\cos(x-\mu)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}_\alpha[f(x)-f(\alpha)]\sin(x-\alpha)d\alpha}{1-\cos(x-\alpha)},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Le second membre de l'équation que je viens d'écrire étant considéré comme une fonction de x, on peut constater que cette fonction donne le même résultat quand on y pose $x=\pi$, et quand on y pose $x=-\pi$. Rien n'empêche par conséquent de la développer en série de cosinus sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m(x-\mu)d\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q_\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)}.$$

Telle est la quantité qu'il faut ajouter à $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Qf(\mu)\sin m(x-\mu)d\mu$ et à $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Pf(\mu)\cos m(x-\mu)d\mu$ pour former la valeur complète du terme $f(x)\,\Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$.

Reportons à présent dans l'équation (E) cette valeur ainsi que celles obtenues tout à l'heure pour $F(x)$ et pour $\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$. Le résultat sur lequel nous tomberons sera de la forme

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\,[U\cos m(x-\mu) + V\sin m(x-\mu)] = 0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes,

$$U = -\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q(\alpha)[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)},$$

$$V = \frac{dP}{d\mu} + Qf(\mu).$$

Les équations $U=0$, $V=0$, sont donc celles qu'on devra traiter pour obtenir les valeurs de P et Q, en ayant soin toutefois d'y joindre les conditions définies $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$.

Si nous supposons que l'on ait, par exemple, $f(\mu) = \cos\mu$, $F(\mu) = -\sin\mu(1+\cos\mu)$, bien que la valeur attribuée à la fonction $f(x)$ soit étrangère à la question du mouvement de la chaleur dans laquelle le pouvoir rayonnant est nécessairement positif, les équations $U=0$, $V=0$, nous conduiront à des résultats exacts. Nous trouverons $Q=1$, $P=-\sin\mu$, valeurs faciles à vérifier, et qui donnent $A_m=0$, quel que soit m, puis $B_1=-1$, $B_2=0$, $B_3=0$,... $B_m=0$,.. Ces valeurs de A_m, B_m, doivent donc rendre identique l'équation

$$\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx) + \cos x\,\Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx) = -\sin x(1+\cos x),$$

et c'est ce qui arrive en effet.

Les équations $U=0$, $V=0$ s'intégreront sous forme finie, toutes les fois que la quantité

$$X = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)}$$

pourra être ramenée à la forme

$$X = \Psi_1(\mu)\,\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\,\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\,\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc.; car alors, en posant

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)\,d\alpha = C_1,\quad \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)\,d\alpha = C_2, \ldots \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_n(\alpha)\,d\alpha = C_n,$$

elles deviendront

$$\frac{dQ}{d\mu} - Pf(\mu) + F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) \ldots - C_n\Psi_n(\mu) = 0,$$

$$\frac{dP}{d\mu} + Qf(\mu) = 0.$$

En divisant ces équations par $f(\mu)$, puis faisant $\int_0^\mu f(\mu)\,d\mu = \theta$, $f(\mu)d\mu = d\theta$, et prenant θ pour variable indépendante, on n'aura plus à traiter que deux équations linéaires simultanées dans lesquelles les variables et leurs différentielles seront affectées de coefficients constants. L'intégrale complète de ces équations renfermera deux arbitraires que l'on déterminera à l'aide des conditions définies $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$: elle renfermera en outre les n constantes C_1, C_2, ... C_n, dont on calculera les valeurs à l'aide des égalités

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)\,d\alpha = C_1,\quad \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)\,d\alpha = C_2, \text{ etc.},$$

et ce calcul une fois effectué, les valeurs de P et Q ne renfermeront plus en général que des quantités connues.

Je dis maintenant que X se ramenera à la forme indiquée toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle quelconque de $\sin x$, $\cos x$; c'est-à-dire toutes les fois que l'on aura

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)\sin x}{f_3(x)},$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, désignant des fonctions rationnelles et entières de $\cos x$.

En effet, il viendra, dans cette hypothèse,

$$X = \frac{\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)} \cdot \frac{f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu) + f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi f_3(\alpha)f_3(\mu)}.$$

Mais on a

$$\frac{\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)} = \frac{\sin\mu+\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\mu}.$$

La valeur de X est donc composée de deux parties distinctes que je désignerai par X_1, X_2, et dont voici les valeurs

$$X_1 = (\sin\mu+\sin\alpha)\frac{f_1(\mu)f_3(\alpha)-f_1(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)},$$

$$X_2 = (\sin\mu+\sin\alpha)\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu-f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)};$$

or je puis prouver que chacune des deux quantités X_1, X_2, est réductible à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\ldots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha).$$

Cela est presque évident pour la fonction X_1; en effet, le numérateur $f_1(\mu)f_3(\alpha)-f_1(\alpha)f_3(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$, et s'annulant quand on a $\cos\alpha=\cos\mu$, doit être divisible par $\cos\alpha-\cos\mu$; et il est clair que le quotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^p\mu\cos^q\alpha$.

Quant à la fonction X_2, en effectuant les calculs indiqués, je trouve

$$X_2=\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu-f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)}+\sin\alpha\sin\mu\,.\,\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)-f_2(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)}$$

La fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu-f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\cos\mu}$$

est égale à

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)(1-\cos^2\mu)-f_2(\alpha)f_3(\mu)(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha-\cos\mu};$$

son numérateur est donc une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$. Puisque cette fonction s'annule lorsqu'on pose $\cos\alpha=\cos\mu$, elle doit être divisible par $\cos\alpha-\cos\mu$, et le quotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^p\mu\cos^q\alpha$. Il en est de même, par la même raison, de la fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)-f_2(\alpha)f_3(\mu)}{\cos\alpha-\cos\mu}.$$

Donc les valeurs de X_1, X_2, et par suite, de X, se réduisent à la forme

$$\Psi_1(\mu)\,\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\,\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\,\Pi_n(\alpha);$$

donc aussi les valeurs de A_m, B_m, peuvent être calculées sous forme finie de manière à satisfaire à l'équation (E), toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, des deux quantités $\sin x$, $\cos x$.

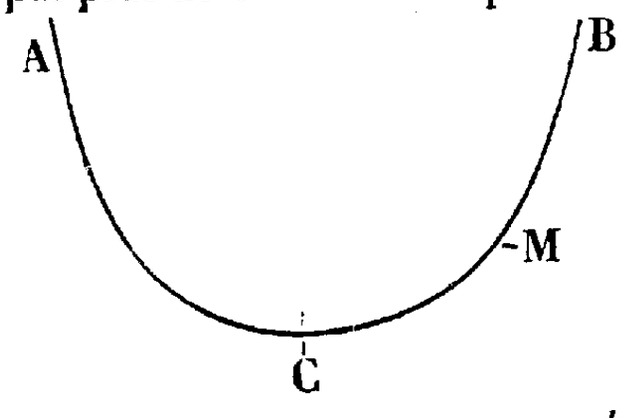
La méthode très simple dont nous avons fait usage pour résoudre le problème (A) s'étend d'elle-même, comme on voit, au problème plus compliqué (E). Et cette méthode peut être regardée comme générale pour toutes les questions du genre de celles que nous avons traitées dans ce Mémoire.

NOTE

Sur la chaînette d'égale résistance;

PAR G. CORIOLIS.

Nous nous proposons, dans cette note, de donner l'équation assez remarquable de la courbe qu'affecterait une chaîne pesante, parfaitement flexible, dont l'épaisseur varierait d'un point à l'autre proportionnellement à la tension. Il est clair qu'une pareille chaîne n'offrirait pas plus de chance de rupture en un point qu'en un autre



Désignons par p le rapport entre le poids d'un élément ds et sa longueur, par T la tension, dont la valeur au point le plus bas C sera T_0. Représentons par x et y des coordonnées horizontale et verticale. On aura pour l'équilibre en un point M quelconque de la courbe, $T\frac{dx}{ds} = T_0$, $T\frac{dy}{ds} = \int pds$, l'intégrale commençant au point le plus bas de la courbe où l'on a $dy = 0$. Ces deux équations donnent $\frac{dy}{dx} = \int \frac{pds}{T_0}$, ou bien $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}\frac{ds}{dx}$. Par la condition d'égale résistance, on doit avoir $T = ap$, a étant une constante. Ainsi l'équation de la courbe deviendra $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T}{T_0 a}\frac{ds}{dx}$. Remettant pour T sa valeur tirée de la première des équations précédentes, on aura $a\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2}$, ou bien (en posant $\frac{dy}{dx} = y'$) $a\frac{dy'}{dx} = 1 + y'^2$; d'où $\frac{dx}{a} = \frac{dy'}{1+y'^2}$. En prenant pour origine des x le point le plus bas de la courbe, et en intégrant à partir de ce point pour lequel on aura $x=0$ et $y'=0$, on trouve $\frac{x}{a} = \text{arc}(\text{tang}=y')$, d'où $y' = \frac{dy}{dx} = \text{tang}\left(\frac{x}{a}\right)$. Intégrant encore à partir du point le plus bas que l'on prendra pour

origine des y, on obtiendra

$$\frac{y}{a} = \log\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{a}\right)}\right], \quad \text{ou bien } e^{\frac{y}{a}} \cos\left(\frac{x}{a}\right) = 1.$$

Telle est l'équation de la chaînette d'égale résistance, rapportée à son point le plus bas pour origine des coordonnées. La valeur de la constante a résultera de la relation $T = ap$. En l'appliquant au point le plus bas, on a $T_0 = ap_0$. Ainsi, en concevant une portion de chaîne de l'épaisseur constante qui existe au point le plus bas, la constante a sera la longueur qu'il faudrait donner à cette portion de chaîne pour que son poids ap_0 fût égal à la tension T_0 au point le plus bas, ou ce qui revient au même, à la composante horizontale de la tension aux points d'attache A ou B. La plus grande abscisse de cette courbe répond à $y' = \frac{1}{0}$. Comme on a $y' = \text{tang}\left(\frac{x}{a}\right)$, la limite X de x ou de la demi-largeur de la courbe sera $X = a\frac{\pi}{2} = \frac{T_0}{p_0}\frac{\pi}{2}$. Cette limite est telle qu'une chaîne ayant cette demi-largeur pour longueur et la même force qu'au point le plus bas, aurait pour poids $\frac{\pi}{2}T_0$; la hauteur correspondante est $y = \infty$. Donc la courbe, quelle que soit la longueur de la chaîne, n'atteindra jamais la largeur πa, qui est ainsi une limite.

Si l'on veut avoir l'épaisseur p de la chaîne en fonction de l'abscisse, on trouve

$$p = T_0 \frac{dx}{ds}\frac{dy}{dx}, \quad \text{ou } p = \frac{T_0}{a}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{T_0}{a\cos\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

On peut remarquer qu'en appelant α l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, on a l'équation $a\alpha = x$. Par conséquent l'arc de cercle décrit du point C comme centre avec le rayon a, et compris entre l'axe des x et une parallèle CN à la tangente au point M, sera égal à l'abscisse de ce point M.

NOTE

Sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique;

PAR G. LAMÉ,

Professeur de Physique à l'École Polytechnique.

La théorie analytique de la chaleur paraît avoir peu contribué aux progrès de la physique proprement dite : bornée à la représentation mathématique de l'équilibre et de l'état variable des températures dans l'intérieur des corps solides homogènes, elle laisse complétement en-dehors de ses formules la plupart des phénomènes calorifiques, ceux surtout dans lesquels la chaleur semble se produire et disparaître, et qu'il importe principalement d'étudier pour découvrir la cause primitive de cette classe d'effets physiques. Cependant, toute restreinte qu'elle soit, cette théorie est d'une grande importance.

Quand les lois physiques, déduites de l'expérience et de l'observation, auront acquis toute l'exactitude et toute la généralité qu'elles doivent comporter, il sera possible aux géomètres de représenter analytiquement chaque classe de phénomènes, par une ou plusieurs formules différentielles. Mais ces formules devront être intégrées, et il faudra déterminer les constantes ou les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, de manière à satisfaire aux conditions particulières de chaque problème, avant de pouvoir obtenir des résultats numé-

riques vérifiables par l'expérience, et par suite des formules intégrales immédiatement applicables à la pratique.

Avant que ce but puisse être atteint, la physique expérimentale et l'analyse mathématique ont de nouveaux progrès à faire. Les recherches des physiciens et celles des géomètres convergent actuellement vers ce travail général; de part et d'autre se perfectionnent les instruments et les procédés dont il faudra faire usage pour le terminer.

Or la théorie analytique de la chaleur aura été éminemment utile à ces études préliminaires, en présentant un des exemples les plus parfaits et les plus simples de l'application du calcul à un certain ensemble de faits. Ses formules différentielles sont très peu compliquées, et les questions qu'elle se propose passent par toutes les phases du problème général qui vient d'être énoncé comme constituant à lui seul presque toute la physique mathématique.

Il s'agit toujours de représenter numériquement un phénomène physique pour des corps de forme particulière et dans des circonstances connues, c'est-à-dire d'intégrer certaines équations aux différences partielles, de telle sorte que les fonctions arbitraires provenant des intégrations satisfassent à des conditions données. Tout porte à croire que l'on ne parviendra à résoudre généralement des questions de cette nature, qu'après avoir obtenu un grand nombre de solutions complètes de questions particulières du même ordre ; et c'est là ce qui donne une valeur pratique aux recherches ayant pour objet de représenter analytiquement l'équilibre et le mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps solide homogène de forme définie.

Les géomètres ont complétement traité sous ce point de vue la sphère, le cylindre droit à base circulaire, le parallélépipède rectangle, le prisme triangulaire régulier : on sait maintenant exprimer la loi des températures dans des corps terminés par des surfaces du second degré. Le nombre de ces solutions est sans doute très limité; mais leur comparaison indique irrévocablement la marche uniforme que l'on doit suivre pour exprimer l'état calorifique de tout autre corps solide : la difficulté principale consiste à découvrir le système unique de coordonnées qui convient à la forme de ce solide et à la question physique proposée.

C'est cette difficulté que j'ai essayé de lever dans un Mémoire sur les surfaces isothermes (imprimé parmi les *Mémoires de l'Académie des Sciences, tome* V *des Savants étrangers*), où j'ai considéré spécialement le système de coordonnées dont on doit faire usage pour découvrir les lois de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, dans l'intérieur des corps et des enveloppes solides, limitées par des surfaces du second degré exposées à des foyers constants. J'ai repris la même question sous un point de vue plus général, dans un Mémoire sur les surfaces orthogonales conjuguées, qui fait partie d'un travail relatif aux lois de l'équilibre de l'éther (inséré dans le *Journal de l'École polytechnique*, XXIIIe Cahier).

J'ai prouvé dans ce dernier Mémoire qu'il existe une infinité de corps et d'enveloppes cylindriques, où la loi des températures peut être exprimée avec la même facilité que dans le cylindre de la géométrie élémentaire. Je me propose de donner, dans cette note, quelques nouveaux détails sur ces nouvelles formes; leur nombre infini laisse entrevoir la possibilité de représenter algébriquement l'état calorifique d'un corps limité par des surfaces cylindriques quelconques, et d'arriver ainsi à la connaissance complète du phénomène de la communication de la chaleur à travers les milieux solides, lorsqu'elle se propage dans deux dimensions seulement. Il y a lieu de croire qu'il existe pour les trois dimensions des formules tout aussi générales, et que l'analyse mathématique parviendra un jour à exprimer en nombres le fait physique dont il s'agit pour un corps de forme quelconque. Cela sera sans contredit un progrès important, car on en déduira la marche à suivre pour obtenir des solutions aussi complètes dans des phénomènes plus compliqués et pouvant donner lieu à des applications immédiates, tels que ceux de l'élasticité et de l'équilibre intérieur des corps solides.

Considérons un tube solide indéfini, dont les parois cylindriques extérieure et intérieure soient en contact avec deux foyers ayant des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre paroi. Lorsque l'équilibre de chaleur est établi dans ce genre d'enveloppe, les surfaces isothermes ou d'égale température sont toutes cylindriques. Si par un point d'une de ces surfaces on imagine trois éléments plans

orthogonaux, desquels le premier lui soit tangent, et les deux autres normaux, l'un suivant l'arète correspondante, et le dernier perpendiculairement à cette même arète, il n'y aura évidemment perte ou flux de chaleur qu'à travers le premier élément; en sorte que la chaleur se dissipera à travers l'enveloppe vers le foyer le plus froid, en suivant des courbes normales à toutes les surfaces isothermes, et que l'on peut appeler par cette raison *filets de chaleur*. Tous ces filets peuvent être considérés comme répartis sur des surfaces cylindriques, coupant normalement les cylindres isothermes suivant leurs arètes.

Ces deux systèmes de cylindres sont *conjugués*, en ce sens qu'ils pourraient changer de rôle; c'est-à-dire que dans un nouveau tube solide ayant pour parois entretenues à deux températures constantes, deux des cylindres formés par les filets du premier tube, le flux de chaleur s'opérerait suivant les sections transversales des premières surfaces isothermes. Mais il importe surtout de remarquer que pour exprimer généralement l'état calorifique d'un des tubes précédents, lorsque les foyers, toujours constants, varient cependant d'intensité d'une arète à l'autre des parois, il faut prendre pour surfaces coordonnées les deux systèmes de cylindres conjugués qui viennent d'être définis, et les plans perpendiculaires à leurs arètes; c'est-à-dire que les paramètres de ces trois genres de surfaces sont les coordonnées propres à la question physique, dans le cas dont il s'agit.

Pour que les cylindres conjugués puissent conduire à cette solution générale, il faut avant tout que leurs paramètres, considérés comme des fonctions de x, y, z, satisfassent à trois équations aux différences partielles exprimant que ces surfaces sont isothermes et orthogonales. Si l'axe des z est parallèle aux arètes, les paramètres ε et ε_1 des deux systèmes de cylindres seront donnés par des équations de la forme $\varepsilon = f(x, y)$, $\varepsilon_1 = f_1(x, y)$, et les trois relations différentielles dont nous parlons pourront toujours être ramenées aux suivantes :

$$(1)\quad \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\varepsilon_1}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon_1}{dy^2} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varepsilon_1}{dy} = 0.$$

J'ai démontré dans le Mémoire cité (*Journal de l'École Polytech-*

nique, XXIIIe Cahier) que les paramètres différentiels du premier ordre

$$(2)\qquad \eta = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2},\quad \eta_1 = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dy}\right)^2},$$

des fonctions ε, ε_1, satisfaisant aux équations (1), sont toujours égaux à la même fonction $\psi(x, y)$, multipliée par deux constantes a, a_1, en sorte que l'on peut poser

$$(3)\qquad \eta = a\psi,\quad \eta_1 = a_1\psi.$$

Cela posé, considérons l'équation

$$(4)\qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

qui appartient à l'équilibre de chaleur d'un corps solide indéfini de forme cylindrique, dont les parois sont entretenues à des températures constantes, les mêmes sur chaque arète, mais différentes en général d'un arète à l'autre. La fonction V, qui exprime la température variable, étant rapportée aux coordonnées ε, ε_1, l'équation précédente devient [en ayant égard aux équations (1), (2), (3)] $a^2\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + a_1^2\frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} = 0$; ou bien (en posant $\varepsilon = a\xi$, $\varepsilon_1 = a_1\xi_1$) $\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{d^2V}{d\xi_1^2} = 0$. C'est cette dernière équation qu'il faut intégrer, de telle manière que V se réduise à des fonctions données de ξ ou ξ_1, pour des valeurs particulières de ξ_1 ou de ξ.

Or ce problème analytique est aujourd'hui résolu de la manière la plus complète; la loi des températures du corps cylindrique proposé s'obtiendra donc aussi facilement que dans le cas du prisme rectangulaire, et par les mêmes formules. Ainsi l'on saura exprimer algébriquement l'état calorifique d'un tube ou d'une enveloppe ayant pour parois deux cylindres ε ou ε_1, et même celui d'un corps prismatique dont les quatre faces latérales courbes seront deux cylindres ε et deux cylindres ε_1, pourvu que les foyers constants possèdent la même température sur chaque arète d'une paroi.

Ces problèmes de physique mathématique ne présentent donc plus d'autre difficulté que celle de la recherche des fonctions ε et ε_1 qui

puissent vérifier les équations (1). Parmi les surfaces cylindriques qui remplissent ces conditions, nous considérerons d'abord celles comprises dans le groupe suivant

$$(5)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \Sigma A \log \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \\ \varepsilon_1 = \Sigma A \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right), \end{cases},$$

α et β étant les coordonnées d'une ligne fixe parallèle aux z, A un coefficient constant; ε et ε_1 étant composés d'autant de termes semblables que l'on voudra, qui différeront par les constantes α, β, A. Ces équations donnent

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d\varepsilon_1}{dy} = \Sigma A \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = -\frac{d\varepsilon_1}{dx} = \Sigma A \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2};$$

d'où il est facile de conclure que les relations différentielles (1) sont satisfaites.

Pour simplifier, on peut ne considérer que l'état calorifique des différents points d'une section plane, normale aux arètes du corps cylindrique, puisque dans le cas actuel tout reste identique d'une section à l'autre. Sous ce point de vue, ε et ε_1 (5) seront les paramètres de deux systèmes de courbes isothermes, conjuguées et orthogonales.

Le cas le plus simple, compris dans les formules générales (5), est celui où les seconds membres ne contiendraient qu'un terme. On peut alors supposer $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et prendre

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}, \\ \varepsilon_1 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right): \end{cases}$$

d'où $\quad x^2 + y^2 = c^2 e^{2\varepsilon}, \quad y = x \operatorname{tang} \varepsilon_1, \quad$ et enfin

$$y = ce^{\varepsilon} \sin \varepsilon_1, \quad x = ce^{\varepsilon} \cos \varepsilon_1.$$

C'est le cas d'un tube ou d'une enveloppe solide dont les parois sont des cylindres à bases circulaires concentriques; les cylindres formés

par les filets de chaleur sont alors des plans méridiens. On est ainsi conduit aux coordonnées semi-polaires employées depuis long-temps pour exprimer l'état calorifique de cette forme de corps.

Toutefois, au lieu du rayon r que l'on adopte ordinairement, il est préférable de prendre pour paramètre des surfaces cylindriques $\varepsilon = \log \frac{r}{c}$, ou le logarithme de son rapport à une ligne constante c. De cette manière les formules différentielles et intégrales, pour la forme considérée, deviennent identiquement les mêmes que celles qui correspondent au cas du prisme indéfini à base rectangle; il suffira d'y remplacer les coordonnées x, y, par ε, ε_1 (6).

Outre le tube cylindrique à bases circulaires concentriques, ce genre de coordonnées (6) embrasse aussi le cas d'un solide compris entre deux plans méridiens formant entre eux un angle quelconque; et plus généralement celui d'un voussoir, indéfini dans le sens des arètes, dont l'intrados, l'extrados et les faces de joint seraient entretenus à des températures constantes, variant d'ailleurs d'une manière quelconque d'une arète à l'autre de ces surfaces; les lois de l'équilibre de chaleur peuvent être facilement exprimées par des formules analytiques dans ces diverses circonstances.

Les formules (5), en attribuant à leurs seconds à deux termes seulement, comprennent un grand nombre de systèmes différents de courbes orthogonales. Le plus simple est celui pour lequel le coefficient A a la même valeur, mais un signe différent d'un terme à l'autre. Si l'on prend pour origine des coordonnées x, y, le milieu de la droite qui joint les points fixes (α, β), (α', β'), et si la grandeur de cette droite est représentée par $2c$, on pourra poser dans le cas dont il s'agit

$$(7)\quad \begin{cases} \varepsilon = \log \sqrt{\dfrac{(x+c)^2+y^2}{(x-c)^2+y^2}}, \\ \varepsilon_1 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \dfrac{y}{x-c}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \dfrac{y}{x+c}\right), \end{cases}$$

ou bien, en développant

$$\left(x - c\frac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon}}\right)^2 + y^2 = \frac{4c^2}{(e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon})^2},$$

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{\operatorname{tang}\varepsilon_1}\right)^2 = \frac{c^2}{\sin^2\varepsilon_1}.$$

Les courbes ε sont des cercles; sur chacune d'elles les rayons vecteurs aux deux points fixes sont dans un rapport constant. Les courbes ε_1 sont encore des cercles, et représentent des segments capables construits sur la ligne $2c$. Il est curieux que les deux seuls lieux géométriques offerts par la géométrie élémentaire se trouvent ici réunis, de manière à jouer un rôle également important dans un même problème de physique mathématique.

Les cercles ε ne peuvent se couper, ils sont tous excentriques, et le lieu de leurs centres est la droite qui passe par les deux points fixes; les cercles ε_1 se coupent tous au contraire en ces deux points. Dans ce système, deux cercles ε ou ε_1 étant tracés, on peut construire, par des procédés géométriques trop simples pour que nous devions nous y arrêter, tout autre cercle ε ou ε_1 dont le paramètre sera connu. Il sera facile, d'après cela, de représenter analytiquement et même géométriquement l'état calorifique de plusieurs corps solides.

Considérons, par exemple, une enveloppe solide dont les surfaces extérieure et intérieure soient des cylindres à bases circulaires, mais excentriques, c'est-à-dire considérons un tube indéfini qui n'ait pas la même épaisseur sur tout son contour. Si les parois sont entretenues à deux températures différentes, les surfaces isothermes sont toutes des cylindres à bases circulaires, parallèles mais excentriques à ces parois; les filets de chaleur sont des cercles, et il est facile de trouver le cylindre correspondant à une température donnée.

Considérons encore une masse solide indéfinie, traversée par deux puits cylindriques dont les axes parallèles se trouvent à une distance plus grande que la somme de leurs rayons. Si ces puits sont des foyers constants, la loi des températures de la masse solide est facile à définir; les surfaces isothermes sont toutes des cylindres circulaires excentriques, la chaleur se dissipe d'un puits à l'autre en suivant des filets circulaires. Ces cylindres et ces filets peuvent être déterminés par des constructions géométriques très simples.

Si les parois du tube ou des puits précédents sont entretenues à des températures constantes, mais variables d'une arête à l'autre, l'état calorifique de l'enveloppe ou de la masse solide est plus compliqué; mais il peut s'exprimer analytiquement par les formules du prisme rectangulaire, qui résolvent aussi le cas d'un corps prismatique dont

les quatre faces latérales courbes feraient partie de deux cylindres ε et de deux cylindres ε_1 compris dans les formules (7).

En exprimant les arcs des cercles orthogonaux conjugués (7) en fonction des deux paramètres ε et ε_1, on parvient à trouver directement, par de simples considérations géométriques, les valeurs d'une certaine classe d'intégrales définies très connues des géomètres. Ce genre de démonstration est curieux en ce qu'il permet de suivre, pour ainsi dire à l'œil, les variations de ces intégrales; mais pour ne pas trop m'éloigner du but que je me suis proposé, je m'abstiendrai d'entrer dans ces détails.

Les formules (5), dans le cas de deux points fixes seulement, comprennent encore le cas où le coefficient A a la même valeur et le même signe pour les deux termes. En adoptant la même notation que dans le cas précédent, on peut alors poser

$$(8)\quad \begin{cases} \varepsilon = \log \dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{a^2}, \\ \varepsilon_1 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \dfrac{y}{x-c}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \dfrac{y}{x+c}\right), \end{cases}$$

a étant une ligne constante. Ces équations donnent

$$(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4e^{2\varepsilon};$$

$$y^2 - x^2 + \frac{2}{\operatorname{tang}\varepsilon_1}xy + c^2 = 0.$$

Chaque courbe ε est telle que le produit des rayons vecteurs aux points fixes est constant; chaque courbe ε_1 est une hyperbole. Toutes les hyperboles ε_1 coupent normalement les lieux géométriques du quatrième ordre au paramètre ε.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir la grande variété de corps cylindriques compris dans les équations (5), et dont l'état calorifique peut être exprimé par les séries intégrales trouvées pour le prisme rectangulaire indéfini. Il existe cependant des formules encore plus générales. Si l'on développe une fonction imaginaire de la forme $F(x+y\sqrt{-1})$, de manière à séparer la partie réelle P de la partie imaginaire $Q\sqrt{-1}$, P et Q étant deux fonctions réelles de x et de y,

on aura $F(x+y\sqrt{-1}) = P+Q\sqrt{-1}$, et l'identité $\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx}\sqrt{-1}$, donnant

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = -\frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dx}\sqrt{-1},$$

on en conclut que

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{}{dy} = -\frac{dQ}{dx};$$

d'où il est aisé de voir qu'en posant $\varepsilon = P$, $\varepsilon_1 = Q$, les équations différentielles (1) seront satisfaites.

Ainsi une fonction quelconque $F(x+y\sqrt{-1})$ fournit un système de surfaces cylindriques orthogonales et conjuguées. Considérons, par exemple, la fonction $(x+y\sqrt{-1})^m$, qui devient (en posant... $\sqrt{x^2+y^2} = r$, $\frac{y}{x} = \text{tang}\ \varphi$) $(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)r^m$; on pourra prendre en coordonnées semi-polaires

$$(9) \qquad \begin{cases} \varepsilon = r^m \cos m\varphi, \\ \varepsilon_1 = r^m \sin m\varphi; \end{cases}$$

quel que soit d'ailleurs l'exposant m.

Si l'on a $m = \frac{\pi}{\alpha}$, α étant l'angle formé par deux plans méridiens, le paramètre ε_1 est nul pour les deux plans $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, qui dans leur ensemble constituent une des surfaces isothermes ε_1, celle où la température serait zéro; les autres surfaces isothermes ε_1 sont des cylindres asymptotiques à ces plans, ayant pour bases des courbes à branches indéfinies comme l'hyperbole; les filets de chaleur composent des cylindres de même forme, aux paramètres $\varepsilon = r^m \cos m\varphi$.

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les courbes isothermes et les filets de chaleur deviennent des hyperboles équilatères. Ainsi l'on peut exprimer la loi des températures dans un solide indéfini, terminé d'un côté par deux plans formant un angle droit, et de l'autre par un cylindre hyperbolique, asymptotique à ces plans, lorsque les parois planes et la paroi

courbe sont soumises à des foyers variables d'une arête à l'autre de ces parois.

Plus généralement, toute fonction $F(\alpha)$ développable suivant les puissances de la variable α, donnant $F(\alpha) = \Sigma A\alpha^m$, on a

$$F(x + y\sqrt{-1}) = \Sigma A r^m (\cos m\varphi + \sqrt{-1} \sin m\varphi),$$

et l'on en déduit les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon = \Sigma A r^m \cos m\varphi, \\ \varepsilon_1 = \Sigma A r^m \sin m\varphi, \end{cases}$$

pour représenter les paramètres d'une infinité de surfaces cylindriques, orthogonales et conjuguées. On pourra donc calculer numériquement les températures d'un corps terminé par des surfaces cylindriques appartenant à chacun de ces systèmes. Ce seront toujours les séries intégrales du prisme rectangulaire indéfini qu'il faudra employer pour cela, en donnant des valeurs convenables aux variables qu'elles comprennent.

Il m'a paru important, pour la physique mathématique, de signaler la généralisation que comporte la solution d'un des problèmes qui constituent la théorie analytique de la chaleur. On parviendra sans doute à trouver des solutions tout aussi générales pour les cas plus compliqués de cette théorie.

NOTE

Sur une Méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires;

PAR A.-M. FAVRE-ROLLIN.

I.

Soient deux équations de la forme

$$M\frac{d^m y}{dt^m} + N\frac{d^n y}{dt^n} + P\frac{d^p y}{dt^p} + \text{etc.} = V, \qquad (1)$$

$$M_1\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} + P_1\frac{d^{p_1} y}{dt^{p_1}} + \text{etc.} = V_1, \qquad (2)$$

dans lesquelles V et V_1 sont des fonctions quelconques de la variable indépendante t et d'une ou plusieurs autres variables, ainsi que de leurs coefficients différentiels. Si les coefficients M, N, P,..... M_1, N_1, P_1,..... sont constants, il suffira, pour éliminer y et ses différentielles, d'écrire à la place de y, V_1 dans le premier membre de l'équation (1), et V dans le premier membre de l'équation (2), et d'égaler les résultats, en sorte que l'équation finale sera

$$M\frac{d^m V_1}{dt^m} + N\frac{d^n V_1}{dt^n} + P\frac{d^p V_1}{dt^p} + \text{etc.} = M_1\frac{d^{m_1} V}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} V}{dt^{n_1}} + P_1\frac{d^{p_1} V}{dt^{p_1}} + \text{etc.}$$

En effet, si l'on différentie séparément m_1 fois, n_1 fois, p_1 fois, etc.,

l'équation (1), il viendra

$$(a)\qquad M\frac{d^{m+m_1}y}{dt^{m+m_1}}+N\frac{d^{n+m_1}y}{dt^{n+m_1}}+P\frac{d^{p+m_1}y}{dt^{p+m_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{m_1}V}{dt^{m_1}},$$

$$(b)\qquad M\frac{d^{m+n_1}y}{dt^{m+n_1}}+N\frac{d^{n+n_1}y}{dt^{n+n_1}}+P\frac{d^{p+n_1}y}{dt^{p+n_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{n_1}V}{dt^{m_1}},$$

$$(c)\qquad M\frac{d^{m+p_1}y}{dt^{m+p_1}}+N\frac{d^{n+p_1}y}{dt^{n+p_1}}+P\frac{d^{p+p_1}y}{dt^{p+p_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{p_1}V}{dt^{p_1}},$$

etc.

Je multiplie l'équation (a) par M_1, l'équation (b) par N_1, l'équation (c) par P_1, etc., et j'ajoute ensuite membre à membre toutes ces équations : en écrivant les uns à la suite des autres tous les termes contenus dans la même colonne verticale et observant que la somme des termes de chacune de ces colonnes peut se mettre sous la forme

$$M\frac{d^m}{dt^m}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}+\text{etc.}\right),$$

$$N\frac{d^n}{dt^n}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}+\text{etc.}\right),$$

$$P\frac{d^p}{dt^p}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}\right),$$

etc.,

ou bien

$$M\frac{d^mV_1}{dt^m},\quad N\frac{d^nV_1}{dt^n},\quad P\frac{d^pV_1}{dt^p},\ \text{etc.},$$

on aura donc

$$M\frac{d^mV_1}{dt^m}+N\frac{d^nV_1}{dt^n}+P\frac{d^pV_1}{dt^p}+\text{etc.}=M_1\frac{d^{m_1}V}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}V}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}V}{dt^{p_1}}+\text{etc.},$$

comme on l'avait annoncé.

II.

Si les deux équations proposées sont linéaires en x et y, et ne contiennent que ces deux variables et la variable indépendante t, on pourra former à volonté par le moyen précédent l'équation finale en y ou en x, et, chose remarquable, ces deux équations finales différe-

ront seulement par le terme fonction de t qui ne contiendra que cette dernière variable. On peut vérifier cette proposition sur l'exemple suivant, et il serait facile de la démontrer en général.

Soient les deux équations

$$M\frac{d^m y}{dt^m} + N\frac{d^n y}{dt^n} = T - P\frac{d^p x}{dt^p} - Q\frac{d^q x}{dt^q},$$

$$M_1\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} = T_1 - P_1\frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1\frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}}.$$

En éliminant successivement x et y, on peut remplacer ces équations par les suivantes

$$\left(M\frac{d^m}{dt^m} + N\frac{d^n}{dt^n}\right)\left(T_1 - P_1\frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1\frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}}\right)$$
$$= \left(M_1\frac{d^{m_1}}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}}\right)\left(T - P\frac{d^p x}{dt^p} - Q\frac{d^q x}{dt^q}\right),$$

$$\left(P\frac{d^p}{dt^p} + Q\frac{d^q}{dt^q}\right)\left(T_1 - M_1\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} - N_1\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}}\right)$$
$$= \left(P_1\frac{d^{p_1}}{dt^{p_1}} + Q_1\frac{d^{q_1}}{dt^{q_1}}\right)\left(T - M\frac{d^m y}{dt^m} - N\frac{d^n y}{dt^n}\right).$$

Celles-ci développées donnent

$$\text{A)}\quad \left\{\begin{aligned} &PM_1\frac{d^{p+m_1} x}{dt^{p+m_1}} + QM_1\frac{d^{q+m_1} x}{dt^{q+m_1}} + PN_1\frac{d^{p+n_1} x}{dt^{p+n_1}} + QN_1\frac{d^{q+n_1} x}{dt^{q+n_1}} \\ &- \left(MP_1\frac{d^{m+p_1} x}{dt^{m+p_1}} + MQ_1\frac{d^{m+q_1} x}{dt^{m+q_1}} + NP_1\frac{d^{n+p_1} x}{dt^{n+p_1}} + NQ_1\frac{d^{n+q_1} x}{dt^{n+q_1}}\right) \\ &= M_1\frac{d^{m_1} T}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} T}{dt^{n_1}} - \left(M\frac{d^m T_1}{dt^m} + N\frac{d^n T_1}{dt^n}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\text{B)}\quad \left\{\begin{aligned} &PM_1\frac{d^{p+m_1} y}{dt^{p+m_1}} + QM_1\frac{d^{q+m_1} y}{dt^{q+m_1}} + PN_1\frac{d^{p+n_1} y}{dt^{p+n_1}} + QN_1\frac{d^{q+n_1} y}{dt^{q+n_1}} \\ &- \left(MP_1\frac{d^{m+p_1} y}{dt^{m+p_1}} + MQ_1\frac{d^{m+q_1} y}{dt^{m+q_1}} + NP_1\frac{d^{n+p_1} y}{dt^{n+p_1}} + NQ_1\frac{d^{n+q_1} y}{dt^{n+q_1}}\right) \\ &= P_1\frac{d^{p_1} T}{dt^{p_1}} + Q\frac{d^{q_1} T_1}{dt^{q_1}} - \left(P_1\frac{d^{p_1} T}{dt^{p_1}} + Q_1\frac{d^{q_1} T}{dt^{q_1}}\right); \end{aligned}\right.$$

égalités qui ne diffèrent que par les termes fonctions de t seulement, et pour lesquelles par conséquent, dans le cas des équations différentielles à indices entiers et positifs, sera applicable la même formule

générale d'intégration, en sorte que les valeurs de x et de y seront de la forme

$$x = C_1\, e^{\mu_1 t} + C_2\, e^{\mu_2 t} + C_3\, e^{\mu_3 t} + \text{etc.},$$
$$y = C'_1\, e^{\mu_1 t} + C'_2\, e^{\mu_2 t} + C'_3\, e^{\mu_3 t} + \text{etc.};$$

C_1, C_2, etc., étant des fonctions de t que l'on saura déterminer par les méthodes connues, dans chaque cas particulier, et les quantités μ_1, μ_2, μ_3, etc., étant déterminées par l'équation commune

$$PM_1\mu^{p+m_1} + QM_1\mu^{q+m_1} + \text{etc.} = 0.$$

III.

Si l'on a m équations entre $m+1$ variables, à coefficients constants pour toutes ces variables moins une qui sera la variable indépendante, il suffira, pour éliminer l'une d'elles, d'ordonner le premier membre de chaque équation par rapport à ses coefficients différentiels après avoir fait passer tous les autres termes dans le second membre. On comparera ensuite l'une quelconque de ces équations avec les $m-1$ autres. On formera ainsi $m-1$ couples d'équations entre lesquelles on éliminera la variable en question, comme il a été dit ci-dessus, et l'on n'aura plus que $m-1$ équations entre m variables. En continuant de la même manière, on arrivera à une équation entre deux variables seulement. On conçoit qu'il sera dès lors facile, par ce procédé, de remplacer les m équations proposées par m autres équations dans chacune desquelles entreront seulement la variable indépendante et l'une des autres variables qu'il s'agit de déterminer.

IV.

D'après ce qui précède on peut conclure *a priori* l'ordre de l'équation finale. Si, par exemple, on a m équations du premier ordre, le procédé indiqué conduira à $m-1$ équations du second ordre, et de là à $m-2$ équations du troisième ordre, et enfin à $m-(m-1)$, ou une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre; et en général si m, n, p, etc., sont les plus forts indices de différentiation pour chaque variable,

$m+n+p+$ etc., sera le nombre indiquant l'ordre de chaque équation finale.

V.

Tout ce qui a été établi ci-dessus l'ayant été indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux indices m, n, p, q, etc., sera dès lors vrai, quels qu'ils soient, et conviendra par conséquent au cas des équations différentielles à indices quelconques. On n'aurait pu arriver à ce résultat par les méthodes ordinaires, qui reposent sur la différentiation sous forme finie d'un produit tel que θx de deux variables, ce qu'on ne peut supposer pour des différentielles à indices quelconques. Cette méthode a aussi l'avantage de dispenser du recours à des variables auxiliaires, et n'exige que des opérations fort simples d'addition et de soustraction. Enfin elle pourrait s'appliquer également bien aux équations linéaires à coefficients constants dans le calcul aux différences finies.

MÉMOIRE

Sur les rapports et les restes des quantités incommensurables;

PAR E. LÉGER,

Ancien élève de l'École Polytechnique, chef d'institution à Montmorency.

1. Étant données deux quantités quelconques homogènes, deux lignes droites par exemple, on sait que pour trouver leur plus grande commune mesure, il faut d'abord porter la plus petite de ces quantités dans la plus grande, ce qui donne un quotient entier et un reste; puis ce reste dans la plus petite, ce qui donne encore un quotient et un deuxième reste; puis ce deuxième reste dans le premier, et ainsi de suite. Si l'on parvient à un reste nul, les deux quantités sont commensurables entre elles, et le dernier reste est leur plus grande commune mesure. Mais il peut arriver que l'on ne tombe jamais sur un reste nul, quelque loin que l'on continue l'opération; alors les deux quantités sont dites incommensurables entre elles.

2. Cela posé, soient a et b les deux quantités dont il s'agit, q, q_1, q_2, etc., les quotients successifs, r, r_1, r_2, etc., les restes correspondants; on aura

$$(1)\quad \begin{cases} a = bq + r, \\ b = rq_1 + r_1, \\ r = r_1q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \text{etc.}; \end{cases}$$

on en déduit

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}},$$

$$\frac{b}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r} = q_1 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}},$$

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

etc.;

d'où

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \text{etc.}}}}$$

Si les quantités a et b sont commensurables entre elles, cette fraction continue sera limitée. Dans le cas contraire elle sera indéfinie. Le rapport numérique entre a et b sera exprimé dans le premier cas par la réduite finale correspondante au dernier quotient; dans le deuxième cas, il ne sera pas exprimable exactement, mais les réduites successives de la fraction continue en donneront des valeurs indéfiniment approchées

3. Si deux autres quantités a' et b' homogènes, conduisent aux mêmes quotients q, q_1, q_2,..... que les quantités a et b, le nombre de ces quotients étant d'ailleurs fini ou infini, le rapport numérique de a' et b' sera égal au rapport numérique de a et b, et l'on aura la proportion $a : b :: a' : b'$.

C'est en s'appuyant sur ce principe dû, je crois, à Arbogast, que M. Vincent établit fort simplement plusieurs propriétés fondamentales de la géométrie: 1°. la proportionnalité des angles aux arcs décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon; 2°. la proportionnalité des rectangles à leurs bases, quand les hauteurs sont égales, etc., propositions qui exigeaient un tour particulier de raisonnement pour passer du commensurable à l'incommensurable, et qui n'étaient pas à l'abri d'objections fondées, comme l'ont judicieusement observé MM. Lefébure de Fourcy et Vincent.

4. Mais notre but n'est pas d'insister sur l'avantage de ce nouveau mode d'établir la proportionnalité entre les quantités géométriques, parce que nous le croyons généralement apprécié aujourd'hui. Nous avons dessein de fixer ici l'attention sur une belle propriété de la série des restes r, r_1, r_2, etc., et d'abord nous établirons ce théorème fondamental.

La somme des restes r, r_1, r_2, *etc., indéfiniment décroissants qu'on obtient en soumettant deux quantités homogènes incommensurables* a *et* b *à l'opération de la recherche de la plus grande commune mesure admet toujours une limite finie.*

En effet, ajoutant la suite indéfinie des égalités (1), il vient

$$a + b = bq + rq_1 + r_1q_2 + r_2q_3 + \text{etc.},$$

ou

$$(2) \qquad a - b(q-1) = rq_1 + r_1q_2 + r_2q_3 + \text{etc.}$$

Or, q_1, q_2, q_3, etc., ne sont jamais < 1, donc la somme $r + r_1 + r_2 + r_3 +$ etc., n'est jamais $> rq_1 + r_1q_2 +$ etc., ou $> a - b(q-1)$: donc, etc.

4. Maintenant on sait (*Théorie des nombres* de Legendre, 1re partie, § V) que les racines quarrées des nombres non quarrés s'expriment par des fractions continues périodiques que l'on détermine facilement dans chaque cas particulier par une méthode connue. Cette propriété va nous servir à trouver la limite de la somme des restes r, r_1, r_2, r_3, etc., quand le rapport des quantités a et b est exprimé par $\sqrt{m} : 1$; m étant un nombre entier quelconque.

Soit d'abord $m = 2$, et faisons $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, on aura

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Donc ici $\qquad q = 1, \quad q_1 = q_2 = q_3 = \text{etc.} = 2.$

Donc l'égalité (2) donne

$$\sqrt{2} = 2\,(r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.});$$

d'où $$r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

De là ce théorème élégant :

Dans la recherche de la plus grande commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré, la limite de la somme des restes est égale à la demi-diagonale du quarré.

5. Qu'il me soit permis de m'arrêter un instant sur ce premier cas, à cause de sa célébrité, et parce qu'il m'a conduit aux présentes recherches. Je crois d'abord que l'incommensurabilité de la diagonale et du côté peut être prouvée avec plus de rigueur qu'on ne le fait d'ordinaire.

Soit d la diagonale et c le côté; il est clair que d est $> c$, mais $< 2c$, donc en divisant d par c, le quotient sera 1, et si l'on nomme le reste, on aura

$$d = c + r.$$

Ensuite si l'on porte r dans c, on verra aisément encore que r y est contenu deux fois avec un reste r_1; mais, pour ne rien supposer gratuitement, désignons par q_1 le quotient et par r_1 le reste. En portant de même r_1 dans r, soit q_2 le quotient et r_2 le reste, et ainsi de suite : on aura

$$(3)\quad \begin{cases} d = c + r, \\ c = rq_1 + r_1, \\ r = r_1q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Il s'agit de prouver rigoureusement qu'aucun des restes r_1, r_2, r_3, etc., n'est nul, ensorte que le nombre des égalités précédentes est indéfini. A cet effet, supposons que d'une extrémité de la diagonale on décrive un cercle avec un rayon égal au côté, et que l'on prolonge la diagonale jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau le cercle, le côté c du quarré sera moyen proportionnel entre la sécante entière $2c+r$ et la partie extérieure r; donc on aura

$$\frac{2c+r}{c} = \frac{c}{r},$$

ou
$$\frac{c}{r} = 2 + \frac{r}{c};$$

mais des égalités (3), on tire

$$\frac{c}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r};$$

donc
$$q_1 + \frac{r_1}{r} = 2 + \frac{r}{c}.$$

Or, quand un entier plus une fraction < 1 est égal à un entier plus une fraction < 1, l'entier doit être égal à l'entier et la fraction à la fraction; donc on doit avoir

$$q_1 = 2 \text{ et } \frac{r_1}{r} = \frac{r}{c}.$$

Donc r_1 n'est pas nul.

Ensuite, en renversant les fractions, on a

$$\frac{r}{r_1} = \frac{c}{r} = 2 + \frac{r}{c};$$

mais les égalités (3) donnent

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1};$$

donc on a encore

$$q_2 + \frac{r_2}{r_1} = 2 + \frac{r}{c},$$

et par conséquent

$$q_2 = 2 \text{ et } \frac{r_2}{r_1} = \frac{r}{c}.$$

Et l'on voit que r_2 n'est pas nul. En continuant ainsi, on prouvera que les quotients q_1, q_2, q_3, etc., sont égaux à 2, et qu'aucun des restes r, r_1, r_2, r_3, etc., ne peut être nul. Donc la diagonale est incommensurable avec le côté.

Il est clair aussi que les restes r, r_1, r_2, r_3, etc., forment une progression géométrique décroissante indéfinie, dont la limite est, comme on sait, égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison;

donc la limite de la somme des restes est

$$\frac{r}{1-\frac{r}{c}} = \frac{cr}{c-r};$$

or l'inspection de la figure prouve que l'on a

$$c - r : c :: r : \frac{1}{2} d,$$

donc la limite est la demi-diagonale; ce qui s'accorde avec ce que l'on a vu

Supposons maintenant $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, on a

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}};$$

donc ici $q = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, etc.,

et

$$\begin{aligned} a &= b + r, \\ b &= r + r_1, \\ r &= 2r_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2 + r_3, \\ r_2 &= 2r_3 + r_4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Multipliant par 2 les 2e, 4e, 6e, etc., de ces égalités, et ajoutant, on a

$$a + b = 2\,(r + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.}):$$

donc $$r + r_1 + r_2 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{3} + 1).$$

7. Pour $a = \sqrt{5}$, $b = 1$, on trouve

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}};$$

ce qui donne aisément pour limite de la somme des restes $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

Pour $a = \sqrt{6}$, $b = 1$, on trouve la limite $= \frac{1}{4}\sqrt{6}$.

8. Si $a = \sqrt{7}$, $b = 1$, la recherche de la limite est plus difficile, parce que la fraction continue présente une période de quatre termes. En effet, on a

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Voici comment M. Terquem détermine dans ce cas la somme des restes. La méthode est générale et convient aux périodes composées d'un nombre quelconque de termes.

Soit

$$\begin{aligned}
a &= bq + r, \\
b &= rq_1 + r_1, \\
r &= r_1q_2 + r_2, \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\
r_2 &= r_3q_4 + r_4, \\
r_3 &= r_4q_1 + r_5, \\
r_4 &= r_5q_2 + r_6, \\
r_5 &= r_6q_3 + r_7, \\
r_6 &= r_6q_4 + r_8, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Faisons

$$\begin{aligned}
r + r_4 + r_8 + r_{12} + \text{etc.} &= x, \\
r_1 + r_5 + r_9 + r_{13} + \text{etc.} &= y, \\
r_2 + r_6 + r_{10} + r_{14} + \text{etc.} &= z, \\
r_3 + r_7 + r_{11} + r_{15} + \text{etc.} &= u.
\end{aligned}$$

La première des égalités donne $r = a - bq$.

Partageons les autres en groupes de quatre, et ajoutons successivement les 1res, 2mes, 3mes, 4mes égalités de chaque groupe. Il vient

$$\begin{aligned} b + u &= q_1 x + y, \\ x &= q_2 y + z, \\ y &= q_3 z + u, \\ z &= q_4 u + x - r; \end{aligned}$$

de ces quatre équations du premier degré, on tire les valeurs de x, y, z, et u, et en les ajoutant on obtient

$$x+y+z+u=\frac{r(2q_1+2q_3-q_1q_2+q_2q_3+q_1q_2q_3)+b(2q_2+2q_4-q_2q_3+q_3q_4+q_2q_3q_4)}{(q_1+q_3)(q_2+q_4)+q_1q_2q_3q_4}:$$

pour $a=\sqrt{7}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{7}-2$, $q_1=q_2=q_3=1$, $q_4=4$; la limite cherchée est

$$x+y+z+u=\frac{5r+17}{14}=\frac{5\sqrt{7}+7}{14}.$$

Si la période était de cinq termes, on partagerait les égalités par groupes de cinq, et ainsi de suite. Le procédé convient donc à tous les cas.

Observons que de la formule qui convient à une période de n termes, on peut tirer celles qui conviennent aux périodes dont le nombre des termes est diviseur de n. Ainsi, de la formule pour les périodes de quatre termes, on déduit celle pour les périodes de 1 terme, en posant $q_1=q_2=q_3=q_4$; on a alors $x+y+z+u=\frac{r+b}{q_1}$; par exemple pour $a=\sqrt{2}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{2}-1$, $q_1=2$, donc la limite $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Pour les périodes de deux termes on fait $q_1=q_3$, $q_2=q_4$, et il vient

$$x+y+z+u=\frac{rq_1+bq_2}{q_1q_2}.$$

Pour $a=\sqrt{3}$, $b=1$, on a $r=\sqrt{3}-1$, $q_1=1$, $q_2=2$; donc la limite $=\frac{(\sqrt{3}-1)+2}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; et ainsi de suite.

Note 1. La recherche du n° 5 peut être encore présentée d'une autre manière très simple et très rigoureuse, que voici :

Portant c sur d, on a un reste r, sur lequel je construis un quarré; il est facile de voir que le côté c sera égal à la diagonale d_1 de ce

quarre, plus r. On aura donc $d = c + r$, $c = r + d_1$; maintenant, si l'on porte le côté r sur la diagonale d_1, on aura comme ci-dessus $d_1 = r + r_1$, $r = r_1 + d_2$; ensuite $d_2 = r_1 + r_2$, $r_1 = r_2 + d_3$; on en tire

$$\frac{d}{c} = 1 + \frac{r}{c}, \quad \frac{c}{r} = 1 + \frac{d_1}{r},$$

$$\frac{r}{r_1} = 1 + \frac{d_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 1 + \frac{d_3}{r}, \text{ etc.}$$

Or le rapport de chaque diagonale à son côté est constant; donc on a

$$\frac{d}{c} = \frac{d_1}{r} = \frac{d_2}{r_1} = \frac{d_3}{r_2} = \text{etc.};$$

d'où il suit que $$\frac{c}{r} = \frac{r}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \text{etc.}$$

Donc les restes successifs sont en proportion géométrique décroissante, etc.

Note II. On trouve dans Kepler (*Harmoniæ mundi*, p. 10, édit de 1619) un point de philologie mathématique qui éclaircit une expression de sens assez louche. Les Grecs distinguaient deux sortes de rapports : les uns exprimables, *effables*, λογοι; les autres non exprimables, *ineffables*, αλογοι. Or, le mot λογος a deux acceptions : PAROLE (*verbum*), et RAISON (*ratio*). Au lieu de prendre la première, les Latins, en traduisant, ont pris la deuxième; de là le rapport *rationnel* et le rapport *irrationnel*, ce qui n'a pas de sens; tandis que l'expression exacte est rapport *exprimable* ou rapport *inexprimable*. Cette observation de Kepler est d'une grande justesse. (*Note de M. Terquem.*)

NOTE

Sur une manière de généraliser la formule de Fourier;

PAR J. LIOUVILLE.

En désignant par $f(x)$ une fonction de x assujettie à la condition de ne jamais devenir infinie lorsque la variable x prend successivement toutes les valeurs comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on a, comme on sait, entre ces deux limites

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(zy - zx) f(y) dy.$$

La formule (1) a été donnée pour la première fois par l'illustre Fourier, dont elle a conservé le nom. On peut la généraliser de la manière suivante.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x et $\varphi_1(x)$ son intégrale indéfinie prise depuis $x=0$, en sorte que l'on ait $\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi(x)dx$; nous supposerons la fonction $\varphi_1(x)$ telle qu'elle ne surpasse jamais un certain maximum; soit de plus A la valeur de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)d\theta}{\theta}$; si la quantité représentée par A n'est ni nulle ni infinie, je dis que, pour toutes les valeurs réelles de x, on aura

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{A}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(zy - zx) f(y) dy.$$

Pour démontrer ce théorème, faisons

$$\frac{1}{A}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(zy - zx) f(y) dy = u,$$

et il s'agira de prouver que l'on a $u = f(x)$. J'effectue d'abord l'intégration par rapport à z, non pas depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, mais depuis $z=0$ jusqu'à une valeur indéterminée de z que je traiterai comme infinie dans l'intégration relative à y. En observant que l'équation

$$\int_0^x \varphi(x)dx = \varphi_1(x)$$

donne

$$\int_0^z \varphi(zy - zx)\,dz = \frac{\varphi_1(zy-zx)}{y-x},$$

je trouve ainsi

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(zy-zx)}{y-x} f(y)dy.$$

Si l'on fait $y = x + \frac{\theta}{z}$, la valeur de u deviendra

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)}{\theta} f\left(x + \frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

Or la quantité z étant infinie, on a $f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)=f(x)$, excepte pour les valeurs de θ qui sont elles-mêmes infinies, valeurs auxquelles on peut n'avoir aucun égard, parce que le facteur $\frac{\varphi_1(\theta)}{\theta}$, qui devient nul alors, rend insensible la partie de l'intégrale qui leur correspond. On aura donc simplement

$$u = \frac{f(x)}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)d\theta}{\theta} = f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. Si l'on pose $\varphi(x) = \cos x$, l'équation (2) se change dans l'équation (1), et notre démonstration coïncide avec celle que Deflers a donnée de la formule de Fourier.

On peut établir une autre formule plus générale que la formule (2). Désignons par $F(z, \theta)$ une fonction de z et de θ qui devienne nulle quand on a à la fois $z=0$, $\theta=0$; supposons en outre cette fonction telle que si, après y avoir posé $z=+\infty$, on forme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\infty, \theta)d\theta}{\theta},$$

cette intégrale ne soit ni nulle ni infinie, mais possède au contraire une valeur finie et déterminée A; faisons enfin

$$\frac{z}{\theta}\cdot\frac{dF(z,\theta)}{dz}+\frac{dF(z,\theta)}{d\theta}=\varphi(z,\theta),$$

et admettons que la quantité $\varphi(z,\theta)$ ne devienne jamais infinie. Cela posé, je dis que l'on aura

$$(3)\qquad f(x)=\frac{1}{A}\int_0^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z,zy-zx)f(y)dy.$$

Représentons en effet par u la valeur du second membre de l'équation (3). D'après la composition de la fonction φ, on trouve immédiatement

$$\int_0^z\varphi(z,zy-zx)dz=\frac{F(z,zy-zx)}{y-x}.$$

Si donc on effectue d'abord, dans l'expression de u, l'intégrale relative à z depuis $z=0$ jusqu'à une valeur indéterminée z, que l'on traitera ensuite comme infinie, on obtient

$$u=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z,zy-zx)}{y-x}f(y)dy.$$

En désignant par θ une nouvelle variable, je fais $y=x+\frac{\theta}{z}$, $dy=\frac{d\theta}{z}$, ce qui me donne

$$u=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z,\theta)}{\theta}f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

La valeur de z étant infinie, on peut remplacer $f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)$ par $f(x)$, $F(z,\theta)$ par $F(\infty,\theta)$; de là résulte finalement

$$u=\frac{1}{A}f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\infty,\theta)d\theta}{\theta}=f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

La formule (3) se déduit à son tour d'une autre formule dans laquelle la constante A est remplacée par une fonction de x. Représentons en effet par $F(x,z,\theta)$ une fonction de x, z, θ, qui devienne

identiquement nulle lorsqu'on a en même temps $z=0$, $\theta=0$. Supposons en outre cette fonction telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x, \infty, \theta)d\theta}{\theta}$$

ne se réduise ni à zéro ni à l'infini, mais possède au contraire quel que soit x une valeur finie $\varpi(x)$. Cela posé, si l'on fait

$$\frac{z}{\theta} \cdot \frac{dF(x, z, \theta)}{dz} + \frac{dF(x, z, \theta)}{d\theta} = \varphi(x, z, \theta),$$

et si l'on regarde la quantité $\varphi(x, z, \theta)$ comme ne devenant jamais infinie, on aura

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{\varpi(x)} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z, zy - zx) f(y) dy.$$

Nous nous dispenserons de transcrire ici la démonstration de la formule (4), parce que cette démonstration est entièrement semblable à celle que nous avons donnée ci-dessus de la formule (3).

MÉMOIRE

Sur les Équations différentielles linéaires du second ordre;

PAR C. STURM.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 28 septembre 1833.)

La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de formes diverses et aux petits mouvements oscillatoires des corps solides élastiques, des corps flexibles, des liquides et des fluides élastiques, conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre qui renferment une fonction inconnue d'une variable indépendante et ses différentielles première et seconde multipliées par des fonctions données de la variable. On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus

remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les fonctions dont je me suis occupé ont, comme on le verra, des analogies remarquables avec les sinus et les exponentielles, et peuvent, dans certains cas, être évaluées numériquement avec une approximation suffisante à l'aide des tables logarithmiques et trigonométriques. La même théorie fournit les moyens de calculer les racines de ces équations transcendantes qui se présentent dans la physique mathématique, et fait connaître les propriétés singulières dont jouissent ces racines. Le principe sur lequel reposent les théorèmes que je développe, n'a jamais, si je ne me trompe, été employé dans l'analyse, et il ne me paraît pas susceptible de s'étendre à d'autres équations différentielles. Dans un autre Mémoire, j'exposerai les applications de cette théorie à quelques problèmes, et un grand nombre de lois qui en résultent.

I.

Je considère l'équation différentielle

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0; \qquad (1)$$

V est une fonction inconnue de la variable x qui doit satisfaire à cette équation pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données x, X; L, M, N, sont des fonctions de x données pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X. Je commence par ramener l'équation différentielle proposée à la forme suivante,

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (I)$$

On rend les deux équations (1) et (I) identiques, en posant

$$\frac{M}{L} = \frac{dK}{K\,dx}, \quad \text{et } \frac{N}{L} = \frac{G}{K};$$

d'où l'on tire

$$K = e^{\int \frac{M\,dx}{L}}, \quad G = \frac{N}{L} \cdot e^{\int \frac{M\,dx}{L}}.$$

On connaît ainsi les fonctions K et G dans la nouvelle équation (I), qui prend la place de l'équation (1). Mais ordinairement, les équations du second ordre qui proviennent des problèmes de physique mathématique, se présentent immédiatement sous la forme de l'équation (I), de sorte qu'on est dispensé de leur faire subir la transformation que nous venons d'effectuer sur l'équation (1).

L'intégrale complète de l'équation (I) doit contenir deux constantes arbitraires, pour lesquelles on peut prendre les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ correspondantes à une valeur particulière de x. Lorsque ces valeurs sont fixées, la fonction V est entièrement définie par l'équation (I), elle a une valeur déterminée et unique pour chaque valeur de x.

En écrivant l'équation (I) ainsi

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

et en la différentiant ensuite autant de fois qu'on voudra, on voit que si la fonction K devenait nulle pour des valeurs particulières de x, $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, etc., pourraient devenir infinies en même temps que K s'annullerait, et par suite la fonction V pourrait aussi devenir infinie. Pour supprimer cette cause de discontinuité, nous supposerons toujours que K soit constamment positive entre les limites X, X, et que si elle est nulle à l'une de ces limites, on ait en même temps

$\frac{dK}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} + GV = 0$ afin que la valeur de $\frac{d^2V}{dx^2}$ fournie par l'équation (1) ne soit pas infinie. D'ailleurs G est tout-à-fait arbitaire.

II.

Lorsque la fonction V s'évanouit pour une valeur particulière de x, $\frac{dV}{dx}$ ne peut pas s'évanouir en même temps.

En effet, il résulte de l'équation (I) que, si V et $\frac{dV}{dx}$ étaient nulles pour une même valeur de x, toutes les fonctions dérivées $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, ... s'évanouiraient en même temps que V et $\frac{dV}{dx}$, et par suite V serait nulle pour toutes les valeurs de x. Mais voici une démonstration plus rigoureuse de cette proposition.

Supposons que V ne soit pas nulle pour $x = a$. On peut concevoir une fonction V′ qui, prise pour V, satisfasse à l'équation (I) et qui d'ailleurs diffère de V en ce qu'on se donne à volonté pour $x = a$ des valeurs de V′ et de $\frac{dV'}{dx}$ différentes de celles de V et de $\frac{dV}{dx}$.

On a donc les deux équations

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

$$\frac{d\left(K\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + GV' = 0,$$

d'où l'on tire, en multipliant la première par $V'dx$, la seconde par Vdx, et retranchant

$$V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(K\frac{dV'}{dx}\right) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est la différentielle de... $K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right)$; en intégrant, on a donc

$$K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right) = C,$$

C étant une constante arbitraire.

On suppose que V n'est pas nulle pour $x = a$, et l'on peut se donner à volonté pour $x = a$ des valeurs de V' et $\frac{dV'}{dx}$ telles que la formule $K\left(V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}\right)$ ait pour $x = a$ une valeur différente de zéro, qui sera celle de la constante C. On voit alors que pour toute autre valeur de x, on ne peut pas avoir en même temps $V = 0$ et $\frac{dV}{dx} = 0$, puisqu'il s'ensuivrait $C = 0$, contre l'hypothèse.

Ainsi $\frac{dV}{dx}$ ne peut jamais se trouver nulle en même temps que V. Il s'ensuit que V change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Car si V est nulle pour $x = \xi$, il résulte de la définition même de $\frac{dV}{dx}$, que V aura pour les valeurs de x un peu plus grandes que ξ le signe de $\frac{dV}{dx}$ pour $x = \xi$, et le signe contraire pour les valeurs de x un peu moindres que ξ; en sorte que, quand x en croissant atteint et dépasse la valeur ξ, V en s'évanouissant passe de l'état négatif au positif, ou du positif au négatif, selon que la valeur de $\frac{dV}{dx}$ pour $x = \xi$ est positive ou négative.

III.

La fonction V dépend implicitement des fonctions G et K et des valeurs arbitraires A et B qu'on peut attribuer à V et à $\frac{dV}{dx}$ pour une valeur particulière de x.

Nous allons examiner quel changement V éprouvera, si l'on altère en même temps les fonctions G et K pour chaque valeur de x, et les constantes A, B, de quantités infiniment petites, ou pour parler avec plus de rigueur, aussi petites qu'on voudra.

Pour fixer les idées et pour abréger le discours, nous regarderons les quantités G, K, A, B, comme fonctions d'un paramètre indéter-

miné et indépendant de x que nous désignerons par m; elles seront des fonctions de m tout-à-fait arbitraires, assujetties à la seule condition de varier par degrés insensibles en même temps que m : on pourra d'ailleurs ne pas faire varier ces quantités G, K, A, B, toutes à la fois avec m; on pourra supposer aussi que la fonction G ou K reste la même pour certaines valeurs de x, malgré la variation de m; en un mot, les altérations infiniment petites que G, K, A, B, éprouveront quand m variera infiniment peu, seront entièrement arbitraires.

Pour exprimer que ces fonctions G, K, varient non-seulement par la variation de x, mais encore par celle du paramètre m, nous les désignerons, quand il en sera besoin, par $G(x, m)$ et $K(x, m)$. De même V qui dépend implicitement de x et de m sera représentée par $V(x, m)$, et dans cette expression, on pourra remplacer x ou m par telle valeur particulière qu'on voudra.

On peut considérer les deux variables indépendantes x et m comme étant les coordonnées rectangulaires x et y d'un point pris à volonté sur un plan horizontal, et concevoir une ordonnée z perpendiculaire à ce plan en ce point-là, et égale à la valeur de la fonction $G(x, m)$ correspondante aux valeurs actuelles de x et de m. On aura ainsi, en faisant varier x et m, une surface représentée par l'équation $z = G(x, m)$. A chaque valeur particulière de m correspond sur cette surface une courbe dont le plan est parallèle au plan xz à la distance m, et dont les ordonnées verticales représentent les valeurs successives de la fonction G pour cette valeur de m. Cette courbe change de forme insensiblement et engendre la surface quand m varie par degrés insensibles. On peut de même imaginer deux autres surfaces dont les ordonnées verticales représentent les deux fonctions $K(x, m)$ et $V(x, m)$.

IV.

En concevant ainsi les altérations arbitraires des quantités G, K, A, B, comme produites par la seule variation du paramètre m, faisons maintenant varier m dans l'équation (I). Désignons par la caractéristique δ cette espèce de variation, indépendante de celle indiquée par d qui se rapporte à x.

En observant que l'on a en général pour toute fonction P de x et de m,

$$\delta dP = d\delta P,$$

ce qui revient à
$$\frac{d\left(\frac{dP}{dx}\right)}{dm} = \frac{d\left(\frac{dP}{dm}\right)}{dx}$$

l'équation
$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0, \quad (1)$$

différentiée par rapport à m, donnera

$$\frac{d.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + G\delta V + V\delta G = 0. \quad (2)$$

Multiplions l'équation (1) par $\delta V.dx$, l'équation (2) par $-V.dx$, et ajoutons les produits, nous aurons

$$\delta V.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right) = V^2\delta G.dx. \quad (3)$$

Intégrons les deux membres de cette équation, par rapport à x, depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur indéterminée de x.

En intégrant par parties le premier terme $\delta V.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)$, sans fixer les limites de l'intégration, on trouve

$$\int\delta V.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) = \delta V.K\frac{dV}{dx} - \int K\frac{dV}{dx}.\frac{d\delta V}{dx}.dx.$$

On a de même

$$\int V.d.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right) = V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - \int\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right).\frac{dV}{dx}.dx;$$

ou bien $\left[\text{à cause de } \delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right) = \frac{dV}{dx}.\delta K + K\frac{\delta dV}{dx}\right]$

$$\int V.d.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right) = V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - \int\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx - \int K\frac{\delta dV}{dx}.\frac{dV}{dx}.dx.$$

En retranchant cette dernière intégrale de la précédente, on aura

donc

$$\int \delta V.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)-\int V.d.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\int\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.$$

C'est l'intégrale indéfinie du premier membre de l'équation (3) : par conséquent en intégrant cette équation depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on aura

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C+\int_{\mathrm{x}}^{x}V^2.\delta G.dx-\int_{\mathrm{x}}^{x}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx. \quad (4)$$

La constante C introduite par l'intégration est égale à la valeur de la formule $\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)$, pour $x=\mathrm{x}$, et l'on peut attribuer à δV et à $\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)$ des valeurs arbitraires pour $x=\mathrm{x}$.

Si au lieu d'intégrer l'équation (3) entre les limites x et x, on l'intègre entre les limites x et X, on aura de même l'équation suivante :

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C'-\int_{x}^{\mathrm{X}}V^2.\delta G.dx+\int_{x}^{\mathrm{X}}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx, \quad (5)$$

la constante C′ étant égale à la valeur de $\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x = \mathrm{X}$.

On remarquera qu'on a identiquement

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=\left(K\frac{dV}{dx}\right).\delta.\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right), \quad (6)$$

et aussi

$$\delta V.K\frac{dV}{dx}-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right)=-V^2.\delta.\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right). \quad (7)$$

V.

La formule (4) peut encore se déduire d'une autre qu'il est bon de connaître.

Combinons l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

avec cette autre équation de même forme

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

dans laquelle G' et K' sont des fonctions quelconques de x différentes de G et de K. Ces deux équations donnent la suivante :

$$V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right) = (G' - G)\,VV'dx. \qquad (8)$$

Or, on a

$$\int V'.d.\left(K\frac{dV}{dx}\right) = V'.K\,\frac{dV}{dx} - \int K\frac{dV}{dx}.\frac{dV'}{dx}.dx.$$

$$\int V.d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right) = V.K'\,\frac{dV'}{dx} - \int K'\frac{dV'}{dx}.\frac{dV}{dx}.dx.$$

Conséquemment en intégrant l'équation (8) depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on aura (9)

$$V'.K\frac{dV}{dx} - V.K'\frac{dV'}{dx} = C + \int_{\mathrm{x}}^{x} VV'(G'-G)dx - \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dV}{dx}.\frac{dV'}{dx}.(K'-K)dx.$$

La constante arbitraire C étant égale à la valeur du premier membre $V'.K\frac{dV}{dx} - V.K'\frac{dV'}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$.

Si l'on suppose actuellement les différences $G' - G$, $K' - K$, infiniment petites, et les valeurs de V' et de $K'\frac{dV'}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ infiniment peu différentes de celles de V et de $K\frac{dV}{dx}$, V' différera infiniment peu de V, et en faisant $G' = G + \delta G$, $K' = K + \delta K$, $V' = V + \delta V$ dans l'équation (9), elle deviendra l'équation (4) du numéro précédent.

Il reviendrait au même de différentier cette équation (9), par rapport au paramètre m qui n'entre que dans G, K et V et non dans

G′, K′ et V′, et de faire après cette différentiation, $G' = G$, $K' = K$ et par suite $V' = V$, en prenant d'ailleurs la constante C égale à la valeur du premier membre pour $x = \mathrm{x}$.

On arrivera de la même manière à la formule (5).

VI.

A l'inspection de l'équation (4), on reconnaît que l'expression $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(K \frac{dV}{dx}\right)$ équivalente à $\left(K \frac{dV}{dx}\right)^2 \delta . \left(\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}\right)$ et aussi à $-V^2 . \delta . \left(\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}\right)$ aura pour chaque valeur de x une valeur différente de zéro et positive, si le second membre de cette équation (4) est positif pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. Or, on le rendra tel, si, en supposant δm positive, on prend la constante C positive ou nulle, la variation arbitraire δG aussi positive ou nulle, et δK négative ou nulle, pourvu toutefois qu'on ne suppose pas ces quantités C, δG et δK, nulles toutes trois en même temps. En considérant que C représente la valeur de $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x = \mathrm{x}$, on voit que prendre C positive ou nulle, c'est supposer que la valeur du rapport $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ augmente ou du moins ne diminue pas, quand on fait croître m, ou ce qui revient au même, que la valeur du rapport inverse $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ diminue ou du moins n'augmente pas, quand m augmente; en particulier, si l'on a $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, il faut admettre que la valeur de $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient positive, ou demeure nulle, quand m augmente; et, si l'on a $K \frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, que celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient négative ou reste nulle, quand m augmente.

Lorsqu'on fait δG positive et δK négative, on suppose que, pour chaque valeur de x la valeur de G augmente et celle de K diminue, tandis que m augmente. Et quand on fait δG ou δK nulle pour certaines valeurs de x, alors pour ces valeurs-là, G ou K conserve la même grandeur, malgré la variation de m.

En admettant donc ces hypothèses qui rendent le second membre de l'équation (4) positif, et observant que le premier..... $\delta V . K \frac{dV}{dx} - V . \delta . \left(K \frac{dV}{dx}\right)$ peut être présenté sous les deux formes (6) et (7), on voit, que pour chaque valeur de x, la variation $\delta . \left(\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}\right)$ sera positive, et $\delta . \left(\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}\right)$ négative, ce qui signifie que la valeur de l'expression $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ augmente quand m augmente, ou que celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminue. On a donc cette proposition :

Si pour chaque valeur de x la valeur de la fonction G augmente infiniment peu, si en même temps K diminue, et si la valeur du rapport $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ augmente ou si celle du rapport inverse $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminue, pour toute autre valeur de x plus grande que x, la valeur de $\frac{V}{K \frac{dV}{dx}}$ augmentera ou celle de $\frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ diminuera infiniment peu. Et il en sera de même, si les altérations indiquées n'ont pas lieu toutes à la fois, pourvu qu'une d'elles au moins ait lieu.

VII.

En admettant toujours les hypothèses énoncées dans le numéro précédent, nous allons maintenant considérer les différentes valeurs de x qui annullent la fonction V et montrer que chacune de ces va-

leurs diminue quand m augmente. Cette proposition est fondée sur ce que, d'après la formule (4), toutes les fois que V est nulle, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe.

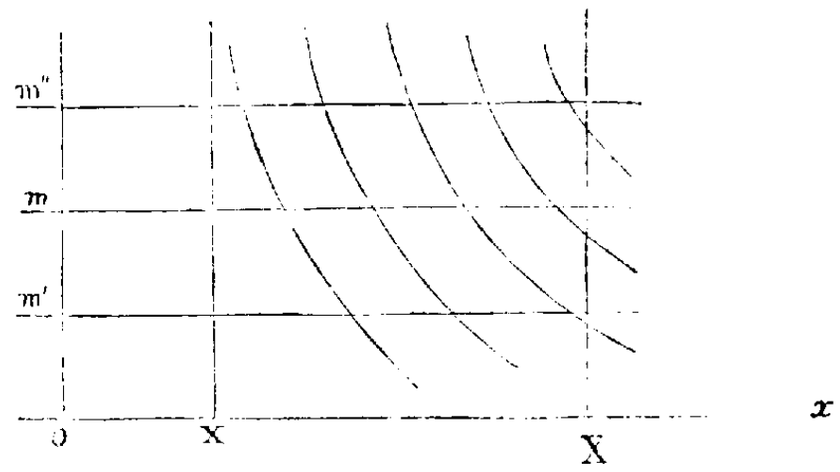
En effet, supposons que V soit nulle pour des valeurs particulières de x et de m. Si l'on donne à ces valeurs de x et de m des accroissements infiniment petits dx et dm, la fonction V deviendra $V + \frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dm}\,dm$, et cette fonction sera encore nulle pour ces nouvelles valeurs $x+dx$ et $m+dm$, si l'on a $\frac{dV}{dx}\,dx+\frac{dV}{dm}\,dm=0$.

On tire de là $\frac{dm}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dm}}$.

Cette valeur du rapport $\frac{dm}{dx}$ est négative; car, en vertu de la formule (4), lorsque V est nulle, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ou $\frac{dV}{dm}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe. Les accroissements infiniment petits dx et dm qu'il faut donner aux valeurs de x et de m qui annullent V pour avoir toujours $V=0$, doivent donc être de signes contraires; en d'autres termes, chaque valeur de x qui annulle V diminue quand m augmente, et augmente quand m diminue.

On peut rendre plus sensible la vérité de cette proposition par la considération de la courbe qui est le lieu géométrique des points pour lesquels on a $V(x, m)=0$, en regardant x et m comme des coordonnées relatives à deux axes tracés sur un plan. Supposons qu'on passe d'un point de cette courbe ayant pour coordonnées x et m à un autre point infiniment voisin sur la même courbe dont les coordonnées soient $x+dx$ et $m+dm$. On aura le rapport des accroissements infiniment petits dx et dm en différentiant l'équation de la courbe $V(x, m)=0$. On en tire $\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dm}\,dm=0$; puis $\frac{dm}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dm}}$, valeur négative, à cause de l'équation (4). Donc quand on passe d'un point de la courbe $V(x, m)=0$ à un autre point infiniment voisin sur la même courbe, la valeur de m augmente, tandis que celle de

x diminue, ou bien au contraire m diminue et x augmente. Ainsi, chaque branche de cette courbe, en s'éloignant de l'axe des x, se dirige vers la gauche du côté des x négatives, comme l'indique la figure.



VIII.

La proposition dont il s'agit peut encore se démontrer d'une manière tout-à-fait rigoureuse, sans aucune considération de quantités infiniment petites, comme nous allons l'expliquer.

Attribuons à l'indéterminée m une valeur particulière quelconque μ, et supposons que la fonction $V(x, \mu)$ s'évanouisse pour différentes valeurs de x. Nous avons vu, n° II, que cette fonction doit changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit.

Attribuons encore à m une nouvelle valeur μ' qui surpasse la première μ d'une quantité aussi petite qu'on voudra. Nous allons démontrer que la nouvelle fonction $V(x, \mu')$ s'évanouira et changera de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que $V(x, \mu)$, pour des valeurs de x un peu moindres que celles qui annullent $V(x, \mu)$.

Soit ξ l'une quelconque des valeurs de x pour lesquelles $V(x, \mu)$ s'évanouit, de sorte que $V(\xi, \mu) = 0$. D'après la formule (4), $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ doivent avoir, pour $x = \xi$ et $m = \mu$ des valeurs différentes de zéro et de même signe.

Attribuons à x une valeur a plus petite que ξ, telle que pour cette valeur a et pour toute autre comprise entre a et ξ la fonction $V(x, \mu)$ ne soit point nulle et conserve constamment le même signe : on peut toujours prendre a assez près de ξ pour que cette condition soit remplie. Alors $V(x, \mu)$ aura pour $x = a$ le même signe qu'elle a pour

les valeurs de x un peu moindres que ξ, et par conséquent un signe contraire au signe de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi$; car pour les valeurs de x un peu plus petites que ξ, $V(x, \mu)$ a un signe contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Considérons maintenant $V(x, \mu')$: si l'on y fait d'abord $x=a$, $V(a, \mu')$ aura une valeur différente de zéro et de même signe que $V(a, \mu)$ qui n'est pas nulle; en effet on peut toujours prendre μ' assez peu différente de μ, pour qu'en faisant croître m depuis μ jusqu'à μ', la fonction $V(a, m)$ ne change pas de signe. Ainsi $V(x, \mu')$ aura comme $V(x, \mu)$ pour $x=a$, un signe contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Si l'on fait $x=\xi$, $V(\xi, \mu')$ aura le signe de $\frac{\delta V}{\delta m}$ pour $x=\xi$ et $m=\mu$. Car V étant nulle pour $x=\xi$ et $m=\mu$, doit prendre pour $x=\xi$ et pour une valeur de m, telle que μ', un peu plus grande que μ, le signe de la fonction dérivée $\frac{\delta V}{\delta m}(\xi, \mu)$. Or, en vertu de l'équation (4) dont le second membre est positif, $\frac{\delta V}{\delta m}$ a le même signe que $\frac{dV}{dx}$, toutes les fois que V est nulle. Donc $V(x, \mu')$ a pour $x=\xi$ le même signe que $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$.

Mais on a vu tout à l'heure que, pour $x=a$, $V(x, \mu')$ a le signe contraire à celui de cette même quantité $\frac{dV}{dx}(\xi, \mu)$; donc $V(x, \mu')$ ayant pour $x=a$ et pour $x=\xi$ deux valeurs de signes contraires, doit s'évanouir et changer de signe au moins une fois pour une valeur de x comprise entre a et ξ.

On conçoit que cette valeur de x plus petite que ξ qui annulle $V(x, \mu')$ doit différer infiniment peu de ξ, si μ' surpasse μ d'une quantité infiniment petite, puisqu'on pourra prendre l'autre limite a aussi près qu'on voudra de ξ, en remplissant toujours la condition que $V(x, \mu)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de a à ξ.

On peut représenter et résumer ce qui précède par le tableau suivant :

Pour $x = a$.....				ξ	
on a $V(x, \mu)$	— — — —			o	quand, pour $x=\xi$ et $m=\mu$,
$V(x, \mu')$	—		o	+	$\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont le signe +,

ou bien,

$V(x, \mu)$	+ + + +			o	quand pour $x=\xi$ et $m=\mu$,
$V(x, \mu')$	+		o	—	$\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont le signe —.

Le o placé entre les deux signes contraires de $V(x, \mu')$ pour $x=a$ et $x=\xi$ indique l'évanouissement de cette fonction pour une valeur de x comprise entre a et ξ.

On vient de voir qu'à chaque valeur de x telle que ξ qui annulle $V(x, \mu)$ correspond toujours une valeur de x un peu moindre que ξ qui annulle $V(x, \mu')$, et l'on remarquera que cette proposition subsiste dans le cas même où la plus grande des valeurs de x désignées par ξ qui annullent $V(x, \mu)$ serait précisément égale à la limite X.

Il est nécessaire de prouver aussi que réciproquement à chaque valeur de x comprise entre x et X qui annulle $V(x, \mu')$ correspond une valeur de x un peu plus grande qui annulle $V(x, \mu)$. La démonstration de cette proposition inverse est semblable à la précédente. Nous l'énoncerons en peu de mots.

Supposons que $V(x, \mu')$ soit nulle pour $x=\xi'$. On peut donner à x une valeur b plus grande que ξ' telle que $V(x, \mu')$ ait toujours le même signe quand x croîtra depuis ξ' jusqu'à b; ce signe sera celui de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=\xi'$ et $m=\mu'$. La quantité $V(b, \mu)$ aura le même signe que $V(b, \mu')$ si la différence entre μ et μ' est suffisamment petite. Comme on a $V(\xi', \mu')=o$, et que μ est plus petite que μ', $V(\xi', \mu)$ aura un signe contraire à celui de $\frac{\delta V}{\delta m}(\xi', \mu')$ et conséquemment contraire à celui de $\frac{dV}{dx}(\xi', \mu')$ en vertu de l'équation (1). Mais $V(b, \mu)$ a le même signe que cette quantité $\frac{dV}{dx}(\xi', \mu')$; $V(x, \mu)$ a donc deux valeurs de signes contraires pour $x=\xi'$ et pour $x=b$; ainsi $V(x, \mu)$ doit s'évanouir et changer de signe pour une valeur de x comprise entre ξ' et b.

Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

	Pour $x=\xi'$.....		b	
on a	$V(x, \mu)$	$-$ o	$+$	quand, pour $x=\xi$ et $m=\mu'$,
	$V(x, \mu')$	o $+++++$	$+$	$\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont le signe $+$,

ou bien,

$V(x, \mu)$	$+$ o	$-$	quand $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont le signe $-$.
$V(x, \mu')$	o $-----$	$-$	

On a supposé ici $\xi' < X$. Il n'y a pas lieu de s'occuper du cas où l'on aurait $\xi'=X$, c'est-à-dire $V(X, \mu')=o$, puisqu'on ne fait pas croître x au-delà de X.

IX.

Il est donc prouvé qu'à chaque valeur ξ de x qui annulle $V(x, \mu)$, valeur qui peut être inférieure ou égale à X, correspond une valeur de x un peu moindre que ξ qui annulle $V(x, \mu')$, *et vice versâ ;* qu'à chaque valeur ξ' de x moindre que X qui annulle $V(x, \mu')$ correspond une valeur de x un peu plus grande que ξ' qui annulle $V(x, \mu)$. On déduit de là les conséquences suivantes, en supposant que les deux fonctions $V(x, \mu)$ et $V(x, \mu')$ aient pour $x=x$ des valeurs différentes de zéro et de même signe, outre la condition admise n° VI, que la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=x$ diminue quand m croît depuis μ jusqu'à μ'.

Si $V(x, \mu)$ et $V(x, \mu')$ ont toutes deux des valeurs différentes de zéro pour $x=X$, la fonction $V(x, \mu')$ s'évanouit et change de signe précisément le même nombre de fois que $V(x, \mu)$ entre les limites x et X, et pour des valeurs de x un peu plus petites que celles qui annullent $V(x, \mu)$.

Si $V(x, \mu)$ est nulle pour $x=X$, $V(x, \mu')$ s'évanouit encore autant de fois que $V(x, \mu)$ pour des valeurs de x un peu moindres que celles qui annullent $V(x, \mu)$, y compris X. Mais entre les limites x et X, $V(x, \mu')$ change de signe une fois de plus que $V(x, \mu)$ et ce

changement de signe excédant de $V(x, \mu')$ a lieu pour une valeur de x un peu moindre que X. Car, d'après ce qu'on a démontré n° VIII, si l'on donne à x une valeur a moindre que X, telle que $V(x, \mu)$ conserve constamment le même signe dans l'intervalle de a à X, $V(x, \mu')$ changera de signe en s'évanouissant une seule fois, avant que x atteigne la limite X pour laquelle on a $V(X, \mu) = 0$.

Enfin, si $V(x, \mu')$ est nulle pour $x = X$, $V(x, \mu)$ s'évanouit une fois de moins que $V(x, \mu')$, mais elle change de signe le même nombre de fois, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. En effet, si l'on désigne par a une valeur de x moindre que X, telle que $V(x, \mu')$ ne change pas de signe dans l'intervalle de a à X, la fonction $V(x, \mu)$ aura pour $x = a$ le même signe que $V(x, \mu')$ et conservera ce même signe pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à X inclusivement, puisque si elle s'annullait pour une valeur ξ de x comprise entre a et X ou même pour $x = X$, $V(x, \mu')$ devrait s'évanouir aussi et changer de signe pour une valeur de x un peu moindre que ξ ou que X dans l'intervalle de a à X, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est aisé de voir qu'on arriverait aux mêmes conséquences, si la limite X au lieu d'être constante augmentait insensiblement, tandis que m passerait de la valeur μ à la valeur μ'.

X.

On voit par là comment le nombre des changements de signe de la fonction $V(x, m)$ entre les limites x et X pour chaque valeur attribuée à m, peut s'altérer quand on fait passer m par degrés insensibles d'une valeur quelconque à une autre plus grande. On admet que tandis que m augmente, la fonction $V(x, m)$ ne change pas de signe pour $x = x$, et que de plus, comme on l'a dit n° VI, la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = x$ diminue ou demeure constante.

Si l'on fait croître m à partir d'une valeur quelconque m', tant que la fonction $V(x, m)$ ne s'évanouira pas pour $x = X$, cette fonction aura toujours, entre les limites x et X, le même nombre de changements

de signe qu'elle a d'abord pour $m=m'$, et les différentes valeurs de x qui l'annullent diminueront par degrés insensibles.

Quand m atteindra une valeur pour laquelle $V(X, m)$ s'évanouira, la fonction $V(x, m)$ aura encore pour cette valeur de m le même nombre de changements de signe qu'elle avait pour les valeurs précédentes de m et pour $m=m'$. Mais dès que m dépassera la valeur dont il s'agit, $V(x, m)$ acquerra un nouveau changement de signe en s'évanouissant près de la limite X; et en général le nombre des changements de signe de $V(x, m)$ entre x et X augmentera toujours d'une unité, chaque fois que m en croissant dépassera une nouvelle valeur qui annullera $V(X, m)$.

En conséquence, si m croît depuis une valeur quelconque m' jusqu'à une autre valeur plus grande m'', autant il y aura de valeurs de m entre m' et m'' qui annulleront $V(X, m)$, autant la fonction $V(x, m'')$ aura de changements de signe de plus que $V(x, m')$ entre les limites x et X; et les valeurs de x qui annulleront $V(x, m')$ seront respectivement plus grandes que celles de même rang à partir de x qui annulleront $V(x, m'')$.

On peut rendre cette proposition plus sensible en considérant comme au n° VII la courbe, lieu des points pour lesquels on a $V(x,m)=0$ entre les limites x et X; cette courbe est composée de plusieurs branches qui en s'éloignant de l'axe des x se portent toujours vers la gauche du côté des x négatives. (*Voyez* la figure placée à la fin du n° VII.)

Nous désignerons dorénavant par Δ la différence entre les nombres de changements de signe des deux fonctions $V(x, m')$ et $V(x, m'')$.

Il ne faut pas oublier que $V(x, m')$ aussi bien que $V(x, m'')$ change de signe pour chaque valeur de x qui l'annulle, et que $V(X, m)$ change aussi de signe pour chaque valeur de m qui l'annulle; ce qui résulte de ce que ni $\frac{dV}{dx}$ ni $\frac{\delta V}{\delta m}$ ne peut s'évanouir en même temps que V, à cause de l'équation (4).

On peut dire en d'autres termes que les équations $V(x, m')=0$, $V(x, m'')=0$, $V(X, m)=0$, n'ont point de racines égales.

XI.

Maintenant on remarquera qu'il est permis de regarder la fonction G (x, m') comme une fonction de x tout-à-fait arbitraire, et G (x, m'') comme une autre fonction de x également arbitraire, pourvu qu'elle soit pour chaque valeur de x plus grande que la première fonction G (x, m') ou au moins égale à G (x, m').

En effet, si l'on se donne à volonté entre les limites x et X deux fonctions G′ et G″, telles que pour chaque valeur de x, G″ soit toujours plus grande que G′, ou au moins égale à G′, on pourra toujours concevoir une troisième fonction G (x, m) contenant avec x un paramètre indéterminé m, qui devienne le même que G′, quand on attribuera à m la valeur particulière m', la même que G″ quand on fera $m = m''$, et qui en outre pour une valeur quelconque de x croisse par degrés insensibles ou du moins ne décroisse pas, lorsqu'on fera croître m d'une manière continue depuis m' jusqu'à m''. Il y aura toujours une infinité de fonctions G (x, m) qui rempliront ces conditions.

La détermination d'une telle fonction G (x, m) revient à celle d'une surface assujettie d'abord à passer par deux courbes données dans deux plans parallèles au plan xz et représentées la première par les équations $y = m'$, $z = G'$, la seconde par les équations $y = m''$, $z = G''$, et qui soit telle que dans chacune de ses sections parallèles au plan yz à la distance x, les ordonnées $z = G(x, m)$ croissent toujours en même temps que $y = m$, depuis G′ jusqu'à G″, ou du moins ne décroissent pas. Quand pour une valeur de x particulière, G′ et G″ auront la même valeur, G aura aussi nécessairement cette même valeur.

Parmi toutes les surfaces en nombre infini qui rempliront les conditions prescrites, on peut donner pour exemple, la surface gauche engendrée par une ligne droite indéfinie qui se meut en demeurant parallèle au plan yz et glissant sur les deux courbes données.

Les deux fonctions K (x, m') et K (x, m'') peuvent de même être remplacées par deux fonctions arbitraires de x, K′ et K″, pourvu que K′ et K″ soient positives entre les limites x et X, et que pour une même valeur quelconque de x, K″ ait toujours une valeur inférieure ou tout au plus égale à celle de K′; K′ et K″ ne peuvent être nulles

que pour $x = \mathrm{x}$; pour toute autre valeur de x, K′ et K″ doivent avoir des valeurs plus grandes que o.

Cela posé, le théorème auquel nous sommes parvenus à la fin du n° X deviendra celui que nous allons énoncer.

XII.

Théorème. Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}'\,\mathrm{V}' = \mathrm{o},$$

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}''\,\mathrm{V}'' = \mathrm{o},$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux limites x et X et pour lesquelles on admet les conditions suivantes :

G′ est une fonction arbitraire de x donnée entre les limites x et X; G″ est une autre fonction de x assujettie à la seule condition d'avoir pour chaque valeur de x une valeur supérieure ou au moins égale à celle de G′. Les deux fonctions K′ et K″ sont positives pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X (*). En outre, pour chaque valeur de x, K″ doit être inférieure ou au plus égale à K′. On suppose encore que la valeur du rapport $\frac{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''}$ pour $x = \mathrm{x}$ ne soit pas plus grande que celle de $\frac{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'}$.

(*) K′ aussi bien que K″ peut être nulle pour $x = \mathrm{x}$, pourvu qu'on ait en même temps

$$\frac{d\mathrm{K}'}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{V}'}{dx} + \mathrm{G}'\mathrm{V}' = \mathrm{o} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathrm{K}''}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{V}''}{dx} + \mathrm{G}''\mathrm{V}'' = \mathrm{o} \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

selon la remarque qui termine le n° I.

Ces conditions

$$G'' \geqq G', \qquad K'' \leqq K',$$

et

$$\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}, \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

étant admises, la fonction V'' s'évanouira et changera de signe autant de fois ou plus de fois que V' entre les limites x et X; et si l'on considère par ordre de grandeur à partir de x les différentes valeurs de x qui annullent V' et V'', les valeurs de x qui annullent V' seront respectivement plus grandes que celles de même rang qui annullent V''.

Concevons une nouvelle fonction G ou G (x, m) contenant avec x un paramètre indéterminé m, qui devienne la même que G' quand on attribue à m une valeur particulière m', la même que G'' quand on fait $m = m''$, et dont les valeurs successives correspondantes à une même valeur quelconque de x, croissent d'une manière continue ou du moins ne décroissent pas, quand on fait croître m depuis m' jusqu'à m''. Il y aura toujours une infinité de fonctions G (x, m) qui rempliront ces conditions. Soit de même K ou K (x, m) une autre fonction de x et de m qui devienne égale à K' pour $m = m'$, à K'' pour $m = m''$, et qui décroisse ou du moins ne croisse pas, quand m croît depuis m' jusqu'à m'', x demeurant constante. Soit une fonction V déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

et supposons que pour chaque valeur de m, V ait toujours pour $x = \mathrm{x}$ un même signe qui soit aussi commun à V' et à V'', et que la valeur du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$, d'abord égale à celle de $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ quand $m = m'$, décroisse quand m augmente ou du moins ne croisse pas, et devienne égale à celle de $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$ quand

m devient m''. Cela posé, l'excès Δ du nombre des changements de signe de V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V', est précisément égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction $V(X, m)$ lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

D'ailleurs, d'après ce qu'on a dit plus haut, V doit s'évanouir et changer de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que V' et au plus autant de fois que V'', et chaque valeur de x qui annulle V est plus petite que la valeur de x de même rang qui annulle V', et plus grande que la valeur de x de même rang qui annulle V''.

Dans la première partie de ce théorème, il n'est pas nécessaire de supposer que les fonctions V' et V'' aient le même signe pour $x = \mathrm{x}$. A la vérité nous avons admis cette hypothèse dans notre démonstration, n°s IX et X. Mais la première partie du théorème a toujours lieu, quand même les valeurs de V' et de V'' pour $x = \mathrm{x}$ sont de signes contraires; car on peut changer le signe de l'une de ces fonctions, par exemple de V', sans qu'elle cesse de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

et à la condition $\dfrac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} > \dfrac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$ pour $x = \mathrm{x}$.

XII *bis*.

On a supposé dans tout ce qui précède, que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', la fonction $V(x, m)$ conserve toujours le même signe pour $x = \mathrm{x}$ et que d'ailleurs la valeur de $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ diminue ou demeure constante. Mais on peut supposer encore que cette fonction $V(x, m)$ soit nulle pour $x = \mathrm{x}$ quand $m = m'$, ou quand $m = m''$, ou enfin pour toutes les valeurs de m depuis m' jusqu'à m'', sans qu'elle change de signe. On peut étendre le théorème précédent à ces différents cas particuliers, en ayant égard à l'hypothèse adoptée n° VI

sur la valeur de $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ ou de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$.

Si l'on suppose $V(x, m')$ ou $V' = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème qui vient d'être énoncé aura toujours lieu, pourvu que l'on considère le rapport $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ comme égal à $+\infty$ pour $x = \mathrm{x}$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur x parmi celles qui annullent V', en les comparant avec celles qui annullent V'' et V. En effet, on a ici $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $m = m'$; quand m croît au-delà de m', la valeur du rapport $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$ doit augmenter, en vertu de l'hypothèse établie n° VI, si V ne demeure pas nulle pour $x = \mathrm{x}$. Donc la valeur de $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ pour $x = \mathrm{x}$, qui est nulle quand $m = m'$, devient plus grande que zéro, quand m croît au-delà de m'. Alors le rapport inverse $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ a une valeur positive d'autant plus grande que m diffère moins de m'. C'est pourquoi quand $m = m'$, on doit considérer la valeur de $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x = \mathrm{x}$ comme égale à $+\infty$; en même temps on doit omettre la valeur x parmi celles qui annullent V', puisque quand m augmente, la fonction V n'est plus nulle pour $x = \mathrm{x}$.

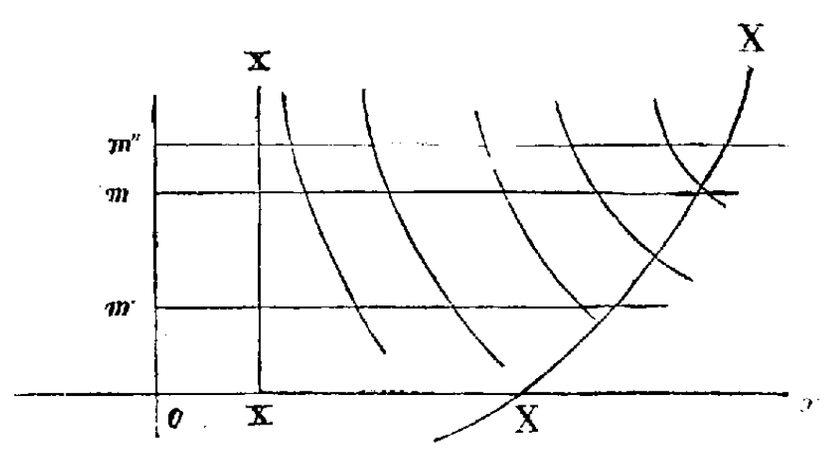
Si l'on a $V'' = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème subsiste encore en supposant $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} = -\infty$ pour $x = \mathrm{x}$ et en tenant compte de la valeur x parmi celles qui annullent V''. Car quand m est un peu moindre que m'', $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ a pour $x = \mathrm{x}$ une valeur négative d'autant plus considérable que m approche plus de m''; et la fonction V s'évanouit pour une va-

leur de x un peu plus grande que x, qui diminue jusqu'à devenir égale à x, quand m atteint la valeur m''.

Enfin si l'on a à la fois $V'=0$ et $V''=0$ pour $x=x$, on doit supposer aussi $V=0$ pour $x=x$, pour toutes les valeurs de m entre m' et m'', et il faut alors dans l'énoncé du théorème n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus grandes que x qui annullent V', V'' et V. On a constamment, dans ce cas, $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}=0$ pour $x=x$, quelle que soit m.

La considération de la courbe $V(x, m)=0$ représentée n° VII peut servir à faire comprendre comment le théorème subsiste dans ces cas particuliers, en adoptant les conventions et restrictions énoncées.

On peut donner encore plus d'extension au théorème précédent, en supposant dans son énoncé que la limite X au lieu d'être constante, augmente insensiblement en même temps que m. Cette extension résulte de la remarque qui a été faite à la fin du n° X, et l'on peut s'en rendre compte par l'inspection de la figure ci-jointe.



XIII.

On peut sans altérer les fonctions G et K dans l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0, \qquad (1)$$

faire varier seulement le rapport de V à $K\frac{dV}{dx}$ pour $x=$.

La formule (4) se réduit alors à

$$\delta V.\ K\frac{dV}{dx} - V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}\right) = C.$$

La constante C est égale à la valeur arbitraire du premier membre pour $x = x$, et prendre cette constante positive, c'est supposer que la valeur du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = x$, que nous désignerons par h, diminue, quand m augmente. La démonstration précédente comprend ce cas particulier dans lequel les variations δG et δK sont nulles. On en conclut que lorsque h diminue, les valeurs de x qui annullent V diminuent par degrés insensibles, et conséquemment, si h augmente, ces mêmes valeurs augmentent.

Désignons par V_1 et V_2 deux fonctions qui substituées à la place de V satisfassent à l'équation (I) et en outre aux conditions

$$V_1 = 0,\ \frac{dV_1}{dx} = 1,\ V_2 = 1,\ \frac{dV_2}{dx} = 0,\ \text{pour } x = x:$$

la valeur générale de V sera

$$V = AV_1 + BV_2,$$

A et B étant des constantes arbitraires; V_2 est une valeur particulière de V qui satisfait à l'équation (I) et correspond à l'hypothèse de $h = 0$. V_1 est de même une valeur de V en supposant $h = \pm\infty$.

Cela posé, on a la proposition suivante : Si l'on fait croître la valeur du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = x$ par degrés insensibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, chaque valeur de x qui annulle V augmente continuellement, en passant par toutes les grandeurs comprises entre deux valeurs consécutives qui annullent V_1; quand h est égale à zéro, on a les valeurs de x qui annullent V_2.

Il suit de là que deux valeurs de x qui annullent V_1 comprennent toujours entre elles une valeur de x qui annulle V et n'en comprennent qu'une : elles comprennent aussi une valeur de x qui annulle V_2 et n'en comprennent qu'une; et cette valeur de x qui annulle V est plus petite ou plus grande que celle de même rang qui an-

nulle V_2, selon que la valeur h de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=x$ est négative ou positive.

XIV.

La proposition précédente admet une autre démonstration fort simple.

Soient les deux équations

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0,$$

$$\frac{d.\left(K\frac{dV'}{dx}\right)}{dx}+GV'=0.$$

On en tire, comme au n° II,

$$K\left(V\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV}{dx}\right)=C. \qquad (10)$$

La constante C est égale à la valeur arbitraire de l'expression $K\left(V\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV}{dx}\right)$ pour $x=x$. Cette constante C sera positive si l'on a $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}<\frac{K\frac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x=x$, V et V′ ayant d'ailleurs pour $x=x$ des valeurs de même signe qu'on peut rendre positives.

Cela posé, soient α et β deux valeurs de x consécutives qui annullent V′. Il résulte de l'équation (10), comme on l'a déjà vu n° II, que pour ces valeurs de x, $\frac{dV'}{dx}$ ne peut pas être nulle en même temps que V′, et il est aisé de voir que $\frac{dV'}{dx}$ aura des valeurs de signes contraires pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$. En effet, pour les valeurs de x un peu plus grandes que α, V′ et $\frac{dV'}{dx}$ ont un même signe qui est celui

de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\alpha$, tandis que pour les valeurs de x un peu plus petites que β, V′ a un signe contraire à celui de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\beta$. Mais V′ a un même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β : donc $\frac{dV'}{dx}$ a pour $x=\beta$, un signe contraire à celui qu'elle a pour $x=\alpha$.

Maintenant l'équation (10) où C est positive, fait voir que, toutes les fois que V′ est nulle, V a le même signe que $\frac{dV'}{dx}$. Conséquemment V a pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$ deux valeurs de signes contraires; V s'évanouit donc au moins une fois pour une valeur de x comprise entre α et β.

On reconnaîtra de la même manière que deux valeurs de x consécutives qui annullent V doivent comprendre au moins une valeur de x qui annulle V′.

Donc ces deux fonctions V, V′ s'évanouiront pour des valeurs croissantes de x, l'une après l'autre alternativement. V s'évanouira la première. Car si l'on suppose que α soit la plus petite valeur de x qui annulle V′, les valeurs de V et de V′ pour $x=\mathrm{x}$ étant toujours censées positives, la valeur de $\frac{dV'}{dx}$ pour $x=\alpha$ sera négative, puisque V′ doit en s'évanouissant pour $x=\alpha$ passer du positif au négatif; V sera donc aussi négative pour $x=\alpha$, d'après l'équation (10); mais elle est positive pour $x=\mathrm{x}$; donc V change de signe et s'annulle pour une valeur de x plus petite que α, c'est-à-dire que V s'annulle avant V′.

Il suit de là que si l'on attribue au rapport $\frac{\mathrm{K}\frac{dV}{dx}}{V}$, pour $x=\mathrm{X}$, des valeurs h de plus en plus petites, les différentes valeurs de x qui annullent V diminueront progressivement : on est ainsi ramené à la proposition du numéro précédent.

XV.

Jusqu'ici l'on s'est donné à volonté la valeur du rapport $\frac{\mathrm{K}\frac{dV}{dx}}{V}$ pour

$x = \mathrm{x}$ et l'on a supposé cette valeur décroissante ou invariable, tandis que le paramètre m augmentait; mais on peut aussi se donner la valeur de $\frac{\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}}$ pour $x = \mathrm{X}$ et la faire varier avec m, en conservant d'ailleurs les autres conditions relatives aux fonctions G, K, G', etc. On ramenera ce cas au précédent, en faisant la variable $x = a - z$, a étant une constante, et considérant toutes les quantités G, K, V, G', etc., qui étaient jusqu'à présent fonctions de x, comme fonctions de la nouvelle variable z qui augmente quand x diminue. La proposition du n° XII deviendra par cette inversion celle que nous allons énoncer et qu'on peut aussi établir directement à l'aide de la formule (5) de la même manière qu'on a démontré celle du n° XII, en s'appuyant sur la formule (4).

Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}'\mathrm{V}' + 0,$$

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}''\mathrm{V}'' = 0,$$

dans lesquelles les fonctions G', K', G'', K'' remplissent les conditions énoncées n° XII. Si l'on a

$$\frac{\mathrm{K}''\frac{d\mathrm{V}''}{dx}}{\mathrm{V}''} \geqq \frac{\mathrm{K}'\frac{d\mathrm{V}'}{dx}}{\mathrm{V}'} \quad \text{pour } x = \mathrm{X},$$

la fonction V'' doit s'évanouir autant de fois ou plus de fois que V' entre les limites x et X, et si l'on considère x comme décroissante à partir de X, les valeurs de x qui annullent V' sont respectivement plus petites que celles de même rang à partir de X qui annullent V''.

Soit encore une fonction V telle que

$$\frac{d.\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{GV} = 0,$$

G et K étant des fonctions de x et de m qui remplissent les conditions énoncées n° XII. Supposons que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', V ait constamment pour $x = X$ un même signe qui soit aussi commun à V′ et à V″, et que la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = X$ d'abord égale à celle de $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ quand $m = m'$, croisse avec m ou du moins ne décroisse pas et devienne égale à celle de $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$, quand m devient m''. Cela posé, l'excès du nombre des changements de signe de V″ entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V′ est égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction $V(x, m)$, lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

Si l'on suppose $V' = 0$ pour $x = X$, ce théorème aura encore lieu pourvu que l'on considère $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x = X$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur X parmi celles qui annullent V′.

Si l'on a $V'' = 0$ pour $x = X$, il faut supposer $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} = +\infty$ pour $x = X$, et tenir compte de la valeur X parmi celles qui annullent V″.

Enfin, si l'on a à la fois $V' = 0$ et $V'' = 0$ pour $x = X$, on doit aussi avoir constamment $V = 0$ pour $x = X$, en faisant varier m; et dans ce cas, il faut ne considérer que les valeurs de x plus petites que X qui annullent V′, V″ et V.

Si l'on se borne à faire croître par degrés insensibles la valeur du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = X$, sans altérer les fonctions G et K dans l'équation $\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0$, on voit que les valeurs de x qui annullent V augmenteront toutes à la fois. Cette proposition particulière, à

laquelle nous pourrions donner plus de développement, correspond à celle du n° XIII.

XVI.

Les propositions énoncées dans les n°s XII et XV vont nous donner de nouvelles propriétés des fonctions qui nous occupent.

Soient encore les deux équations différentielles

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

où l'on suppose toujours

$$G'' \geqq G', \quad K'' \leqq K'.$$

Quelles que soient les valeurs des rapports $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$, $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$, soit pour $x = x$, soit pour $x = X$, *deux valeurs de x consécutives qui annullent V' comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle V''.*

En effet, soient α et β deux valeurs de x qui annullent V', et supposons qu'aucune autre valeur de x comprise entre α et β n'annulle V'. Si V'' n'est pas nulle pour $x = \alpha$, le rapport $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$ aura pour $x = \alpha$ une valeur finie plus petite que celle de $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ pour $x = \alpha$, qui doit être considérée comme égale à $+\infty$, d'après la remarque faite au n° XII *bis*. (On peut dire aussi qu'on a $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} = +\infty$ pour $x = \alpha$, parce que $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ a des valeurs positives très grandes pour les valeurs de x un peu plus grandes que α.)

Alors, d'après le théorème du n° XII, si l'on fait croître x depuis α jusqu'à β, la fonction V'' s'évanouira nécessairement au moins une fois pour une valeur de x plus petite que la valeur β qui annulle V'.

Il en sera de même, si V'' est nulle pour $x = \alpha$ en même temps que V'.

On tirerait aussi la même conclusion du n° XV, en faisant décroître x depuis β jusqu'à α, et considérant $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x = \beta$.

Deux valeurs de x consécutives qui annullent V'' ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle V'. Car s'il y avait entre elles deux valeurs de x annullant V', celles-ci comprendraient une nouvelle valeur de x qui annullerait V'' et qui tomberait entre les deux que l'on considère, ce qui serait contraire à l'hypothèse. Cette proposition subsiste dans le cas même où l'une des deux valeurs de x qui annullent V'' annullerait aussi V'. Il ne peut pas entre ces deux valeurs de x en exister d'autre qui annulle V'.

XVII.

Ces propositions ont lieu, quelles que soient les valeurs des rapports $\frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'}$, $\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''}$, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$. Maintenant, admettons comme dans les n°s XII et XV, qu'on ait à la fois

$$\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

$$\frac{K''\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \frac{K'\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

Alors V'' s'évanouira au moins une fois pour une valeur de x moindre que la plus petite valeur de x au-dessus de x qui annulle V', et aussi pour une valeur de x plus grande que la plus grande valeur de x au-dessous de X qui annulle V'.

On est ramené par là à conclure, conformément à la première par-

tie du théorème du n° XII, que tandis que x croît depuis la limite x jusqu'à une valeur quelconque a, V'' s'évanouit et change de signe entre les limites x et a au moins autant de fois que V' et pour des valeurs de x respectivement moindres que celles de même rang qui annullent V'. Car tandis que x croît depuis x jusqu'à a, V'' s'évanouit au moins une fois avant que x atteigne la plus petite valeur qui annulle V', et d'ailleurs il y a toujours entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V' au moins une valeur qui annulle V''.

De même, tandis que x croît depuis une valeur b jusqu'à X, V'' s'évanouit entre les limites b et X au moins autant de fois que V', et pour des valeurs de x respectivement plus grandes que celles du même rang à partir de X qui annullent V'. Car V'' s'évanouit pour une valeur de x qui surpasse la plus grande de celles qui annullent V', et d'ailleurs deux valeurs de x consécutives qui annullent V' comprennent au moins une valeur de x qui annulle V''. Cette proposition a été déjà énoncée dans la première partie du n° XV.

Si l'on considère par ordre de grandeur à partir de x les différentes valeurs de x qui annullent V' et V'', *la $n^{ième}$ valeur de x à partir de* x *qui annulle* V' *sera plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle* V'' *et plus petite que la valeur de x qui annulle* V'' *d'un rang marqué par* $n+\Delta$, Δ désignant comme précédemment l'excès du nombre des changements de signe de V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de V'. En effet, la $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle V' est plus grande que la valeur de x de même rang qui annulle V'', d'après le n° XII, et d'un autre côté, cette valeur de x qui annulle V' est, d'après le n° XV, plus petite que la valeur de x de même rang à partir de X qui annulle V'', valeur dont le rang à partir de x est marqué par $n+\Delta$.

En particulier, *si* $\Delta = 1$, c'est-à-dire *si* V'' *ne s'annulle qu'une fois de plus que* V' *entre les limites* x *et* X, *chaque valeur de x qui annulle* V' *tombe entre la valeur de x de même rang, à partir de* x *qui annulle* V'' *et la valeur de x immédiatement supérieure qui annulle aussi* V'', *de sorte que les deux fonctions* V'' *et* V' *s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis* x *jusqu'à* X.

On peut aussi le conclure de ce que deux valeurs de x consécutives qui annullent V' doivent comprendre au moins une valeur de x qui

annulle V'', n° XVI, et de ce qu'il y a au moins une valeur de x qui annulle V'' entre x et la plus petite valeur de x qui annulle V', comme aussi entre X et la plus grande valeur de x qui annulle V'.

Si l'on a $V'=0$ ou $V''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, ou si l'on a à la fois $V'=0$ et $V''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, les propositions précédentes subsisteront, pourvu qu'on ait égard aux observations faites dans les n°s XII *bis* et XV.

XVIII.

Considérons deux valeurs de x quelconques, a et b, entre x et X (a pouvant être égale à x ou b à X). V'' *ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que* V'. Car entre deux valeurs de x qui annullent V', il y a toujours au moins une valeur de x qui annulle V''.

V'' *s'évanouit entre les limites a et b au plus* Δ *fois de plus que* V' : car V'' s'évanouit au moins autant de fois que V' soit entre les limites x et a, soit entre b et X.

Il suit de là *qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent* V', *il ne peut exister plus de* Δ *valeurs de x qui annullent* V''.

Il peut arriver que V'' soit nulle en même temps que V' pour $x=\alpha$: dans ce cas particulier, V'' s'évanouit au moins une fois de plus que V', tandis que x croît depuis x jusqu'au-delà de α, et au moins autant de fois que V', tandis que x croît depuis une valeur un peu moindre que β jusqu'à X. Donc V'' s'évanouit au plus $\Delta-1$ fois entre α et β, sans compter son évanouissement pour $x=\alpha$.

On voit de même que si V'' était nulle pour $x=\beta$ en même temps que V', sans l'être pour $x=\alpha$, V'' s'évanouirait encore au plus $\Delta-1$ fois entre α et β. Enfin, si V'' était nulle en même temps que V' pour les deux valeurs α et β, il y aurait au plus $\Delta-2$ valeurs de x entre α et β qui annulleraient V''.

XIX.

En adoptant les hypothèses énoncées n° VI, on a reconnu que la valeur de la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour chaque valeur de x diminue quand

m augmente, aussi long-temps que V ne s'évanouit pas. Il en sera de même de l'expression $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$, si l'on désigne par H une quantité constante ou une fonction de m qui décroisse aussi continuellement quand m augmente. Faisons $x=X$ dans cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ qui ne contiendra plus alors d'autre variable que m, et considérons les changements de signe qu'elle pourra éprouver par la variation de m.

Cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$, où l'on fait $x=X$, ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie. Lorsqu'elle devient nulle, on a $K\frac{dV}{dx}+HV=0$, et l'on ne peut pas avoir en même temps $V=0$, car alors on aurait à la fois $V=0$ et $\frac{dV}{dx}=0$ pour $x=X$, ce qui est impossible. Puisque la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ a la propriété de décroître continuellement tandis que m augmente, elle passe en s'évanouissant du positif au négatif; ensuite m continuant à croître, elle décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus éloignées de 0, jusqu'à ce que V devienne nulle à son tour.

Quand V s'annulle pour une valeur de m, on a vu plus haut, n^es VII et VIII, que, pour les valeurs de m un peu plus grandes que celle-là, V a le signe de $\frac{dV}{dx}$, et pour les valeurs de m un peu plus petites le signe contraire; ce qu'on peut aussi conclure de ce que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ augmente en même temps que m. Donc, quand V s'annulle, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ change de signe en passant de l'infini négatif à l'infini positif; m continuant à croître, cette fonction recom-

mence à décroître, en prenant des valeurs positives de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse derechef pour une nouvelle valeur de m; en s'évanouissant, elle passera du positif au négatif, puis continuera à décroître jusqu'à l'infini négatif qu'elle atteindra par un nouvel évanouissement de V; de sorte qu'en général les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouiront toujours l'une après l'autre alternativement pour des valeurs croissantes de m.

XX.

De là il est aisé de tirer les conséquences suivantes :

Si la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ où l'on fait toujours $x = X$, a des valeurs positives pour $m = m'$ et pour $m = m''$, m croissant depuis m' jusqu'à m'', elle doit changer de signe un nombre pair de fois, en passant d'abord par zéro, puis par l'infini, et ensuite par zéro et par l'infini alternativement. Le nombre des valeurs de m comprises entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx} + HV$ est donc égal au nombre de celles qui annullent V ou $V(X, m)$, et par conséquent, n° XII, à l'excès Δ du nombre des changements de signe de $V(x, m'')$ ou V'' entre les limites x et X sur le nombre des changements de signe de $V(x, m')$ ou V'. Ces deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, quand m croît depuis m' jusqu'à m'', et c'est $K\frac{dV}{dx} + HV$ qui s'évanouit la première.

Si la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ a une valeur négative pour $m = m'$ aussi bien que pour $m = m''$, elle doit encore changer de signe un nombre pair de fois, en passant alternativement par l'infini et par zéro, et d'abord par l'infini. Ainsi, m croissant depuis m' jusqu'à m'', les deux fonctions V et $K^{dx} + HV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement le même nombre de fois, V étant la première qui s'é-

vanouisse; et par suite, le nombre des valeurs de m comprises entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ est égal à l'excès Δ.

Si $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ a une valeur positive pour $m=m'$ et une valeur négative pour $m=m''$, elle doit changer de signe un nombre impair de fois, en passant alternativement par zéro et par l'infini, et d'abord par zéro, tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'' : la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'évanouit donc avant V et une fois de plus que V ; le nombre des valeurs de m entre m' et m'' qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ est donc égal à $\Delta+1$.

Enfin, si $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ a une valeur négative pour $m=m'$ et positive pour $m=m''$, m croissant depuis m' jusqu'à m'', la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'évanouira après V et une fois de moins que V, par conséquent un nombre de fois marqué par $\Delta-1$.

Dans tous les cas, ces deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+HV$ où l'on attribue à x la valeur particulière X, ont une corrélation telle, que deux valeurs de m consécutives qui annullent l'une d'elles comprennent toujours entre elles une valeur de m qui annulle l'autre, et n'en comprennent qu'une.

Soient μ et μ' deux valeurs de m consécutives qui satisfont à l'équation $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ pour $x=X$. Puisqu'elles comprennent entre elles une valeur de m qui annulle $V(X, m)$ et n'en comprennent qu'une, on en conclut, d'après la 2e partie du théorème du n° XII, que la fonction $V(x, \mu')$ s'évanouit et change de signe entre les limites x et X une fois de plus que $V(x, \mu)$.

Nous ajouterons que cette équation $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ ne peut pas avoir de racines égales, car elle est la même que $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H=0$ et

l'on ne peut pas avoir en même temps $\frac{\delta}{\delta m}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H\right)=0$, ce qui est le caractère d'une racine multiple, puisque d'après la formule (4), $\delta\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)$ est toujours négative, et que δH est par hypothèse négative ou nulle. On peut voir encore qu'on ne peut pas avoir pour une même valeur de m, $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ et $\frac{\delta}{\delta m}\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)=0$, en observant que la formule (4) donne

$$\delta V.\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)-V.\delta.\left(K\frac{dV}{dx}+HV\right)>0 \text{ pour } x=X,$$

pourvu que δH soit négative ou nulle.

On a déjà remarqué, n° X, que les équations $V(X,m)=0$ et $V(x,m')=0$, $V(x,\mu)=0$, etc., n'ont pas non plus de racines égales.

XXI.

Si l'on remplace la quantité H qui est une constante ou une fonction décroissante de m par une autre quantité $H_{,}$ aussi constante ou fonction décroissante de m qui pour chaque valeur de m soit plus grande que H, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ aura toujours une valeur inférieure à celle de $\frac{K\frac{dV}{dx}+H_{,}V}{V}$ pour chaque valeur de m; et comme ces deux fonctions décroissent en même temps jusqu'à $-\infty$, tandis que m augmente, la seconde s'évanouira nécessairement après la première, si m croît depuis une valeur quelconque qui rende la première positive jusqu'à la valeur immédiatement supérieure qui annulle V.

Conséquemment, lorsque m croît depuis m' jusqu'à m'', ces trois fonctions V, $K\frac{dV}{dx}+HV$ et $K\frac{dV}{dx}+H_{,}V$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement dans l'ordre suivant : $K\frac{dV}{dx}+HV$ s'éva-

nouit toujours immédiatement après V, $K\frac{dV}{dx}+H_{,}V$ s'évanouit après $K\frac{dV}{dx}+HV$, et V après $K\frac{dV}{dx}+H_{,}V$.

On voit par là que si l'on fait varier H en lui attribuant successivement des valeurs constantes de plus en plus grandes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ ou en la remplaçant par des fonctions décroissantes de m de plus en plus grandes, les diverses valeurs de m qui annullent $K\frac{dV}{dx}+HV$ augmenteront en passant par toutes les grandeurs comprises entre les valeurs de m consécutives qui annullent $V(X, m)$. On a vu d'ailleurs que les valeurs de x qui annullent la fonction $V(x, m)$ diminuent, quand la valeur attribuée à m dans cette fonction augmente.

Tout ce qui précède s'applique en particulier aux valeurs de m qui donnent $\frac{dV}{dx}=0$ pour $x=X$, puisque la fonction $K\frac{dV}{dx}+HV$ se réduit à $K\frac{dV}{dx}$, quand on fait $H=0$.

XXII.

Nous avons désigné par h la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=x$ et admis que cette valeur h diminue ou reste la même, tandis que m augmente Si en prenant toujours pour G et K les mêmes fonctions de x et de m, on remplace h par une autre quantité $h_{,}$ constante ou fonction décroissante de m, qui pour chaque valeur de m surpasse h d'aussi peu qu'on voudra, on sait d'après le n° VI que la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ augmentera ou que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ diminuera pour chaque valeur de x et en particulier pour $x=X$. Conséquemment la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ où l'on fait $x=X$, qui conserve la propriété de dé-

croître quand m augmente, s'évanouira pour de nouvelles valeurs de m un peu plus grandes que celles qui l'annullaient d'abord, quand on supposait $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} = h$ pour $x = \mathrm{x}$.

Pour le voir encore plus clairement, supposons que la fonction $K\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$, soit nulle pour $m = \mu$, lorsqu'on a $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} = h$ pour $x = \mathrm{x}$. Alors la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ où l'on fait $x = X$, étant nulle pour $m = \mu$ et décroissant quand m augmente, est négative pour les valeurs de m plus grandes que μ jusqu'à celle qui annulle $V(X, m)$.

Faisons maintenant $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} = h_{,}$ pour $x = \mathrm{x}$, $h_{,}$ surpassant h d'une quantité aussi petite qu'on voudra; la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$, où l'on fait $x = X$, deviendra plus grande qu'elle n'était avant le changement de h en $h_{,}$; or elle était nulle pour $m = \mu$ et négative pour $m > \mu$; donc après la substitution de $h_{,}$ à la place de h, cette fonction sera positive pour $m = \mu$ et aussi pour des valeurs de m un peu plus grandes que μ; mais m continuant à croître, cette fonction reprendra le signe — qu'elle avait d'abord, puisque son augmentation due au changement de h en $h_{,}$ est aussi petite qu'on le veut, en prenant $h_{,}$ très peu différente de h. Ainsi les valeurs de m qui annullent la fonction $K\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$, augmentent quand on remplace h par $h_{,}$, c'est-à-dire quand la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \mathrm{x}$ devient plus grande. Si au contraire elle devient plus petite (ou si l'on remplace $h_{,}$ par h), on prouvera pareillement que chaque valeur de m qui annulle la fonction $K\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$, devient plus petite.

On reconnaît de la même manière que les valeurs de m qui annullent $V(X, m)$ augmentent ou diminuent toutes à la fois, selon que la valeur de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = x$ devient plus grande ou plus petite, en considérant qu'alors celle de $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ pour $x = X$ diminue ou augmente.

Ainsi, lorsqu'on fait varier la valeur h du rapport $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = x$, soit en lui attribuant des valeurs constantes de plus en plus grandes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, soit en prenant pour h des fonctions décroissantes de m de plus en plus grandes, sans changer les fonctions G et K, les valeurs de m qui satisfont soit à l'équation $K\frac{dV}{dx} + HV =$ pour $x = X$, soit à l'équation $V(X, m) = 0$, augmentent toutes à la fois.

Les valeurs de m qui satisfont aux deux équations

$$K\frac{dV}{dx} - hV = 0, \text{ pour } x = x,$$

et

$$K\frac{dV}{dx} + HV = 0, \text{ pour } x = X.$$

augmentent donc en même temps que les quantités h et H, dont chacune est une constante ou une fonction décroissante de m.

XXIII.

Supposons que dans l'équation (I)

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

on remplace la fonction de x et de m que G représente par une autre fonction $G_{,}$ de x et de m, qui pour chaque valeur de x et de m surpasse G d'une quantité aussi petite qu'on voudra. On peut concevoir, si

l'on veut, que G dépende non-seulement de x et de m, mais encore d'un autre paramètre indéterminé n, et qu'en faisant croître celui-ci, G augmente et devienne G_1. Remplaçons aussi K par une autre fonction K_1 de x et de m qui soit moindre que K d'une quantité aussi petite qu'on voudra : on peut encore considérer K comme fonction du nouveau paramètre n, et admettre que K devient plus petite et se change en K_1 par l'augmentation de n. L'équation (I) deviendra

$$\frac{d.\left(K_1 \frac{dV_1}{dx}\right)}{dx} + G_1 V_1 = 0,$$

Supposons enfin qu'on ait $\frac{K_1 \frac{dV_1}{dx}}{V_1} =$ ou un peu $< \frac{K \frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = X$, quelle que soit m, et que d'ailleurs chacun de ces rapports diminue ou demeure constant, quand m augmente.

Cela posé, on conclut du théorème du n° XII, en y remplaçant m par n, que la nouvelle fonction V_1 doit s'évanouir entre les limites x et X autant de fois ou plus de fois que V, et que chaque valeur de x qui annulle V_1 est plus petite que la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle V. En outre on aura d'après le n° VI pour toute valeur de x plus grande que x

$$\frac{K_1 \frac{dV'}{dx}}{V} < \frac{K \frac{dV}{dx}}{V} \text{ ou } \frac{V_1}{K_1 \frac{dV_1}{dx}} > \frac{V}{K \frac{dV}{dx}}.$$

Conséquemment en faisant $x = X$, on aura pour chaque valeur de m

$$\frac{K_1 \frac{dV_1}{dx} + HV_1}{V_1} < \frac{K \frac{dV}{dx} + HV}{V},$$

et comme ces deux fonctions décroissent l'une et l'autre quand m augmente, $\frac{K_1 \frac{dV_1}{dx} + HV_1}{V_1}$, s'évanouira en passant toujours du positif au négatif pour des valeurs de m un peu plus petites que celles qui

annullent $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$, c'est-à-dire que les racines m de l'équation $K_1\frac{dV_1}{dx} + HV_1 = 0$ sont un peu moindres que celles de l'équation $K\frac{dV}{dx} + HV = 0$; proposition qu'on pourrait rendre encore plus évidente par le raisonnement développé dans le numéro précédent.

En considérant qu'on a $\frac{V_1}{K_1\frac{dV_1}{dx}} > \frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$, on reconnaît de même que $V_1(X, m)$ s'évanouira pour des valeurs de m plus petites que celles qui annullent $V(X, m)$ (*).

On voit par tout ce qui précède comment l'augmentation ou la diminution de chacune des quantités H, h, G et K, indépendamment de la variation de m, influe sur les valeurs de x qui annullent $V(x, m)$ entre les limites x et X, et sur les valeurs de m qui satisfont à l'équation $K\frac{dV}{dx} + HV = 0$ pour $x = X$.

XXIV.

On a supposé dans tout ce qui précède que H était une quantité constante ou une fonction décroissante de m. Si l'on prend pour H une fonction quelconque de m assujettie à la seule condition de ne pas devenir infinie, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + H$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ où l'on fait $x = X$, pourra

(*) Par exemple, le problème de la distribution de la chaleur dans une sphère homogène conduit à des équations de cette forme

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \left(m + \frac{n}{x^2}\right)V = 0,$$

qu'on intègre en supposant $V = 0$ pour $x = 0$.

D'après ce qui précède les valeurs de m qui satisfont à l'équation $\frac{dV}{dx} + HV = 0$, pour $x = X$ ou à l'équation $V(X, m) = 0$, diminuent quand la quantité n augmente, et si n n'admet pas de valeurs positives, les racines m de ces équations sont les plus petites quand $n = 0$.

tantôt croître, tantôt décroître. En désignant par α et β deux valeurs de m consécutives qui annullent $V(X, m)$, cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + H$ aura toujours pour les valeurs de m un peu plus grandes que α des valeurs positives très grandes et pour les valeurs de m un peu plus petites que β des valeurs très grandes, puisque $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ où l'on fait $x = X$ passe de $-\infty$ à $+\infty$, toutes les fois que m atteint et dépasse une valeur qui annulle $V(X, m)$: par conséquent $K\frac{dV}{dx} + HV$ changera de signe en s'évanouissant une fois ou un nombre impair de fois tandis que m croîtra depuis α jusqu'à β; il pourra même arriver que $K\frac{dV}{dx} + HV$ s'évanouisse pour d'autres valeurs de m entre α et β sans changer de signe.

On voit aussi que si la quantité $\frac{K\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ est positive pour une certaine valeur de m, $K\frac{dV}{dx} + HV$ devra changer de signe une fois ou un nombre impair de fois tandis que m croîtra depuis cette valeur jusqu'à celle immédiatement supérieure qui annulle $V(X, m)$ et que $K\frac{dV}{dx} + HV$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois, tandis que m variera depuis la valeur dont il s'agit jusqu'à celle immédiatement inférieure qui annulle $V(X, m)$. D'après cela il est aisé de voir comment on devra modifier les propositions des n°s XX...XXIII, en supposant que H soit une fonction quelconque de m, au lieu d'être une constante ou une fonction de m décroissante.

XXV.

Nous avons considéré précédemment les changements de signe qu'éprouve entre les limites x et X la fonction V définie par l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (1)$$

G et K étant des fonctions de x et de m qui satisfont aux conditions énoncées n° XII.

Maintenant nous allons nous occuper de la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$ que nous désignerons par T, p étant une fonction de x ou une constante.

En posant
$$T = K\frac{dV}{dx} + pV,$$

on a
$$\frac{dT}{dx} = \frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + p\frac{dV}{dx} + V\frac{dp}{dx};$$

en remplaçant dans le second membre $\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}$ par la quantité équivalente $-GV$, et $\frac{dV}{dx}$ par $\frac{T-pV}{K}$, on trouvera

$$K\frac{dT}{dx} - pT + \left(GK + p^2 - K\frac{dp}{dx}\right)V = 0. \qquad (11)$$

La formule
$$T = K\frac{dV}{dx} + pV$$
donne aussi
$$\delta T = \delta\left(K\frac{dV}{dx}\right) + p\delta V,$$
d'où l'on tire
$$T.\delta V - V.\delta T = \delta V.K\frac{dV}{dx} - V.\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right).$$

En combinant cette dernière formule avec les équations (4) et (5) du n° VI, on aura les suivantes :

$$T\delta V - V\delta T = C + \int_x^x V^2.\delta G.dx - \int_x^x \left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx, \qquad (12)$$

$$T\delta V - V\delta T = C' - \int_x^X V^2.\delta G.dx + \int_x^X \left(\frac{dV}{dx}\right)^2.\delta K.dx. \qquad (13)$$

Les constantes C et C′ représentent ici les valeurs de $T\delta V - V\delta T$ pour $x = x$ et pour $x = X$.

La formule (12) fait voir qu'on aura, pour chaque valeur de x,

$$T\delta V - V\delta T > 0,$$

si l'on prend C et δG positives ou nulles, et δK négative ou nulle, comme dans le n° VI (δm étant positive). Alors la quantité $\frac{V}{T}$ augmente ou $\frac{T}{V}$ diminue, quand m augmente, car on a

$$T\delta V - V\delta T = T^2.\delta\left(\frac{V}{T}\right) = -V^2.\delta\left(\frac{T}{V}\right).$$

Prendre C positive on nulle, c'est supposer que la valeur de $\frac{V}{T}$ pour $x = \mathrm{x}$ augmente ou que celle de $\frac{T}{V}$ diminue, quand m augmente, ou que l'une et l'autre demeure constante. Nous admettrons en outre que T ne change pas de signe pour $x = \mathrm{x}$, mais que $V(\mathrm{x}, m)$ peut en changer.

Cela posé, attribuons à m une valeur arbitraire et soit ξ une valeur de x qui annulle T. Comme T représente $K\frac{dV}{dx} + pV$, V ne peut pas être nulle en même temps que T pour $x = \xi$, puisque si V était nulle, on aurait à la fois $V = 0$ et $\frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = \xi$, ce qui est impossible, n° II. On le voit encore par l'équation (12).

L'équation (12) prouve aussi que δT ne peut pas être nulle en même temps que T, puisque alors $T\delta V - V\delta T$ serait nulle, tandis qu'au contraire on a toujours, en vertu de nos hypothèses,

$$T\delta V - V\delta T > 0.$$

A cause de $T = 0$, cette inégalité se réduit à

$$-V\delta T > 0;$$

ainsi quand $T = 0$, δT ou $\frac{\delta T}{\delta m}$ a un signe contraire à celui de V.

D'ailleurs l'équation (11) fait voir que $\frac{dT}{dx}$ sera aussi différente de zéro et d'un signe contraire à celui de V, si l'on a pour chaque va-

leur de x,

$$GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (14)$$

En admettant cette nouvelle hypothèse, toutes les fois qu'on aura $T = 0$ pour un système de valeurs de x et de m, les deux dérivées $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{\delta T}{\delta m}$ auront des valeurs différentes de zéro et de même signe. En conséquence, on pourra appliquer à la fonction T tout ce qu'on a démontré dans les n°s VII...XI sur les changements de signe de V, en s'appuyant sur ce que les dérivées $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{\delta V}{\delta m}$ ont des valeurs différentes de zéro et de même signe, toutes les fois que V s'évanouit. Puisque T jouit de la même propriété, on en conclura successivement comme on l'a fait pour V, que T change toujours de signe en s'évanouissant, que les valeurs de x qui annullent T décroissent progressivement quand m augmente, et que si T est nulle pour $x = X$ et pour une valeur particulière de m, T acquiert pour une valeur de m un peu plus grande un nouveau changement de signe près de la limite X.

De là résulte le théorème suivant.

XXVI.

Soient les équations différentielles

$$\frac{d.\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

dans lesquelles les fonctions G', K', etc. remplissent les conditions énoncées n° XII. Soit p une fonction de x telle qu'on ait pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x et X,

$$\begin{aligned} G'K' + p^2 - K' \frac{dp}{dx} &> 0, \\ G''K'' + p^2 - K'' \frac{dp}{dx} &> 0, \qquad (14) \\ GK + p^2 - K \frac{dp}{dx} &> 0, \end{aligned}$$

p pouvant se réduire à une constante.

Si l'on a pour $x = \mathrm{x}$, $\dfrac{V''}{K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''} \geqq \dfrac{V'}{K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'}$, la fonction $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$ doit s'évanouir et changer de signe autant de fois ou plus que $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$, entre les limites x et X, et chaque valeur de x qui annulle $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ est plus grande que la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$.

En outre, si $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ a toujours pour $x = \mathrm{x}$ un signe constant qui soit aussi celui de $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ et de $K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''$ pour $x = \mathrm{x}$, et si la valeur du rapport $\dfrac{V}{K\dfrac{dV}{dx} + pV}$ pour $x = \mathrm{x}$, étant d'abord égale à celle de $\dfrac{V'}{K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'}$ quand $m = m'$, augmente ou du moins ne diminue pas quand m augmente, et devient égale à celle de $\dfrac{V''}{K''\dfrac{dV''}{dx} + pV''}$ quand $m = m''$, l'excès du nombre des changements de signe de $K''\dfrac{dV''}{dx} + p''$ sur le nombre des changements de signe de $K'\dfrac{dV'}{dx} + pV'$ entre les limites x et X, est précisément égal au nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction $K\dfrac{dV}{dx} + pV$ où l'on fait $x = \mathrm{X}$, lorsque m croît depuis m' jusqu'à m''.

Remarques. — Quoiqu'on ait supposé pour établir ce théorème que

la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$ ne change pas de signe pour $x=x$, et que par conséquent $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ et $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ont le même signe pour $x=x$, cependant la première partie du théorème a lieu, lors même que les valeurs de $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ et de $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ pour $x=x$ sont de signes contraires. En effet, on a la faculté de changer le signe de la fonction V' par exemple, sans qu'elle cesse de vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx}+G'V'=0,$$

et la condition

$$\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'}\overset{<}{=}\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''}\text{ pour } x=x.$$

En changeant le signe de V', celui de $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ est changé en même temps pour chaque valeur de x et en particulier pour $x=x$. Chacune des fonctions V', V'' et V peut avoir pour $x=0$ une valeur positive, négative ou nulle, indifféremment.

Si l'on a $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ pour $x=x$, le théorème qui vient d'être énoncé a toujours lieu, pourvu que l'on considère le rapport $\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'}$ comme égal à $-\infty$ pour $x=x$ (*) et qu'on ne tienne

---

(*) En effet, on a $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}=0$ pour $x=x$ et $m=m'$: or quand m augmente, ce rapport $\left(\frac{T}{V}\right)$ doit décroître, et conséquemment devenir négatif : en sorte que $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}+pV}$ a pour $x=x$ une valeur négative d'autant plus considérable que m diffère moins de m'.

pas compte de la valeur x parmi celles qui annullent $K'\frac{dV}{dx}+pV'$ en les comparant avec celles qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Si l'on a $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$, le théorème subsiste encore en supposant $\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''}=+\infty$ pour $x=x$ et en tenant compte de la valeur x parmi celles qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Enfin si l'on a à la fois $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ et $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$, on doit supposer aussi constamment $K\frac{dV}{dx}+pV=0$ pour $x=x$, tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', et il faut alors dans l'énoncé du théorème n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus grandes que x qui annullent les fonctions $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et $K\frac{dV}{dx}+pV$.

XXVII.

On peut sans altérer les fonctions G et K dans l'équation... $\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0$, faire varier seulement le rapport de V à $K\frac{dV}{dx}$ pour $x=x$. En supposant toujours $GK+p^2-K\frac{dp}{dx}>0$, le théorème du n° XXVI se réduit alors au suivant, dans lequel les fonctions V_1 et V_2 sont celles qui ont été définies au n° XIII.

Si l'on fait croître la valeur h de $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x=x$ par degrés insensibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, chaque valeur de x qui annulle $K\frac{dV}{dx}+pV$ augmente continuellement en passant par toutes les grandeurs comprises entre deux valeurs de x consécutives qui annullent $K\frac{dV_1}{dx}+pV_1$: quand $h=0$, on a les valeurs de x qui annullent $K\frac{dV_2}{dx}+pV_2$.

XXVIII.

Il est aisé de voir comment on doit modifier le théorème du n° XXVI, si l'on remplace les conditions énoncées pour la limite x par des conditions analogues pour la limite X. Nous ne donnerons ici qu'une partie du nouvel énoncé.

Soient les deux équations différentielles

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d.\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)}{dx} + G''V'' = 0,$$

et supposons toujours

$$G'' \geqq G', \quad K'' \leqq K',$$

$$G'K' + p^2 - K'\frac{dp}{dx} > 0,$$

$$G''K'' + p^2 - K''\frac{dp}{dx} > 0.$$

Si l'on a

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx} + pV''} \leqq \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx} + pV'} \text{ pour } x = X,$$

la fonction $K''\frac{dV''}{dx} + pV''$ s'évanouira entre les limites x et X autant de fois ou plus de fois que $K'\frac{dV'}{dx} + pV'$, et pour des valeurs de x respectivement plus grandes que celles de même rang à partir de X qui annullent $K'\frac{dV}{dx} + pV'$.

Si l'on a $K'\frac{dV}{dx} + pV' = 0$ pour $x = X$, cette proposition subsiste pourvu que l'on considère $\frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx} + pV'}$ comme égal à $+\infty$

pour $x = X$, et qu'on ne tienne pas compte de la valeur X parmi celles qui annullent $K' \frac{dV'}{dx} + pV'$, en les comparant à celles qui annullent $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$.

Si l'on a $K'' \frac{dV''}{dx} + pV'' = 0$ pour $x = X$, il faut regarder $\frac{V''}{K'' \frac{dV''}{dx} + pV''}$ comme égal à $-\infty$ pour $x = X$, et compter la valeur X parmi celles qui annullent V''.

Si l'on a en même temps $K' \frac{dV'}{dx} + pV' = 0$ et $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$ pour $x = X$, il faut dans le même énoncé n'avoir égard qu'aux valeurs de x plus petites que X, qui annullent $K' \frac{dV'}{dx} + pV'$ et $K'' \frac{dV''}{dx} + V''$.

XXIX.

Les théorèmes des n°s XII et XV sur les changements de signe de V' et de V'', nous ont donné comme corollaires les propriétés développées dans les n°s XVI, XVII et XVIII. En appliquant les mêmes raisonnements aux deux fonctions $K' \frac{dV'}{dx} + pV'$ et $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$, on déduira des n°s XXVI et XXVIII des propriétés de ces fonctions tout-à-fait analogues à celles de V' et de V''. Il suffira de les énoncer.

Quelles que soient les valeurs de $\frac{V'}{K' \frac{dV'}{dx} + pV'}$ et de $\frac{V''}{K'' \frac{dV''}{dx} + pV''}$, soit pour $x = x$, soit pour $x = X$, deux valeurs de x consécutives qui annullent $K' \frac{dV'}{dx} + pV'$ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$, et deux valeurs de x consécutives qui annullent $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$ ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle $K' \frac{dV'}{dx} + pV'$.

Admettons maintenant qu'on ait à la fois

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''} \gtreqless \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'} \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

$$\frac{V''}{K''\frac{dV''}{dx}+pV''} \lesseqgtr \frac{V'}{K'\frac{dV'}{dx}+pV'} \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

Alors la n^{ieme} valeur de x à partir de x qui annulle $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, est plus grande que la n^{ieme} valeur de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et plus petite qu'une autre valeur de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ d'un rang marqué par $n+\varepsilon$ (à partir de x), ε désignant combien de fois $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouit de plus que $K'\frac{dV}{dx}+pV'$ entre les limites x et X.

En particulier, si $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire si $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ne s'annulle qu'une fois de plus que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ entre x et X, chaque valeur de x qui annulle $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ tombe entre la valeur de x de même rang à partir de x qui annulle $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et la valeur de x immédiatement supérieure qui annulle aussi $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$; de sorte que les deux fonctions $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ et $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X.

Si l'on prend entre x et X des valeurs a et b, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$; d'un autre côté $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouit entre les limites a et b au plus ε fois de plus que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$. Conséquemment, entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$, il ne peut exister plus de ε valeurs de x qui annullent $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$. Si l'on avait $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$, en même temps que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$, pour

$x=\alpha$ ou pour $x=\beta$, $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ s'évanouirait au plus $\varepsilon-1$ fois entre α et β, sans compter son évanouissement pour $x=\alpha$ ou pour $x=\beta$. Et si $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$ était nulle en même temps que $K'\frac{dV'}{dx}+pV'$ pour les deux valeurs α et β, il n'y aurait au plus que $\varepsilon-2$ valeurs de x entre α et β qui annulleraient $K''\frac{dV''}{dx}+pV''$.

Si l'on a $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ ou $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, ou si l'on a à la fois $K'\frac{dV'}{dx}+pV'=0$ et..... $K''\frac{dV''}{dx}+pV''=0$ pour $x=x$ ou pour $x=X$, les propositions précédentes subsisteront, pourvu qu'on ait égard aux remarques qui terminent les n°s XXVI et XXVIII.

XXX.

En observant qu'on a

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)=\frac{V.\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}-K\left(\frac{dV}{dx}\right)^2}{V^2},$$

et

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)=\frac{K\left(\frac{dV}{dx}\right)^2-V.\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}}{\left(K\frac{dV}{dx}\right)^2},$$

on peut mettre l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0, \qquad (I)$$

sous les deux formes suivantes :

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)+G+\frac{1}{K}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)^2=0;$$

et

$$\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right) = G\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)^2 + \frac{1}{K} \text{ (*)}.$$

On voit ici que si la fonction G est positive comme K entre les limites x et X, $\frac{d}{dx}\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right)$ est constamment négative entre ces limites et $\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)$ positive, et par conséquent en faisant croître x depuis x jusqu'à X, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ diminue continuellement et $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ augmente.

Quand x en croissant atteint une valeur qui annulle V, on a simplement $\frac{d.}{dx}\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right) = \frac{1}{K}$, d'où l'on conclut que lors même que G

(*) Ainsi en faisant

$$y = \frac{K\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{y} = \frac{V}{K\frac{dV}{dx}}.$$

l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad \text{(I)}$$

se transforme dans les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} + G + \frac{1}{K}y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = Gz^2 + \frac{1}{K},$$

qu'on peut réciproquement ramener à l'équation (I). Ces dernières renferment comme cas particulier l'équation de *Riccati ;* on peut leur appliquer les transformations dont l'équation (I) est susceptible et qui seront indiquées dans le n° XXXV.

n'est pas positive, $\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit. Cette propriété qu'on a déjà remarquée n° II, n'est pas particulière à la fonction V; car en général, lorsqu'une fonction $f(x)$ d'une variable x s'évanouit, le quotient $\frac{f(x)}{f'(x)}$ passe du négatif au positif, $f'(x)$ étant la fonction dérivée de $f(x)$.

Quand $\frac{dV}{dx}$ devient nulle pour une valeur de x, $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ passe en s'évanouissant du positif au négatif, si G est positive; donc pour cette valeur de x qui annulle $\frac{dV}{dx}$, V a une valeur *maximum* soit positive soit négative, puisque pour les valeurs de x un peu plus grandes que celle-là $\frac{dV}{dx}$ prend un signe contraire à celui de V et que pour les valeurs de x un peu moindres, $\frac{dV}{dx}$ a le même signe que V, ce qui indique une valeur *maximum* de V. On peut encore le reconnaître en écrivant l'équation (I), ainsi

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + GV = 0.$$

G étant positive, on voit que quand on a $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{d^2V}{dx^2}$ a un signe contraire à celui de V, ce qui est le caractère d'une valeur *maximum* de V. Cette fonction V ne peut donc point avoir de valeur *minimum*, quand G est positive; elle deviendait *minimum*, si $\frac{dV}{dx}$ s'annullait pour une valeur de x qui rendrait G négative.

XXXI.

Désignons par p une quantité constante ou une fonction de x qui décroisse continuellement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. En supposant toujours G positive, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + p$ ou $\frac{K\frac{dV}{dx} + pV}{V}$ doit, d'après ce qui précède, décroître à mesure que x augmente, aussi long-temps que V ne s'évanouit pas. Cette fonction

ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie. Elle devient infinie lorsque V s'évanouit; alors elle passe du négatif au positif. Elle devient nulle quand on a $K\frac{dV}{dx}+pV=0$; on ne peut pas avoir en même temps $V=0$, car alors on aurait $V=0$ et $K\frac{dV}{dx}=0$ pour la même valeur de x, ce qui est impossible. Puisque la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ décroît, tandis que x augmente, elle passe quand elle s'évanouit du positif au négatif; puis x continuant à croître, elle décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus considérables, jusqu'à ce que V devienne nulle. Alors $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ devient infinie et change de signe en passant de $-\infty$ à $+\infty$; et x continuant à croître, elle recommence à décroître et prend des valeurs positives de plus en plus petites jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse de nouveau; après quoi elle devient négative jusqu'à ce que V s'annulle: de sorte qu'en général les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement pour des valeurs croissantes de x.

En conséquence, si la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est positive pour $x=x$ et pour $x=X$, tandis que x croîtra depuis x jusqu'à X, elle ne pourra changer de signe qu'un nombre pair de fois, en passant d'abord par zéro, puis par l'infini, et ensuite par zéro et par l'infini alternativement. Les deux fonctions $K\frac{dV}{dx}+pV$ et V s'évanouissent donc l'une après l'autre tour à tour un même nombre de fois, et c'est $K\frac{dV}{dx}+pV$ qui s'évanouit la première.

Si $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est négative pour $x=x$ et pour $x=X$, les deux fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouiront encore entre ces limites

un même nombre de fois et toujours l'une après l'autre : V s'évanouira la première.

Si $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ a une valeur positive pour $x=x$ et négative pour $x=X$, $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouira une fois de plus que V entre les limites x et X ; d'ailleurs ces deux fonctions s'annullent toujours l'une après l'autre alternativement, et c'est $K\frac{dV}{dx}+pV$ qui devient nulle la première.

Enfin, si $\frac{K\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ est négative pour $x=x$ et positive pour $x=X$, $K\frac{dV}{dx}+pV$ s'évanouira une fois de moins que V entre les limites x et X et V deviendra nulle la première.

Dans tous les cas, deux valeurs de x consécutives qui annullent l'une de ces fonctions V et $K\frac{dV}{dx}+pV$ comprennent toujours entre elles une valeur de x qui annulle l'autre et n'en comprennent qu'une, pourvu que G soit positive et que la quantité p n'augmente pas quand x augmente.

XXXII.

Lorsque G changera de signe entre les limites x et X, ou que p ne sera pas constante ou fonction décroissante de x, la fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+p$ pourra tantôt croître, tantôt décroître. Comme en désignant par α et β deux valeurs de x consécutives qui annullent V, cette fonction $\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}+p$ a toujours pour les valeurs de x un peu plus grandes que α des valeurs positives très grandes et pour les valeurs de x un peu plus petites que β des valeurs négatives très grandes, on voit que la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$ changera de signe une fois ou un nombre impair de fois entre α et β, et pourra même en outre s'évanouir sans changer de

signe si l'on n'a pas constamment $GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0$. On voit aussi que si la quantité $\frac{K\frac{dV}{dx} + pV}{V}$ est positive pour une certaine valeur de x, $K\frac{dV}{dx} + pV$ changera de signe une fois ou un nombre impair de fois dans l'intervalle compris entre cette valeur de x et celle immédiatement supérieure qui annulle V, et que $K\frac{dV}{dx} + pV$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois dans l'intervalle compris entre la même valeur de x et celle immédiatement inférieure qui annulle V. L'inverse aura lieu, si $\frac{K\frac{dV}{dx} + pV}{V}$ est négative pour la valeur de x que l'on considère.

XXXIII.

G étant positive, si l'on remplace p par une quantité $p_{,}$ constante ou fonction décroissante de x qui pour chaque valeur de x soit un peu plus grande que p, les valeurs de x qui annulleront la fonction $K\frac{dV}{dx} + p_{,}V$ seront un peu plus grandes que celles qui annullent $K\frac{dV}{dx} + pV$, puisqu'on a pour chaque valeur de x,

$$\frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + p_{,} > \frac{K\frac{dV}{dx}}{V} + p$$

et que ces deux fonctions décroissent l'une et l'autre quand x augmente. On peut au surplus appliquer ici le raisonnement du n° XIX.

Si donc on prend successivement pour p des valeurs constantes croissantes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou des fonctions de x de plus en plus grandes qui décroissent tandis que x croît depuis x jusqu'à X, chaque valeur de x qui annulle $K\frac{dV}{dx} + pV$ doit augmenter en même temps que p, sans cesser d'être seule comprise entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V ; celles-ci répondent à $p = \pm\infty$. Les valeurs de x qui annullent $\frac{dV}{dx}$ répondent à $p = 0$. Chacune d'elles rend V *maximum* (n° XXX).

XXXIV.

On a supposé depuis le n° XXX, la fonction G positive et p égale à une constante ou à une fonction de x qui décroît, tandis que x croît depuis x jusqu'à X. De là résulte $GK + p^2 - K\frac{dp}{dx} > 0$. Cette condition (14), la seule à laquelle p fût assujettie dans les n°s XXV... XXIX étant actuellement remplie, en supposant G positive et p constante ou fonction décroissante de x, on peut combiner les propositions de ces n°s XXV...XXIX avec celles des n^{os} suivants XXX, XXXI et XXXII et en déduire de nouvelles conséquences qu'il nous paraît superflu de développer.

XXXV.

En différentiant plusieurs fois l'équation (I) après l'avoir écrite ainsi :

$$K\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

on obtiendra pour toutes les fonctions $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^3V}{dx^3}$, etc.... des expressions de cette forme $Q\frac{dV}{dx} + RV$, Q et R étant des fonctions connues de x. Par conséquent, si l'on multiplie V, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, etc. par des fonctions de x arbitraires, la somme des produits pourra se réduire à une expression semblable $M\frac{dV}{dx} + NV$. En la mettant sous cette forme $\frac{M}{K}\left(K\frac{dV}{dx} + \frac{KN}{M}V\right)$, et faisant $\frac{KN}{M} = p$, on pourra lui appliquer les diverses propositions démontrées précédemment sur les changements de signe de la fonction $K\frac{dV}{dx} + pV$, pourvu que p remplisse les conditions énoncées.

XXXVI.

On peut déduire de la théorie qui précède un grand nombre de conséquences. Celles que nous allons développer suffiront pour faire comprendre le sens et l'usage de nos théorèmes.

Soit donnée l'équation

$$L\frac{d^2U}{dx^2}+M\frac{dU}{dx}+NU=0, \qquad (15)$$

où L, M, N sont des fonctions de x données entre deux limites x et X. On peut la transformer dans la suivante :

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0, \qquad (16)$$

en faisant

$$U=\theta V.$$

θ étant une fonction arbitraire de x.

En effet l'équation (15) devient en y remplaçant U par θV,

$$L\theta\frac{dV^2}{dx^2}+\left(2L\frac{d\theta}{dx}+M\theta\right)\frac{dV}{dx}+\left(L\frac{d^2\theta}{dx^2}+M\frac{d\theta}{dx}+N\theta\right)V=0,$$

et on la rend identique avec l'équation (16), en faisant

$$\frac{dK}{Kdx}=2\frac{d\theta}{\theta dx}+\frac{M}{L},$$

$$\frac{G}{K}=\frac{L\frac{d^2\theta}{dx^2}+M\frac{d\theta}{dx}+N\theta}{L\theta}.$$

On tire de là

$$K=\theta^2.e^{\int\frac{Mdx}{L}}, \qquad (17)$$

puis

$$G=\frac{K}{L\theta}\left(L\frac{d^2\theta}{dx^2}+M\frac{d\theta}{dx}+N\theta\right)=\frac{\theta}{L}.e^{\int\frac{Mdx}{L}}\left(L\frac{d^2\theta}{dx^2}+M\frac{d\theta}{dx}+N\theta\right)$$

$$=\frac{N\theta^2}{L}.e^{\int\frac{Mdx}{L}}+\theta\left(e^{\int\frac{Mdx}{L}}\frac{d^2\theta}{dx^2}+e^{\int\frac{Mdx}{L}}.\frac{M}{L}.\frac{d\theta}{dx}\right),$$

ou enfin,

$$G = \frac{N\theta^2}{L} \cdot e^{\int \frac{M dx}{L}} + \theta \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left(e^{\int \frac{M dx}{L}} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right). \qquad (18)$$

On connaît ainsi les fonctions K et G (17) et (18) dans la nouvelle équation (16) qui remplace l'équation (15)

Si l'on prend la fonction arbitraire θ positive entre les limites x et X, U et V s'évanouiront pour les mêmes valeurs de x.

En supposant $\theta = 1$, on a $U = V$, et l'on retombe sur la transformation indiquée au commencement de ce mémoire, n° I, pour ramener l'équation

$$L \frac{d^2V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NV = 0$$

à la forme

$$\frac{d.\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0.$$

Par cette transformation, l'équation (15) peut toujours être préparée de telle sorte qu'on ait $M = \frac{dL}{dx}$. Elle est alors

$$\frac{d.\left(L \frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0. \qquad (19)$$

En y faisant $U = \theta V$, pour la transformer dans celle-ci

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0. \qquad (16)$$

on trouve

$$K = \theta^2 L,$$

$$G = N\theta^2 + \theta . \frac{d\left(L \frac{d\theta}{dx}\right)}{dx} \quad (*).$$

(*) La variable indépendante est la même dans l'équation (19) et dans sa transformée (16) obtenue en faisant $U = \theta V$. On pourrait encore ramener l'équation (19) à une autre de même forme qui renfermerait la même fonction U en prenant

Si l'on prend en particulier $\theta = \frac{1}{\sqrt{L}}$, d'où $d\theta = \frac{-d\sqrt{L}}{L}$, on aura

$$K = 1, \qquad G = \frac{N}{L} - \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{d^2\sqrt{L}}{dx^2}, \qquad U = \frac{V}{\sqrt{L}}, \qquad (20)$$

et par ces substitutions l'équation proposée

$$\frac{d\left(L\frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0 \qquad (19)$$

sera remplacée par celle-ci

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0 \qquad (21)$$

que nous allons considérer.

XXXVII.

Supposons que la fonction G soit positive pour toutes les valeurs de x croissantes depuis une valeur a jusqu'à une autre b.

Prenons une constante G′ égale ou inférieure à la plus petite valeur de G dans l'intervalle compris entre a et b, et une autre constante G″ égale ou supérieure à la plus grande valeur de G dans le même intervalle, et posons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' &= 0, \\ \frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' &= 0. \end{aligned}\right\} (22)$$

---

une nouvelle variable indépendante z dont x serait fonction. Car cette equation (19) deviendrait

$$\frac{d}{dz} \cdot \left[\frac{L}{\left(\frac{dx}{dz}\right)} \cdot \frac{dU}{dz}\right] + N\left(\frac{dx}{dz}\right).U = 0.$$

Si par exemple on détermine z de manière qu'on ait $\frac{dx}{dz} = L$ ou $dz = \frac{dx}{L}$, l'equation (19) deviendra

$$\frac{d^2U}{dz^2} + LN.U = 0.$$

Ces deux équations linéaires à coefficients constants s'intègrent et donnent

$$V' = C' \sin.(x\sqrt{G'} + c'), \quad V'' = C'' \sin.(x\sqrt{G''} + c'').$$

Quelles que soient les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x = a$, on peut toujours prendre les constantes arbitraires c', c'', C', C'', telles qu'on ait pour $x = a$

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} > \frac{\frac{dV}{dx}}{V}, \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} < \frac{\frac{dV}{dx}}{V},$$

et que V' et V'' aient pour $x = a$, le même signe que V.

Si V était nulle pour $x = a$, on prendrait

$$V' = C' \sin.[(x - a)\sqrt{G'}], \quad V'' = C'' \sin[(x - a)\sqrt{G''}],$$

afin d'avoir aussi $V' = 0$ et $V'' = 0$ pour $x = a$.

Cela posé, il résulte du théorème du n° XII, que la fonction inconnue V s'évanouira entre les limites a et b au moins autant de fois que V' et au plus autant de fois que V''.

Mais le sinus représenté par V' s'annulle pour une suite de valeurs de x équidifférentes dont la différence constante est $\frac{\pi}{\sqrt{G'}}$. V doit donc s'évanouir entre a et b, au moins autant de fois que l'intervalle $b - a$ contient $\frac{\pi}{\sqrt{G'}}$ ou autant de fois qu'il y a d'unités entières dans $\frac{(b-a)\sqrt{G'}}{\pi}$. On verra de même que V doit s'évanouir entre a et b au plus autant de fois qu'il y a d'unités dans $\frac{(b-a)\sqrt{G''}}{\pi} + 1$.

Conséquemment, lorsqu'en prenant l'intervalle $b - a$ de plus en plus grand, le produit $(b - a)\sqrt{G'}$ deviendra plus grand que tout nombre donné, V s'évanouira pour une infinité de valeurs de x croissantes jusqu'à l'infini. C'est ce qui a lieu toutes les fois que G ne diminue pas jusqu'à zéro, tandis que x croît depuis une valeur a jusqu'à l'infini; et lors même qu'en faisant croître x jusqu'à l'infini, G diminuera jusqu'à 0, V pourra encore s'évanouir pour une infinité de

valeurs de x, puisqu'il suffit pour cela que le produit $(b-a)\sqrt{G'}$ augmente indéfiniment en même temps que b.

On peut prendre la limite b assez rapprochée de a pour que l'intervalle $b-a$ soit plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{G''}}$. Alors si pour $x=a$ et pour $x=b$, V a des valeurs de même signe, V ne s'évanouira pas entre les limites a et b; mais si V a des valeurs de signes contraires pour $x=a$ et pour $x=b$, V s'évanouira pour une seule valeur de x comprise entre a et b.

La principale difficulté de la résolution des équations numériques est, comme on sait, d'assigner des intervalles qui ne comprennent pas de racines ou qui n'en comprennent qu'une. A l'égard des équations $V=0$ qui nous occupent, cette difficulté est réduite par ce qui précède, à celle de déterminer le signe de la fonction V pour diverses valeurs de x suffisamment rapprochées.

Nous allons donner dans le numéro suivant des formules pour déterminer approximativement les valeurs de x qui annullent V.

XXXVIII.

L'intervalle $b-a$ étant pris plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{G''}}$, il ne peut y avoir entre a et b qu'une seule valeur de x qui annulle V. Il s'agit de déterminer cette valeur, si elle existe.

En posant les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' &= 0, \\ \frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' &= 0, \end{aligned}\right\} (22)$$

on peut prendre pour V′ et V″ les expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} V' &= C' \sin.\left[(x-a)\sqrt{G'} - t'\right], \\ V'' &= C'' \sin.\left[(x-a)\sqrt{G''} - t''\right], \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

C', C'', t', t'', étant les constantes arbitraires. On peut d'ailleurs supposer les arcs de cercle t', t'', compris entre 0 et π.

On doit, d'après le théorème du n° XII, remplir les conditions

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \geqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{pour } x = a.$$

Or les valeurs (23) de V′ et de V″ donnent pour $x = a$,

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} = -\frac{\sqrt{G'}}{\operatorname{tang} t'} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} = -\frac{\sqrt{G''}}{\operatorname{tang} t''}.$$

En désignant donc par p la valeur (positive ou negative) du rapport $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a$, il faudra qu'on ait

$$-\frac{\sqrt{G'}}{\operatorname{tang} t'} \geqq \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{G''}}{\operatorname{tang} t''} \leqq \frac{1}{p}.$$

On tire de la

$$\operatorname{tang} t' \geqq -p\sqrt{G'}, \quad \operatorname{tang} t'' \leqq -p\sqrt{G''}, \qquad (24)$$

pourvu toutefois qu'on prenne tang t' et tang t'' d'un signe contraire à celui de p : les quantités t' et t'' doivent d'ailleurs être comprises entre o et π.

On voit d'après l'expression (23) de V′ qu'on aura la plus petite valeur de x immédiatement supérieure à a qui annulle V′ en posant

$$(x - a)\sqrt{G'} - t' = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = a + \frac{t'}{\sqrt{G'}};$$

de même la plus petite valeur de x au-dessus de a qui annulle V″ est $a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}$.

Cela posé, si l'on désigne par ξ la valeur de x immédiatement supérieure à a qui annulle la fonction V, et si cette valeur ξ ne surpasse pas b, on aura en vertu du théorème du n° XII.

$$\xi < a + \frac{t'}{\sqrt{G'}}, \quad \xi > a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}. \qquad (25)$$

Les quantités t', t'' comprises entre o et π étant déterminées par les formules (24).

Ainsi l'on connaîtra deux limites entre lesquelles sera comprise l'inconnue ξ, pourvu que ξ tombe entre a et b, comme on l'a supposé.

Si ces deux limites ne surpassent pas b, on sera certain qu'il existe entre elles une valeur de x qui annulle V; cette valeur désignée par ξ est d'ailleurs la seule entre a et b qui annulle V.

Si la limite inférieure $a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}$ surpasse b, on en conclura que la fonction V ne s'évanouit pas quand x croît depuis a jusqu'à b.

Mais si b est comprise entre $a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}$ et $a + \frac{t'}{\sqrt{G'}}$, on sera dans l'alternative de savoir si V s'annulle pour une valeur de x comprise entre $a + \frac{t''}{\sqrt{G''}}$ et b, ou si V ne change pas de signe dans l'intervalle de a à b; la question serait décidée si l'on connaissait le signe de V pour $x = b$, comme pour $x = a$.

Les formules (24, 25) sont relatives à la valeur a plus petite que la racine cherchée ξ. On peut établir des formules analogues qui se rapportent à la valeur b plus grande que ξ.

On présente les valeurs de V' et V'' qui satisfont aux équations (22), sous cette forme :

$$V' = C' \sin.\left[(x - b)\sqrt{G'} + u'\right],$$
$$V'' = C'' \sin.\left[(x - b)\sqrt{G''} + u''\right].$$

On remplit les conditions

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \leqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V}, \quad \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \frac{\frac{dV}{dx}}{V} \text{ pour } x = b;$$

en prenant

$$\text{tang } u' \geqq q\sqrt{G'}, \quad \text{tang } u'' \leqq q\sqrt{G''}, \qquad (26)$$

q désigne la valeur de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = b$; tang u' et tang u'' doivent

avoir le même signe que q, et l'on prend u' et u'' entre o et π.

La valeur de x immédiatement inférieure à b qui annulle V′ est $b - \frac{u'}{\sqrt{G'}}$; celle qui annulle V″ est $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$. En désignant toujours par ξ la valeur de x comprise entre a et b qui annulle V, on a, d'après le n° XX,

$$\xi > b - \frac{u'}{\sqrt{G'}} \quad \text{et} \quad \xi < b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}. \qquad (27)$$

Si ces deux limites ne sont pas moindres que a, on sera certain qu'il existe entre elles une valeur ξ de x qui annulle V.

Si la limite supérieure $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$ est plus petite que a, V ne pourra point s'évanouir entre a et b.

Enfin, si a est comprise entre $b - \frac{u'}{\sqrt{G'}}$ et $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$, il pourra se faire que V s'annulle pour une valeur de x comprise entre a et $b - \frac{u''}{\sqrt{G''}}$, ou bien que V ne s'annulle pas dans l'intervalle de a à b, on décidera la question si l'on connaît le signe de V pour $x = a$ comme pour $x = b$.

On peut donc par le moyen des formules (24, 25, 26 et 27) lorsqu'on a deux limites a et b comprenant une seule valeur de x qui annulle V, déterminer de nouvelles limites a' et b' qui approchent davantage de cette valeur ξ. Pour faire usage de ces formules, il n'est pas nécessaire d'avoir la valeur exacte p de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a$; il suffit de connaître par un moyen quelconque une valeur plus petite que p et une autre plus grande que p. Il en est de même pour q.

On obtiendra de nouvelles valeurs encore plus approchées de ξ en appliquant les mêmes formules (24, ...) aux limites a' et b' qu'on vient de déterminer; il faut pour cela calculer, s'il est possible, des valeurs approchées de $\frac{V}{\frac{dV}{dx}}$ pour $x = a'$ ou pour $x = b'$, et prendre

deux nouvelles constantes $G' < G$ et $G'' > G$ dans l'intervalle compris entre a' et b'.

XXXIX.

Prenons maintenant pour les limites a et b deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V et supposons que pour $x = \alpha$, on ait $V' = 0$, $V'' = 0$, en même temps que $V = 0$.

En prenant la constante $G' < G$ et $G'' > G$ dans l'intervalle compris entre α et β, nous aurons

$$V' = C' \sin.\left[(x - \alpha)\sqrt{G'}\right], \quad V'' = C'' \sin.\left[(x - \alpha)\sqrt{G''}\right].$$

D'après le théorème du n° XII, la valeur β qui annulle V doit être plus grande que la première valeur de x au-delà de α qui annulle V'' et plus petite que la première valeur de x au-delà de α qui annulle V', d'où résulte

$$\beta - \alpha > \frac{\pi}{\sqrt{G''}}, \quad \beta - \alpha < \frac{\pi}{\sqrt{G'}},$$

et par conséquent,

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{G(\xi)}}, \tag{28}$$

ξ étant une certaine valeur de x comprise entre α et β, et $G(\xi)$ la valeur de G correspondante à $x = \xi$.

On a de même, en désignant par γ la valeur de x immédiatement supérieure à β qui annulle V,

$$\gamma - \beta = \frac{\pi}{\sqrt{G(\xi')}}, \quad \xi' \text{ étant entre } \beta \text{ et } \gamma.$$

Supposons que G diminue continuellement jusqu'à la valeur λ, tandis que x croît depuis a jusqu'à b, et soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les valeurs de x comprises entre a et b qui annullent V; on a alors $G(\xi') < G(\xi)$ et par conséquent $\gamma - \beta > \beta - \alpha$: ainsi les différences entre ces valeurs de x consécutives comprises entre a et b qui annullent V vont en augmentant et s'approchent de la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ qu'elles ne peuvent dépasser.

Cette proposition subsiste lorsque G diminue jusqu'à la limite λ tandis que x croît depuis la valeur a jusqu'à $b=\infty$. Dans ce dernier cas, si la limite λ de G est o, les différences $\beta-\alpha$, $\gamma-\beta$,... deviendront plus grandes que tout nombre donné, quoiqu'il puisse exister encore une infinité de valeurs au-delà de a qui annullent V.

On voit de même que si G augmente continuellement en s'approchant d'une limite A tandis que x croît depuis a jusqu'à b, b pouvant être infinie, les différences entre les valeurs de x comprises entre a et b qui annullent V diminuent progressivement et convergent vers $\frac{\pi}{\sqrt{A}}$; il s'ensuit que si $b=\infty$, V s'annulle pour un nombre infini de valeurs de x, comme on l'a déjà vu plus haut n° XXXVII; et si G augmente jusqu'à l'infini en même temps que x, les différences entre ces valeurs finissent par devenir plus petites que toute quantité donnée.

Ces résultats sont applicables par exemple à la fonction U donnée par l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dU}{dx}+\left(r^2-\frac{n}{x^2}\right)U=0,\\ \text{ou}\quad &\frac{d\left(x\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\left(r^2x-\frac{n}{x}\right)U=0,\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

qu'on rencontre dans plusieurs problèmes de physique et de mécanique, r et n étant des constantes. M. Poisson a donné dans ses mémoires l'expression de cette fonction en intégrales définies.

La transformation $U=\frac{V}{\sqrt{L}}$ (n° XXXVI) donne ici

$$U=\frac{V}{\sqrt{x}},\quad G=r^2+\frac{1-4n}{4x^2}$$

et

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\left(r^2+\frac{1-4n}{4x^2}\right)V=0.$$

Lorsqu'on a $n<\frac{1}{4}$, G diminue continuellement en s'approchant de la limite r^2, tandis que x croît depuis o jusqu'à ∞. V ou U doit donc s'évanouir pour une infinité de valeurs de x, dont les différences consécutives vont en augmentant et convergent rapidement vers la limite

$\frac{\pi}{r}$ sans pouvoir la dépasser; de plus on a

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 + \frac{1 - 4n}{4\xi^2}}}, \qquad (30)$$

ξ étant une certaine valeur de x comprise entre α et β et conséquemment entre α et $\alpha + \frac{\pi}{r}$.

Quand on a $n > \frac{1}{4}$, G augmente depuis o jusqu'à r^2, tandis que x croît depuis la valeur $\frac{\sqrt{4n-1}}{2r}$ jusqu'à $+\infty$. V doit donc s'évanouir encore pour une infinité de valeurs de x dont les différences diminuent continuellement et tendent vers la constante $\frac{\pi}{r}$ qu'elles surpassent toujours : on a de plus

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{r^2 - \frac{4n-1}{4\xi^2}}}, \quad \xi \text{ tombant entre } \alpha \text{ et } \beta. \qquad (30)$$

Lorsqu'on aura calculé à l'aide des formules du n° XXXVIII, quelques-unes des plus petites valeurs de x qui annullent V ou U, les formules (30) donneront les valeurs suivantes avec assez d'approximation.

XL.

Il arrive fréquemment que, dans l'équation générale

$$\frac{d.\left(\mathrm{L}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{NU} = 0,$$

qui devient

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{d^2x} + \mathrm{GV} = 0,$$

en faisant

$$\mathrm{V} = \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{L}} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}}} \cdot \frac{d^2\sqrt{\mathrm{L}}}{dx^2} \text{ (n° XXXVI)},$$

les fonctions L, N, contiennent avec x une autre indéterminée r,

et qu'en faisant croître r depuis une certaine valeur jusqu'à $+\infty$ la fonction G est positive et augmente indéfiniment avec r. Dans ce cas, V ou U s'évanouira autant de fois qu'on voudra entre deux limites a et b, quelque rapprochées qu'elles soient, pourvu qu'on attribue à r une valeur suffisamment grande.

De cette propriété et de la deuxième partie du théorème des n°s XII et XV, on conclut encore que, si U a toujours le même signe pour une certaine valeur de x quelle que soit r, et si l'on attribue à x une autre valeur particulière quelconque plus grande ou plus petite, cette fonction U ne contenant plus d'autre variable que r, s'évanouira et changera de signe pour une infinité de valeurs de r croissantes jusqu'à l'infini, et d'après le n° XX, il en sera de même de la fonction $L\frac{dU}{dx}+HU$, H étant une quantité constante ou une fonction quelconque de r.

Ces propriétés conviennent, par exemple, à la fonction U donnée par l'équation (29); elles auront encore lieu si l'on prend plus généralement

$$L = lr^{\lambda} + l'r^{\lambda'} + \text{etc.}, \quad N = nr^{\nu} + n'r^{\nu'} + \ldots,$$

l, n étant des fonctions positives de x sans r, l', n', l''... d'autres fonctions de x tout-à-fait arbitraires, λ, λ'... des exposants quelconques décroissants de même que ν, ν'... et $\lambda < \nu$. Si l'on avait $\lambda = \nu$ ou $> \nu$, U ne pourrait s'évanouir qu'un nombre limité de fois entre a et b quelle que fût r, et en donnant à x une valeur particulière, il n'y aurait qu'un nombre limité de valeurs de r qui pourraient annuller U aussi bien que $L\frac{dU}{dx}+HU$.

Dans les problèmes de physique, l'indéterminée r ne se trouve ordinairement qu'au 1er ou au 2e degré dans N et n'entre pas dans L.

XLI.

Pour compléter la théorie qui précède, nous allons encore comparer les valeurs des deux fonctions V', V'', définies par les équations différentielles

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$

$$\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0,$$

dans l'intervalle compris entre deux limites a et b, en supposant que ces deux fonctions ne changent pas de signe dans cet intervalle, et qu'on ait

$$\text{pour } x = a, \ \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}:$$

G' et G'' sont comme dans le n° XII des fonctions données de x, telles que G'' est $\geqq G'$.

Ces fonctions V' et V'' ne changeant pas de signe entre les limites a et b, il est permis pour le but que nous nous proposons de les supposer toutes deux positives entre ces limites. Car si V' par exemple était négative, on pourrait changer son signe et la regarder comme positive, sans qu'elle cessât de vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$

et la condition

$$\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \geqq \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \text{ pour } x = a.$$

Considérons une autre fonction V donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0,$$

G étant comme dans les n°s VI et suivants, une fonction de x et d'une indéterminée m, qui devienne la même que G' quand on fait $m = m'$, la même que G'' quand $m = m''$, et qui augmente quand m croît depuis m' jusqu'à m''. Supposons en outre que la valeur de $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = a$, d'abord égale à celle de $\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}$ quand $m = m'$, décroisse ou du

moins ne croisse pas quand m augmente et devienne égale à celle de $\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''}$ quand m devient égale à m''.

Ces conditions étant admises, il ne peut pas arriver que tandis que m croît depuis m' jusqu'à m'', la fonction V s'évanouisse pour une valeur de x comprise entre a et b; car dans ce cas V'' s'évanouirait pour une valeur moindre, ce qui est contre l'hypothèse. V sera donc constamment positive comme V' et V'' entre ces limites a et b, et le rapport $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ ne deviendra point infini. Mais d'après le n° VI, cette quantité $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}$ doit décroître continuellement, tandis que m augmente : ses valeurs extrêmes sont $\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'}$ et $\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''}$. On aura donc pour chaque valeur de x comprise entre a et b,

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} < \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'},$$

puis en multipliant par la quantité positive $V'V''$,

$$V'' \frac{dV'}{dx} - V' \frac{dV''}{dx} > 0.$$

On en conclut

$$\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V'}{V''}\right) > 0;$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{V'}{V''}$ augmente tandis que x croît depuis a jusqu'à b. Si donc on suppose $V' \overset{=}{>} V''$ pour $x = a$ on aura constamment $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b.

On peut arriver au même résultat d'une autre manière plus directe. Les deux équations différentielles

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0,$$
$$\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0,$$

donnent celle-ci

$$V''\frac{d^2V'}{dx^2} - V'\frac{d^2V''}{dx^2} = (G'' - G')\,V'V'';$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}\right) = (G'' - G')\,V'V''. \quad (31)$$

Par hypothèse, V' et V'' sont positives entre les limites a et b, et l'on a $G'' > G'$; le terme $(G'' - G')\,V'V''$ est donc positif et l'on a

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}\right) > 0,$$

d'où il suit que la quantité $V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx}$ augmente, tandis que x croît depuis a jusqu'à b. Si donc on suppose cette quantité positive ou nulle pour $x = a$, ce qui donne

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ pour } x = a,$$

on aura depuis a jusqu'à b,

$$V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx} > 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{V'}{V''}\right) > 0;$$

d'où l'on conclut comme précédemment, que $\frac{V'}{V''}$ augmente en même temps que x, et que si l'on a $V' \overset{=}{>} V''$ pour $x = a$, on aura $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b.

On trouvera de la même manière que $\frac{V'}{V''}$ diminue tandis que x croît depuis a jusqu'à b, et qu'on a dans cet intervalle $V' > V''$, si

l'on a

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ et } V' \geqq V'' \text{ pour } x = b,$$

au lieu de supposer, pour $x = a$,

$$\frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \text{ et } V' \geqq V''.$$

On parviendra encore aux mêmes conclusions, si V' et V'' sont nulles en même temps pour $x = a$, ou pour $x = b$, pourvu qu'alors on prenne $\frac{dV'}{dx} \geqq \frac{dV''}{dx}$ pour $x = a$, ou $\frac{dV'}{dx} \leqq \frac{dV''}{dx}$ pour $x = b$, en observant que le rapport $\frac{V'}{V''}$ devient égal à celui des différentielles $\frac{dV'}{dx}$, $\frac{dV''}{dx}$, quand V' et V'' sont nulles.

XLII.

On peut, par ce qui précède, déterminer dans tout l'intervalle compris entre deux limites a et b des valeurs approchées de la fonction V définie par l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0, \tag{32}$$

G étant une fonction quelconque de x, lorsqu'on connaît les valeurs exactes ou approchées de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=a$ ou pour $x=b$, et que V ne change pas de signe ou demeure positive entre ces limites.

A cet effet, on déterminera des fonctions V' et V'' qui vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' &= 0, \\ \frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

G' étant une fonction de x ou une constante plus petite que G entre

les limites a et b, et G'' une autre fonction de x ou une constante plus grande que G.

On intégrera ces équations (33) en remplissant les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \geqq \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V' \geqq V, \quad \text{pour} \quad x = a, \\ \dfrac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \leqq \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V'' \leqq V, \quad \text{pour} \quad x = a, \end{array}\right\} \quad (34)$$

V étant par hypothèse positive entre les limites a et b, V' sera aussi nécessairement positive, et si l'on trouve que V'' l'est encore, on aura pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b

$$V < V' \quad \text{et} \quad V > V''.$$

En outre $\frac{V}{V'}$ diminuera et $\frac{V}{V''}$ augmentera, tandis que x croîtra dans cet intervalle.

Si l'on intègre les équations (33) en supprimant les conditions (34) pour $x = a$ et les remplaçant par celles que voici pour $x = b$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{dV'}{dx}}{V'} \leqq \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V' \geqq V, \\ \dfrac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \geqq \dfrac{\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{et} \quad V'' \leqq V. \end{array}\right\} \text{pour } x = b \quad (35)$$

On aura encore entre a et b

$$V < V' \quad \text{et} \quad V > V'';$$

d'ailleurs $\frac{V}{V'}$ augmentera et $\frac{V}{V''}$ diminuera, tandis que x croîtra depuis a jusqu'à b.

On peut ainsi, en rapprochant suffisamment les limites a et b et choisissant convenablement G' et G'', déterminer pour chaque valeur de x entre a et b, des valeurs V' et V'' entre lesquelles soit comprise celle de la fonction inconnue V. Par exemple, si G est positive entre

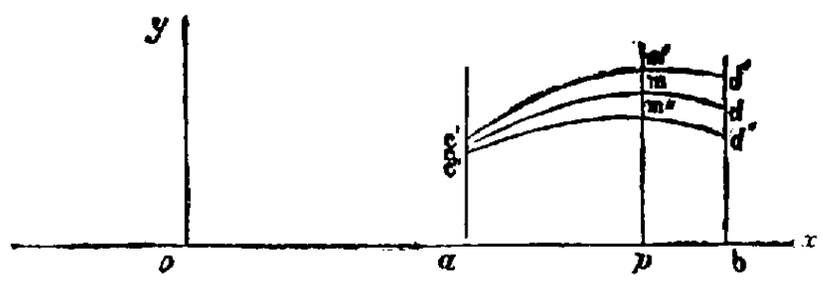
a et b et qu'on prenne G′ et G″ constantes, $G' < G$ et $G'' > G$, on aura pour V′ une expression de cette forme

$$V' = C \sin.[(x - a)\sqrt{G'}] + D \cos.[(x - a)\sqrt{G'}],$$

ou bien

$$V' = C \sin.[(b - x)\sqrt{G'}] + D \cos [(b - x)\sqrt{G'}],$$

et une expression semblable pour V″; on déterminera les constantes arbitraires C, D,... de manière que les conditions (34) ou (35) soient satisfaites; alors pour chaque valeur de x entre a et b, la valeur de V sera comprise entre celles de ces deux fonctions trigonométriques V′ et V″ qui pourront différer très peu l'une de l'autre, surtout si G varie peu entre les limites a et b. Si G est négative entre a et b, V′ et V″ deviendront des fonctions exponentielles. La courbe inconnue cmd dont l'ordonnée serait V, se trouve par là renfermée entre deux courbes connues $c'm'd'$, $c''m''d''$ ayant pour ordonnées V′ et V″, qui lui servent de limites, pour toutes les valeurs de l'abscisse x croissantes depuis a jusqu'à b, comme l'indique la figure (*).



(*) En intégrant l'équation (31) entre des limites quelconques, on trouve

$$V'' \frac{dV'}{dx} - V' \frac{dV''}{dx} = C + \int (G'' - G') V'V'' \, dx. \qquad (36)$$

Cette formule coïncide avec l'équation (9) du n° V, lorsqu'on suppose dans celle-ci et dans les deux équations différentielles dont elle provient, $K = 1$ et $K' = 1$.

On peut en s'appuyant sur cette formule (36), démontrer d'une manière nouvelle la première partie du théorème du n° XII, en y supposant toutefois les fonctions K′ et K″ réduites à l'unité.

On prouve d'abord que deux valeurs consécutives de x qui annullent V′ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle V″.

En effet, supposons, s'il est possible, qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V′, il n'y ait pas de valeur de x qui annulle V″. On peut alors

XLIII.

Les considérations précédentes sur l'équation $\frac{d^2V}{dx^2}+GV=0$ peuvent s'étendre avec quelques modifications à l'équation plus générale $\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0$ à laquelle on ramène $L\frac{d^2U}{dx^2}+M\frac{dU}{dx}+NU=0$ en faisant $U=\theta V$, θ étant un facteur arbitraire.

---

supposer ces deux fonctions V' et V'' positives dans l'intervalle compris entre α et β, puisqu'il est permis de changer le signe de chacune.

Dans l'équation (36), l'intégrale $\int(G''-G')V'V''dx$ prise entre ces limites α et β sera donc positive. La constante C sera positive ou nulle, car elle est égale à la valeur du premier membre $V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}$ pour $x=\alpha$; or V' est nulle pour $x=\alpha$, $\frac{dV'}{dx}$ a pour $x=\alpha$ le même signe que V' a pour les valeurs de x un peu plus grandes que α, c'est-à-dire le signe $+$; et en outre V'' est supposée positive ou nulle pour $x=\alpha$.

On aura donc pour toutes les valeurs de x depuis α jusqu'à β

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}>0,$$

et puisque V' redevient nulle pour $x=\beta$ on a

$$V''\frac{dV'}{dx}>0 \text{ pour } x=\beta.$$

Donc V'' qu'on suppose positive entre les limites α et β ne peut pas être nulle pour la valeur même $x=\beta$, de sorte qu'elle est encore positive pour $x=\beta$. Et puisqu'on a $V''\frac{dV'}{dx}>0$ pour $x=\beta$, $\frac{dV'}{dx}$ devrait être aussi positive pour $x=\beta$, mais au contraire $\frac{dV'}{dx}$ est négative pour $x=\beta$, car la fonction V' passe du positif au négatif en prenant le signe de $\frac{dV'}{dx}$ quand x atteint et dépasse la valeur β.

Il est donc absurde de supposer que V'' ne change pas de signe entre les limites α et β, V'' étant ou n'étant pas nulle pour $x=\alpha$.

On pourrait aussi, d'après les nos XXVI...XXXV, établir relativement aux valeurs de x qui annullent la fonction $K\frac{dV}{dx}+pV$, des propositions analogues à celles que nous avons données pour V. Il nous paraît superflu de nous y arrêter. Nous terminerons par quelques remarques.

Étant donnée l'équation

$$\frac{d.\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+GV=0,$$

si l'on considère la fonction V dans l'intervalle compris entre deux valeurs quelconques de x, a et $a+i$, et ensuite dans un autre intervalle égal au premier compris entre deux autres valeurs c et $c+i$, on peut à l'aide de nos théorèmes comparer les états de cette fonction dans ces deux intervalles.

On démontrera d'une manière semblable à l'aide de la même formule (36) que si l'on a pour une valeur de x désignée par x

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}\gtreqless 0 \text{ ou } \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''}\lesseqgtr\frac{\frac{dV'}{dx}}{V'},$$

il doit exister entre x, et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui annulle V', au moins une valeur de x qui annulle V''.

De ces propositions réunies on conclut la première partie du théorème du n° XII, en y réduisant K' et K'' à l'unité.

On peut encore la démontrer de la manière suivante :

Supposons de nouveau, s'il est possible, qu'entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent V' il n'y ait pas de valeur de x qui annulle V''. On peut alors supposer V' et V'' positives entre les limites α et β dans l'équation (36); l'intégrale $\int(G''-G')V'V''dx$ prise entre ces limites sera donc positive. La constante C sera positive ou nulle puisqu'elle est égale à la valeur de $V''\frac{dV'}{dx}-\frac{dV''}{dx}$ pour $x=\alpha$, et que pour $x=\alpha$, V' est nulle, $\frac{dV'}{dx}$ est positive et V'' positive ou nulle.

On a donc pour toutes les valeurs de x croissantes depuis α jusqu'à β,

$$V''\frac{dV'}{dx}-V'\frac{dV''}{dx}>0,$$

On fait d'abord $x = a + x'$ et en désignant par G', K' et V' ce que deviennent les fonctions G, K et V par la substitution de $a + x'$ à la place de x, l'équation (I) devient

$$\frac{d\left(K'\frac{dV'}{dx'}\right)}{dx'} + G'V' = 0.$$

En faisant de même $x = a + x''$, elle devient aussi

$$\frac{d\left(K''\frac{dV''}{dx''}\right)}{dx''} + G''V'' = 0.$$

On suppose maintenant que x' et x'' représentent une seule et même variable croissante depuis o jusqu'à i, et l'on établit la comparaison

---

d'où $V''\frac{dV'}{dx} > 0$ pour $x = \beta$; par conséquent V'' qu'on suppose positive entre les limites α et β ne peut pas être nulle et doit être encore positive pour $x = \beta$. Mais $V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx} > 0$, donne $\frac{d}{dx}\left(\frac{V'}{V''}\right) > 0$. Ainsi, tandis que x croît depuis α jusqu'à β, la quantité $\frac{V'}{V''}$ augmente continuellement, sans devenir infinie. Mais pour les valeurs de x un peu plus grandes que α on a $\frac{V'}{V''} > 0$, puisque V' et V'' sont positives. On devrait donc avoir aussi $\frac{V'}{V''} > 0$ pour $x = \beta$, ce qui n'est pas, puisque pour $x = \beta$, V' est nulle par hypothèse et que V'' ne peut pas l'être. On ne peut donc pas supposer que V'' ne change pas de signe entre les limites α et β. On prouvera de même que si l'on a pour $x = \mathrm{x}$

$$V''\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV''}{dx} \gtreqless 0 \text{ ou } \frac{\frac{dV''}{dx}}{V''} \lesseqgtr \frac{\frac{dV'}{dx}}{V'};$$

en faisant croître x à partir de x, V'' devra s'annuller avant V'. De là résulte la première partie du théorème du n° 12, les fonctions K' et K'' y étant réduites à l'unité.

Quoique la démonstration de ce théorème développée dans les n°s VII...XI soit plus complète et plus lumineuse que celles que nous venons d'indiquer, nous n'avons pas cru devoir les passer sous silence, parce qu'elles peuvent être utiles dans d'autres occasions.

entre V′ et V″. C'est ainsi qu'on peut comparer entre elles deux portions différentes d'une ligne courbe correspondantes à des intervalles égaux pris sur l'axe des abscisses, en superposant ces deux intervalles.

Plus généralement on peut faire successivement x égale à une fonction quelconque d'une indéterminée x', puis à une autre fonction d'une autre indéterminée x''. Alors V se changera en une fonction V′ de x' et en une fonction V″ de x''. On comparera ensuite V′ et V″ en supposant que x' et x'' représentent une seule et même variable indépendante.

La théorie exposée dans ce mémoire sur les équations différentielles linéaires de la forme

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NU = 0.$$

correspond à une théorie tout-à-fait analogue que je me suis faite antérieurement sur les équations linéaires du second ordre à différences finies de cette forme

$$LU_{i+1} + MU_i + NU_{i-1} = 0.$$

i est un indice variable qui remplace la variable continue x; L, M, N, sont des fonctions de cet indice i et d'une indéterminée m, qu'on assujettit à certaines conditions. C'est en étudiant les propriétés d'une suite de fonctions U_0, U_1, U_2, U_3,... liées entre elles par un système d'équations semblables à la précédente que j'ai rencontré mon théorème sur la détermination du nombre des racines réelles d'une équation numérique comprises entre deux limites quelconques, lequel est renfermé comme cas particulier dans la théorie que je ne fais qu'indiquer ici. Elle devient celle qui fait le sujet de ce mémoire, par le passage des différences finies aux différences infiniment petites. Je dois dire cependant que j'ai trouvé pour les équations à différences finies dont il s'agit, des propositions et des démonstrations spéciales qui ne sont pas susceptibles d'être transportées aux équations différentielles.

Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyers;

PAR M. CHASLES.

Les surfaces du second degré de révolution sont engendrées par la rotation d'une conique autour de l'un de ses deux axes principaux.

L'axe de révolution peut être le grand axe ou le petit axe principal de la conique génératrice; il résulte de là deux classes de surfaces de révolution, qui ont, sous un rapport, des propriétés caractéristiques essentiellement différentes.

Dans le premier cas, la révolution se faisant autour de l'axe qui contient les foyers de la conique génératrice, la surface engendrée a elle-même deux foyers (dont l'un peut être à l'infini, c'est le cas du paraboloïde), et un plan directeur correspondant à chaque foyer. De sorte que ces surfaces sont *le lieu géométrique d'un point dont les distances à un point et à un plan fixes sont entre elles dans un rapport constant.*

Tels sont l'ellipsoïde allongé, l'hyperboloïde à deux nappes, et le paraboloïde.

Ces surfaces participent aux nombreuses propriétés des coniques considérées par rapport à leurs foyers. C'est là leur caractère distinctif.

Les surfaces de révolution de la seconde classe sont engendrées par la rotation d'une conique autour de celui de ses deux axes principaux qui ne contient pas ses foyers. Tels sont l'ellipsoïde aplati, l'hyperboloïde à une nappe, et le cylindre parabolique que nous considérons comme engendré par une parabole tournant autour de son axe principal situé à l'infini.

Ces trois surfaces, qui sont toujours restées en dehors de l'étude que l'on a faite des trois premières, sont douées, comme celles-ci, d'une propriété générale et caractéristique, qui consiste en ce qu'elles sont *le lieu géométrique d'un point tel que le rapport des distances de ce point à un point et à une droite fixes soit constant;* c'est ce que nous exprimerons par le théorème suivant :

L'ellipsoïde de révolution aplati, l'hyperboloïde à une nappe de révolution, et le cylindre parabolique, jouissent de la propriété que les distances de l'un quelconque de leurs points à un foyer de l'une de leurs sections méridiennes, et à la directrice corespondante à ce foyer, sont entre elles dans un rapport constant, quel que soit le point pris sur la surface.

En effet, cette relation aura lieu pour tous les points de la section méridienne, c'est-à-dire que les distances de chacun des points de cette conique, à l'un de ses foyers F et à la directrice correspondante D, seront entre elles dans un rapport constant μ.

Maintenant menons un plan perpendiculaire à la directrice, il coupera la surface suivant un cercle, la conique en deux points m, m', et la directrice en un point d. Si l'on cherche quels sont les points dont les distances au foyer F et au point d sont entre elles dans le rapport μ, ces points seront, comme on sait, sur une sphère; et si l'on demande ceux de ces points qui seront sur le plan coupant, ces points se trouveront sur un cercle; ce cercle passera par les deux points m, m', qui satisfont à la condition commune à tous les points de ce cercle. Ce cercle sera placé symétriquement par rapport au plan de la section méridienne; il aura donc la droite mm' pour diamètre; ainsi ce cercle sera précisément le cercle provenu de la section de la surface de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

Or les distances des points de ce cercle au point d de la directrice sont aussi les distances de ces points à la directrice elle-même; donc tous les points de la surface jouissent de la propriété que leurs distances au foyer d'une section méridienne et à la directrice correspondante, sont entre elles dans un rapport constant.

Ainsi le théorème est démontré.

Dans le cas du cylindre parabolique, la section méridienne est la parabole comprise dans un plan perpendiculaire à la direction des

arètes du cylindre; le rapport μ est alors égal à l'unité; et le cercle compris dans le plan perpendiculaire à la directrice de la parabole se réduit à une ligne droite qui est une arète du cylindre. La démonstration précédente s'applique parfaitement à ce cas particulier.

Les trois surfaces dont nous venons de démontrer la génération commune jouissent d'une autre propriété commune que nous énoncerons d'abord pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde, et ensuite pour le cylindre parabolique.

Dans l'ellipsoïde de révolution aplati, et dans l'hyperboloïde à une nappe de révolution, si l'on conçoit une section méridienne, le cône qui aura pour sommet un foyer de cette courbe, et pour base une section faite dans la surface par un plan quelconque mené par la directrice correspondante à ce foyer, sera de révolution.

Soit Σ cette section. Cette courbe, d'après le théorème ci-dessus, jouit de cette propriété que le rapport des distances de chacun de ses points au foyer F et à la directrice D de la section méridienne, est constant. Si l'on conçoit un plan fixe mené arbitrairement par cette directrice, les distances des points de la courbe Σ à ce plan seront proportionnelles à leurs distances à la directrice; on peut donc dire que les distances de chaque point de la courbe Σ, au point F et à ce plan fixe, seront entre elles dans un rapport constant, ce qui prouve que cette courbe est une surface du second degré de révolution qui a un foyer au point F, et pour plan directeur le plan fixe; et par conséquent, d'après la propriété connue des surfaces de révolution *à foyers*, cette courbe sera vue du point F suivant un cercle; c'est-à-dire qu'elle sera sur un cône de révolution ayant son sommet au point F.

Ainsi le théorème est démontré.

Dans le cylindre parabolique, si l'on fait une section par un plan perpendiculaire aux arètes, et que par la directrice de cette courbe, on mène un plan coupant quelconque, le cône qui passera par la section que ce plan fera dans le cylindre et qui aura pour sommet le foyer correspondant à la directrice, sera de révolution.

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème précédent.

Aux nombreuses propriétés des surfaces du second degré de révolution, relatives à leurs foyers et aux plans directeurs, correspondent

d'autres propriétés des mêmes surfaces, relatives encore à un *point* et à un *plan*, mais qui ne sont plus le *foyer et le plan directeur*; et ces propriétés s'appliquent à l'ellipsoïde aplati.

Concevons un ellipsoïde de révolution à foyers; et prenons un point quelconque de son axe de révolution pour centre d'une sphère par rapport à laquelle on formera la surface polaire de l'ellipsoïde (c'est-à-dire que chaque point de la surface de l'ellipsoïde étant considéré comme le sommet d'un cône circonscrit à la sphère, le plan de la courbe de contact enveloppera une seconde surface du second degré qui est appelée la surface polaire de l'ellipsoïde). Cette surface sera évidemment de révolution et aura, en direction, même axe de révolution que l'ellipsoïde. Aux foyers et aux plans directeurs de l'ellipsoïde correspondront dans cette surface, deux *plans* et deux *points*; et les propriétés de l'ellipsoïde relatives à ses foyers et à ses plans directeurs, se transformeront en propriétés de la nouvelle surface, relatives à ces deux plans et à ces deux points.

De là dérivent une foule de propriétés nouvelles des surfaces du second degré de révolution.

On reviendra sur cet objet dans un autre moment.

NOTE

Sur les rayons de courbure des sections coniques ;

PAR ABEL TRANSON.

La construction du rayon de courbure des sections coniques, qui est l'objet de cette note, m'a paru mériter d'être connue par son extrême simplicité et aussi parce qu'elle permet de démontrer, sans aucun appareil de calcul, les lois de la gravitation universelle.

Je rappellerai d'abord que Smith, dans son *Traité d'Optique*, liv. 2, chap. 9 (*), a donné, pour trouver tous les points de la caustique par réflexion d'une courbe quelconque, une construction qui se traduit par la formule

$$\rho\rho' = \tfrac{1}{2} r(\rho + \rho') \cos i,$$

dans laquelle i représente l'angle d'incidence, r le rayon de courbure de la courbe réfléchissante au point d'incidence, ρ et ρ' les distances respectives de ce point au point lumineux et au point correspondant de la caustique.

La formule telle que je viens de l'écrire suppose que les rayons réfléchis soient convergents. Sinon on considérera lequel des deux points conjugués se trouve situé, par rapport à l'élément sur lequel la réflexion a lieu, du côté opposé au centre de courbure de cet élément, et on changera le signe de celle des deux quantités ρ ou ρ' qui s'y rapporte.

(*) Voyez aussi l'*Analyse des infiniments petits* de l'Hôpital, *section VI*.

On voit de suite qu'en appliquant cette formule aux foyers d'une section conique, considérés comme points lumineux conjugués, on aura une relation entre les deux rayons vecteurs, l'angle qu'ils font avec la normale, et le rayon de courbure. Cette relation se trouve exprimée pour l'ellipse et l'hyperbole par une même formule

$$\rho\rho' = ar\cos i, \qquad \text{(A)}$$

dans laquelle $2a$ est le grand axe de la courbe. Pour la parabole on a

$$2\rho = r\cos i. \qquad \text{(B)}$$

Déjà ces formules fournissent des constructions très simples pour les rayons de courbure. Mais nous allons donner une autre formule commune à la fois aux trois courbes.

Premièrement, si l'on considère dans l'ellipse et dans l'hyperbole le triangle formé par les deux rayons vecteurs et la partie de l'axe qui joint les foyers, on aura

$$4(a^2 \mp b^2) = \rho^2 + \rho'^2 \mp 2\rho\rho'\cos 2i :$$

les signes supérieurs se rapportent à l'ellipse et les inférieurs à l'hyperbole, et comme $\cos 2i = 2\cos^2 i - 1$, il vient

$$4(a^2 \mp b^2) = (\rho \pm \rho')^2 \mp 4\rho\rho'\cos^2 i;$$

observant maintenant que $4a^2 = (\rho \pm \rho')^2$, on aura finalement

$$b^2 = \rho\rho'\cos^2 i,$$

relation qui convient à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole. Éliminant le produit $\rho\rho'$ entre cette dernière équation et (A), on trouvera

$$r = \frac{b^2}{a\cos^3 i};$$

ou bien, en appelant A le rayon de courbure au sommet du grand axe,

$$r = \frac{A}{\cos^3 i}.$$

Il est facile de prouver que la même relation subsiste dans la para-

bole. En effet, si l'on y considère la normale comme base d'un triangle isoscèle, ayant pour côtés le rayon vecteur et la partie de l'axe comprise entre le foyer et le pied de la normale, on aura pour la valeur de cette ligne $2\rho \cos i$. Mais ensuite comme la sous-normale est constante et égale à la moitié du paramètre $2p$, cette même normale est égale à $\frac{p}{\cos i}$; on a donc

$$2\rho = \frac{p}{\cos^2 i},$$

ce qui, combiné avec (B), donnera finalement

$$r = \frac{p}{\cos^3 i} = \frac{A}{\cos^3 i}.$$

« D'après cela, pour construire le rayon de courbure en un point » quelconque d'une section conique, on fixera d'abord les directions » de la normale et de l'un des rayons vecteurs qui se rapportent à ce » point. Sur la direction du rayon vecteur et à partir du point donné » on portera une longueur égale au rayon de courbure de la courbe » au sommet de son grand axe; à l'extrémité de cette longueur on » élèvera une perpendiculaire sur le rayon vecteur jusqu'à rencontre » de la normale; de ce point de rencontre on reviendra au rayon vec- » teur par une ligne perpendiculaire à la normale; du point ainsi » déterminé on élevera de nouveau une perpendiculaire au rayon » vecteur; et le point où cette perpendiculaire rencontrera la normale » sera le centre de courbure. »

Je passe au deuxième objet de cette note. Déjà, par la simple composition des forces, on prouve que la première loi de Kepler ou *la proportionnalité des aires aux temps*, est le résultat de ce que la force motrice des planètes est constamment dirigée vers le Soleil. Avec la relation $r = \frac{A}{\cos^3 i}$, nous sommes en état d'établir les conséquences de la deuxième loi, sans calcul et en supposant connus seulement les principes fondamentaux du mouvement curviligne.

En effet, si nous supposons que G soit la valeur de la gravitation lorsque la planète est à la distance ρ du Soleil, i étant l'angle que fait le rayon vecteur ρ avec la normale à la courbe décrite par la planète, cette force de gravitation pourra se décomposer en deux autres; l'une,

dirigée suivant la tangente à l'orbite, ayant pour effet d'accélérer ou retarder la vitesse; l'autre dirigée suivant la normale, ayant pour effet d'écarter la planète de la ligne droite pour la soumettre à la courbure de l'orbite. Cette dernière force, comme composante de la gravitation est égale à G cos i. D'ailleurs elle est égale et directement opposée à la force centrifuge dont la valeur est donnée par le théorème d'Huygens; de sorte que si v est la vitesse actuelle de la planète,

$$G \cos i = \frac{v^2}{r}; \qquad (\alpha)$$

ensuite nous observerons que, par la première loi de Kepler, l'aire élémentaire décrite par le rayon vecteur ou $\frac{1}{2}\rho \cos i\, ds$ est proportionnelle au temps, c'est-à-dire égale à Cdt, en représentant par C une constante propre à chaque planète; et vu que $\frac{ds}{dt} = v$, nous obtiendrons

$$v = \frac{C}{\rho \cos i}; \qquad (\beta)$$

combinant (α) avec (β), il vient

$$G = \frac{4C^2}{\rho^2 . r . \cos^3 i},$$

expression très générale qui permettra de calculer G en fonction de ρ toutes les fois qu'on aura, d'après la nature de la trajectoire, la valeur du produit $r\cos^3 i$ en fonction de cette même quantité ρ. Comme les orbites planétaires sont elliptiques et que pour toute ellipse, comme pour toute section conique, le produit $r\cos^3 i$ est constant, on voit que la gravitation varie pour une même planète en raison inverse du carré de la distance

Pour ce qui est de la troisième loi de Kepler, on sait qu'il est extrêmement facile d'en tirer cette conséquence que l'attraction solaire serait la même à égalité de masse pour toutes les planètes transportées à une même distance du Soleil. On peut donc considérer la démonstration des lois de la gravitation comme ramenée entièrement à des considérations élémentaires.

FORMULE

Pour la transformation d'une classe d'intégrales définies,

PAR M. JACOBI.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XV, page 1), se trouve un mémoire de M. Jacobi sur la transformation des intégrales définies. Ce mémoire renferme une formule remarquable dont nous croyons devoir transcrire ici la démonstration. Soit $f(z)$ une fonction de z développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de z et $f^{(i)}(z)$ sa dérivée de l'ordre i, i étant un nombre entier positif. M. Jacobi démontre que l'on a

$$(1)\quad \int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx = \frac{1}{1.3\ldots(2i-1)}\int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\,dx.$$

L'équation (1) se vérifie immédiatement quand $f(z) = Az^p$, A étant une constante et p un nombre entier positif. En effet si p est $< i$, les deux membres de cette équation sont alors nuls tous les deux : il en est de même quand, p étant $> i$, la différence $p - i$ est impaire. Enfin, quand $p - i$ est un nombre pair, la formule (1), en y faisant $f(z) = Az^p$, devient

$$(2)\quad \int_0^\pi \cos^p x\cos ix\,dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)}\int_0^\pi \sin^{2i} x\cos^{p-i} x\,dx,$$

résultat exact, comme on peut s'en convaincre en remplaçant les deux intégrales définies qui s'y trouvent par leurs valeurs connues. L'équa-

tion (1) ayant donc lieu quand $f(z) = Az^p$, il est évident qu'elle a lieu aussi pour une fonction $f(z)$ développable en série de la forme $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 +$ etc. M. Jacobi démontre cette équation de plusieurs manières. Nous renverrons à son mémoire les lecteurs qui désireraient de plus grands détails sur ce sujet. Contentons-nous d'observer que, d'après ses calculs, la formule (1) est exacte encore pour une fonction $f(z)$ non développable en série de la forme..... $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 +$ etc. : il suffit qu'aucune des quantités $f(\cos x)$, $f'(\cos x), \ldots f^{(i-1)}(\cos x)$ ne devienne infinie lorsque x croît d'une manière continue de o à π. On voit par là que la formule (2) subsiste lors même que p n'est pas un nombre entier, pourvu qu'on ait $p > i - 1$: on la vérifiera aisément par exemple en y posant $i = 1$, $p = \frac{1}{2}$.

Les intégrales de la forme $\int_0^\pi f(\cos x) \cos ix dx$ se présentent en analyse lorsqu'on veut développer, comme on a souvent besoin de le faire, une fonction de x en série de cosinus. Malheureusement le second membre de la formule (1) renferme la dérivée de l'ordre i de la fonction $f(\cos x)$: la difficulté qu'on éprouve en général à former cette dérivée quand le nombre i est un peu grand, restreindra sans doute beaucoup l'usage de la transformation ingénieuse imaginée par M. Jacobi.

NOTE

Sur le Calcul des inégalités périodiques du mouvement des Planètes,

PAR J. LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 29 février 1836) (*)

1. Lorsqu'une planète m' agit sur une autre planète m, elle produit dans le mouvement de cette dernière des inégalités *séculaires* ou *périodiques* qui font varier en fonction du temps les constantes arbitraires du mouvement elliptique. Le calcul de ces inégalités dépend du développement en série d'une fonction que Laplace désigne par R dans son ouvrage et qu'il appelle *fonction perturbatrice*. Les coefficients des divers termes du développement dont il s'agit peuvent être calculés de plusieurs manières. On les exprime, par exemple, en quadratures définies doubles. Je vais montrer que l'on peut quelquefois substituer à ces intégrales doubles des intégrales simples ayant à très peu près les mêmes valeurs, ce qui abrégera, ce me semble, le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes. Au fond, la méthode dont je propose de faire usage, dépend de quadratures définies doubles, tout aussi bien que la méthode ordinaire; mais ici les quadratures sont rapportées à de nouvelles variables qui permettent d'effectuer, pour ainsi dire, immédiatement, et avec une approximation très grande, l'une des deux intégrations indiquées. Dans chaque cas particulier, on jugera sans peine quels peuvent être les avantages et les inconvénients de ce nouveau procédé.

(*) Voyez le rapport de M. Poisson sur cette Note (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. Avril 1836).

2. Soient r le rayon vecteur Om mené du centre de la planète m au centre O du soleil, a le demi-grand axe, e l'excentricité de l'orbite de cette planète, γ son inclinaison sur un plan fixe que nous prendrons pour plan des xy et qui sera, si l'on veut, le plan de l'écliptique à l'époque d'où l'on compte le temps t : désignons par α la longitude du nœud ascendant OA comptée sur le plan des xy à partir de l'axe des x, par $v-\alpha$ l'angle du rayon vecteur r avec la droite OA et par ω la valeur de v qui répond au périhélie. Si l'on nomme u l'anomalie excentrique, les valeurs de r et de v, dans le mouvement elliptique de la planète m, seront données en fonction de u par les équations

$$r = a(1 - e\cos u), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v - \omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.$$

Pour trouver à son tour la valeur de u en fonction de l'anomalie moyenne ζ, il faut résoudre l'équation

$$\zeta = u - e\sin u.$$

Enfin, en nommant nt le moyen mouvement de la planète m et $\varepsilon - \omega$ la valeur de ζ pour $t = 0$, on a, au bout d'un temps t quelconque, $\zeta = nt + \varepsilon - \omega$.

Pour une autre planète m', il existe des formules semblables :

$$r' = a'(1 - e'\cos u'), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v' - \omega') = \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u',$$
$$\zeta' = u' - e'\sin u', \quad \zeta' = n't + \varepsilon' - \omega'.$$

Le cosinus s de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r' se calculera aisément d'après ce qui précède : en effet on a

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

x, y, z, étant les coordonnées du point m, x', y', z' celles du point m'; mais, par les formules connues, si l'on transforme les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, il vient

$$\begin{aligned} x &= r[\cos\alpha\cos(v-\alpha) - \cos\gamma\sin\alpha\sin(v-\alpha)],\\ y &= r[\sin\alpha\cos(v-\alpha) + \cos\gamma\cos\alpha\sin(v-\alpha)],\\ z &= r\sin\gamma\sin(v-\alpha), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x' &= r'[\cos\alpha'\cos(v'-\alpha') - \cos\gamma'\sin\alpha'\sin(v'-\alpha')],\\ y' &= r'[\sin\alpha'\cos(v'-\alpha') + \cos\gamma'\cos\alpha'\sin(v'-\alpha')],\\ z' &= r'\sin\gamma'\sin(v'-\alpha'), \end{aligned}$$

d'où l'on peut tirer la valeur de s en fonction de r, r', v, v', α, α', γ, γ'.

3. Ces formules du mouvement elliptique des planètes représentent encore leur mouvement troublé par une cause quelconque pourvu que l'on remplace les constantes a, e, ω, α, γ, ε, a', e', ω', α', γ', ε' par des fonctions convenables du temps t : en même temps on écrira $\int ndt$ au lieu de nt, $\int n'dt$ au lieu de $n't$; et les intégrales $\int ndt$, $\int n'dt$ que nous désignerons par ρ, ρ', représenteront ce qu'on appelle alors les moyens mouvements de m, m'.

Pour déterminer les perturbations que la planète m' produit dans le mouvement de la planète m, il faut développer en série la fonction désignée par R dans la *Mécanique céleste* et nommée *fonction perturbatrice*, parce que ses dérivées partielles prises par rapport à x, y, z et précédées du signe — représentent les composantes de la force perturbatrice respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z.

L'expression de R en fonction de r, r', s est

$$R = \frac{m'rs}{r'^2} - \frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr's}};$$

et par conséquent, on doit regarder R comme une fonction périodique de ζ et ζ', renfermant en outre les éléments elliptiques a, a', e, e', etc. (*).

Cela posé, pour calculer les variations des constantes a, e, ω, α, γ, ε et du moyen mouvement ρ, en fonction du temps t, qui sont produites par l'action perturbatrice de la planète m', on se servira des formules

(*) Les inégalités produites par le premier terme $\frac{m'rs}{r'^2}$ de R étant aisées à calculer par divers procédés, on pourra, si l'on veut, appliquer les raisonnements qui suivent au second terme de R seulement. Il est d'ailleurs naturel de considérer à part ce second terme puisqu'il reste le même (abstraction faite du coefficient numérique m') quand, au lieu d'étudier l'action de m' sur m, on étudie celle de m sur m'.

de Lagrange dans lesquelles les dérivées $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, etc. sont exprimées au moyen des différentielles partielles de R prises par rapport aux éléments de la planète troublée et multipliées par des coefficients dans lesquels le temps t n'entre pas explicitement. On a, par exemple,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{3}{a^2} \cdot \frac{dR}{d\zeta}, \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2}{an} \cdot \frac{dR}{d\zeta} :$$

il existe des formules semblables pour les variations des autres éléments.

Quand on néglige, comme nous le ferons dans cette note, le carré de la force perturbatrice, on doit regarder dans le second membre toutes les quantités ζ, ζ', a, a', e, e', etc., comme réduites à leurs valeurs elliptiques; et en désignant par la caractéristique δ les variations éprouvées par ces quantités, on a

$$\frac{d^2\delta\rho}{dt^2} = \frac{3}{a^2} \cdot \frac{dR}{d\zeta}, \quad \frac{d\delta a}{dt} = -\frac{2}{an} \cdot \frac{dR}{d\zeta}, \ldots.$$

Si maintenant on développe R en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de ζ et ζ', le terme de ce développement qui sera indépendant de ζ et ζ' produira seul les inégalités séculaires des éléments de l'orbite de m; et au contraire les termes contenant sous les signes *sinus* et *cosinus* les quantités ζ et ζ' produiront les inégalités périodiques de ces mêmes éléments.

Si par exemple R contient un terme de la forme $M \sin(i\zeta - i'\zeta')$, i et i' étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, ce terme produira dans les valeurs de $\delta\rho$, δa les inégalités respectives

$$-\frac{3iM}{a^2(in - i'n')^2} \cdot \cos(i\zeta - i'\zeta'), \quad -\frac{2iM}{an(in - i'n')} \cdot \sin(i\zeta - i'\zeta') :$$

de même si R contient le terme $N\cos(i\zeta - i'\zeta')$, ce terme produira dans $\delta\rho$, δa les deux inégalités

$$\frac{3iN}{a^2(in - i'n')^2} \cdot \sin(i\zeta - i'\zeta'), \quad -\frac{2iN}{an(in - i'n')} \cdot \cos(i\zeta - i'\zeta') :$$

ces quatre inégalités dépendent du même argument $in - i'n'$.

4. On peut calculer les valeurs de M et N, correspondantes à un argument donné, par diverses méthodes. En effet, les excentricités e, e' et

l'angle A du plan de l'orbite de m avec le plan de l'orbite de m' étant de très petites quantités pour les principales planètes, on peut développer la fonction R suivant les puissances croissantes de e, e', $\sin\frac{1}{2}A$, et de la sorte on obtient avec tel degré d'approximation qu'on veut les valeurs de M et N en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons des deux planètes.

En faisant usage de cette méthode, on prouve aisément que les coefficients M et N qui répondent à l'argument $in - i'n'$ sont de l'ordre $i - i'$ par rapport aux excentricités et aux inclinaisons (la différence $i - i'$ étant calculée abstraction faite du signe), de manière que si les nombres e, e', $\sin\frac{1}{2}A$ devenaient infiniment petits du premier ordre, les nombres M et N deviendraient infiniment petits de l'ordre $i - i'$ ou $i' - i$ suivant que i est supérieur ou inférieur à i'. Ce théorème remarquable nous sera très utile par la suite.

M. Poisson a donné, pour calculer les valeurs de M et N une méthode qui, dans un grand nombre de cas, est préférable à la précédente. Cette méthode, dont M. Hansen a le premier fait usage dans la théorie de Jupiter et de Saturne, consiste à exprimer les coefficients M et N par des intégrales définies doubles relatives à ζ, ζ' et prises entre les limites o et 2π.

Je me propose de montrer, dans cette Note, que l'on peut quelquefois remplacer avec avantage les intégrales définies doubles par des intégrales définies simples exprimant les valeurs de M et N non pas rigoureusement, mais avec autant d'approximation que l'on voudra. Les formules auxquelles je suis arrivé reposent sur une analyse très simple.

5. Pour fixer les idées, proposons-nous de calculer les coefficients relatifs à la grande inégalité de Saturne produite par l'action de Jupiter, inégalité qui répond à l'argument $5n - 2n'$, nt étant le moyen mouvement de Saturne et $n't$ celui de Jupiter. Puisque R est une fonction de ζ, ζ', représentons cette fonction par $F(\zeta, \zeta')$; représentons en outre par A le terme du développement de R qui ne contient ni ζ, ni ζ', par A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, B_3, ... les coefficients des cosinus et des sinus des arcs $5\zeta - 2\zeta'$, $10\zeta - 4\zeta'$, $15\zeta - 8\zeta'$, ... que nous nommerons, pour abréger, θ, 2θ, 3θ, ... D'après cela, si l'on pose

$$\begin{aligned} F(\zeta, \zeta') = A &+ A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \ldots \\ &+ B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta + \ldots \\ &+ \varphi(\zeta, \zeta'), \end{aligned}$$

ou

$$F(\zeta, \zeta') = A + \Sigma A_p \cos p\theta + \Sigma B_p \sin p\theta + \varphi(\zeta, \zeta'),$$

la fonction $\varphi(\zeta, \zeta')$ ne contiendra aucun terme dépendant de l'argument $5n - 2n'$ ou de ses multiples. Maintenant faisons $\zeta = 2\sigma$, $\zeta' = 5\sigma - \frac{\theta}{2}$, σ désignant une nouvelle variable : il viendra

$$\begin{aligned} F\left(2\sigma,\ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right) = A &+ \Sigma A_p \cos p\theta + \Sigma B_p \sin p\theta \\ &+ \varphi\left(2\sigma,\ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right); \end{aligned}$$

et il est clair que le développement de $\varphi\left(2\sigma, 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right)$ ne contiendra aucun terme indépendant de σ : donc en multipliant par $d\sigma$ et intégrant, entre les limites $\sigma = 0$, $\sigma = 2\pi$, les deux membres de l'égalité précédente, on aura

$$A + \Sigma A_p \cos p\theta + \Sigma B_p \sin p\theta = \Psi(\theta),$$

équation où l'on a fait

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(2\sigma,\ 5\sigma - \frac{\theta}{2}\right) d\sigma.$$

La fonction $\Psi(\theta)$ est, comme on voit, une fonction périodique de θ, et l'on a

$$\Psi(2\pi + \theta) = \Psi(\theta).$$

En changeant θ en $-\theta$, notre équation devient

$$A + \Sigma A_p \cos p\theta - \Sigma B_p \sin p\theta = \Psi(-\theta) :$$

combinant cette nouvelle égalité avec celle dont elle dérive, par voie d'addition et de soustraction, et posant

$$\Psi(\theta) + \Psi(-\theta) = 2\varpi(\theta), \quad \Psi(\theta) - \Psi(-\theta) = 2\Pi(\theta),$$

on obtient

$$\begin{aligned} &(1) \qquad A + \Sigma A_p \cos p\theta = \varpi(\theta), \\ &(2) \qquad \Sigma B_p \sin p\theta = \Pi(\theta). \end{aligned}$$

Dans la théorie de Jupiter et de Saturne, on doit regarder comme à peu près insensibles les coefficients A_2, B_2, A_3, B_3,... dont les deux premiers sont déjà du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Or, en négligeant ces coefficients, il vient

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta), \quad B_1 \sin\theta = \Pi(\theta).$$

On peut donner à θ une valeur arbitraire. En posant par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$A = \varpi\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Si l'on veut, dans ces formules, substituer à la fonction ϖ la fonction Ψ, on se rappellera que l'équation $\Psi(2\pi + \theta) = \Psi(\theta)$ qui a lieu en général donne

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

et l'on aura

$$A = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right], \quad B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Si dans l'équation

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta),$$

on pose successivement $\theta = 0$, $\theta = \pi$, puis qu'on ajoute et qu'on retranche l'un de l'autre les deux résultats obtenus, on aura

$$A = \frac{1}{2}[\varpi(0) + \varpi(\pi)], \quad A_1 = \frac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A = \frac{1}{2}[\Psi(0) + \Psi(\pi)], \quad A_1 = \frac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)].$$

Les valeurs de A sont exactes aux quantités près du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons : celles de A_1, B_1 sont exactes aux quantités près du neuvième ordre; car leurs expressions ne changeraient pas quand même on tiendrait compte des termes $A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$ négligés tout à l'heure, en continuant à regarder comme insensibles les coefficients A_3, B_3, A_4, B_4,... qui sont au moins du neuvième ordre. En effet, si l'on conserve les termes

$A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$, l'équation (2) donne

$$B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta = \Pi(\theta),$$

d'où résulte, en posant $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

De même l'équation (1) donne

$$A + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta = \varpi(\theta):$$

faisant donc successivement $\theta = 0$, $\theta = \pi$, puis retranchant les deux résultats l'un de l'autre, on trouve

$$A_1 = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)];$$

ces valeurs de A_1, B_1 coïncident avec celles que nous avons obtenues en premier lieu.

En prenant la dérivée par rapport à θ des deux membres de l'équation $A + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta = \varpi(\theta)$, on obtient

$$A_1 \sin\theta + 2A_2 \sin 2\theta = -\frac{d\varpi(\theta)}{d\theta} = -\varpi'(\theta);$$

faisant donc $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a, au même degré d'approximation que ci-dessus : $A_1 = -\varpi'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Désignons en général par i, i' deux nombres entiers premiers entre eux, le premier étant positif et pour fixer les idées, plus grand que le second qui sera indifféremment positif ou négatif. Posons $\zeta = i'\sigma$, $\zeta' = i\sigma - \frac{\theta}{i'}$, ce qui donne $i\zeta - i'\zeta' = \theta$, puis représentons par A_p, B_p les coefficients de $\cos p(i\zeta - i'\zeta')$, $\sin p(i\zeta - i'\zeta')$ dans le développement de R. En faisant

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(i'\sigma,\ i\sigma - \frac{\theta}{i'}\right) d\sigma = \Psi(\theta),$$

puis

$$\Psi(\theta) + \Psi(-\theta) = 2\varpi(\theta), \quad \Psi(\theta) - \Psi(-\theta) = 2\Pi(\theta),$$

on trouvera, par une analyse semblable à celle employée ci-dessus,

$$(3)\qquad A + \Sigma A_p \cos p\theta = \varpi(\theta),$$
$$(4)\qquad \Sigma B_p \sin p\theta = \Pi(\theta):$$

les coefficients A_p, B_p sont de l'ordre $p(i-i')$: si donc on néglige les quantités de l'ordre $2(i-i')$, on aura simplement

$$A + A_1 \cos\theta = \varpi(\theta), \quad B_1 \sin\theta = \Pi(\theta),$$

d'où l'on conclura, sans difficulté,

$$A = \varpi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

ou

$$A = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) + \varpi(\pi)] = \tfrac{1}{2}[\Psi(0) + \Psi(\pi)],$$

puis

$$A_1 = \tfrac{1}{2}[\varpi(0) - \varpi(\pi)] = \tfrac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)],$$

$$B_1 = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Les valeurs de A_1, B_1 sont même exactes aux quantités près de l'ordre $3(i-i')$; car elles ne changeraient pas si l'on tenait compte des termes $A_2 \cos 2\theta$, $B_2 \sin 2\theta$, en continuant à négliger les termes suivants : $A_3 \cos 3\theta$, $B_3 \sin 3\theta$, ... qui sont au moins de l'ordre $3(i-i')$. Ces formules $A_1 = \frac{1}{2}[\Psi(0) - \Psi(\pi)]$, etc. sont d'autant plus exactes que la différence $(i-i')$ est plus considérable et l'on pourra, ce me semble, en tirer parti, dans la théorie des planètes, pour la détermination des inégalités à longue période.

7. Si dans le calcul des coefficients A, A_1, etc., on veut négliger seulement les termes de l'ordre $q(i-i')$, voici quelle marche on pourra suivre (*).

(*) Trouver les valeurs de A, A_1, etc., qui satisfont aux équations (3) et (4), aux quantités près de l'ordre $q(i-i')$, c'est-à-dire en négligeant les quantités dont l'ordre est $= q$ ou $> q$ (ce qui réduit les premiers membres de ces équations à un nombre limité de termes), est un problème indéterminé comme tous les problèmes d'interpolation. Que l'on donne à θ un nombre suffisant de valeurs particulières, choisies arbitrairement, et l'on formera par là autant d'équations qu'il en faut pour déterminer toutes les inconnues A, A_1, etc. Chaque équation obtenue de la sorte est, pour ainsi dire, une observation à laquelle ces inconnues doivent satisfaire. Quand les

Les q valeurs de $\sqrt[q]{1}$ sont, comme on sait,

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{q},\quad \cos\frac{4\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{q},\ldots$$
$$\cos\frac{2(q-1)\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(q-1)\pi}{q}.$$

La somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ de ces racines est égale à q ou à zéro, suivant que p est ou n'est pas un multiple de q. On a donc, en supposant $p>0$ et différent de q, $2q$, etc.,

$$1+\left(\cos\frac{2\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{q}\right)^p+\ldots+\left(\cos\frac{2(q-1)\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(q-1)\pi}{q}\right)^p=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$1+\cos\frac{2p\pi}{q}+\cos\frac{4p\pi}{q}+\ldots+\cos\frac{2(q-1)p\pi}{q}=0,$$
$$\sin\frac{2p\pi}{q}+\sin\frac{4p\pi}{q}+\ldots+\sin\frac{2(q-1)p\pi}{q}=0:$$

la dernière de ces égalités subsiste même quand p est nul et quand p est égal à un multiple de q. Cela posé, reprenons l'équation

$$\Psi(\theta)=A+\Sigma A_p\cos p\theta+\Sigma B_p\sin p\theta;$$

faisons-y successivement $\theta=0$, $\theta=\frac{2\pi}{q}$, $\theta=\frac{4\pi}{q},\ldots$ $\theta=\frac{2(q-1)\pi}{q}$, puis ajoutons tous les résultats obtenus ; le coefficient de A et celui de A_q, A_{2q}, etc., seront égaux à q, et les coefficients des autres termes seront nuls : par suite il viendra

$$q(A+A_q+A_{2q}+\text{etc.})=\Psi(0)+\Psi\left(\frac{2\pi}{q}\right)+\Psi\left(\frac{4\pi}{q}\right)+\ldots+\Psi\left[\frac{2(q-1)\pi}{q}\right],$$

---

seconds membres $\varpi(\theta)$, $\Pi(\theta)$ sont connus en nombres pour une valeur particulière de θ telle que θ_1, il est naturel de ranger les équations que produit l'hypothèse $\theta=\theta_1$ parmi celles dont on fera usage pour déterminer A, A_1, etc. Mais presque toujours les formules que nous démontrons dans le texte seront celles dont l'emploi présentera le plus d'avantages.

ce qui donne

$$A = \frac{1}{q}\left\{\Psi(0) + \Psi\left(\frac{2\pi}{q}\right) + \Psi\left(\frac{4\pi}{q}\right) + \ldots + \Psi\left[\frac{2(q-1)\pi}{q}\right]\right\},$$

en négligeant les termes A_q, A_{2q}, etc., qui sont de l'ordre $q(i-i')$ ou d'ordre supérieur. Si, pour abréger, on représente [quelle que soit la fonction $f(\mu)$] l'expression

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(q-1) \text{ par } \Sigma_0^q f(\mu),$$

on pourra écrire

$$(\alpha) \qquad A = \frac{1}{q}\Sigma_0^q \Psi\left(\frac{2\mu\pi}{q}\right).$$

Je reviens à l'équation

$$\Psi(\theta) = A + \Sigma A_p \cos p_1\theta + \Sigma B_{p_1} \sin p_1\theta,$$

dans laquelle j'ai écrit p_1 au lieu de p, et je regarde p comme une valeur particulière de p_1 comprise entre o et q. En multipliant les deux membres par $\cos p\theta$, j'obtiens

$$\Psi(\theta)\cos p\theta = A\cos p\theta + \tfrac{1}{2}\Sigma A_{p_1}[\cos(p_1+p)\theta + \cos(p_1-p)\theta]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma B_{p_1}[\sin(p_1+p)\theta + \sin(p_1-p)\theta]:$$

faisant successivement dans cette équation $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{p+q}$, $\theta = \frac{4\pi}{p+q}, \ldots \theta = \frac{2(p+q-1)\pi}{p+q}$, puis ajoutant tous les résultats obtenus, je trouve que, dans le second membre, les coefficients de A, A_1, ... A_{q-1} sont nuls à l'exception de celui de A_p qui est égal à $p+q$: en négligeant les termes de l'ordre $q(i-i')$, on a donc

$$(\beta) \qquad A_p = \frac{2}{p+q}\Sigma_0^{(p+q)} \Psi\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right)\cos\frac{2\mu p\pi}{p+q},$$

et l'on trouvera semblablement, au même degré d'approximation,

$$(\gamma) \qquad B_p = \frac{2}{p+q}\Sigma_0^{(p+q)} \Psi\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right)\sin\frac{2\mu p\pi}{p+q}.$$

Si l'on était obligé de prendre pour q un nombre entier considérable, ces formules auraient peu d'avantages sur celles qui expriment

A, A_p, B_p en quadratures définies doubles. Mais, dans la théorie des principales planètes, il suffira de poser $q=2$, $q=3$, ou tout au plus $q=4$: il faut excepter seulement le cas où l'on aurait $i'=i$, en sorte que jusqu'ici notre méthode ne s'étend pas aux inégalités dépendantes de la différence des moyens mouvements des planètes m, m' ; en effet, quand on a $i'=i$, les coefficients A_1, A_2, ... B_1, B_2... sont tous de l'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; et les simplifications fondées sur la petitesse des nombres e, e', $\sin\frac{1}{2}A$ cessent alors d'être possibles. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce cas particulier.

(8) Quand dans la valeur de A_p on pose $p=1$, $q=2$, il vient

$$A_1 = \frac{2}{3}\left[\Psi(0) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right],$$

tandis qu'en posant $p=1$, $q=3$, on a

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi(0) - \Psi(\pi)\right],$$

formule beaucoup plus simple que l'autre, et en même temps beaucoup plus exacte, puisque les termes négligés sont dans la première de l'ordre $2(i-i')$ et dans la seconde de l'ordre $3(i-i')$. Semblablement la formule

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

qui correspond à $q=3$ est à la fois plus exacte et plus simple que celle qu'on obtiendrait en posant $q=2$ dans la valeur générale de B_1. Il est bien remarquable qu'on diminue la longueur des calculs numériques à effectuer, en employant des formules plus exactes. Ces deux formules $A_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi(0) - \Psi(\pi)\right]$, $B_1 = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$, qui fournissent aux quantités près du neuvième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons les coefficients relatifs à la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, seront, je l'espère, appréciées par les astronomes. Elles exigent la réduction en nombres de quatre intégrales définies simples, savoir $\Psi(0)$, $\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\Psi(\pi)$, $\Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)$: ces quatre intégrales une fois calculées, on pourra trouver la valeur de A

aux termes près de l'ordre $4(i - i')$, (c'est-à-dire, pour Jupiter et Saturne, aux termes près du douzième ordre), puisqu'en posant $q = 4$, on a

$$A = \frac{1}{4}\left[\Psi(0) + \Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Psi(\pi) + \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right](*).$$

(9) En modifiant légèrement notre méthode, nous la rendrons applicable aux inégalités dépendantes de la différence des moyens mouvements des planètes m et m'. Pour cela nous opérerons, comme il suit, le développement de R ou F (ζ, ζ').

En posant

$$\sigma = \frac{\zeta - \zeta'}{2}, \tau = \frac{\zeta + \zeta'}{2}, \text{ on a } \zeta = \sigma + \tau, \zeta' = \tau - \sigma :$$

on a ensuite $$F(\zeta, \zeta') = F(\sigma + \tau, \tau - \sigma),$$

quantité qui ne change pas lorsqu'on augmente de 2π une quelconque des deux variables σ, τ, et qui par conséquent peut se réduire en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de σ et τ. Effectuons d'abord le développement de $F(\sigma + \tau, \tau - \sigma)$ en ayant égard à la seule variable τ : le développement sera de la forme

$$F(\sigma + \tau, \sigma - \tau) = P + \Sigma P_p \cos p\tau + \Sigma Q_p \sin p\tau ;$$

P, P_p, Q_p étant des fonctions périodiques de σ. Or, il est aisé de voir que les coefficients P_p, Q_p sont en général de l'ordre p par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. On pourra donc négliger comme insensibles ceux de ces coefficients qui répondront à un indice p égal ou

---

(*) Les intégrales $\Psi(0)$, $\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\Psi(\pi)$, $\Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ représentent les termes indépendants de σ dans les développements des fonctions respectives $F(i'\sigma, i\sigma)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma - \frac{\pi}{2i'}\right)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma - \frac{\pi}{i'}\right)$, $F\left(i'\sigma, i\sigma - \frac{3\pi}{2i'}\right)$: en représentant par... $A + \Sigma A_p \cos p\sigma + \Sigma B_p \sin p\sigma$ un quelconque de ces développements, A aura tour à tour pour valeur chacune de ces intégrales ; et on pourra calculer A par la formule (α) où l'on aura soin de remplacer la fonction Ψ par la fonction F et de prendre q assez grand pour que l'ensemble des termes $A_q + A_{2q} +$ etc. soit négligeable comme on l'a supposé en établissant cette formule (α).

supérieur à un certain nombre q et calculer ensuite les autres par la méthode du n° 7. En effet, pour appliquer ici les formules du n° 7, il suffira d'y remplacer A par P, A_p par P_p, B_p par Q_p, $\varpi(\tau)$ par

$$\tfrac{1}{2} F(\sigma + \tau, \tau - \sigma) + \tfrac{1}{2} F(\sigma - \tau, -\tau - \sigma),$$

et $\Pi(\tau)$ par

$$\tfrac{1}{2} F(\sigma + \tau, \tau - \sigma) - \tfrac{1}{2} F(\sigma - \tau, -\tau - \sigma).$$

Et comme, dans la théorie des principales planètes, ces formules seront toujours suffisamment approchées en prenant pour q un nombre entier très petit, on voit que les coefficients P, P_p, Q_p se trouvent déterminés en fonction de σ, sous forme finie et sans aucune intégration. On développera ensuite P, P_p, Q_p en série de sinus et cosinus des multiples de σ; et dans ce nouveau développement tous les coefficients de la série se calculeront à l'aide d'intégrales simples.

Considérons en particulier la quantité P : les arcs qui figureront dans son développement sous les signes *sinus* et *cosinus* seront multiples non-seulement de σ, mais encore de 2σ, car d'une part on a $\sigma = \frac{\zeta - \zeta'}{2}$ et d'autre part R ne peut contenir dans son développement que des multiples de ζ, ζ' et non de leurs moitiés. On fera donc

$$P = A + \Sigma A_i \cos 2i\sigma + \Sigma B_i \sin 2i\sigma,$$

et l'on aura

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P d\sigma$$

$$A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P \cos 2i\sigma \, d\sigma,$$

$$B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P \sin 2i\sigma \, d\sigma.$$

En remplaçant σ par $\frac{\zeta - \zeta'}{2}$, les deux termes $A_i \cos 2i\sigma$, $B_i \sin 2i\sigma$ deviennent $A_i \cos i(\zeta - \zeta')$, $B_i \sin i(\zeta - \zeta')$: ces deux termes sont précisément ceux qui, dans le développement complet de R, répondent à l'argument $i(n - n')$; et l'on voit que notre méthode, convenablement modifiée, s'applique presque aussi bien à ces termes-là qu'aux autres.

MÉMOIRE

Sur les Équations générales du Mouvement (*),

PAR A. M. AMPÈRE.

I.

Quand un point matériel m est soumis à l'action d'une force extérieure constante ou variable, ou, ce qui est la même chose, à l'action de plusieurs forces extérieures qu'on peut toujours réduire à une seule résultante, on sait que les trois composantes de cette résultante parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires ox, oy, oz sont proportionnelles aux différentielles secondes, prises par rapport au temps, des coordonnées x, y, z, du point mobile. Lorsque le mouvement est rectiligne uniforme, ces trois différentielles sont égales à zéro, et cela doit être en effet, puisque le mouvement rectiligne uniforme est précisément celui d'un mobile sur lequel les forces extérieures ont cessé d'agir. Lorsque le mouvement au contraire est varié, en nommant X, Y, Z, les trois composantes de la force extérieure, t le temps, et m la masse du point mobile, on a les équations connues

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z},$$

lesquelles servent à deux fins, 1°. à faire connaître X, Y, Z lorsque

(*) Ce mémoire a été rédigé en 1826, à l'occasion des leçons que je faisais sur ce sujet au collége de France.

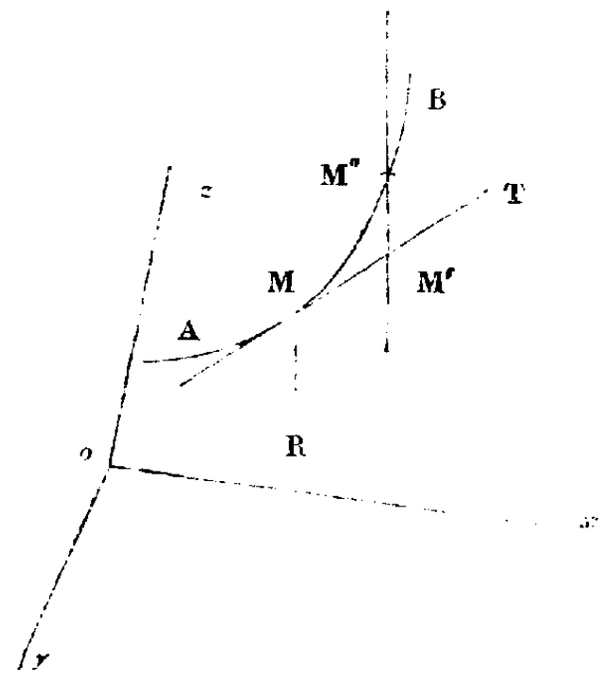
x, y, z, sont des quantités connues en fonction du temps; 2°. à faire connaître x, y, z, lorsque les données de la question sont X, Y, Z.

Les trois équations fondamentales que nous venons de rappeler sont admises par tous les géomètres, et le principe qui les contient est connu sous le nom de *principe des forces accélératrices*. Mais si l'on s'accorde généralement à en reconnaître l'exactitude, on est au contraire loin de s'entendre sur la manière dont on doit les démontrer, puisque les uns regardent avec Laplace le principe des forces accélératrices comme déduit d'un résultat d'expérience, tandis que d'autres au contraire, parmi lesquels figure Euler, ont essayé d'en établir la vérité *à priori*. Cette dissidence entre les premiers géomètres indique assez les difficultés du sujet. Toutefois, en examinant attentivement la question, il nous a semblé qu'elle se trouvait résolue sans beaucoup de peine, pourvu que l'on se fît une idée bien nette de l'inertie de la matière et de la force que cette inertie produit lorsque l'on vient à altérer le mouvement d'un mobile par l'action d'une cause extérieure quelconque. Il est visible, en effet, que cette force est nulle dans le mouvement rectiligne uniforme; et que dans un mouvement varié, elle est toujours égale et directement opposée à la force extérieure qui sollicite le mobile, et qui altère l'intensité ou le sens de sa vitesse. On voit donc que pour établir le principe des forces accélératrices, il suffit de déterminer la direction et l'intensité de la force produite par l'inertie, ce qui paraît beaucoup plus facile, et ce que nous avons essayé de faire dans ce mémoire dont l'idée fondamentale nous est connue depuis plus de vingt ans. Il est clair que dans notre démonstration, nous serons contraints d'admettre quelque chose du principe des mouvements relatifs de Laplace, que ce grand géomètre a pris comme une donnée de l'observation et dont il a déduit celui des forces accélératrices; mais tandis que ce principe considéré en lui-même et dans toute sa généralité, est loin d'être évident, nous croyons n'en avoir conservé que ce qui est d'une évidence manifeste, à peu près comme pour démontrer le parallélogramme des forces, on part du cas très simple où les forces sont de même grandeur et où la direction de la résultante est connue *à priori*, puisqu'elle partage alors leur angle en deux parties égales.

II.

Considérons un point mobile M qui, par l'action d'une cause quelconque, décrive une ligne droite ou courbe AMB (*). Pour lui faire décrire cette ligne, on peut imaginer que le mobile soit placé dans une petite cavité sphérique, au centre d'un parallélépipède solide qui l'enveloppe et dont les arêtes demeurent constamment parallèles à elles-mêmes pendant que le centre décrit la ligne AMB, et que l'enveloppe se meuve en entraînant le point matériel M sur cette ligne AMB que l'on veut faire décrire à celui-ci. Cela posé, examinons les deux cas distincts qui peuvent se présenter, celui du mouvement rectiligne uniforme et celui du mouvement varié quelconque.

Si le mouvement est rectiligne uniforme, ce qui exige que le parallélépipède enveloppe et la molécule matérielle aient reçu à la fois et conservent le même mouvement, il n'y aura aucune raison pour que la molécule exerce une pression contre l'enveloppe. Si au contraire on fait prendre au parallélépipède un mouvement rectiligne varié ou un mouvement quelconque sur une courbe AMB



et que de cette manière on amène forcément la molécule de M en M'', au lieu de la laisser aller de M en M' sur la tangente MT, comme cela

(*) Cette ligne est courbe dans la figure, parce que c'est le cas général : le calcul s'applique également aux deux cas.

arriverait si elle était libre, il est incontestable qu'en vertu de la tendance qu'elle a à conserver son mouvement suivant MT, c'est-à-dire en vertu de l'inertie de la matière, elle pressera l'enveloppe qui l'entraîne.

Or, nous nous proposons présentement de déterminer : 1°. la *direction* de cette force produite par l'inertie. 2°. Son *intensité*.

III.

Première question. — *Direction de la force produite par l'inertie.*

Pour voir dans quelle direction s'exerce en un point quelconque M de la courbe la pression du mobile contre l'enveloppe, il faut supposer que tout à coup l'enveloppe devienne perméable en M et chercher dans quel sens elle serait alors percée par le point mobile devenu libre. Cette notion de la direction de la force nous paraît la plus simple et la plus exacte de toutes; et nous croyons qu'on devrait l'introduire même en statique. Ainsi pour déterminer la direction d'une force P appliquée à un point M, il faut, suivant nous, renfermer d'abord ce point dans une enveloppe solide ; l'effet de la force P est alors de presser l'enveloppe dans le sens même où elle tire; si maintenant on rend l'enveloppe perméable, il est clair que le point M se mettra en mouvement et au premier instant la percera dans une direction déterminée qui est la direction de la force P. Dans ce cas, l'enveloppe est immobile, mais cela est indifférent pour notre définition; qu'elle soit en mouvement ou en repos, on ne peut s'empêcher de regarder la direction dans laquelle le mobile la perce lorsqu'elle devient perméable, comme la direction suivant laquelle il la pressait lorsqu'elle était solide.

Après cette digression, revenons à l'examen du mouvement sur une courbe AMB; et au moment où le mobile est en M, rendons l'enveloppe perméable et cherchons dans quel sens alors elle doit être pénétrée. Or le mobile, devenu libre, s'échappera par la tangente MT et viendra en M′ sur cette tangente, tandis que l'enveloppe continuant son mouvement transportera en M″ le point où il se trouvait d'abord. On comprend d'après cela que les deux points M′, M″ appartiennent à la courbe que le mobile a tracée dans le parallélépipède enveloppe, et comme il nous faut seulement la direction du premier élément de

cette courbe, il est clair que pour l'obtenir, nous devrons joindre les points M′, M″ par une ligne droite et chercher ce que cette droite deviendra à la limite, lorsque l'on rendra infiniment petit ou nul le temps employé à parcourir MM′. La droite MR limite de M′M″ sera la direction de la force produite par l'inertie.

En appelant θ le temps que le mobile devenu libre emploie à se transporter, d'un mouvement uniforme, de M en M′ sur la tangente MT, désignant de plus par x, y, z et x', y', z', les coordonnées respectives des points M, M′, et observant enfin que x, y, z sont des fonctions $f(t)$, $\mathrm{f}(t)$, $\mathrm{F}(t)$ du temps t qui répond au point M, on a par les propriétés connues du mouvement uniforme,

$$x' = x + \theta\frac{dx}{dt} = f(t) + \theta f'(t),$$

$$y' = y + \theta\frac{dy}{dt} = \mathrm{f}(t) + \theta \mathrm{f}'(t),$$

$$z' = z + \theta\frac{dz}{dt} = \mathrm{F}(t) + \theta \mathrm{F}'(t).$$

Les coordonnées x'', y'', z'', du point M″ où se transporte pendant le même temps θ le centre du parallélépipède sont également faciles à obtenir : en effet, comme l'enveloppe continue à se mouvoir sur la courbe AMB de la même manière qu'auparavant, il est évident que x'', y'', z'', sont des fonctions de $t+\theta$ absolument composées en $t+\theta$ comme x, y, z, en t, de sorte que l'on a, par le théorème de Taylor,

$$x'' = f(t) + \theta f'(t) + \frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta),$$

$$y'' = \mathrm{f}(t) + \theta \mathrm{f}'(t) + \frac{\theta^2}{2} \mathrm{f}''(t + \eta\theta),$$

$$z'' = \mathrm{F}(t) + \theta \mathrm{F}'(t) + \frac{\theta^2}{2} \mathrm{F}''(t + \zeta\theta);$$

développements où l'on sait que ξ, η, ζ, sont des nombres plus petits que l'unité. On déduit de là,

$$x'' - x' = \frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta),$$

$$y'' - y' = \frac{\theta^2}{2} \mathrm{f}''(t + \eta\theta),$$

$$z'' - z' = \frac{\theta^2}{2} \mathrm{F}''(t + \zeta\theta).$$

Si nous tirons à présent la droite M'M'', et si nous observons que $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ sont les trois projections de $M'M'' = k$ sur ox, oy, oz, en nommant λ, μ, ν, les angles de cette droite avec ces mêmes axes, nous aurons

$$k \cos \lambda = x' - x'',$$
$$k \cos \mu = y' - y'',$$
$$k \cos \nu = z' - z'',$$

c'est-à-dire

$$k \cos \lambda = -\frac{\theta^2}{2} f''(t + \xi\theta),$$
$$k \cos \mu = -\frac{\theta^2}{2} f''(t + \eta\theta),$$
$$k \cos \nu = -\frac{\theta^2}{2} F''(t + \zeta\theta),$$

le signe — provenant de ce que nous cherchons les angles formés par la partie de la droite M'M'' dirigée de M'' vers M'.

Faisant la somme des quarrés de ces trois équations, on obtient

$$k = \frac{\theta^2}{2}\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + f''(t + \eta\theta)^2 + F''(t + \zeta\theta)^2},$$

d'où résulte

$$\cos \lambda = -\frac{f''(t + \xi\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + f''(t + \eta\theta)^2 + F''(t + \zeta\theta)^2}},$$
$$\cos \mu = -\frac{f''(t + \eta\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + f''(t + \eta\theta)^2 + F''(t + \zeta\theta)^2}},$$
$$\cos \nu = -\frac{F''(t + \zeta\theta)}{\sqrt{f''(t + \xi\theta)^2 + f''(t + \eta\theta)^2 + F''(t + \zeta\theta)^2}}.$$

Mais pour que ces valeurs conviennent à la droite MR, il faut passer à la limite et y faire $\theta = 0$; si donc on désigne par W le radical

$$\sqrt{f''(t)^2 + f''(t)^2 + F''(t)^2},$$

on aura

$$\cos \lambda = -\frac{f''(t)}{W} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2x}{dt^2},$$
$$\cos \mu = -\frac{f''(t)}{W} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$
$$\cos \nu = -\frac{F''(t)}{W} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2z}{dt^2};$$

pour les valeurs des cosinus des angles que la force produite par l'inertie fait à chaque instant avec les axes ox, oy, oz. Il reste encore à calculer l'intensité de cette force.

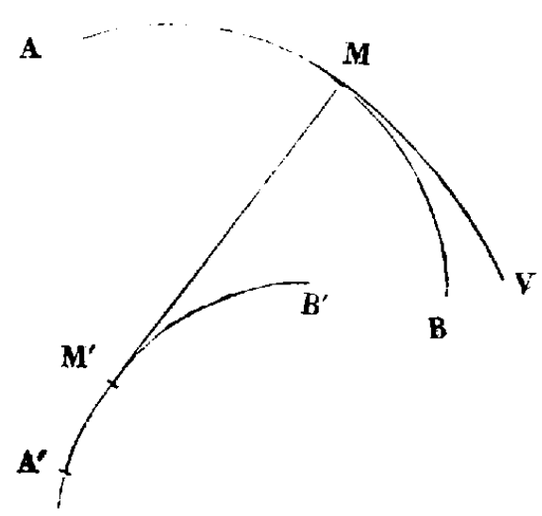
IV.

SECONDE QUESTION. — *Intensité de la force produite par l'inertie.*

Rappelons d'abord une propriété commune aux courbes planes et aux courbes à double courbure, dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre. En menant aux divers points d'une courbe quelconque des plans normaux consécutifs, on forme par leurs intersections successives une surface développable, sur laquelle on peut tracer une infinité de développées de la courbe proposée. Ainsi, il est permis d'imaginer que le point matériel M décrive la courbe AMB d'après la loi que voici :

Soit A'M'B' une quelconque des développées de AMB : il suffit pour faire décrire au point M la courbe AMB de concevoir ce point mobile renfermé dans un tube cylindrique infiniment étroit et attaché à un fil flexible constamment dirigé suivant l'axe du tube, dont une des extrémités est fixée au point donné A'. On peut également supposer que le point mobile est retenu dans le tube par une cloison perpendiculaire à son axe, et que dans l'une ou l'autre hypothèse le tube roule sur la courbe A'M'B' à laquelle il demeure constamment tangent.

Tant que la cloison sera fixe, la longueur A'M'M sera constante et le point mobile parcourra la courbe AMB.



Mais si l'on suppose que la cloison glisse dans le tube suivant une

loi quelconque, le point mobile décrira une autre courbe; et l'on aura la direction de la force produite par l'inertie dans ce nouveau mouvement, en mettant dans les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, les fonctions dérivées du second ordre des coordonnées de la nouvelle courbe à la place des dérivées du second ordre des coordonnées de la première.

Ayant ainsi la direction de la force produite par l'inertie, si on la décompose suivant deux directions rectangulaires entre elles, l'une perpendiculaire au tube et l'autre à la cloison, on aura les pressions exercées respectivement par le point mobile sur la matière qui les compose. Or, parmi tous les mouvements qu'on peut supposer à la cloison dans le tube, il y en aura un pour lequel la pression exercée contre cette cloison sera nulle; et il est clair qu'on le déterminéra en égalant à zéro la valeur de la pression exercée contre la cloison: celle-ci donc n'ayant plus aucune action contre le point mobile, on pourra alors la supprimer; d'où il suit qu'en nommant ε l'angle que la direction de la force d'inertie fait avec l'axe du tube, la courbe décrite par le point mobile quand la cloison est supprimée, s'obtiendra en combinant l'équation $\varepsilon = 100^\circ$ avec les équations qui déterminent la position du tube à chaque instant.

Maintenant la démonstration vers laquelle nous tendons, exige que nous cherchions $\cos\varepsilon$, cosinus qui est nul lorsque $\varepsilon = 100^\circ$. Afin de comprendre en une seule analyse tous les cas distincts dont nous venons de nous occuper, nous ferons l'hypothèse la plus générale, savoir celle qui consiste à regarder la longueur A'M'M comme variable, bien que cette longueur demeure constante lorsqu'on admet une cloison fixe; et en effet pour passer du cas général à ce cas particulier, il suffira d'égaler à zéro les différentielles de A'M'M.

Cela posé, pour plus d'ordre, nous désignerons par des lettres accentuées tout ce qui se rapporte à la développée, et par les mêmes lettres sans accent ce qui sera relatif à la développante. Nous ferons

$$AM = s,\ A'M' = s',\ A'M' + M'M = r,\quad \text{d'où } MM' = r - s'.$$

Les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point M' seront x', y', z'; les cosinus des angles formés par la droite MM' avec les axes auront donc pour valeurs,

$$\frac{x-x'}{r-s'},\quad \frac{y-y'}{r-s'},\quad \frac{z-z'}{r-s'}.$$

Mais la force P produite par l'inertie fait avec les axes des angles dont les cosinus ont été trouvés égaux à

$$-\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2x}{dt^2},\quad -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},\quad -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}:$$

donc on aura

$$\cos\varepsilon = -\frac{1}{W}\left(\frac{x-x'}{r-s'}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{y-y'}{r-s'}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{z-z'}{r-s'}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Pour transformer cette expression, différentions les deux membres de l'égalité évidente

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=(r-s')^2,$$

en y regardant x, y, z, x', y', z', comme des fonctions du temps t, ce qui nous donnera

$$\left.\begin{array}{l}(x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}\\ -(x-x')\frac{dx'}{dt}-(y-y')\frac{dy'}{dt}-(z-z')\frac{dz'}{dt}\end{array}\right\}=(r-s')\frac{dr}{dt}-(r-s')\frac{ds'}{dt}. \quad (1)$$

Or, on pourrait voir *à priori*, et il est facile de démontrer directement que les parties négatives provenant de la différentiation des lettres primées sont égales dans chaque membre.

En effet, la droite MM′ étant tangente à A′M′B′ en M′, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont égaux à $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$, et l'on peut égaler ces expressions à celles que nous avons obtenues précédemment pour les mêmes cosinus, d'où résulte

$$\frac{x-x'}{r-s'}=\frac{dx'}{ds'},\quad \frac{y-y'}{r-s'}=\frac{dy'}{ds'},\quad \frac{z-z'}{r-s'}=\frac{dz'}{ds'},$$

égalités desquelles on conclut aisément

$$(x-x')\frac{dx'}{dt}+(y-y')\frac{dy'}{dt}+(z-z')\frac{dr'}{dt}$$
$$=\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{r-s'}\cdot\frac{ds'}{dt}=(r-s')\frac{ds'}{dt},$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'équation (1) se réduit donc à

$$(2)\qquad (x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}=(r-s')\frac{dr}{dt};$$

et en la différentiant de nouveau, en faisant attention que $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, on a

$$\begin{aligned}(3)\qquad &(x-x')\frac{d^2x}{dt^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dt^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dt^2}\\ &+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{dz'}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\\ &=(r-s')\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Cette équation se simplifie encore parce que les termes affectés du signe — sont égaux dans les deux membres.

En effet en substituant les valeurs de $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$ qui se déduisent immédiatement de celles de $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dr'}{ds'}$, trouvés plus haut, il vient

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dr'}{dt}\\ &\quad=\frac{1}{r-s'}\cdot\frac{ds'}{dt}\cdot\left[(x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}\right]\\ &\quad=\frac{1}{r-s'}\cdot\frac{ds'}{dt}\cdot(r-s')\frac{dr}{dt}=\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Cela étant, l'équation (3) deviendra

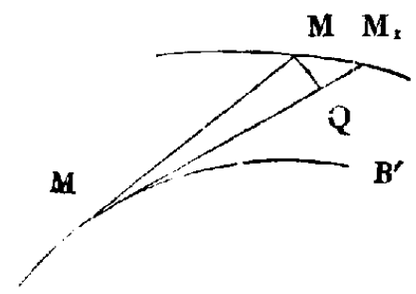
$$\begin{aligned}(x-x')\frac{d^2x}{dt^2}+(y-y')\frac{d^2y}{dt^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dt^2}\\ =(r-s')\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2;\end{aligned}$$

ou bien, en divisant par $r-s'$,

$$\begin{aligned}\frac{x-x'}{r-s'}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{y-y'}{r-s'}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{z-z'}{r-s'}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\\ =\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{1}{r-s'}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right].\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de cos ε; car il suffit pour l'obtenir de multiplier par $-\frac{1}{W}$ la quantité précédente.

Pour transformer d'une autre manière la valeur de ce cosinus, observons que le point matériel renfermé dans le tube qui se meut en restant constamment tangent à A'M'B' doit décrire une trajectoire placée tout entière sur la surface développable que le tube engendre dans son mouvement. Or, si nous considérons un secteur infiniment petit MM'M, dont la base est l'arc ds de cette trajectoire, et que du point M' comme centre avec MM' pour rayon, nous décrivions l'arc de cercle MQ, nous aurons



$$MM_1 = ds, \quad M_1Q = dr,$$

et, en nommant ω l'angle du secteur développé,

$$MQ = (r - s')\, d\omega.$$

Mais

$$MM_1 = \sqrt{\overline{M_1Q}^2 + \overline{MQ}^2};$$

donc

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r - s')^2\, d\omega^2},$$

et

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r - s')^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2;$$

d'où

$$\frac{1}{r - s'}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = -(r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Donc

$$\cos\varepsilon = -\frac{1}{W}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right].$$

La quantité que nous venons d'écrire fournit le cosinus de l'angle que fait avec l'axe du tube la direction de la force produite par l'inertie. Mais il y a, ainsi que nous l'avons dit à l'avance, deux cas différents à examiner. En effet, lorsque r est variable, il faut en faire usage sous

la forme précédente; mais lorsque le point matériel M est arrêté dans le tube par une cloison imperméable, la distance r est constante et $d^2r = 0$; on a alors

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{W}(r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Lorsque la cloison est supprimée et que le mobile se meut librement dans le tube, on a l'égalité $\varepsilon = 100°$ ou $\cos \varepsilon = 0$, ainsi que nous l'avons démontré ailleurs; il est visible en outre que dans ce cas, r est une quantité variable. De l'équation $\cos \varepsilon = 0$, nous tirons donc

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Or, supposons que le point mobile ait été d'abord assujetti à parcourir la développante AMB (*Voyez* la fig., pag. 217) et qu'il soit parvenu en M au bout du temps t; puis concevons qu'à cet instant, la cloison qui le forçait à parcourir AMB soit devenue perméable; alors le point mobile se trouvant libre de se mouvoir le long du tube, décrira une nouvelle trajectoire MV pour laquelle l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (r - s')\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

aura lieu.

Désignons par r_0 la valeur de A'M'M au moment où la cloison est devenue perméable; après un instant θ cette valeur sera par le théorème de Taylor

$$r = r_0 = \frac{dr_0}{dt}\theta + \frac{d^2r_0}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

Mais quelle que soit la nouvelle trajectoire MV qui, après la perméabilité de la cloison, aura succédé à la première AMB, les deux courbes devront nécessairement avoir la même tangente en M; car la vitesse ne peut changer brusquement ni en grandeur, ni en direction. De là il suit que la dérivée première $\frac{dr_0}{dt}$ doit être la même pour les courbes AMB et MV; donc $\frac{dr_0}{dt} = 0$, sans que les dérivées suivantes soient zéro. Donc l'enfoncement dans la direction du tube

à travers la cloison devenue perméable est

$$r - r_0 = \frac{d^2 r_0}{dt^2} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

Cet enfoncement est un résultat de la pression que la cloison éprouvait au moment où elle a été rendue perméable, et cette pression à son tour était représentée par la composante p de la force P produite par l'inertie prise suivant l'axe du tube à l'instant dont nous parlons. D'après ce qui a été dit plus haut, il est évident que

$$p = \mathrm{P} \cos \varepsilon,$$

$\cos \varepsilon$ ayant pour valeur

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{W}} (r_0 - s'_0) \left(\frac{d\omega_0}{dt}\right)^2,$$

s'_0 et ω_0 étant ce que deviennent s' et ω pour $r = r_0$. Maintenant il est facile d'exprimer $r - r_0$ au moyen des forces P, p, il suffit d'observer que le mobile étant devenu libre, on a

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = (r_0 - s'_0) \left(\frac{d\omega_0}{dt}\right)^2 = \frac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}},$$

donc

$$r - r_0 = \frac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

Si nous considérons un autre point M'' se mouvant sur une autre courbe A''M''B'' d'une manière analogue, et que r'', r''_0, W'', p'', P'' soient pour ce mouvement les quantités correspondantes à r, r_0, W, p, P, nous aurons de même

$$r'' - r''_0 = \frac{\mathrm{W}''p''}{\mathrm{P}''} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

d'où nous conclurons, en divisant ces quantités l'une par l'autre et passant ensuite à la limite, c'est-à-dire faisant $\theta = 0$,

$$\frac{r - r_0}{r'' - r''_0} = \frac{\dfrac{\mathrm{W}p}{\mathrm{P}}}{\dfrac{\mathrm{W}''p''}{\mathrm{P}''}},$$

pour le rapport des *enfoncements instantanés* produits dans les deux mouvements par les pressions respectives p et p'' exercées contre les cloisons.

Or, il est évident que si, dans un temps infiniment petit, les pressions p, p'' qu'exerçaient les deux mobiles à l'instant où les cloisons ont été rendues perméables, ont produit dans ces cloisons des enfoncements égaux, ces pressions étaient égales entre elles: de plus, comme les enfoncements dépendent de la direction des tubes, c'est-à-dire de celle des développées en nombre infini dans chacune des deux courbes dont on a fait choix d'abord pour enrouler les tubes, on peut supposer qu'elles ont été prises de manière que $r - r_0$ soit égal à $r'' - r_0''$. En adoptant cette hypothèse, nous aurons d'après ce que nous venons de dire, $p = p''$, d'où résulte l'égalité

$$1 = \frac{\frac{W}{P}}{\frac{W''}{P''}},$$

puis la proportion

$$P : P'' :: W : W''.$$

Au reste, il est bon d'observer qu'on ne peut dire que $p = p''$ même en faisant $r - r_0 = r'' - r_0''$, que quand θ est infiniment petit et que l'on a passé à la limite en posant $\theta = 0$; car dans un temps fini θ, nous ne savons pas quelles sont les lois du mouvement des deux points devenus libres dans ces tubes; la seule chose certaine *à priori*, c'est que plus le temps θ sera petit, plus (si les enfoncements des deux points sont les mêmes) les forces p, p'' qui les ont produits approcheront d'être égales, tellement que pour $\theta = 0$, l'égalité $\frac{p}{p''} = 1$ sera tout-à-fait rigoureuse.

Il est donc bien prouvé par cette analyse qu'on a la proportion

$$P : P'' :: W : W''.$$

Si nous considérons un mouvement où $W'' = 1$, et que nous choisissions pour unité la force P'' correspondante, la force P sera égale à W, et l'on aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Ce résultat se rapporte à l'unité de masse ; car, jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de la masse de nos mobiles que nous avons implicitement supposée être la même pour tous et égale à 1 : nous indiquerons dans l'article suivant, le moyen de tenir compte de cet élément nouveau. Mais auparavant, observons que, la masse étant toujours l'unité, la quantité W″ sera égale à 1 pour le mouvement uniforme avec l'unité de vitesse sur un cercle dont le rayon = 1 ; car en prenant l'origine des coordonnées au centre de la courbe et les axes ox, oy, dans son plan, et dénotant par ω l'angle Mox du rayon vecteur avec l'axe des x, on aura pour les coordonnées du point mobile M :

$$z = 0, \quad x = \cos\omega, \quad y = \sin\omega;$$

donc,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos\omega.\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\sin\omega.\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Nous ne mettons pas $\frac{d^2\omega}{dt^2}$; car cette différentielle seconde est nulle, le mouvement étant uniforme. Donc ici

$$W'' = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 1,$$

puisque $\frac{d\omega}{dt}$ représente la vitesse que nous supposons être l'unité. La force produite par l'inertie qu'on nomme *force centrifuge* dans le mouvement que nous venons de considérer est donc notre unité de force, et c'est en adoptant cette unité qu'on a en général

$$P = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = W.$$

V.

Mais cette formule se rapporte à l'unité de masse ; voyons ce

qu'elle deviendrait si la masse du mobile était m, et pour cela faisons nous une idée bien nette de ce qu'on doit entendre par la masse d'un corps.

Si nous supposons qu'on prenne deux corps différents renfermés dans des parallélépipèdes, comme nous l'avons déjà vu, et qu'on les entraîne de la même manière sur une même courbe, ils presseront les parallélépipèdes ; et les pressions exercées contre ces enveloppes pourront être égales ou différentes. De là l'idée de la masse des corps ; car si les pressions sont égales, les corps seront dits avoir des masses égales ; ils auront des masses différentes, si les pressions sont différentes.

Si à présent on enferme dans une cavité deux, trois, quatre.... corps ayant des masses égales, les pressions produites deviendront doubles, triples, quadruples.... En général, si le nombre des points matériels devient m fois plus grand, la pression et la masse deviendront toutes deux m fois plus grandes.

Si l'on applique à des masses égales des forces égales, les vitesses produites dans le même temps seront évidemment égales, et l'on voit en outre que les forces qui imprimeront le même mouvement à des corps de masses différentes, seront entre elles comme ces masses. Observons en passant que ceci fournit un moyen très simple de mesurer les masses des corps, car de l'égalité de vitesse que tous dans le même temps acquièrent dans le vide et du principe que nous venons d'établir, il faut conclure que ces masses sont proportionnelles aux poids.

Des notions que nous venons de donner sur les masses des corps, il résulte qu'en appelant m la masse du mobile qui décrit la courbe AMB, et conservant à la quantité W sa signification, la force produite par l'inertie P est exprimée par la formule

$$P = mW.$$

De plus, les cosinus des angles que cette force fait avec les axes ayant pour valeurs d'après les démonstrations précédentes

$$\cos\lambda = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2x}{dt^2},\ \cos\mu = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},\ \cos\nu = -\frac{1}{W}\cdot\frac{d^2z}{dt^2},$$

on voit que les trois composantes de P suivant ox, oy, oz, sont

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

VI.

Il ne peut plus y avoir aucune difficulté à établir les équations du mouvement d'un point matériel; car en appelant X, Y, Z les trois composantes de la force extérieure qui sollicite ce point et observant que ces trois composantes doivent être égales et directement opposées à celles de la force produite par l'inertie, on obtient les égalités :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}$$

admises par tous les géomètres.

Mais pour dissiper toute obscurité reprenons la chose d'un peu plus haut. Considérons un point mobile M renfermé dans un parallélépipède solide et parcourant la courbe AMB sous l'influence de ce parallélépipède. La force P produite par l'inertie du mobile pressera ce parallélépipède dans une direction et avec une intensité que nous avons déterminées tout à l'heure. Appliquons maintenant au mobile M une force Q égale et directement opposée à P : il est évident que la force Q fera équilibre à la pression que supportait l'enveloppe et l'anéantira : dès-lors l'enveloppe n'exerçant plus aucune action sur le point M deviendra inutile et pourra être supprimée sans qu'il cesse de décrire la courbe AMB, sous l'influence de la force P, tout comme il la décrivait sous l'influence de l'enveloppe. Ainsi la force Q est celle qu'il faut appliquer au mobile pour lui faire parcourir la trajectoire donnée, et par suite celle dont les composantes ont été nommées X, Y, Z : donc, ces dernières sont égales et directement opposées aux composantes de la force d'inertie, ce qui nous ramène aux équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z},$$

qui contiennent les lois du mouvement d'un point matériel. Il est aisé de voir que par un raisonnement identique à celui qui précède, on démontrerait l'équation générale du mouvement telle qu'elle est dans la mécanique analytique, où on la présente comme une conséquence de ce que l'on appelle le principe de d'Alembert. Aussi à nos yeux ce principe et celui des forces accélératrices se confondent avec le principe général de la force produite par l'inertie.

ÉNUMÉRATION

DES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE,

D'après la nature différente de leurs branches infinies.

PAR M. PLUCKER.

1. De tous les géomètres, *Euler* est celui qui s'est le plus systématiquement occupé des courbes de degré supérieur. Il s'est attaché surtout à la considération des branches infinies, et en a tiré, dans son *Introduction à l'analyse de l'infini*, le moyen de classer les différentes espèces de courbes d'un même degré, en poussant cette classification jusqu'au quatrième degré inclusivement. Ce qu'il a fait sur ce sujet, il y a plus de quatre-vingts ans, a passé en d'autres ouvrages sous son autorité et sans être revu. Mais la longueur des calculs qu'exigeait sa méthode ne lui permettait pas de démontrer d'une manière certaine que toutes les espèces annoncées par lui existent réellement. Il donne ainsi 146 espèces de courbes du quatrième degré qu'il distribue en huit classes : il faut d'abord réduire ce nombre à 125, car, par une erreur de calcul, il en compte 21 de trop dans la sixième classe ; ensuite, dans les 125 courbes restantes, il y en a 12 qui n'existent pas du tout ; de l'une d'elles *Euler* affirme positivement le contraire. Il y a 22 espèces qui lui sont échappées, et parmi elles l'espèce générale de la dernière classe : l'oubli des autres provient de ce qu'*Euler* n'a pas reconnu 1°. que l'ordre du contact peut être différent sur deux asymptotes parallèles, et 2°. qu'il peut y avoir (pour m'expliquer brièvement) un point de rebroussement de seconde espèce à l'infini. Enfin, ses notions inexactes sur les asymptotes paraboliques, qui ne

sont jamais isolées, mais toujours en nombre infini, et sur les asymptotes courbes en général, ont dû inévitablement le conduire à des erreurs manifestes que l'on trouvera signalées plus loin.

Dans ce mémoire, nous nous proposons de refaire le travail d'*Euler* avec les moyens ordinaires de l'Analyse, maniés toutefois d'une manière nouvelle, en sorte que nous pourrons écrire immédiatement les équations qui répondent aux différentes espèces de courbes du quatrième degré, et cela par une méthode applicable aux courbes d'un degré quelconque. Les axes des coordonnées n'introduisent dans nos équations rien d'arbitraire qui nous embarrasse et qu'il faille éliminer, pour ainsi dire, si l'on veut reconnaître la nature intime de la courbe, sans avoir égard à sa position. On voit sur-le-champ la liaison de chaque terme de nos équations avec les courbes qu'elles représentent, ainsi que le changement produit dans la nature de ces courbes par le changement de forme de l'un quelconque des termes de leurs équations. Enfin, pour servir de contrôle à notre classification et en général à tous nos calculs, il est un nombre abstrait, qui s'obtient immédiatement pour chacune de nos équations; je veux parler du nombre des constantes, dont dépendent les courbes d'une espèce quelconque.

2. Fixons d'abord la notation que nous emploierons. Nous désignerons par P, Q, R, S,.... des lignes droites quelconques et par $p, q, r, s, \ldots$ les distances respectives d'un point quelconque à ces droites. En passant d'un point à un autre ces dernières quantités varient et chacune d'elles change de signe si le point passe d'un côté de la droite correspondante au côté opposé. Le côté positif de chaque droite est absolument arbitraire. Pour représenter ces droites, on a les équations suivantes :

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0 \ldots$$

Nous nommerons les quantités $p, q, r, s, \ldots$ *fonctions linéaires*. Elles le sont des coordonnées ordinaires, comme chacune d'elles l'est de deux quelconques prises arbitrairement parmi elles. Nous désignerons ensuite par $\Omega_n, \Omega'_n, \Omega''_n \ldots$ des fonctions quelconques du $n^{\text{ième}}$ degré de fonctions linéaires quelconques, ou, ce qui revient au même, des

coordonnées ordinaires. Enfin les lettres grecques λ, μ,... indiqueront toujours des quantités constantes.

3. Après avoir ainsi fixé la notation, je ne dirai que deux mots sur le principe de notre méthode; je m'abstiendrai de tout ce qui ne se rapporte pas immédiatement à l'énumération des différentes espèces de courbes du quatrième degré.

Soit, conformément à notre notation,

$$\Omega_n = 0, \qquad (a)$$

l'équation générale des courbes du $n^{ième}$ degré, et

$$p = 0,$$

l'équation d'une ligne droite quelconque. Regardons, pour fixer les idées, Ω_n et p comme fonctions de coordonnées ordinaires. On déterminera alors les intersections de la ligne droite avec la courbe, en éliminant l'une de ces deux coordonnées. L'équation résultante s'élevera en général au $n^{ième}$ degré et indiquera par ses racines n points d'intersection, réels ou imaginaires. Dans tous les cas, si, par une détermination particulière des constantes, le degré d'une équation algébrique s'abaisse de m unités, sans qu'on ait négligé aucun facteur variable, il faut en chercher la cause dans la circonstance que m des racines primitives sont devenues *infinies*. Donc, si cela arrive dans le cas présent, c'est parce que, par un changement, soit dans la position réciproque de la ligne droite et de la courbe, soit par un changement dans la nature de celle-ci, m points d'intersection ont passé à l'infini. L'équation de la droite contenant deux constantes, on peut en disposer de manière que de ses points d'intersection avec la courbe donnée deux passent à l'infini; nous dirons alors que la ligne droite est une *asymptote* de la courbe. D'après cette définition, si nous voulons que P soit une asymptote de la courbe représentée par l'équation (a), il faut que celle-ci, quand on pose $p = 0$, se réduise à une fonction du $(n-2)^{ième}$ degré, ou ce qui revient au même, il faut qu'elle puisse prendre la forme suivante :

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-2} = 0.$$

Si Ω_{n-2} se réduisait à une fonction Ω_{n-m} du $(n-m)^{ième}$ degré, m sur-

passant le nombre 2 (ce qui exigerait que la courbe fût d'une nature particulière), il y aurait, sur l'asymptote P, m points d'intersection situés à l'infini. Nous dirons que l'asymptote a alors avec la courbe un contact de m points, ce qui revient à dire avec *Euler* que la courbe a une asymptote hyperbolique de l'espèce $u = \frac{a}{t^{m-1}}$. Pour chaque point d'intersection nouveau, passant à l'infini, l'ordre du contact s'élève d'une unité. Car de l'équation

$$p\Omega_{n-1} + \Omega_{n-m} = 0,$$

on tire, en regardant Ω_{n-1} et Ω_{n-m} comme des fonctions de p et d'une autre variable q, en donnant à celle-ci une valeur infinie et en négligeant p par rapport à q, l'expression suivante :

$$p = -\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-1}} = \mu q^{-(m-1)}$$

qui fait voir que la distance des points infiniment éloignés de la courbe à l'asymptote P, si elle n'est pas infiniment grande elle-même, est un infiniment petit de l'ordre $(m-1)$. On voit encore que, suivant que m est un nombre pair ou impair, p change de signe ou n'en change pas, si l'on prend successivement $q = \infty$ et $q = -\infty$; ce qui signifie que deux branches de la courbe qui suivent l'asymptote P en sens divers, sont situées, dans le premier cas, sur les deux côtés opposés et dans le second cas, sur le même côté de cette asymptote.

On peut mettre en évidence dans l'équation d'une courbe l'ensemble de ses asymptotes. Ainsi, par exemple, en prenant $n = 4$, on obtient l'équation

$$pqrs + \Omega_3 = 0,$$

qu'on peut encore écrire de la manière suivante :

$$pqrs + \lambda tu + \mu = 0. \qquad (b)$$

Chacune des fonctions linéaires p, q, r, s, t, u dépend de deux constantes : l'équation (b) qui renferme en outre λ et μ contient ainsi 14 constantes. Ce nombre est égal à celui des constantes de l'équation générale des courbes du 4ième degré. On peut donc regarder les deux équations comme équivalentes et transformer celle-ci, que nous sup-

poserons donnée, dans l'équation (b). Cette transformation doit exiger la résolution d'une équation du 4ième degré, car, sans changer l'équation (b), on peut changer entre elles les quatre fonctions linéaires, p, q, r, s qui répondent aux quatre asymptotes P, Q, R, S.

4. Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent également aux asymptotes courbes. Les notions généralement admises sur ces asymptotes me paraissent peu nettes. Ainsi *Euler*, par exemple, ne voit qu'une seule asymptote parabolique là où il y en a une infinité, que l'on obtient toutes, en déplaçant l'une d'elles parallèlement à elle-même suivant la direction de ses diamètres. Parmi ces asymptotes il y en a cependant une qui a avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que les autres; mais ce n'est pas celle d'*Euler*, qui, au contraire, dépend du choix arbitraire des axes des coordonnées. J'ajouterai peu de mots, pour faire mieux ressortir le caractère des asymptotes paraboliques.

Si les courbes représentées par l'équation (a) ont pour asymptote une parabole dont l'équation est

$$p^2 + \lambda q = 0,$$

il faut que l'équation (a) puisse s'écrire sous la forme suivante,

$$(p^2 + \lambda q)\,\Omega_{n-2} + \Omega'_{n-2} = 0, \qquad (c)$$

afin que son premier membre se réduise à une fonction du $(n-2)^{ième}$ degré, en faisant disparaître $(p^2 + \lambda q)$. Quatre points d'intersection s'étant éloignés à l'infini, la parabole ne coupe la courbe qu'en $2(n-2)$ points seulement. En introduisant une constante arbitraire α et en posant, pour abréger

$$\Omega'_{n-2} - \lambda\alpha\Omega_{n-2} = \Omega''_{n-2},$$

on pourra mettre l'équation (c) sous la forme suivante :

$$[p^2 + \lambda(q + \alpha)]\,\Omega_{n-2} + \Omega''_{n-2} = 0, \qquad (d)$$

dans laquelle la parabole nouvelle, dont l'équation est

$$p^2 + \lambda(q + \alpha) = 0, \qquad (e)$$

se présente absolument de la même manière que la première parabole dans l'équation (c). Toutefois si l'on détermine α de sorte que

l'on ait

$$\Omega''_{n-2} = p\Omega''_{n-3} + \Omega'_{n-3} = (p + \pi)\,\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4},$$

ce qui peut toujours se faire et cela d'une seule manière, l'équation (d) se changera dans la suivante

$$(p^2 + \lambda q_0)\,\Omega_{n-2} + (p + \pi)\,\Omega_{n-3} + \Omega_{n-4} = 0, \quad (g)$$

en posant $(q + \alpha) = q_0$, et l'on voit que la parabole

$$p^2 + \lambda q_0 = 0 \qquad (h)$$

ne coupe la courbe proposée qu'en $(2n - 5)$ points, cinq points d'intersection ayant passé à l'infini.

Toutes les paraboles représentées par l'équation (e), si l'on attribue à α successivement toutes les valeurs possibles, sont asymptotes l'une de l'autre. L'ordre du contact à l'infini est $\frac{1}{2}$. C'est un contact du même ordre qui a lieu entre l'une quelconque de ces paraboles et la courbe proposée. Toutefois pour l'asymptote parabolique (h), que j'appellerai *osculatrice*, l'ordre du contact s'élève à l'unité, et peut, dans des cas particuliers, en croissant pour chaque point nouveau passant à l'infini d'une demi-unité, s'élever jusqu'au $\left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\text{ième}}$ ordre.

Dans les équations suivantes qui sont du quatrième degré,

$$\left.\begin{aligned}
&(p^2 + \lambda q)\,rs + \nu(p + \pi)\,t + \mu = 0,\\
&(p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \nu t = 0,\\
&(p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \nu p + \mu = 0,\\
&(p^2 + \lambda q)(rs + \delta) + \mu = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (k)$$

l'asymptote parabolique et osculatrice est mise en évidence.

En suivant l'une des branches infinies de cette asymptote, l'on obtient pour q, r, s, t, des valeurs infiniment grandes du premier ordre et pour p une valeur infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Avec cette attention l'on déduit des quatre équations précédentes que l'expression $(p^2 + \lambda q)$, rapportée aux points infiniment éloignés sur les branches paraboliques de la courbe proposée est successivement un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ et 2. Cette expression donne la distance (prise suivant la direction des diamètres et multipliée par un coefficient constant) du

point auquel elle est rapportée à l'asymptote parabolique :

$$p^2 + \lambda q = 0.$$

La plus courte distance de ce même point à l'asymptote parabolique est infiniment petite d'un ordre plus élevé d'une demi-unité; elle est donc respectivement de l'ordre 1, $\frac{3}{2}$, 2 et $\frac{5}{3}$.

Au nombre infini d'asymptotes paraboliques répond dans le cas de deux asymptotes rectilignes, un nombre infini d'asymptotes hyperboliques, dont les deux asymptotes rectilignes sont celles de la courbe. Parmi ce nombre, il y en a deux, dont le contact avec la courbe est plus intime et s'élève sur l'une des deux asymptotes rectilignes au deuxième ordre. Dans le cas de deux asymptotes rectilignes et imaginaires, on obtient un nombre infini d'ellipses au lieu d'hyperboles, qui ne coupent la courbe qu'en $(2n-4)$ points seulement; mais, en général, il n'y en a aucune qui coupe la courbe en moins de $(2n-4)$ points.

Pour déterminer le nombre des constantes dans les équations (k), il n'en faut compter que quatre pour l'expression $(p^2 + \lambda q)$. Des cinq constantes qu'elle contient, l'une peut être prise à volonté, ce qui tient à ce qu'à une même parabole il répond un nombre infini d'expressions de la même forme. Une remarque analogue a lieu pour l'expression suivante $(p^2 + \lambda q^2)$, qui répond à deux asymptotes imaginaires, se coupant en un point réel.

Je passerai immédiatement à l'énumération des différentes courbes du quatrième degré : pour me rapprocher, autant que possible, de la marche d'*Euler*, je rapporterai ces courbes à huit cas principaux ; j'ai dû néanmoins intervertir l'ordre des troisième et quatrième cas.

Premier cas.

5. Il n'y a aucune direction réelle suivant laquelle une ligne droite coupe la courbe en moins de quatre points. Les quatre asymptotes rectilignes sont imaginaires, mais elles se coupent deux à deux en deux points réels, centres de deux séries d'ellipses concentriques, semblables et semblablement situées, dont chacune, ayant avec la courbe un double contact imaginaire à l'infini, ne la coupe qu'en quatre points. Espèce générale, dépendant de 14 constantes :

$$(p^2 + \lambda q^2)(r^2 + \gamma s^2) + vtu + \mu = 0. \qquad (1)$$

Deuxième cas.

6. Il y a deux directions suivant lesquelles une ligne droite arbitraire rencontre la courbe en trois points seulement. Ce sont les directions de deux asymptotes réelles, qui coupent la courbe en général et au plus en deux points. Il y a un nombre infini d'asymptotes hyperboliques, ayant ces mêmes asymptotes rectilignes. Deux d'entre elles ont suivant l'une de leurs asymptotes avec la courbe un contact du second et suivant l'autre, un contact du premier ordre. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires, se coupant en un point réel, centre commun d'une infinité d'ellipses semblables qui ne coupent la courbe qu'en quatre points. Espèce générale, dépendant de 14 constantes :

$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu tu + \mu = 0. \qquad (2)$$

Il peut arriver que chacun des deux points d'intersection de chacune des deux asymptotes réelles passe à l'infini. De là proviennent les espèces suivantes :

$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \qquad (3)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu pt + \mu = 0, \qquad (4)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (5)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu p(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (6)$$
$$pq(r^2 + \gamma s^2) + \nu pq + \mu = 0. \qquad (7)$$

On obtiendrait d'autres espèces (dont je ne ferai pas mention ici, parce qu'*Euler* ne s'en est point occupé) en considérant les cas particuliers où les points d'intersection des asymptotes imaginaires passent à l'infini : c'est ce qui arriverait, par exemple, si, dans l'équation (7), on posait $\nu = 0$: je dirai seulement que le nombre des points d'intersection situés à l'infini est dans tous les cas le même sur les deux asymptotes imaginaires; du reste il peut être égal à trois ou à quatre.

Troisième cas.

7. Il y a quatre directions différentes et réelles suivant lesquelles une ligne droite coupe la courbe en trois points seulement, et il y a quatre asymptotes rectilignes et réelles, correspondant à ces quatre

directions, qui coupent la courbe dans le cas général, dépendant de 14 constantes, en deux points. L'équation générale est

$$pqrs + \nu tu + \mu = 0. \qquad (8)$$

Les quatre asymptotes deviennent osculatrices suivant différents ordres dans les espèces suivantes, les seules possibles :

$$pqrs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \qquad (9)$$
$$pqrs + \nu pt + \mu = 0, \qquad (10)$$
$$pqrs + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (11)$$
$$pqrs + \nu p(p + \varkappa) + \mu = 0, \qquad (12)$$
$$pqrs + \nu pq + \mu = 0, \qquad (13)$$
$$pqrs + \nu t = 0, \qquad (14)$$
$$pqrs + \nu p + \mu = 0, \qquad (15)$$
$$pqrs + \mu = 0\ (*). \qquad (16)$$

Quatrième cas.

8. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement, mais il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Il existe un nombre infini d'asymptotes paraboliques dont les diamètres ont la direction en question et parmi lesquelles il y en a une d'osculatrice. Il y a en outre deux asymptotes

(*) On voit que les ordres du contact sur les quatre asymptotes ne sont pas entièrement indépendants l'un de l'autre. En désignant les ordres de contacts sur P, Q, R et S respectivement par le nombre des points passés à l'infini, l'on aura les symboles suivants pour représenter les neuf espèces que nous venons d'énumérer :

2222, 3222, 4222, 3322, 4322, 3333, 4422, 4444.

D'après *Euler*, existerait encore l'espèce suivante :

4433 ;

c'est sa 23e, intermédiaire entre (15) et (16). Mais on n'a qu'à compter le nombre de constantes des ces deux espèces, pour voir que celle d'*Euler* n'existe pas. En effet, ce nombre diminue en passant de (15) à (16) d'une unité seulement et descend de 10 à 9.

rectilignes et imaginaires. Espèce générale dépendant de 13 constantes :

$$(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0. \quad (17)$$

B. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans pour cela être une asymptote de la courbe. En général il y a deux asymptotes parallèles, qui, suivant cette même direction, coupent la courbe en un point unique. La courbe, en d'autres termes, a un point double, qui est infiniment éloigné suivant la direction en question et dont les asymptotes sont les deux tangentes. Il y a en outre deux asymptotes rectilignes et imaginaires. Nombre des constantes, 12. B se subdivise en α, β, γ.

α. Les deux asymptotes parallèles sont imaginaires; le point double situé à l'infini est un point isolé. L'équation est :

$$(p^2 + \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0 \quad (18)$$

β. Les deux asymptotes parallèles sont réelles; deux branches réelles de la courbe se coupent à l'infini. L'équation est

$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0. \quad (19)$$

Le contact peut s'élever sur l'une des deux asymptotes parallèles, ou sur toutes les deux, au second ordre; c'est ce qui fournit les deux espèces suivantes :

$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p \pm \xi)t + \mu = 0, \quad (20)$$
$$(p^2 - \xi^2)(r^2 + \gamma s^2 + \nu) + \mu = 0 (*). \quad (21)$$

γ. Les deux asymptotes parallèles coïncident en une seule, la courbe a sur cette asymptote double un point de rebroussement de première espèce et infiniment éloigné. Son contact avec l'asymptote est de l'ordre $\frac{1}{2}$ seulement. Nombre des constantes : 11. L'équation est

(*) *Euler* n'a pas reconnu l'existence de l'espèce (20), où l'ordre du contact est différent sur les deux asymptotes parallèles. Cette espèce doit trouver sa place entre sa dixième et sa onzième espèce.

$$p^2(r^2 + \gamma s^2) + \nu(p + \pi)t + \mu = 0. \qquad (22)$$

Si l'on a $\pi = 0$, le contact s'élève au premier ordre, le point double est le point de contact à l'infini de deux branches de la courbe sur l'asymptote double. L'équation devient

$$p^2(r^2 + \gamma s^2) + \nu pt + \mu = 0. \qquad (23)\ (24)$$

Cette équation contient deux espèces différentes; les deux branches qui se touchent à l'infini peuvent être réelles ou imaginaires. La première de ces espèces a quatre branches infinies, qui s'approchent de l'asymptote double comme les quatre branches de deux hyperboles quelconques, ayant toutes les deux cette même asymptote. Il peut y avoir différentes positions de ces quatre branches par rapport à l'asymptote double. L'autre espèce n'a pas de branches infinies. Pour distinguer les deux espèces entre elles et surtout pour voir ce qui arrive dans le cas intermédiaire, j'ajouterai les développements suivants.

Posons

$$r^2 + \gamma s^2 = t^2 + 2\alpha pt + \beta p^2 + 2\zeta t + 2\eta p + \theta,$$

et négligeons ensuite p par rapport aux constantes et celles-ci par rapport à t. Nous tirons alors de la dernière équation, pour les points infiniment éloignés de la courbe, l'équation suivante :

$$p^2t^2 + \nu pt + \mu = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(pt + \sigma)(pt + \sigma') = 0.$$

Cette équation représente deux hyperboles qui se confondent sensiblement avec la courbe sur l'asymptote P. Elles sont réelles si

$$\nu^2 - 4\mu > 0, \qquad (23)$$

imaginaires si

$$\nu^2 - 4\mu < 0, \qquad (24)$$

et coïncident enfin si

$$\nu^2 - 4\mu = 0. \qquad (25)$$

Dans ce dernier cas l'équation de la courbe devient

$$(pt+\sigma)^2+2\alpha(p^2+\zeta p)pt+\beta p^4+2\eta p^3+\theta p^2=0,$$

et peut s'écrire ainsi (en posant pour abréger $\theta-2\alpha\sigma=\xi$)

$$(pt+\sigma)^2+2(\alpha p^2+\zeta p)(pt+\sigma)+\beta p^4+2\eta p^3+\xi p^2-2\zeta\sigma p=0. \quad (25)$$

En négligeant p^2, on obtient

$$(pt+\sigma)^2+2\zeta p(pt+\sigma)-2\zeta\sigma p=0,$$

et en résolvant cette équation par rapport à $(pt+\sigma)$, il vient

$$(pt+\sigma)=\pm\sqrt{2\zeta\sigma p}.$$

Cette équation fait voir que l'espèce (25) n'a que deux branches infinies situées sur le même côté de l'asymptote double P et formant à l'infini un point de rebroussement de seconde espèce. Ces deux branches infinies ont avec leur asymptote commune un contact du premier ordre, mais entre elles et avec l'hyperbole, dont l'équation est la suivante :

$$pt+\sigma=0,$$

un contact de l'ordre $\frac{3}{2}$ (*).

Tout change de forme si dans l'équation (25) on pose $\zeta=0$; on obtient alors pour les points infiniment éloignés de la courbe

$$(pt+\sigma)=\pm p\sqrt{-\xi},$$

et l'on retombe sur les deux cas (23) et (24); deux branches infinies de la courbe, réelles ou imaginaires, se touchent. Dans le premier cas cependant les quatre branches de la courbe ont nécessairement, par rapport à leur asymptote double, deux à deux la même position, que les deux branches d'une hyperbole, avec lesquelles elles ont, ainsi qu'entre elles, un contact du second ordre.

Enfin si ξ disparaît, il y a de nouveau un changement de forme.

(*) L'espèce (25) n'a pas été aperçue par *Euler*.

On obtient alors pour les points de la courbe infiniment éloignés

$$(pt + \sigma) = \pm \sqrt{2\eta p^3}.$$

La courbe forme alors comme dans l'espèce (25) un point de rebroussement de seconde espèce, situé à l'infini et dont les deux branches ont entre elles un contact de l'ordre $\frac{5}{2}$.

L'ordre du contact des branches infinies de la courbe avec leur asymptote commune restant toujours le même, nous n'avons pas d'espèces nouvelles à consigner.

Cinquième cas.

9. Au lieu des deux asymptotes rectilignes et imaginaires, la courbe a deux asymptotes réelles, auxquelles répondent deux directions suivant lesquelles la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Si des différentes branches infinies l'une n'influait pas sur la nature des autres, nous obtiendrions, en combinant chacun des *six* cas particuliers relatifs à deux asymptotes rectilignes et énumérés dans le numéro (6) avec chacun des *neuf* cas particuliers relatifs aux asymptotes réelles et consignés dans le numéro précédent, *cinquante-quatre* espèces du cas présent. Mais ce nombre se réduit à *trente-neuf*, les autres espèces étant impossibles.

A. Asymptotes paraboliques.

$$(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)t + \mu + 0, \tag{26}$$
$$(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)(r + \rho) + \mu = 0, \tag{27}$$
$$(p^2 + \lambda q)rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0, \tag{28}$$
$$(p^2 + \gamma q)rs + \mu t = 0, \tag{29}$$
$$(p^2 + \lambda q)rs + \nu r + \mu = 0, \tag{30}$$
$$(p^2 + \lambda q)rs + \mu = 0, \tag{31}$$

B. Deux asymptotes parallèles et imaginaires :

$$(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \tag{32}$$
$$(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \tag{33}$$
$$(p^2 + \xi^2)rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0, \tag{34}$$
$$(p^2 + \xi^2)rs + \mu t = 0, \tag{35}$$
$$(p^2 + \xi^2)rs + \nu r + \mu = 0, \tag{36}$$
$$(p^2 + \xi^2)rs + \mu = 0. \tag{37}$$

C. Deux asymptotes parallèles réelles et non osculatrices :

$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \quad (38)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (39)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \pi)r + \mu + = 0, \quad (40)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \mu t = 0, \quad (41)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu r + \mu = 0. \quad (42)$$

D. Deux asymptotes parallèles et réelles, dont l'une osculatrice :

$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)t + \mu = 0, \quad (43)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (44)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \nu(p + \xi)r + \mu = 0, \quad (45)$$

E. Deux asymptotes parallèles, réelles et osculatrices :

$$(p^2 - \xi^2)(rs + \nu) + \mu = 0, \quad (46)$$
$$(p^2 - \xi^2)rs + \mu = 0. \quad (47)$$

F. Un point de rebroussement de première espèce à l'infini :

$$p^2rs + \nu(p + \pi)t + \mu = 0, \quad (48)$$
$$p^2rs + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (49)$$
$$p^2rs + \nu(p + \pi)r + \mu = 0, \quad (50)$$
$$p^2rs + \nu t = 0, \quad (51)$$
$$p^2rs + \nu r + \mu = 0. \quad (52)$$

G.H.I. Deux branches de la courbe ont à l'infini un contact ou réel ou imaginaire, ou elles forment un point de rebroussement de seconde espèce :

$$p^2rs + \nu pt + \mu = 0, \quad (53)\,(57)\,(61)$$
$$p^2rs + \nu p(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (54)\,(58)\,(62)$$
$$p^2rs + \nu pr + \mu = 0, \quad (55)\,(59)\,(63)$$
$$p^2rs + \mu = 0\ (*). \quad (56)\,(60)\,(64)$$

(*) Ne connaissant que 7 des 9 espèces du quatrième cas, *Euler* indique, au lieu de 54 espèces, 42 seulement, et reconnaît que deux de celles-ci sont impossibles, ce qui fait qu'il en compte 40. Mais sur ce nombre il y en a encore 8 qui n'existent pas, ce qui le réduirait à 32. Enfin, les 7 espèces suivantes ont échappé à ses recherches : (43), (44), (45), (61), (62), (63), (64), ce qui donne, comme nous l'avons annoncé plus haut, 39 espèces du cinquième cas.

Sixième cas.

10. A. Il y a deux systèmes d'asymptotes paraboliques. Nombre des constantes : 12. L'équation est

$$(p^2 + \lambda q)(p^2 + \gamma s) + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0. \quad (65)$$

B. Il y a un système d'asymptotes paraboliques et deux asymptotes parallèles, ou imaginaires, ou réelles ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général, 11. L'équation est

$$(p^2 + \lambda q)(r^2 + \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (66)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \rho) + \mu = 0, \quad (67)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(r + \gamma) + \mu = 0, \quad (68)$$
$$(p^2 + \lambda q)(r^2 - \gamma^2) + \nu r + \mu = 0, \quad (69)$$
$$(p^2 + \lambda q) r^2 + \nu(p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \quad (70)$$
$$(p^2 + \lambda q) r^2 + \nu(p + \pi) r + \mu = 0. \quad (71)(72)(73)$$

C. Il y a deux systèmes de deux asymptotes parallèles ou imaginaires, ou réelles ou coïncidentes. Nombre des constantes du cas général, 10. C se subdivise en α, β, γ, δ, ε, ζ.

α. Deux paires d'asymptotes imaginaires.

$$(p^2 + \xi^2)(q^2 + \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0. \quad (74)$$

β. Deux paires d'asymptotes parallèles dont l'une imaginaire et l'autre réelle.

$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (75)$$
$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + \gamma) + \mu = 0, \quad (76)$$
$$(p^2 + \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu q + \mu = 0. \quad (77)$$

γ. Deux paires d'asymptotes parallèles et réelles.

$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (78)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \xi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (79)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu(p + \xi)(q + \gamma) + \mu = 0, \quad (80)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \nu p + \mu = 0, \quad (81)$$
$$(p^2 - \xi^2)(q^2 - \gamma^2) + \mu = 0. \quad (82)$$

δ. Deux asymptotes parallèles et imaginaires, et deux coïncidant en une seule :

$$(p^2 + \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (83)$$
$$(p^2 + \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)q + \mu = 0, \quad (84)(85)$$
$$(p^2 + \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \pi)q + \mu^2 = 0. \quad (86)$$

ε. Deux asymptotes parallèles et réelles, et deux coïncidant en une seule :

$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (87)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \xi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (88)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu p + \mu = 0, \quad (89)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \pi)q + \mu = 0, \quad (90)(91)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \pi)q + \mu^2 = 0, \quad (92)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + \nu(p + \xi)q + \mu = 0, \quad (93)(94)$$
$$(p^2 - \xi^2)q^2 + 2\mu(p + \xi)q + \mu = 0. \quad (95)$$

Deux branches qui se touchent à l'infini sont incompatibles avec deux asymptotes parallèles et toutes les deux osculatrices.

ζ. Deux paires de deux asymptotes coïncidentes :

$$p^2q^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (96)$$
$$p^2q^2 + \nu p(q + \varkappa) + \mu = 0, \quad (97)(98)$$
$$p^2q^2 + 2\mu p(q + \varkappa) + \mu^2 = 0. \quad (99)$$

Il ne peut pas y avoir simultanément deux couples de branches, qui se touchent à l'infini sur deux asymptotes doubles et différentes (*).

(*) *Euler* compte 47 espèces du sixième cas ; mais dans ce nombre, il faut d'abord rectifier une erreur de calcul. Dans la supposition que la nature d'une branche infinie est absolument indépendante de la nature des autres, *Euler* fixe ce nombre à $7^2 = 49$, c'est-à-dire qu'il le croit égal au quarré du nombre adopté par lui des différentes espèces du quatrième cas, dans l'énumération desquelles les asymptotes imaginaires ne sont pour rien, au lieu qu'il aurait dû prendre le nombre $\frac{7.8}{1.2}$. Dans la même supposition, $\frac{9.10}{1.2} = 45$ espèces se présenteraient à nous. Ensuite *Euler* reconnaît que deux de ses espèces n'existent pas; son vrai nombre serait donc 26. Mais d'un côté il y a encore trois autres espèces qui n'existent pas, ce qui baisserait le nombre à 23, tandis que d'un autre côté les 12 espèces suivantes : 68, 73, 76, 79, 80, 86, 88, 92, 93, 94, 95, 99 sont omises, ce qui définitivement nous fournit le nombre 35. Sur les 45 espèces indiquées plus haut, il y en a 10 d'impossibles.

Septième cas.

11. La courbe a une asymptote rectiligne R et n'est coupée par une ligne droite, menée parallèlement à l'asymptote, qu'en trois points seulement.

A. En général, il y a en outre une seconde direction suivant laquelle la courbe est rencontrée par une ligne droite quelconque en trois points seulement. Une parabole quelconque dont les diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en six points. Malgré cela il n'y a ni asymptote rectiligne, ni asymptote parabolique; mais il y a une infinité d'asymptotes semi-cubi-paraboliques, toutes indiquées par une équation de la forme suivante :

$$p^3 + \lambda (q + x)^2 = 0,$$

si l'on y donne à x successivement toutes les valeurs possibles. Six points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes coupe la courbe proposée en six points seulement; et même il en est toujours une qui en général et au plus ne coupe la courbe qu'en cinq points; je l'appellerai *osculatrice*. Par rapport à elle l'ordre du contact s'élève à $\frac{2}{3}$, tandis que, pour une autre parabole quelconque de cette espèce, il ne s'élève que jusqu'à $\frac{1}{3}$. Pour chaque point nouveau passant à l'infini, l'ordre du contact augmente de $\frac{1}{3}$. Dans l'équation suivante, contenant 12 constantes, l'asymptote osculatrice est mise en évidence :

$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi) s + \mu = 0. \qquad (100)$$

Comme l'ordre du contact de la courbe avec son asymptote R peut monter, l'on obtient les deux espèces suivantes :

$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi)(r + \varsigma) + \mu = 0, \qquad (101)$$
$$(p^3 + \lambda q^2) r + \nu (p + \pi) r + \mu = 0. \qquad (102)$$

B. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque coupe la courbe en deux points seulement, sans toutefois être son asymptote. De plus, toutes les paraboles d'un paramètre déterminé et dont les diamètres ont cette même direction ne coupent la courbe qu'en quatre points, sans toutefois être ses asymptotes. Mais au nombre

des lignes droites en question, il en est une seule P, asymptote de la courbe, qui la coupe en général et au plus en un seul point, et au nombre des paraboles en question, il en est une série infinie dont les axes coïncident, et qui, asymptotes de la courbe, ne la coupent qu'en trois points : parmi ces paraboles, il y en a toujours une seule, asymptote osculatrice de la courbe, qui la coupe en général et au plus en deux points. Nombre des constantes : 11. B contient α et β.

α. L'asymptote P est une asymptote ordinaire :

$$p(p^2+\lambda q)r+\nu p^2+\mu s=0, \qquad (103)$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\mu s=0, \qquad (104)$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\nu r+\mu=0. \qquad (105)$$

β. L'asymptote P est une asymptote osculatrice :

$$p(p^2+\lambda q)r+\sigma p^2+\nu p+\mu=0, \qquad (106)$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\nu p+\mu=0, \qquad (107)$$
$$p(p^2+\lambda q)r+\mu=0. \qquad (108)$$

C. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en deux points seulement, mais cette droite n'est jamais asymptote de la courbe. Toute parabole dont les diamètres ont cette même direction, ne coupe la courbe qu'en cinq points; mais aucune transformation, aucun déplacement d'une telle parabole ne peut la rendre asymptote de la courbe. Il y a seulement une infinité d'asymptotes cubi-paraboliques, représentées par l'équation suivante :

$$p^3+\lambda(q+x)=0,$$

en y regardant x comme une quantité indéterminée. Neuf points d'intersection ayant passé à l'infini, chacune de ces asymptotes ne coupe la courbe qu'en trois points. Parmi elles il y en a une, que j'appellerai *osculatrice*, qui ne coupe la courbe qu'en deux points. En général, l'ordre du contact est $\frac{2}{3}$; pour chaque point nouveau passant à l'infini il s'élève de $\frac{1}{3}$. Nombre des constantes: 10. C'est l'asymptote osculatrice qui est mise en évidence dans les équations suivantes :

$$(p^3 + \lambda q)\, r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (109)$$
$$(p^3 + \lambda q)\, r + \nu p + \mu = 0, \qquad (110)$$
$$(p^3 + \lambda q)\, r + \mu = 0. \qquad (111)$$

Dans les deux cas B et C, la courbe a un point double situé à l'infini. Dans le premier cas, des deux tangentes de ce point l'une est l'asymptote P, et l'autre est située tout entière à l'infini. Dans le second cas les deux tangentes sont situées à l'infini.

D. Il y a en outre une direction suivant laquelle une ligne droite quelconque ne coupe la courbe qu'en un point unique. En général une telle ligne droite est asymptote de la courbe dans trois positions différentes, et alors elle ne la coupe pas du tout. La courbe a un point triple situé à l'infini, dont les trois tangentes ne sont autre chose que les trois asymptotes parallèles de la courbe. Nombre des constantes : 9. D se subdivise en α, β, γ, δ.

α. Deux des trois asymptotes parallèles sont imaginaires :

$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (112)$$
$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \nu p + \mu = 0, \qquad (113)$$
$$(p + \pi)(p^2 + \xi^2)q + \mu = 0. \qquad (114)$$

β. Les asymptotes parallèles sont réelles toutes les trois :

$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (115)$$
$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \nu p + \mu = 0, \qquad (116)$$
$$(p + \pi)(p^2 - \xi^2)q + \mu = 0. \qquad (117)$$

γ. Deux des trois asymptotes parallèles coïncident en une seule. Par rapport à elles, l'ordre du contact se réduit à $\frac{1}{2}$.

$$(p + \pi)p^2q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (118)$$
$$(p + \pi)p^2q + \nu p + \mu = 0, \qquad (119)$$
$$(p + \pi)p^2q + \mu = 0. \qquad (120)$$

δ. Les asymptotes parallèles se confondent en une seule, toutes les trois ; l'ordre du contact s'abaisse à $\frac{1}{3}$.

$$p^3q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0, \qquad (121)$$
$$p^3q + \nu p + \mu = 0, \qquad (122)$$
$$p^3q + \mu = 0. \qquad (123)$$

Huitième cas.

12. A. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite quelconque rencontre la courbe en trois points seulement. Si l'on détermine la constante arbitraire d'une telle ligne droite de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en deux points, on verrait qu'alors cette ligne droite passe à l'infini. Il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole dont les diamètres ont cette même direction, coupe la courbe en six points seulement, mais elle passe à l'infini si, afin qu'elle devienne asymptote, l'on dispose de ses deux constantes arbitraires, de manière qu'elle ne coupe la courbe qu'en quatre points. Il n'y a pas d'asymptote parabolique. Il n'y a pas non plus une asymptote courbe du troisième degré. Enfin, il n'y a pas même une asymptote parabolique du quatrième degré. Nombre des constantes: 11.

$$p^4 + q(\varkappa p^2 + \lambda q^2) + \nu(p + \pi)r + \mu = 0 \text{ (*)}, \qquad (124)$$

B. Il y a une infinité de paraboles du degré $\frac{4}{3}$, asymptotes de la courbe, et représentées par l'équation

$$p^4 + \lambda(q^3 + \varkappa)^3 = 0,$$

en y regardant $\varkappa$ comme une quantité indéterminée. En général, une telle parabole coupe la courbe en huit points, mais il y en a une qui la coupe en sept points seulement. En général, l'ordre du contact est $\frac{1}{4}$, pour celle-ci $\frac{1}{3}$, et si, dans des cas particuliers, des points d'intersection nouveaux passent à l'infini, il s'élève pour chacun d'eux de $\frac{1}{4}$. Nombre constantes: 10.

$$p^4 + \lambda q^3 + \nu(p + \pi)r + \mu = 0. \qquad (125)$$

C. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite

(*) L'espèce générale du huitième cas est échappée à *Euler*, qui paraît supposer qu'une courbe d'un degré quelconque a nécessairement pour asymptote une courbe donnée par une équation à deux termes :

$$p^m + \lambda q^n = 0;$$

ce qui, passé le troisième degré, n'est plus vrai.

quelconque rencontre la courbe en deux points seulement; c'est parce que celle-ci a un point double situé à l'infini. En déterminant les deux tangentes de ce point, on n'en trouve qu'une seule, asymptote de la courbe, l'autre ayant passé tout entière à l'infini. Il y a avec cette asymptote rectiligne une série infinie d'asymptotes semi-cubi-paraboliques. Nombre des constantes: 10. Suivant que l'asymptote rectiligne est une asymptote ordinaire ou osculatrice, on obtient les deux espèces suivantes :

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \mu r = 0, \qquad (126)$$

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q^2) + \sigma p^2 + \nu p + \mu = 0. \qquad (127)$$

D. Il y a une direction unique suivant laquelle la courbe est coupée par une ligne droite quelconque en deux points seulement. Il y a un point double situé à l'infini, suivant cette direction. Les deux tangentes de ce point ayant passé à l'infini toutes les deux, il n'y a pas d'asymptote rectiligne. Toute parabole quelconque dont les diamètres se confondent avec cette direction coupe la courbe en quatre points seulement. Une telle parabole dépend encore de trois constantes arbitraires. En disposant convenablement de deux de ces constantes, on obtient deux séries infinies de paraboles, dont le paramètre et la position de l'axe sont déterminés, et qui sont les asymptotes de la courbe qu'elles coupent en deux points seulement. Enfin, dans chacune des deux séries, il y a une asymptote osculatrice qui coupe la courbe en général et au plus en un point unique. Ces deux asymptotes sont mises en évidence dans l'équation suivante. Nombre des constantes : 9.

$$(p^2 + \lambda q)(p^2 + \gamma r) + \nu p + \mu = 0.$$

Mais comme les deux séries d'asymptotes paraboliques sont ou réelles ou imaginaires, il faut distinguer deux espèces indiquées dans l'équation suivante (qui est équivalente à la précédente) par le double signe :

$$[(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2 r^2] + \nu p + \mu = 0. \qquad (128, 129)$$

Pour déterminer l'espèce limite entre ces deux-là, examinons ce qui arrive dans le cas de paramètres égaux: r se réduit alors à $(p + \pi)$, ce qui fait disparaître deux constantes à la fois de l'équation précédente. Cette circonstance indique une espèce intermédiaire. Dans celle-ci, en

effet, les deux séries d'asymptotes paraboliques s'éloignent à l'infini ; il n'y a pas d'asymptote parabolique proprement dite. De même que deux asymptotes rectilignes et infiniment éloignées sont remplacées par une parabole, deux asymptotes paraboliques infiniment éloignées sont remplacées par une asymptote unique du quatrième degré. L'équation de cette espèce est la suivante :

$$(p^2 + \lambda q)^2 + \nu(p + \pi)(q + \varkappa) + \mu = 0. \qquad (130)$$

Dans le cas de paramètres égaux, les équations (128) et (129) deviennent

$$(p^2 + \lambda q)^2 \mp \gamma^2 (p + \pi)^2 + \mu = 0,$$

et peuvent s'écrire sous la forme suivante, pour faire ressortir les deux asymptotes osculatrices dans le cas où celles-ci sont réelles :

$$(p^2 + \lambda q)[(p + \pi)^2 + \lambda(q + \varkappa)] + \mu = 0.$$

Dans ce cas, il faut que les huit points d'intersection passent tous à l'infini, pour que le contact de la courbe et d'une parabole soit du premier ordre, tandis que dans le cas général il suffit que cinq points, et, dans le cas de l'équation (128), que sept points d'intersection passent à l'infini. Pour les courbes du quatrième degré, les axes des deux asymptotes paraboliques à paramètres égaux ne peuvent pas coïncider. Cela exigerait qu'on pût faire disparaître π dans l'équation précédente, sans la rendre décomposable en deux facteurs du second degré. A plus forte raison, il est impossible que deux asymptotes paraboliques de la courbe coïncident en une seule (*).

(*) *Euler* compte également trois espèces du cas D, désignées par lui comme la 139e, 140e et 141e. Mais toutes ses conclusions sont erronées. En partant de l'équation

$$(y^4 + ay^2x + ex^2) + cy^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

il décompose son premier terme en deux facteurs du second degré de la manière suivante :

$$(y^2 + px)(y^2 + p'x);$$

ce produit égalé à zéro représente deux paraboles ayant même axe et même sommet. Ces deux paraboles sont d'après lui les deux asymptotes de la courbe. Comme partout il ne voit que deux asymptotes paraboliques là où il y en a une infinité.

E. Il y a une direction unique suivant laquelle une ligne droite rencontre la courbe en un point unique. Il y a à l'infini suivant cette direction un point triple. Des trois tangentes de ce point, l'une est infiniment éloignée; les deux autres sont les deux asymptotes rectilignes de la courbe et peuvent être ou imaginaires, ou réelles, ou confondues en une seule. A l'autre tangente répond une série infinie d'asymptotes paraboliques qui coupent la courbe en général en deux points. Dans le nombre se trouve une parabole osculatrice qui rencontre la courbe en général et au plus, en un point unique. Nombre des constantes : 8.

$$(p^2+\xi^2)(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0, \qquad (131)$$
$$(p^2-\xi^2)(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0, \qquad (132)$$
$$p^2(p^2+\lambda q)+\nu p+\mu=0. \qquad (133)$$

Mais ces deux asymptotes dépendent en partie du choix arbitraire des axes des coordonnées, et d'autres asymptotes en effet vont se présenter, si, par exemple, la courbe proposée est rapportée à un autre axe des y, parallèle au premier. Je dis plus, aucune des deux paraboles d'*Euler* n'est une asymptote de la courbe. Pour le faire voir, désignons, en donnant à l'abscisse x une valeur infinie, la valeur de l'ordonnée répondant aux points de l'une des deux paraboles par y, de manière qu'on ait

$$y^2+px=0,$$

et la valeur correspondant à un point de la courbe par $(y+\beta)$, il viendra

$$(y+\beta)^2+px=-\frac{c(y+\beta)^2+d(y+\beta)x+f(y+\beta)x+gx+h}{(y+\beta)^2+p'x},$$

et de là on tire, en ayant égard à l'équation précédente et en négligeant convenablement,

$$\beta=\frac{d}{2(p-p')}=\frac{d}{\sqrt{a^2-4e}}.$$

Donc, pour que la parabole en question devienne une asymptote de la courbe, il faut la déplacer parallèlement à ses diamètres d'une distance égale à la valeur de β. Si l'on a

$$a^2-4e=0,$$

Euler en conclut que les deux asymptotes paraboliques coïncident, ce qui ne peut jamais arriver. Dans ce cas le déplacement de la parabole déterminée par lui doit être infiniment grand, pour qu'elle devienne asymptote; c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'asymptote parabolique dans ce cas.

F. La courbe a un point triple comme dans le cas précédent; deux de ses trois tangentes ont passé à l'infini. Il y a une seule asymptote rectiligne, ne coupant point la courbe. En outre, il y a une série infinie d'asymptotes cubi-paraboliques rencontrant la courbe en général en un seul point, tandis que l'une d'elles ne la coupe pas du tout. L'ordre du contact qui en général est $\frac{2}{3}$ s'élève pour celle-ci à l'unité. Nombre des constantes : 7.

$$(p + \pi)(p^3 + \lambda q) + u = 0. \qquad (134)$$

G. Les tangentes du point triple à l'infini sont situées elles-mêmes, toutes les trois, tout entières à l'infini. Il y a une infinité d'asymptotes paraboliques du quatrième ordre, qui coupent toutes la courbe proposée en deux points. L'ordre de ces asymptotes, toutes comprises dans l'équation suivante, en y regardant q comme une fonction linéaire absolument arbitraire,

$$p^4 + \lambda q = 0,$$

s'élève à $\frac{1}{4}$; mais en général il n'y a pas une de ces asymptotes pour laquelle cet ordre monte plus haut. Nombre des constantes : 6.

$$p^4 + \lambda q + \nu p^2 = 0. \qquad (135)$$

Paris, 25 février 1836.

MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable ;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 30 novembre 1835.)

I.

Lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, placée dans un milieu entretenu à 0°, on tombe sur l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad g\frac{du}{dt} = \frac{d\left(k\frac{du}{dx}\right)}{dx} - lu.$$

Dans cette équation qui doit servir à déterminer la température u de chaque point en fonction du temps t et de l'abscisse x de ce point, les trois lettres g, k, l représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure et le pouvoir émissif; et, puisque la barre est hétérogène, on doit les regarder, non comme des constantes, mais comme des quantités variables données pour chaque valeur de x. Si les abscisses des deux extrémités de la barre sont x et X, on a de plus deux conditions définies de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \\ \frac{du}{dx} + \mathrm{H}u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}, \end{cases}$$

h et H étant des constantes qui peuvent avoir des valeurs quelconques depuis o jusqu'à $+\infty$. Enfin, on doit avoir

$$(3) \qquad u = f(x) \text{ pour } t = 0,$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire qui représente l'état initial des températures et qui satisfait aux deux conditions

$$\frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{df(x)}{dx} + \mathrm{H}f(x) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

lesquelles se déduisent, en posant $t = 0$, des équations (2) que nous avons regardées comme ayant lieu pour la valeur générale de u dont $f(x)$ n'est qu'un cas particulier.

Pour former la valeur de u qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions définies (2) et (3), on est conduit à développer la fonction $f(x)$ (pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X) en une série dont les termes successifs diffèrent l'un de l'autre par un paramètre r et ont la propriété de satisfaire à la fois à l'équation différentielle générale

$$-rg\mathrm{V} = \frac{d\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} - l\mathrm{V},$$

et aux conditions particulières,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} - h\mathrm{V} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

On peut voir, dans l'ouvrage de M. Poisson sur la chaleur, comment on est porté, par la marche même du calcul, à admettre la possibilité de ce développement pour une fonction quelconque $f(x)$; mais jusqu'à ce jour il a paru difficile d'établir cette possibilité directement et d'une manière rigoureuse. Je me propose de donner ici une méthode très simple pour y parvenir. Je considère en elle-même la série par laquelle les géomètres ont représenté le développement de $f(x)$ dont il est question : sans rien supposer *à priori* sur l'origine de cette série ni sur sa nature, j'en cherche la valeur, et je trouve que cette valeur

est précisément $f(x)$, du moins lorsque la variable x est comprise entre les limites x et X.

II.

Soient g, k, l trois fonctions positives données en nombres finis pour chaque valeur de x comprise entre x et X : nous supposerons que les deux premières restent constamment > 0; mais la dernière pourra être nulle, soit pour quelques valeurs particulières de x, soit même dans toute l'étendue des valeurs de cette variable. Soient encore h et H deux constantes qui peuvent avoir toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à $+\infty$.

En adoptant pour le nombre r une valeur convenable, on peut toujours trouver une fonction V qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, x restant indéterminée (*), et qui

(*) On peut exprimer V en série convergente. Pour cela soit k' ce que devient k quand $x = \mathrm{x}$: représentons par p_0, p_1, p_2,... une suite de quantités liées entre elles par la relation générale $p_{m+1} = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l - gr) p_m dx$: prenons en outre $p_0 = 1 + hk' \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k}$, et faisons $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = \Pi(x, r)$. La valeur de V qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie (A) et aux conditions définies (B) sera $\mathrm{V} = \Pi(x, r)$, r désignant une quelconque des racines de l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{d\Pi(\mathrm{X}, r)}{d\mathrm{X}} + \mathrm{H}\Pi(\mathrm{X}, r) = 0.$$

Pour $x = \mathrm{x}$, on a $\mathrm{V} = 1$, $\frac{d\mathrm{V}}{dx} = h$, quel que soit r : la fonction V n'est donc identiquement nulle pour aucune valeur de r, x restant indéterminée. Cela posé, les racines de l'équation (C) seront toutes inégales, comme M. Sturm l'a démontré à la page 142 de ce volume : il pourrait n'en être plus de même si l'on employait (et cela est arrivé quelquefois) une valeur de V susceptible de devenir identiquement nulle pour certaines valeurs déterminées de r.

Quand on a $\mathrm{H} = +\infty$, la seconde des équations (B) étant divisée par H se réduit à $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, et semblablement l'équation (C) se réduit à $\Pi(\mathrm{X}, r) = 0$. Du reste, la valeur de V demeure la même que ci-dessus. Mais cette valeur change de forme quand on a $h = +\infty$: dans cette nouvelle hypothèse, la première des équations (B) devient $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$; et, si l'on veut continuer à poser $\mathrm{V} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = \Pi(x, r)$, il faut prendre $p_0 = k' \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k}$, sans

satisfasse à la fois à l'équation différentielle indéfinie

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et aux conditions particulières,

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \\ \frac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}. \end{cases}$$

Cette fonction V, comme on vient de le voir, se présente utilement dans la théorie de la chaleur; mais nous la considérons ici en elle-même, abstraction faite de son usage dans les problèmes de physique mathématique.

Pour que les conditions (B) soient satisfaites, il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines d'une certaine équation transcendante. Nous représenterons cette équation par

$$\text{(C)} \qquad \varpi(r) = 0.$$

Cela posé, notre but dans ce mémoire, est de trouver directement et par un procédé rigoureux la valeur de la série

$$\Sigma\left\{\frac{V\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVf(x)dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gV^2dx}\right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de r qui satisfont à l'équation (C). Quelle que soit la fonction $f(x)$(*), nous montrerons

---

altérer d'ailleurs la relation établie entre p_m et p_{m+1}. Cela étant, on a, pour $x = \mathrm{x}$, $\frac{dV}{dx} = 1$, valeur différente de zéro : par conséquent il n'existe aucune valeur de r qui rende V identiquement nulle, et dès lors, d'après la démonstration déjà citée de M. Sturm, l'équation (C) n'a que des racines inégales.

(*) Les fonctions que nous considérons dans ce mémoire [et la fonction $f(x)$ en particulier] peuvent changer de forme ou d'expression analytique dans l'étendue des valeurs de la variable ; mais, aux points où elles changent de forme, nous admettrons toujours qu'elles ne possèdent qu'une seule valeur. D'après cette restriction qui nous est commune avec M. Poisson (*voyez* la page 173 de son grand

que la série en question a précisément $f(x)$ pour valeur, du moins lorsque la variable x est comprise entre les limites x, X.

III.

Mais avant d'entrer en matière, il faut rappeler quelques propriétés remarquables dont jouissent et la fonction V et les racines de l'équation (C).

1°. Les racines de l'équation (C) sont, en nombre infini, toutes réelles et inégales : la plus petite de ces racines peut être nulle ou > 0 : les autres sont > 0. Nous les désignerons désormais $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m, \ldots r_n \ldots$ et nous les supposerons rangées par ordre de grandeur, en sorte que l'on ait $r_1 < r_2 < r_3 \ldots < r_m \ldots < r_n \ldots$ Nous représenterons aussi par $V_1(x), V_2(x), V_3(x), \ldots V_m(x), \ldots V_n(x), \ldots$ les diverses valeurs que prend la fonction V lorsqu'on y pose successivement $r = r_1$, $r = r_2$, $r = r_3, \ldots r = r_m, \ldots r = r_n, \ldots$

2°. Si l'on considère les valeurs de V relatives à deux racines différentes r_m, r_n, l'intégrale définie prise de $x = \mathrm{x}$ à $x = \mathrm{X}$ du produit de ces deux valeurs par gdx est toujours égale à zéro, de manière que l'on a

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m(x) V_n(x) dx = 0,$$

toutes les fois que la différence $r_m - r_n$ est autre que zéro.

3°. La fonction V ne devient jamais infinie, et elle ne peut changer de signe qu'en passant par la valeur zéro. L'étude des propriétés des racines de l'équation $V = 0$, dans laquelle on regarde x comme l'inconnue, est très intéressante. Si l'on considère celles des racines des équations $V_1(x) = 0$, $V_2(x) = 0$, $V_3(x) = 0, \ldots V_m(x) = 0, \ldots$ qui sont comprises entre x et X (abstraction faite des racines $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$, qui dans certains cas existent) on démontre que la première de ces équations est impossible, que la seconde possède une seule racine, que la troisième en possède deux, et ainsi de suite, en sorte

---

ouvrage sur la *Chaleur*), si l'on construit la ligne représentée par l'équation $y = f(x)$, cette ligne aura une seule ordonnée en chacun des points de jonction de deux parties conjuguées ; elle pourra avoir deux tangentes ou deux rayons de courbure différents appartenant à ces deux parties.

que la fonction $V_1(x)$ ne s'évanouit jamais, et que la fonction $V_m(x)$ s'évanouit $(m-1)$ fois pour des valeurs de $x > x$ et $< X$.

4°. Les $(m-1)$ racines $> x$ et $< X$ de l'équation $V_m(x) = 0$ sont inégales entre elles, et de plus comprises entre les m racines de l'équation suivante : $V_{m+1}(x) = 0$. Ainsi la fonction $V_1(x)$ est la seule qui ne change jamais de signe lorsque x croît d'une manière continue de x à X : la fonction $V_m(x)$ change $(m-1)$ fois de signe dans le même intervalle.

5°. Si l'on désigne par $A_m, A_{m+1}, \ldots A_n$, des constantes qui ne soient pas toutes nulles, et si l'on pose

$$A_m V_m(x) + A_{m+1} V_{m+1}(x) + \ldots + A_n V_n(x) = \Psi(x),$$

la fonction $\Psi(x)$ ne sera jamais identiquement nulle, et l'équation $\Psi(x) = 0$ aura $(m-1)$ racines au moins et $(n-1)$ racines au plus entre x et X. Dans l'énoncé de ce théorème, chaque racine multiple de l'équation $\Psi(x) = 0$ (lorsque cette équation a des racines multiples) doit être comptée autant de fois qu'elle entre dans l'équation : ainsi les racines doubles doivent être comptées deux fois, les racines triples trois fois, etc.

On sait comment M. Poisson s'est servi de l'équation

$$\int_x^X g V_m(x) V_n(x) dx = 0,$$

pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation (C). Les autres propriétés des racines $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ont été découvertes et démontrées en rigueur par M. Sturm (*). Considérées en elles-mêmes et indépendamment de leurs applications, ces propriétés sont déjà très élégantes : l'usage que nous allons en faire leur donnera peut-être plus de prix encore aux yeux des géomètres.

(*) On prendra une idée des méthodes employées par M. Sturm en lisant son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre* (*voyez* page 106 de ce volume). Mais la démonstration complète du 5e théorème (dont nous allons surtout faire usage) n'a été donnée par l'auteur que dans un *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles* encore inédit et dont il nous a promis d'enrichir ce journal.

IV.

Nous nous servirons d'abord des théorèmes contenus dans le numéro précédent, pour établir quelques lemmes préliminaires dont nous aurons besoin plus tard.

LEMME 1er. *Soient a, b, c,... des grandeurs inégales comprises entre* x *et* X. *Posons*

$$\begin{aligned}
V_1(a)V_2(x) - V_2(a)V_1(x) &= P_2(x),\\
V_1(a)V_3(x) - V_3(a)V_1(x) &= P_3(x),\\
&\cdots\cdots\\
V_1(a)V_m(x) - V_m(a)V_1(x) &= P_m(x),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
P_2(b)P_3(x) - P_3(b)P_2(x) &= Q_3(x),\\
P_2(b)P_4(x) - P_4(b)P_2(x) &= Q_4(x),\\
&\cdots\cdots\\
P_2(b)P_m(x) - P_m(b)P_2(x) &= Q_m(x),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

puis encore

$$\begin{aligned}
Q_3(c)Q_4(x) - Q_4(c)Q_3(x) &= R_4(x),\\
Q_3(c)Q_5(x) - Q_5(c)Q_3(x) &= R_5(x),\\
&\cdots\cdots\\
Q_3(c)Q_m(x) - Q_m(c)Q_3(x) &= R_m(x),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Je dis que, si l'on se borne à considérer les valeurs de $x >$ x et $<$ X, la fonction $P_2(x)$ s'évanouira pour $x = a$ et seulement pour $x = a$: la fonction $Q_3(x)$ s'évanouira pour $x = a$, $x = b$ et seulement pour $x = a$, $x = b$; la fonction $R_4(x)$ s'évanouira pour $x = a$, $x = b$, $x = c$, et seulement pour $x = a$, $x = b$, $x = c$, et ainsi des autres. De plus, toutes ces fonctions $P_2(x)$, $Q_3(x)$, $R_4(x)$,... changeront de signe chaque fois qu'elles s'évanouiront.

D'abord on se rappelle que la fonction $V_1(x)$ ne peut jamais devenir nulle quand x est $>$ x et $<$ X.

La fonction $P_2(x)$ se ramène à la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x)$ en posant $A_1 = -V_2(a)$, $A_2 = V_1(a)$, et le coefficient A_2 n'est pas nul.

Donc par le 5e théorème du n° III, cette fonction ne peut s'annuller plus d'une fois quand x est $>$ x et $<$ X, et il est d'ailleurs évident qu'elle devient nulle quand $x=a$. En vertu du même théorème, la racine a ne peut être qu'une racine simple : par conséquent, la fonction $P_2(x)$ doit changer de signe en même temps qu'elle s'évanouit. Les fonctions $P_3(x)$, $P_4(x)$, ... ne jouissent pas nécessairement des mêmes propriétés que $P_2(x)$: elles s'annullent, il est vrai pour $x=a$, mais la racine a peut être multiple, et des racines autres que a, quoique comprises entre x et X, peuvent satisfaire aux équations $P_3(x)=0$, $P_4(x)=0$, ...

La fonction $Q_3(x)$ s'annulle évidemment pour $x=b$, elle s'annulle aussi pour $x=a$ puisque l'on a $P_2(a)=0$, $P_3(a)=0$. Or, en remplaçant $P_2(x)$ et $P_3(x)$ par leurs valeurs, la fonction $Q_3(x)$ prend la forme $A_1V_1(x)+A_2V_2(x)+A_3V_3(x)$ et le coefficient A_3 n'est pas nul puisqu'on le trouve égal à $P_2(b)V_1(a)$: donc pour des valeurs de $x>$ x et $<$ X, $Q_3(x)$ ne peut s'évanouir plus de deux fois : donc on a bien $Q_3(x)=0$ pour $x=a$, $x=b$, et seulement pour $x=a$, $x=b$: de plus les racines a et b ne peuvent être que des racines simples, ce qui oblige la fonction $Q_3(x)$ à changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Les fonctions $Q_4(x)$, $Q_5(x)$, ... deviennent nulles pour $x=a$ et $x=b$; mais elles ne jouissent pas nécessairement des autres propriétés démontrées pour $Q_3(x)$.

La fonction $R_4(x)$ s'annulle évidemment pour $x=c$: elle s'annulle aussi pour $x=a$ et $x=b$, car il est aisé de voir que l'on a $Q_3(a)=0$, $Q_3(b)=0$, $Q_4(a)=0$, $Q_4(b)=0$. Or, en remplaçant $Q_3(x)$ et $Q_4(x)$, puis $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ par leurs valeurs, celle de $R_4(x)$ prend la forme $A_1V_1(x)+A_2V_2(x)+A_3V_3(x)+A_4V_4(x)$, A_4 ayant la valeur suivante $Q_3(c)P_2(b)V_1(a)$ qui ne peut pas être nulle. Donc l'équation $R_4(x)=0$ ne peut avoir entre les limites x, X aucune racine différente de a, b, c, et de plus ces trois racines doivent être simples, en sorte que $R_4(x)$ changera de signe en s'évanouissant.

Il est clair que l'on pourra continuer indéfiniment cette démonstration.

Corollaire. Les $(m-1)$ lettres a, b, c, ... représentant toujours des quantités inégales $<$ x et $>$ X, on peut déterminer les constantes A_1, A_2, A_3, ... A_m, de telle manière que la fonction

$$\Psi(x) = A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + A_3V_3(x) + \ldots + A_mV_m(x),$$

sans être identiquement nulle, devienne égale à zéro pour $x=a$, $x=b$, $x=c, \ldots$ En effet, si l'on a $m=2$, il suffira de prendre $\Psi(x)=P_2(x)$: si l'on a $m=3$, il suffira de prendre $\Psi(x)=Q_3(x)$; si l'on a $m=4$, il suffira de prendre $\Psi(x)=R_4(x)$; et ainsi de suite.

La fonction $\Psi(x)$ étant ainsi déterminée, l'équation $\Psi(x)=0$ ne peut avoir que $(m-1)$ racines au plus (5e théorème du n° III) : or, les quantités $a, b, c, \ldots$ sont par hypothèse au nombre de $(m-1)$: on voit donc, comme nous l'avons déjà fait observer, 1°. que les racines de l'équation $\Psi(x)=0$ sont toutes inégales et comprises dans la série $a, b, c, \ldots$ 2°. que par suite la fonction $\Psi(x)$ change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Il est bien entendu que la variable x ne sort pas des limites x, X.

Lemme 2e. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de x : si l'équation*

$$(\alpha) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\mathrm{V}dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines de l'équation (C), *je dis que l'on a nécessairement $\varphi(x)=0$, de $x=\mathrm{x}$ à $x=\mathrm{X}$.*

D'abord, si la fonction $\varphi(x)$, sans être identiquement nulle, conservait toujours le même signe depuis $x=\mathrm{x}$ jusqu'à $x=\mathrm{X}$, l'équation (α) serait absurde, car en posant $r=r_1$ on aurait

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\mathrm{V}_1(x)dx = 0,$$

et cela ne se peut, puisque la fonction $\mathrm{V}_1(x)$ ne change pas non plus de signe entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$.

Supposons maintenant que lorsqu'on fait croître x de x à X, $\varphi(x)$ change de signe $(m-1)$ fois, et soient $a, b, c, \ldots$ les $(m-1)$ valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. En faisant successivement $r=r_1$, $r=r_2, \ldots r=r_m$, dans l'équation (α), on en déduira m équations nouvelles que l'on pourra ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par les constantes $A_1, A_2, \ldots A_m$. En posant

$$A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_mV_m(x) = \Psi(x),$$

on trouvera ainsi

$$\int_x^X \varphi(x)\,\Psi(x)dx = 0.$$

Mais, d'après le corollaire du lemme 1er, on peut déterminer les constantes $A_1, A_2, \ldots A_m$, de telle manière que la fonction $\Psi(x)$ change de signe toutes les fois que x atteint et dépasse infiniment peu une des $(m-1)$ valeurs $a, b, c, \ldots\ldots$ et ne change de signe pour aucune autre valeur de x. En adoptant les valeurs de $A_1, A_2, \ldots A_m$, qui produisent cet effet, l'élément $\varphi(x)\,\Psi(x)dx$ conservera toujours le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, et par conséquent, on ne pourra pas avoir $\int_x^X \varphi(x)\,\Psi(x)dx = 0$, à moins qu'on n'ait aussi $\varphi(x) = 0$, du moins pour les valeurs de x comprises entre x et X.

V.

Maintenant nous pouvons résoudre le problème qui fait l'objet spécial de ce mémoire.

Problème. *Trouver la valeur de la série*

$$\Sigma\left\{\frac{V\int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx}\right\}$$

dans laquelle le signe Σ *s'étend à toutes les valeurs de* r *qui sont racines de l'équation* (C). *La variable* x *est comprise entre* x *et* X, *et la fonction* $f(x)$ *est donnée arbitrairement entre ces limites.*

En représentant par $F(x)$ la valeur cherchée et remplaçant le signe Σ par la série qu'il représente, on a

$$F(x) = \frac{V_1(x)\int_x^X gV_1(x)f(x)dx}{\int_x^X gV_1(x)^2dx} + \frac{V_2(x)\int_x^X gV_2(x)f(x)dx}{\int_x^X gV_2(x)^2dx} + \ldots\ldots + \frac{V_m(x)\int_x^X gV_m(x)f(x)dx}{\int_x^X gV_m(x)^2dx} + \ldots.$$

Je multiplie les deux membres par $gV_m(x)dx$ et j'intègre ensuite par

rapport à x en prenant x et X pour les limites de l'intégrale. Puisque pour deux indices m et n différents, on a

$$\int_x^X gV_m(x)V_n(x)dx = 0,$$

cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on aura

$$\int_x^X gV_m(x)F(x)dx = \int_x^X gV_m(x)f(x)dx,$$

d'où l'on tire

$$\int_x^X g[F(x) - f(x)]V_m(x)dx = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de l'indice m et la fonction g étant constamment >0, il résulte du lemme 2e que, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, on doit avoir $F(x)-f(x)=0$, d'où $F(x)=f(x)$. La valeur cherchée de la série est donc $f(x)$, entre ces limites de la variable, ce qui s'accorde avec le résultat que les géomètres ont obtenu par d'autres méthodes moins directes et moins rigoureuses que la nôtre.

D'après les équations de condition (B), qui sont remplies pour la fonction V, la valeur $F(x)$ de la série

$$\Sigma\left\{\frac{V\int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx}\right\}$$

satisfait aux égalités

$$\frac{dF(x)}{dx} - hF(x) = 0 \text{ pour } x = x,$$
$$\frac{dF(x)}{dx} + HF(x) = 0 \text{ pour } x = X;$$

si donc on veut que l'égalité $F(x)=f(x)$ soit exacte aux limites mêmes $x=x$, $x=X$, il faudra regarder la fonction $f(x)$ comme assujettie aux deux conditions

$$\frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \text{ pour } x = x,$$
$$\frac{df(x)}{dx} + Hf(x) = 0 \text{ pour } x = X,$$

que nous avons admises en effet au n° I.

VI.

Nous croyons devoir ajouter à la démonstration précédente quelques remarques qui ne seront pas sans intérêt.

Par un raisonnement semblable à celui dont nous nous sommes servis pour démontrer le 2e lemme du n° IV, on peut encore établir la proposition suivante : *Si l'équation*

$$(\beta) \qquad \int_x^X \varphi(x) V dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines $r_1, r_2, \ldots$ jusqu'à r_n, je dis que la fonction $\varphi(x)$ change de signe au moins $(n-1)$ fois, lorsqu'on fait croître x depuis x *jusqu'à* X. En effet, supposons, s'il est possible, que la fonction $\varphi(x)$, dans cet intervalle, change de signe $(m-1)$ fois seulement, m étant $\leq n$, et soit (comme au n° IV) $\Psi(x)$ une fonction de la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_mV_m(x)$, qui change de signe aussi $(m-1)$ fois et pour les mêmes valeurs que $\varphi(x)$, le produit $\varphi(x)\Psi(x)dx$ ne changera jamais de signe, et par suite on ne pourra pas avoir

$$\int_x^X \varphi(x)\Psi(x)dx = 0,$$

ce qui résulte pourtant de l'équation (β) en y posant successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots r = r_m$, puis ajoutant membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A_1, $A_2 \ldots A_m$. Il est donc absurde d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ s'annulle $(m-1)$ fois seulement, m étant $\leq n$: ce qui démontre la proposition énoncée.

Désignons par σ_n la somme des n premiers termes de la série

$$\Sigma \left\{ \frac{V \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2 dx} \right\}$$

dont on n'a pas besoin de supposer que la somme soit connue. Pour un indice m égal ou inférieur à n, nous obtiendrons immédiatement

$$\int_x^X g\sigma_n V_m(x)dx = \int_x^X gV_m(x)f(x)dx,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\gamma) \qquad \int_x^X g\rho_n V_m(x)dx = 0,$$

ρ_n représentant la différence $f(x) - \sigma_n$. En comparant cette équation à l'équation (β), on conclut de la proposition qui vient d'être démontrée, que la quantité ρ_n s'annulle au moins $(n-1)$ fois lorsque x croît depuis x jusqu'à X.

Soit Q une fonction quelconque de la forme $A_1V_1(x) + A_2V_2(x) + \ldots + A_nV_n(x)$ (ce qui comprend comme cas particulier la fonction σ_n). En posant dans l'équation (γ) successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots$ $r = r_n$, puis ajoutant les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par $A_1, A_2, \ldots A_n$, on a :

$$\int_x^X g\rho_n Q dx = 0;$$

ce qui, en posant $Q = \sigma_n$, devient :

$$\int_x^X g\rho_n\sigma_n dx = 0.$$

Maintenant multiplions par $g\sigma_n dx$ et intégrons entre les limites x, X les deux membres de l'équation $f(x) = \sigma_n + \rho_n$, puis effaçons le terme $\int_x^X g\rho_n\sigma_n dx$, qui est égal à zéro; nous obtiendrons ainsi

$$\int_x^X g\sigma_n f(x)dx = \int_x^X g\sigma_n^2 dx :$$

nous obtiendrons une autre formule plus remarquable encore, savoir,

$$\int_x^X gf(x)^2 dx = \int_x^X g(\sigma_n^2 + \rho_n^2)dx,$$

en multipliant par gdx et intégrant le carré $f(x)^2 = \sigma_n^2 + 2\sigma_n\rho_n + \rho_n^2$. Cette dernière formule nous prouve que l'intégrale $\int_x^X g\sigma_n^2 dx$, quelque grand qu'on prenne l'indice n, ne peut jamais avoir une valeur numérique supérieure à la limite $\int_x^X gf(x)^2 dx$ avec laquelle elle coïncide lorsque $n = \infty$.

THÉORÈME

Sur les quantités incommensurables ;

PAR M. LEBESGUE.

Dans un mémoire qui fait partie du 3e cahier de ce journal, M. Léger s'occupe du problème suivant : Trouver la somme des restes donnés par l'opération de la commune mesure entre $\sqrt{m}$ et 1. La méthode qu'il indique, d'après M. Terquem, s'appliquerait également à $\frac{A+B\sqrt{m}}{C}$ et 1, ou à la racine de $ax^2+bx+c=0$ et à l'unité. Elle montre bien que la somme toujours finie est de forme $\frac{M+N\sqrt{m}}{P}$; mais c'est là, ce nous semble, tout ce qu'elle peut donner; car elle devient impraticable quand la période de la fraction continue valeur de x, n'a pas un assez petit nombre de termes. Pour résoudre plus complétement le problème, nous avons cherché la loi des restes : il y en a deux que voici :

1°. Ces restes, pris convenablement à intervalles égaux, forment des progressions géométriques, ayant la même raison.

Cette première loi, que nous démontrerons ici, donne très facilement la somme.

2°. Ces mêmes progressions géométriques sont aussi des séries récurrentes.

Pour la démonstration complète de ce théorème, nous renverrons à la *Théorie des Nombres* ou à un mémoire dans lequel nous dirons quelques mots de la présente question.

Dans ce qui suit nous représenterons la fraction continue périodique valeur de x_1, racine de $ax_1^2+bx_1+c=0$, par $x_1=q_1, q_2, q_3, \ldots q_k(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n})$, les quotients renfermés entre parenthèses formant une période de n termes.

Nous représenterons les quotients complets par x_2, x_3, $x_4 \ldots$, de sorte qu'on aura

$$x_1 = q_1, x_2,$$
$$x_1 = q_1, q_2, x_3,$$
$$x_1 = q_1, q_2, q_3, x_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous représenterons par r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes donnés par l'opération de la commune mesure sur x_1 et 1 de sorte qu'on aura

$$x_1 = 1 . q_1 + r_1, \quad 1 = r_1 q_2 + r_2, \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3 \ldots,$$

d'où résulte immédiatement,

$$x_2 = \frac{1}{r_1}, \quad x_3 = \frac{r_1}{r_2}, \quad x_4 = \frac{r_2}{r_3} \ldots, \quad x_m = \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}},$$

et par suite,

$$r_{m-1} = \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_m}.$$

Si l'on remarque maintenant que la série $x_1 x_2 \ldots x_m$ est nécessairement périodique en prenant $x_{k+1}, \ldots x_{k+n}$; pour la période, on aura $x_{k+1} = x_{k+n+1} = x_{k+2n+1} =$ etc., $x_{k+2} = x_{k+n+2} = \ldots$, $x_{k+g} = x_{k+n+g} = \ldots$, $x_{k+n} = x_{k+2n} = \ldots$, ce qui réduit la valeur de r_{m-1} à la forme suivante :

$$r_{k+nf+g-1} = \frac{1}{(x_2 x_3 \ldots x_k) . (x_{k+1} \ldots x_{k+n})^f . x_{k+1} \ldots x_{k+g}} = r_{k+g-1} \left(\frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}}\right)^f.$$

si l'on fait $m = k + nf + g$, g étant $< n$.

Ainsi les valeurs de $r_{k+nf+g-1}$ correspondantes à $f = 0, 1, 2 \ldots$ forment une progression géométrique décroissante dont la raison est

$$\frac{1}{x_{k+1} \ldots x_{k+n}} = \frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}} < 1.$$

La somme des restes r_1, r_2, etc. est donc

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{k-1} + \frac{r_k + r_{k+1} + \ldots + r_{k+n-1}}{1 - \frac{r_{k+n-1}}{r_{k-1}}},$$

expression qui se réduit à $\frac{r_1 + r_2 + \ldots r_n}{1 - r_n}$, quand la période commence dès le terme x_2; par exemple, pour $ax_1^2 = b$.

Quoique le calcul des x_2, $x_3 \ldots$ soit assez court et puisse encore être abrégé, il serait long d'employer la formule $r_{m-1} = \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_m}$, pour

calculer les restes. On démontrera très facilement la formule suivante qui est générale, c'est-à-dire qui suppose à x_1 une valeur quelconque. En représentant par $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$ .... les convergentes successives vers la valeur de x_1, on aura $r_m = (-1)^{m-1}(x_1\beta_m - \alpha_m)$.

Pour le cas où x_1 est la racine d'une équation du second degré, on sait, par la théorie des nombres, que les valeurs de α_m, β_m prises de n en n, à partir d'un quotient appartenant à la période de x_1 forment des séries récurrentes d'échelle 2φ, $-(-1)^n$, en posant

$$2\varphi = \gamma' + \delta,\ \frac{\gamma}{\delta} = q_{k+1},\ q_{k+2}\cdots q_{k+n-1},\quad \frac{\gamma'}{\delta'} = q_{k+1},\ q_{k+2}\cdots q_{k+n}.$$

De là résulte par conséquent que les restes r_1, r_2 .. pris de la même manière, forment des séries récurrentes d'échelle $2\varphi(-1)^n$, $-(-1)^n$.

Nos deux lois ne sont pas incompatibles. En effet, soit $S_m = (-S_{m-2})(-1)^n$, posons $S_m = x.S_{m-1}$, $S_{m-1} = x.S_{m-2}$, il en résultera $x^2 = (2\varphi x - 1)(-1)^n$. Si donc la valeur de x tirée de cette équation s'accorde avec $\frac{S_m}{S_{m-1}}$, la série récurrente sera aussi une progression géométrique.

Un seul exemple suffira. Prenons la commune mesure de $\sqrt{7}$ et 1.

Quotients.... 2; 1, 1, 1, 4; 1, 1 1, 4, etc.,

Convergentes.. $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{37}{14}$, $\frac{45}{17}$, $\frac{82}{31}$, $\frac{127}{48}$, $\frac{590}{223}$, etc.

Restes, $1.\sqrt{7}-2$, $-1.\sqrt{7}+3$, $2\sqrt{7}-5$, $-3\sqrt{7}+8$, $14\sqrt{7}-37$, $-17\sqrt{7}+45$, $31\sqrt{7}-82$, $-48\sqrt{7}+127$, $223\sqrt{7}-590$, etc.

La somme des 4 premiers restes divisée par 1 moins le 4e reste ou par $3\sqrt{7}-7$, donne $\frac{5\sqrt{7}+7}{14}$ (comme on le voit au mémoire cité plus haut.) Si l'on veut mettre en évidence la coïncidence de la progression géométrique et de la série récurrente dont l'échelle est pour le cas présent 16, -1, il suffira d'observer que $\frac{r_5}{r_1} = \frac{14\sqrt{7}-37}{\sqrt{7}-2} = -3\sqrt{7}+8$, ce qui est précisément la racine de l'équation $x^2 = 16x - 1$; d'ailleurs, $223\sqrt{7}-590 = 16(14\sqrt{7}-37)-(\sqrt{7}-2)$.

DÉMONSTRATION

D'un Théorème dû à M. Sturm *et relatif à une classe de fonctions transcendantes ;*

Par Joseph **LIOUVILLE**.

(Présentée à l'Académie des Sciences le 27 juin 1836.)

1. Soient x une variable indépendante; x, X, deux limites de cette variable rangées par ordre de grandeur; et g, k, l, trois fonctions de x dont les deux premières sont constamment > 0, tandis que la troisième est à volonté positive ou nulle. En attribuant au paramètre r une valeur convenable, on peut toujours trouver une fonction V qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, x restant indéterminée, et qui, en outre, satisfasse à l'équation différentielle indéfinie

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)\,V = 0,$$

et aux conditions définies

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} \frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \\ \frac{dV}{dx} + \mathrm{H}V = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}; \end{cases}$$

h et H désignent deux nombres compris entre 0 et $+\infty$, ou même égaux soit à 0, soit à $+\infty$.

On se sert de la fonction V pour la sólution de la plupart des problèmes physico-mathématiques. M. Sturm en a étudié avec soin les diverses propriétés; et je crois avoir ajouté à ses recherches quelques résultats nouveaux dans mon mémoire *sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en série dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable* (*). Dans le mémoire cité j'ai pris pour point de départ un théorème général dont l'auteur a bien voulu me communiquer la démonstration encore inédite. Établir rigoureusement ce théorème par une voie simple et très différente de celle qu'a suivie M. Sturm, tel est le but que je me propose aujourd'hui.

2. Pour que la fonction V satisfasse à l'équation (A) et aux conditions définies (B), il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines d'une certaine équation

$$\text{(C)} \qquad \varpi(r) = 0.$$

Les racines de l'équation (C) sont en nombre infini, toutes réelles et inégales. Nous les nommerons $r_1, r_2, \ldots r_m, \ldots r_n \ldots$, et nous les supposerons rangées par ordre de grandeur, en sorte que l'on ait $r_1 < r_2 \ldots < r_m \ldots < r_n$. La racine r_1 peut être nulle ou positive; les autres sont > 0. Nous désignerons par $V_1(x)$ ou par V_1 ce que devient la fonction V quand on y pose $r = r_1$, et en général par $V_n(x)$ ou par V_n ce que devient V quand on y pose $r = r_n$. Dans son mémoire *sur les équations différentielles linéaires du second ordre* (**), M. Sturm a prouvé qu'entre les limites x, X de la variable x, la fonction V_1 ne s'évanouit jamais; au contraire, la fonction V_n s'évanouit $(n-1)$ fois pour $(n-1)$ valeurs de x inégales entre elles. Ces diverses propriétés de la fonction V résultent d'une analyse aussi directe qu'élégante, et désormais nous les supposerons bien connues.

On sait aussi qu'en désignant par p, q deux indices différents, on a

$$\text{(D)} \qquad \int_x^X g V_p V_q dx = 0,$$

(*) *Voyez* le cahier de juillet, page 252 de ce volume.

(**) *Voyez* le cahier de mars, page 106 de ce volume.

résultat remarquable dont M. Poisson s'est servi pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation (C).

Désignons par A_m, A_{m+1}, ... A_n des constantes quelconques, et posons

$$U = A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + A_n V_n;$$

toutes les fois que l'indice p sera choisi hors de la série des nombres m, $m+1$, ... n, on aura, d'après la formule (D),

$$\int_x^X gUV_p dx = 0,$$

et c'est ce qui arrivera, par exemple si l'on pose $p=1$, ou $p=2$, ... ou $p=m-1$. Au contraire, si l'indice p est compris dans la série des nombres m, $m+1$, ... n, on aura

$$\int_x^X gUV_p dx = A_p \int_x^X gV_p^2 dx,$$

quantité différente de zéro quand le coefficient A_p est lui-même différent de zéro.

On voit par là qu'en excluant le cas particulier où les coefficients A_m, A_{m+1}, ... A_n sont tous égaux à zéro, la fonction U de x ne peut jamais être identiquement nulle entre les limites $x=x$, $x=X$; supposons en effet que le coefficient A_p, compris dans la série A_m, A_{m+1}, ... A_n, soit différent de zéro, et nous trouverons l'intégrale $\int_x^X gUV_p dx$ égale non pas à zéro, mais à $A_p \int_x^X gV_p^2 dx$, ce qui ne pourrait être si l'on avait identiquement $U=0$.

3. Cela posé, quels que soient les coefficients constants A_m, A_{m+1}, ... A_n, pourvu qu'ils ne soient pas tous nuls, je dis que l'équation

$$U = A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + A_n V_n = 0$$

aura au plus $(n-1)$ racines tant égales qu'inégales, et qu'elle aura au moins $(m-1)$ racines inégales entre elles. Dans cet énoncé on ne considère que des valeurs de x réelles et comprises entre x et X; on fait abstraction des valeurs de x qui sont égales ou inférieures à x, égales ou inférieures à X.

Ce beau théorème, dû à M. Sturm, et dont nous avons tiré ailleurs des corollaires utiles, est évident 1° lorsque le coefficient A_m

ayant une valeur finie, les coefficients $A_{m+1}, \ldots\ldots A_n$ deviennent infiniment petits. Alors en effet l'équation $U=0$ se réduit à $V_m=0$, et possède en conséquence $m-1$ racines inégales $>x$ et $<X$; 2° lorsque le coefficient A_n ayant une valeur finie, les autres coefficients $A_{n-1}, \ldots\ldots A_{m+1}, A_m$ deviennent infiniment petits; alors en effet l'équation $U=0$ se réduisant à $V_n=0$, possède $(n-1)$ racines $>x$ et $<X$, et inégales entre elles. Mais la difficulté est d'en trouver une démonstration applicable à tous les cas.

4. Le théorème de M. Sturm se compose évidemment de deux parties; il est assez facile de voir, et nous montrerons plus bas que la seconde est une conséquence immédiate de la première. Attachons-nous donc à établir d'abord cette première partie, savoir que l'équation $U=0$, dans laquelle l'inconnue x est comprise entre x et X, possède au plus $(n-1)$ racines tant égales qu'inégales.

Pour cela nous ferons usage du principe suivant qui n'est autre chose au fond que le théorème de Rolle: si une fonction $f(x)$, qui ne devient infinie pour aucune valeur de x comprise entre x' et x'', s'annulle à ces deux limites x', x'', et si en outre elle possède $\mu-1$ racines égales ou inégales comprises entre x' et x'', l'équation dérivée $f'(x)=0$ aura au moins μ racines égales ou inégales dans le même intervalle. En supposant toujours $x>x'$ et $<x''$, on peut ajouter que si l'équation $f(x)=0$ a $(\mu'-1)$ racines inégales entre elles, l'équation $f'(x)=0$ en aura au moins μ'.

Soit p un nombre entier positif quelconque auquel nous pourrons successivement attribuer les valeurs $m, m+1, \ldots\ldots n$: on a

$$\frac{d\left(k\frac{dV_p}{dx}\right)}{dx}+(gr_p-l)\,V_p=0,$$

$$\frac{d\left(k\frac{dV_t}{dx}\right)}{dx}+(gr_t-l)\,V_t=0:$$

je retranche ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par V_t, la seconde par V_p: j'obtiens ainsi un résultat que je peux mettre sous la forme

$$(r_1 - r_p)\, g V_1 V_p\, dx = V_1 \frac{d\left(k \frac{dV_p}{dx}\right)}{dx} - V_p \frac{d\left(k \frac{dV_1}{dx}\right)}{dx} :$$

le second membre est la différentielle exacte de la quantité ..... $k\left(V_1 \frac{dV_p}{dx} - V_p \frac{dV_1}{dx}\right)$, laquelle se réduit à zéro, lorsque $x = \mathrm{x}$ et lorsque $x = \mathrm{X}$, en vertu des conditions définies (B): intégrant à partir de $x = \mathrm{x}$, il vient donc

$$(r_1 - r_p) \int_{\mathrm{x}}^{x} g V_1 V_p\, dx = k\left(V_1 \frac{dV_p}{dx} - V_p \frac{dV_1}{dx}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(r_1 - r_p) \int_{\mathrm{x}}^{x} g V_1 V_p\, dx = k V_1^2 \cdot \frac{d\left(\frac{V_p}{V_1}\right)}{dx}.$$

Si, dans cette équation, on pose successivement $p = m$, $p = m + 1$, ... $p = n$, qu'on ajoute tous les résultats ainsi obtenus après les avoir multipliés respectivement par les coefficients A_m, A_{m+1} ...., A_n, et que de plus on fasse

$$(r_1 - r_p)\, A_p = a_p, \quad \frac{U}{V_1} = \Psi,$$

ce qui donne $a_1 = 0$, on obtiendra

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} g V_1 (a_m V_m + a_{m+1} V_{m+1} + \ldots + a_n V_n)\, dx = k V_1^2 \frac{d\Psi}{dx}.$$

Puisque la fonction V_1 ne s'évanouit jamais entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$, les racines de l'équation $\Psi = 0$ sont, entre ces limites, les mêmes que les racines de l'équation $U = 0$: nous appellerons μ le nombre de ces racines, et il s'agira de prouver que l'on a $\mu < n - 1$ ou tout au plus $\mu = n - 1$. Or, si l'équation $\Psi = 0$ possède μ racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$, l'équation $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, ou

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} g V_1 (a_m V_m + a_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + a_n V_n)\, dx = 0,$$

en aura aussi $(\mu - 1)$ au moins $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$: il est d'ailleurs évident que cette équation est satisfaite lorsque l'on pose dans son

premier membre $x = \mathrm{x}$: elle l'est également lorsque l'on pose $x = \mathrm{X}$; car, en vertu de la formule (D), son premier membre se réduit alors à $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} a_1 g V_1^2 \, dx$, quantité nulle puisque $a_1 = 0$. Donc la dérivée de ce premier membre doit s'évanouir au moins μ fois entre les limites x, X de l'inconnue x : en d'autres termes l'équation

$$a_m V_m + a_{m+1} V_{m+1} + \ldots\ldots + a_n V_n = 0,$$

doit posséder au moins μ racines $>$ x et $<$ X.

Ainsi en admettant que l'équation $U = 0$ possède μ racines dans l'intervalle compris depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, on est contraint d'admettre que l'équation

$$A_m (r_m - r_1) V_m + \ldots\ldots + A_n (r_n - r_1) V_n = 0,$$

possède μ racines au moins dans le même intervalle. Répétons notre raisonnement, et nous verrons qu'il en est de même *à fortiori* des équations suivantes :

$$A_m (r_m - r_1)^2 V_m + \ldots\ldots + A_n (r_n - r_1)^2 V_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m (r_m - r_1)^i . V_m + \ldots\ldots + A_n (r_n - r_1)^i . V_n = 0,$$

quelque grand que soit le nombre i. Dans cet énoncé, nous considérons toutes les racines tant égales qu'inégales ; mais en se bornant aux racines inégales entre elles, on aurait encore le même théorème : c'est ce qui résulte évidemment de la deuxième partie du principe fondamental posé plus haut.

En divisant les deux membres de la dernière de nos équations par $(r_n - r_1)^i$, on la met sous la forme

$$\text{(E)} \qquad A_m \left(\frac{r_m - r_1}{r_n - r_1}\right)^i + \ldots\ldots + A_n V_n (x) = 0.$$

L'équation (E) doit avoir μ racines au moins, quelque grand qu'on prenne le nombre entier i. Mais puisque les quantités positives $r_1, \ldots r_m, \ldots r_n$ sont rangées par ordre de grandeur, cette équation se réduit à $V_n = 0$ lorsqu'on attribue à i une valeur infiniment grande ; et alors

elle possède $(n-1)$ racines : donc on a $\mu < n-1$ ou tout au plus $\mu = n-1$, ce qu'il fallait démontrer.

5. On rendra la fin de cette démonstration plus rigoureuse encore en la présentant d'une autre manière. Faisons $\left(\frac{r_{n-1}-r_1}{r_n-r_1}\right)^i = \omega$, l'équation (E) dont on divisera les deux membres par A_n, peut être mise sous la forme

$$V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0,$$

$\Pi(x)$ désignant une fonction qui ne dépasse jamais un certain *maximum* M et dont la dérivée $\Pi'(x)$ ne surpasse jamais un autre *maximum* N : le coefficient ω devient infiniment petit lorsqu'on prend i infiniment grand. Les $(n-1)$ racines de l'équation $V_n(x)=0$, comprises entre x et X, sont toutes inégales. Cela étant, on peut diviser X — x en intervalles assez petits pour que dans les uns $V_n(x)$ conserve toujours une valeur $> \omega M$, tandis que dans les autres $V_n(x)$ s'évanouira et changera de signe, la dérivée $V'_n(x)$ restant constamment $> \omega N$: dans les premiers, il est évident que l'on a $V_n(x)^2 > \omega^2\Pi(x)^2$, et que par suite l'équation $V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0$ n'est jamais satisfaite; pour étudier ce qui arrive dans les seconds, nommons α une quelconque des racines de $V_n(x) = 0$, et désignons par h une quantité finie très petite; le coefficient ω étant infiniment petit, les deux fonctions

$$V_n(\alpha - h) + \omega\Pi(\alpha - h), \quad V_n(\alpha + h) + \omega\Pi(\alpha + h)$$

auront les mêmes signes que leurs premiers termes, c'est-à-dire des signes opposés : donc entre les limites $\alpha - h$, $\alpha + h$ de x, l'équation

$$V_n(x) + \omega\Pi(x) = 0$$

a au moins une racine : d'ailleurs elle n'en a qu'une, puisque la dérivée $V'_n(x) + \omega\Pi'(x)$, dont le premier terme $V'_n(x)$ reste $> \omega N$, ne s'évanouit pour aucune valeur de x comprise entre $\alpha - h$ et $\alpha + h$.

Outre les $(n-1)$ racines $>$ x et $<$ X, l'équation $V_n = 0$ peut avoir encore dans certains cas la racine x et la racine X. Le cas où la racine α serait ainsi égale à une des limites x, X mérite un

examen spécial. Supposons par exemple $\alpha = \mathrm{x}$: on traiterait de la même manière le cas où $\alpha = \mathrm{X}$. Or, $\mathrm{V}_n(\mathrm{x})$ étant $= 0$, la dérivée $\mathrm{V}'_n(x)$ ou $\frac{d\mathrm{V}_n(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}$ ne peut pas être nulle : la première des équations (B), lorsqu'on y pose $r = r_n$ nous donne donc $h = \infty$, et par suite $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, quelle que soit la valeur de r : l'équation (E) et l'équation $\mathrm{V} = 0$ sont donc satisfaites en posant $x = \mathrm{x}$; mais nous devons faire abstraction de cette racine $x = \mathrm{x}$, puisque, dans l'énoncé du théorème de M. Sturm, on ne considère que les racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$. Maintenant de $x = \mathrm{x}$ à $x = \mathrm{x} + h$, h étant une quantité très petite, je dis que l'on n'a jamais

$$\mathrm{A}_n\mathrm{V}_n(x) + \omega\Pi(x) = 0 :$$

en effet il faudrait pour cela (d'après le théorème de Rolle) que, dans le même intervalle h, la dérivée $\mathrm{V}'_n(x) + \omega\Pi'(x)$ pût s'évanouir, ce qui n'a pas lieu.

En résumé l'équation (E), où l'on suppose i infini, a $(n-1)$ racines $> \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$, comme l'équation $\mathrm{V}_n(x) = 0$; et l'on a $\mu < n - 1$ ou tout au plus $\mu = n - 1$, comme nous l'avons dit ci-dessus.

6. La seconde partie du théorème de M. Sturm pourrait se démontrer par une méthode semblable à celle dont nous venons de faire usage, ou plutôt par une méthode inverse. En effet puisque le nombre des racines inégales entre elles d'une équation

$$\mathrm{A}_m\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n = 0$$

est *tout au plus* égal au nombre des racines de l'autre équation

$$\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^i\,\mathrm{V}_m + \ldots + \mathrm{A}_n(r_n - r_1)^i.\,\mathrm{V}_n = 0,$$

en remplaçant A_m par $\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^{-i}, \ldots\ldots \mathrm{A}_n$ par $\mathrm{A}_n(r_n - r_1)^{-i}$, on en conclut réciproquement que l'équation

$$\mathrm{A}_m\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n = 0$$

a *au moins* autant de racines inégales entre elles que l'équation

$$\mathrm{A}_m(r_m - r_1)^{-i}.\,\mathrm{V}_m + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n(r_n - r_1)^{-i}.\,\mathrm{V}_n = 0,$$

laquelle en possède $m - 1$ lorsqu'on fait $i = \infty$.

Mais la première partie du théorème de M. Sturm étant admise, la seconde s'en déduit sans peine; et même les raisonnements qu'il faut employer pour cela sont écrits tout au long dans le mémoire sur le *développement des fonctions en série* que j'ai cité plus haut. Nous renverrons donc le lecteur au lemme premier et à la proposition démontrée n° VI de ce mémoire.

Pour établir ce lemme et cette proposition, il suffit évidemment de connaître la première partie du théorème de M. Sturm que nous venons de démontrer. Or, en vertu de la proposition établie n° VI du mémoire en question (dans l'énoncé de laquelle il nous est permis de remplacer n par $m-1$, et $\varphi(x)$ par $g\,\varphi(x)$, puisque g ne s'évanouit jamais), quand l'équation

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}\varphi(x)\,dx = 0,$$

est satisfaite en remplaçant r par une quelconque des racines $r_1, r_2, \ldots r_{m-1}$, la fonction $\varphi(x)$ change de signe $(m-1)$ fois au moins entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$ (*). Ce cas est précisément celui où se trouve la fonction

$$\varphi(x) = \mathrm{U} = \mathrm{A}_m \mathrm{V}_m + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{V}_n:$$

donc le premier membre de l'équation $\mathrm{U} = 0$ change au moins $(m-1)$ fois de signe lorsqu'on fait croître x, d'une manière continue, depuis x jusqu'à X: donc enfin *à fortiori* l'équation $\mathrm{U} = 0$ a au moins $(m-1)$ racines inégales comprises entre x et X, ce qu'il fallait prouver.

(*) Le n° VI du mémoire dont nous parlons, répond aux pages 264 et 265 de ce volume : il s'y est glissé une faute grave, que l'on pourra corriger à la main sur chaque exemplaire, à l'aide de l'*errata* suivant : Page 264, ligne 8, et Page 265, ligne 5, au lieu de au moins $(n-1)$ fois, *lisez :* au moins n fois. Page 264, ligne 11 et ligne 21, au lieu de m étant $< n$, *lisez :* m étant $\leqq n$.

DÉMONSTRATION

D'un Théorème de M. Cauchy, *relatif aux racines imaginaires des Équations;*

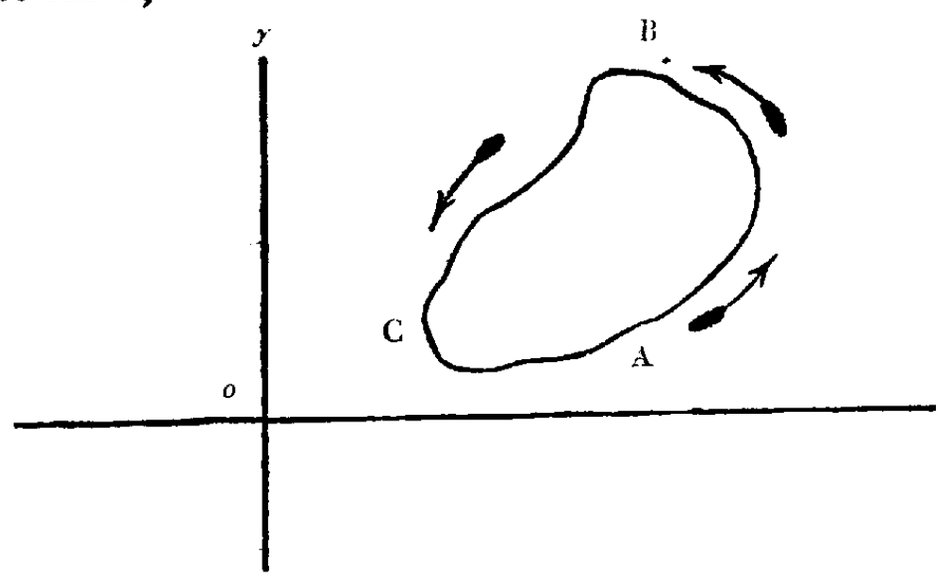
Par C. STURM et J. LIOUVILLE.

1. Soit $f(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$ une fonction entière de z dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ sont des constantes quelconques réelles ou imaginaires. Si l'on remplace l'indéterminée z par $x + y\sqrt{-1}$, $f(z)$ prendra aussi la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles de x, y, et si l'on peut trouver des valeurs réelles de x et y qui annullent à la fois P et Q, en substituant ces valeurs dans la formule $x + y\sqrt{-1}$, on aura une racine de l'équation $f(z) = 0$. On dit que la racine $z = x + y\sqrt{-1}$ est *simple* quand on a $f(z) = 0$, sans avoir en même temps $f'(z) = 0$: on dit que cette racine est double quand on a à la fois $f(z) = 0$, $f'(z) = 0$, sans avoir en même temps $f''(z) = 0$; et en général elle est multiple de l'ordre n quand on a à la fois $f(z) = 0$, $f'(z) = 0, \ldots,$ $f^{(n-1)}(z) = 0$, sans avoir en en même temps $f^{(n)}(z) = 0$. Nous regarderons toujours une racine double comme équivalente à deux racines égales entre elles; et ainsi de suite. Cette convention que les géomètres font ordinairement simplifiera beaucoup les énoncés de nos théorèmes.

On peut regarder les deux quantités x et y qui entrent dans une expression quelconque de la forme $x + y\sqrt{-1}$, comme étant l'abscisse et l'ordonnée d'un certain point M rapporté à des axes rectangulaires Ox, Oy et situé dans le plan de ces axes : $x + y\sqrt{-1}$ devient réelle et le point M est placé sur l'axe des x, quand on a $y = 0$. A

chaque valeur de $x+y\sqrt{-1}$ répondra ainsi un point M ayant x pour abscisse, y pour ordonnée, et réciproquement à chaque point M dont les coordonnées sont x et y répondra une expression de la forme $x+y\sqrt{-1}$. Parmi les points que l'on obtient en construisant ainsi la formule $x+y\sqrt{-1}$, on doit distinguer ceux pour lesquels on a à la fois $P=0$, $Q=0$: ces points représentent en quelque sorte géométriquement les racines de l'équation $f(z)=0$.

2. Cela posé; si l'on trace dans le plan des xy un contour ferme quelconque ABC,



on peut se demander si, dans l'intérieur de ce contour, il y a des points pour lesquels P et Q soient nuls en même temps, et combien il y en a; ou plus brièvement, on peut se demander combien, dans l'intérieur du contour ABC, il y a de racines de l'équation $f(z)=0$. Or, pour résoudre cette question, M. Cauchy a donné dans un de ses mémoires la règle que voici.

Considérons le rapport $\frac{P}{Q}$ qui est une fonction réelle et rationnelle des coordonnées x, y: ce rapport pour chaque point du contour ABC a une valeur déterminée, si toutefois on suppose qu'il n'y ait sur le contour même aucun point pour lequel P et Q soient nuls en même temps. Si l'on marche le long du contour ABC toujours dans le même sens ABC, en partant du point quelconque A jusqu'à ce qu'on revienne à ce point, la quantité $\frac{P}{Q}$ prendra successivement diverses valeurs, et pourra changer de signe, en passant par zéro si P s'annulle et par l'infini si Q s'annulle. Soit

i le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du positif au négatif, k le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du négatif au positif, et Δ l'excès de i sur k : cet excès Δ ou $i-k$ sera toujours double du nombre μ des racines égales ou inégales contenues dans le contour ABC.

Le théorème de M. Cauchy consiste, comme on voit, dans l'équation $\mu = \frac{1}{2}\Delta$, μ et Δ ayant la signification que nous venons de leur attribuer.

Il est bien essentiel d'observer que, dans cet énoncé, on ne tient nullement compte des changements de signe que $\frac{P}{Q}$ peut éprouver en passant par l'infini : on ne fait non plus aucune attention aux cas où $\frac{P}{Q}$ s'annulle sans changer de signe.

La démonstration que M. Cauchy a donnée de son théorème est fondée sur l'emploi des intégrales définies et du calcul des résidus. Celle que nous allons exposer ici repose uniquement sur les premiers principes de l'Algèbre. Nous ne supposerons pas même connue cette proposition fondamentale de l'analyse des équations, *que toute équation algébrique* $f(z)=0$ *a au moins une racine de la forme*..... $a+b\sqrt{-1}$, nous proposant au contraire de déduire ce dernier principe du théorème de M. Cauchy dont il est, comme on le verra et comme l'auteur lui-même l'a observé, un simple corollaire.

3. Ce théorème est évident pour un contour quelconque ABC, lorsque dans l'intérieur de ce contour et sur le contour même on n'a jamais $P=0$: alors en effet les deux nombres μ et Δ sont tous les deux nuls et par suite l'équation $\mu = \frac{1}{2}\Delta$ est satisfaite.

Elle est satisfaite encore lorsque dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $Q=0$: le nombre μ est alors encore égal à zéro et je vais prouver que l'on a aussi $\Delta=0$. En effet la fraction $\frac{P}{Q}$, quand on aura fait un tour entier pour revenir au point de départ A, devra se retrouver en ce point affectée du même signe que d'abord elle possédait, quand le mouvement a commencé : donc cette fraction doit changer de signe un nombre pair de fois, toujours en

s'évanouissant, puisque son numérateur seul peut devenir nul, et en passant alternativement du positif au négatif et du négatif au positif : donc enfin l'excès Δ du nombre de fois où elle va du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle va du $-$ au $+$ en s'évanouissant, est égal à zéro, ce qu'il fallait prouver.

4. Considérons maintenant un point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$ et qui réponde par conséquent à une racine simple ou multiple de l'équation $f(z)=0$. Traçons autour du point M un contour convexe $A_1A_2A_3A_4$. Si pour un point quelconque N de la courbe ainsi tracée, le rayon vecteur MN ou r est suffisamment petit, le théorème de M. Cauchy aura lieu pour ce contour $A_1A_2A_3A_4$. C'est ce que nous allons prouver.

Soient a et b les coordonnées du point M. En nommant φ l'angle que le rayon vecteur MN ou r fait avec l'axe des x, les coordonnées du point N seront $x=a+r\cos\varphi$, $y=b+r\sin\varphi$; et par suite, en développant $f(x+y\sqrt{-1})$ et observant que $f(a+b\sqrt{-1})=0$, on aura

$$(1)\quad f(x+y\sqrt{-1})=\frac{f'(a+b\sqrt{-1})}{1}.r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$+\frac{f''(a+b\sqrt{-1})}{1.2}.r^2(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(m)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots m}.r^m(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m.$$

Le terme général de ce développement est

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n;$$

représentons par H_n le module de $\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}$, et par α_n un angle convenable, en sorte que l'on ait

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}=H_n(\cos\alpha_n+\sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$

puis rappelons-nous la formule de Moivre $(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi$; ce terme général deviendra

$$H_n r^n [\cos(n\varphi + \alpha_n) + \sqrt{-1}\sin(n\varphi + \alpha_n)].$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & H_1 r[\cos(\varphi+\alpha_1) + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)] \\ & + H_2 r^2[\cos(2\varphi+\alpha_2) + \sqrt{-1}\sin(2\varphi+\alpha_2)] + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + H_m r^m \cos(m\varphi+\alpha_m) + \sqrt{-1}\sin(m\varphi+\alpha_m)]; \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} P &= H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\cos(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\cos(m\varphi+\alpha_m), \\ Q &= H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\sin(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\sin(m\varphi+\alpha_m). \end{aligned}$$

Si la racine $a + b\sqrt{-1}$ est une racine simple, le coefficient H_1 sera essentiellement différent de zéro; ce cas est celui qu'il convient d'examiner en premier lieu.

5. Pour mieux fixer alors le degré de petitesse du rayon vecteur r, désignons par K la somme des modules H_2, $H_3, \ldots H_m$, et posons à la fois $r < 1$, $r < \frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, c'est-à-dire rendons r plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant pour r une valeur assujettie à la condition qui vient d'être énoncée, P aura le même signe que son premier terme $H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ce que nous venons de dire sur la manière dont les signes de P et Q dépendent des signes de leurs premiers termes, est vrai non seulement le long du contour $A_1A_2A_3A_4$, mais encore dans son intérieur où

l'on a *à fortiori* $r<1$, $r<\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$; or, quand la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ est plus petite que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, celle de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ est plus grande que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et *vice versâ;* donc, quel que soit φ et sauf le cas où $r=0$, une au moins des deux quantités P, Q est différente de zéro, et possède le même signe que son premier terme. Sur le contour $A_1A_2A_3A_4$, et dans son intérieur, il n'y a donc que le point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$, et qui réponde à une racine de l'équation $f(z)=0$.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par A_1, A_2, A_3, A_4, les quatre points pour lesquels on a... $\varphi+\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{5\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{7\pi}{4}$; et prenant le point A_1 pour point de départ, nous irons successivement de A_1 en A_2, de A_2 en A_3, de A_3 en A_4, et de A_4 en A_1. D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe dans l'intervalle A_1A_2 ni dans l'intervalle A_3A_4, et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les deux intervalles A_2A_3, A_4A_1.

Au point A_1 les deux polynomes P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire le signe $+$; la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive. Au point A_2 ces deux polynomes ont encore les mêmes signes que leurs premiers termes qui sont $-H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$; et la fraction $\frac{P}{Q}$ est négative. Quand on va du point A_1 au point A_2, la fraction $\frac{P}{Q}$ change donc de signe une ou plusieurs fois; et comme dans cet intervalle on n'a jamais $Q=0$, il en résulte qu'elle s'évanouit toujours au moment où elle change de signe. En vertu de ces changements de signe, la fraction $\frac{P}{Q}$ d'abord positive devient négative, puis redevient positive, et ainsi de suite. Mais comme finalement le signe $+$ se trouve remplacé par le signe $-$, il faut que le nombre de fois où la fraction $\frac{P}{Q}$ passe du positif au négatif

l'emporte d'une unité sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif.

Du point A_2 au point A_3 la fraction $\frac{P}{Q}$ change encore de signe ; mais sans s'évanouir, puisque dans cet intervalle on a constamment $P < 0$.

Du point A_3 où la fraction $\frac{P}{Q}$ est positive jusqu'au point A_4 où elle est négative, les changements de signe n'ont lieu que lorsque P s'évanouit. On arrive donc pour l'intervalle A_3A_4 au résultat fourni par l'intervalle A_1A_2, savoir que $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif.

Enfin, dans l'intervalle A_4A_1, P est toujours > 0, et la fraction $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais s'évanouir.

En résumé, nous trouvons donc pour le contour entier $A_1A_2A_3A_4$ l'excès Δ égal à 2 ; d'un autre côté ce contour ne renferme dans son intérieur qu'une seule racine. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour en question.

6. Supposons en second lieu que la racine $a + b\sqrt{-1}$ soit multiple de l'ordre n : on devra regarder alors le contour $A_1 A_2 A_3 A_4$, dont les dimensions sont très petites, comme renfermant n racines égales entre elles, et l'on aura par suite $\mu = n$: pour que le théorème de M. Cauchy soit exact, il faut donc que l'excès Δ soit alors égal à $2n$. Or, quand la racine $a + b\sqrt{-1}$ est multiple de l'ordre n, on a $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, ... $H_{n-1} = 0$; les valeurs de P et de Q sont par conséquent

$$P = H_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \cos[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] + \ldots + H_m r^m \cos(m\varphi + \alpha_m)$$

$$Q = H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \sin[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] + \ldots + H_m r^m \sin(m\varphi + \alpha_m).$$

Pour fixer le degré de petitesse du rayon r, nous désignerons par K la somme $H_{n+1} + H_{n+2} + \ldots + H_m$ et nous prendrons r plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_n\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant

pour r une valeur assujettie à cette condition, le signe de P sera le même que celui de son premier terme $H_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(n\varphi + \alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, comme cela arrive quand l'arc $n\varphi + \alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, ... et ainsi de suite jusqu'à $\frac{(8n-1)\pi}{4}$, $\frac{(8n+1)\pi}{4}$: de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(n\varphi + \alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'arc $n\varphi + \alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, ou enfin entre les limites $\frac{(8n-3)\pi}{4}$, $\frac{(8n-1)\pi}{4}$.

On conclut aisément de là que, sur le contour $A_1A_2A_3A_4$ et dans son intérieur il n'existe aucun point (le point M excepté), pour lequel on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$: c'est pourquoi l'on a $\mu = n$, comme nous l'avons dit tout à l'heure.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par A_1, A_2, A_3, ... A_{4n} les points pour lesquels on a

$$n\varphi + \alpha_n = \frac{\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{3\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{5\pi}{4}, \ldots . n\varphi + \alpha_n \frac{(8n-3)\pi}{4};$$

et, prenant le point A_1 pour point de départ nous irons successivement de A_1 en A_2, de A_2 en A_3, ... de A_{4n} en A_1 D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe, ni dans l'intervalle A_1A_2, ni dans l'intervalle A_3A_4, ... ni dans l'intervalle $A_{4n-1}A_{4n}$; et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les intervalles A_2A_3, A_4A_5, ...$A_{4n}A_1$. Il est inutile de considérer ces derniers intervalles dans lesquels $\frac{P}{Q}$ ne peut pas s'évanouir : dans tous les autres au contraire, cette fraction s'évanouit et passe du positif au négatif. Ainsi, par exemple, au point A_1, P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_n r^n . \frac{\sqrt{2}}{2}$: la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive : on peut s'assurer au contraire qu'en A_2 elle est négative : donc

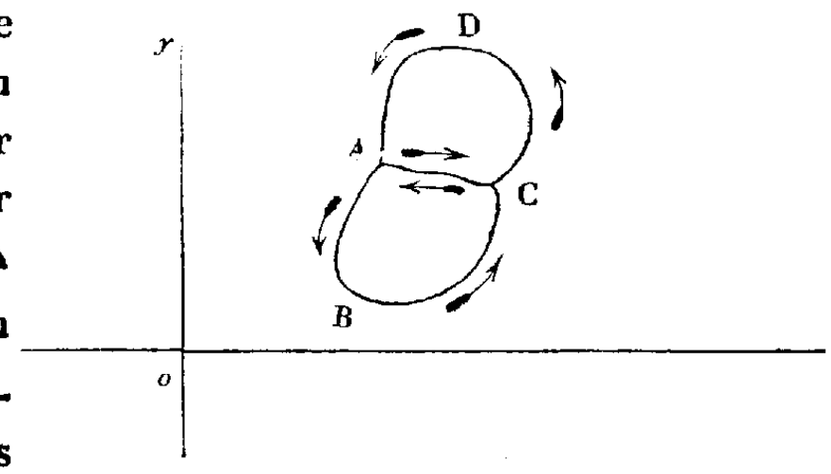
dans l'intervalle A_1A_2, elle change de signe une fois ou un nombre impair de fois en s'évanouissant et allant de $+$ à $-$, puis de $-$ à $+$,... puis finalement de $+$ à $-$; le nombre des passages de $+$ à $-$ surpasse d'une unité le nombre des passages de $-$ à $+$. Ce que nous disons pour l'intervalle A_1A_2 a lieu pour les $2n-1$ autres intervalles A_3A_4, A_5A_6, ... $A_{4n-1}A_{4n}$. L'excès Δ est donc égal à $2n$, de sorte que le théorème de M. Cauchy est rigoureusement démontré pour le contour que nous considérons (*).

(*) On simplifiera beaucoup cette démonstration en admettant, comme on a au fond droit de le faire, que l'équation $f(z)=0$ n'a pas de racines égales. Si l'on adopte cette hypothèse, on pourra aussi se dispenser de recourir à la formule de Moivre, en présentant le raisonnement de la manière suivante. Après avoir développé $f(x+y\sqrt{-1})$ et obtenu la formule (1) du n° 4, on séparera dans cette formule le premier terme $f'(a+b\sqrt{-1})r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ de tous les autres dont on représentera l'ensemble par $P_1+Q_1\sqrt{-1}$, et après avoir mis $f'(a+b\sqrt{-1})r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ sous la forme ..... $H_1r[\cos(\varphi+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)]$, on aura

$$f(x+y\sqrt{-1})=H_1r[\cos(\varphi+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)]+P_1+Q_1\sqrt{-1},$$

qui donne $P=H_1r\cos(\varphi+\alpha_1)+P_1$, $Q=H_1r\sin(\varphi+\alpha_1)+Q_1$. Pour fixer le degré de petitesse du rayon r que nous prendrons d'abord <1, représentons par H_nr^n le module du terme général $\frac{f^{(n)}(a+b)\sqrt{-1}}{1.2....n}r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n$: le module de la somme $P_1+Q_1\sqrt{-1}$ sera moindre que la somme des modules $H_2r^2+H_3r^3+...+H_mr^m$ et *à fortiori* moindre que $r^2(H_2+H_3+...+H_m)$. en posant $H_1+H_2+...+H_m=K$, on aura donc $\sqrt{P_1^2+Q_1^2}<Kr^2$, ce qui exige que la valeur absolue de chacune des quantités P_1, Q_1 soit aussi $<Kr^2$. Cela posé, si l'on prend $r<\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, il est clair que le signe de P sera semblable au signe de son premier terme, et constamment négatif depuis le point A_2, où.. $\cos(\varphi+\alpha_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point A_3 où l'on a encore $\cos(\varphi+\alpha_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Au contraire, le signe de P est constamment $+$ depuis le point A_4 où l'on a $\cos(\varphi+\alpha_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point A_1, où l'on a aussi $\cos(\varphi+\alpha_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. De même la fonction Q est toujours positive dans l'intervalle A_1A_2, et toujours négative dans l'intervalle A_3A_4. On achèvera ensuite la démonstration comme au n° 5, où les points A_1, A_2, A_3, A_4 ont la même signification qu'ici.

7. Quand le théorème de M. Cauchy a lieu pour deux contours ABCA, ACDA qui ont une partie commune AC, il a lieu également pour le contour total ABCDA formé par leur réunion. En effet, l'excès Δ du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où cette fraction en s'évanouissant passe du $-$ au $+$ est le même, soit qu'on parcoure le contour total ABCDA, soit qu'on parcoure successivement les deux contours ABCA, ACDA, puisqu'à chaque passage du $+$ au $-$ ou du $-$ au $+$ qui a lieu quand on va sur le côté AC de C en A répond un passage inverse du $-$ au $+$ ou du $+$ au $-$ quand on va sur le même côté de A en C. Or en supposant que le nombre des racines soit égal à μ' dans le contour ABCA et à μ'' dans le contour ACDA, on a $\Delta = 2\mu'$ pour le premier de ces contours et $\Delta = 2\mu''$ pour le second, puisque le théorème de M. Cauchy est supposé applicable à l'un et à l'autre : d'après ce que l'on vient de voir, il résulte de là que, pour le contour total ABCDA, on a $\Delta = 2(\mu' + \mu'')$, équation qui ne diffère pas de l'équation $\Delta = 2\mu$ du n° 2 appliquée au contour ABCDA dans lequel il y a $\mu' + \mu''$ racines. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour ABCDA, ce qu'il fallait démontrer.



Si l'on considère un nombre quelconque de contours juxtaposés, pour chacun desquels ce théorème ait lieu, il aura lieu également pour le contour total formé par la réunion de ceux-là : c'est ce qu'on verra en réunissant ces contours successivement deux à deux, comme on peut le faire d'après ce qui vient d'être démontré.

8. Étant donné un contour quelconque ABC, on peut toujours le concevoir divisé 1°. en contours convexes tracés autour de chaque racine contenue dans l'intérieur de ABC et assujettis aux conditions énoncées n° 6 : 2°. en contours semblables à ceux dont on a parlé n° 3, c'est-à-dire pour lesquels on n'ait jamais à la fois $P = 0$, $Q = 0$. Le théorème de M. Cauchy ayant lieu pour les diverses parties dans les-

quelles on divise ainsi le contour ABC aura lieu pour ce contour même ABC, dont la forme est arbitraire.

Ce théorème est donc entièrement démontré.

Toutefois nous excluons formellement le cas particulier où, pour quelque point de la courbe ABC, on aurait à la fois $P=0$, $Q=0$: ce cas particulier ne jouit d'aucune propriété régulière et ne peut donner lieu à aucun théorème; car dès qu'on l'admet, l'excès Δ peut varier avec la forme du contour sans que le nombre μ varie : de sorte qu'il n'existe alors entre μ et Δ aucune relation constante.

9. De l'origine O des coordonnées comme centre et d'un rayon r très grand, traçons un cercle, et cherchons combien l'équation $f(z)=0$ a de racines comprises dans l'intérieur de ce cercle. Soit φ l'angle qu'un rayon quelconque ON fait avec l'axe des x : les coordonnées du point N seront $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, et l'on aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi) \\ & + A_1 r^{m-1}\left[\cos(m-1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m-1)\varphi\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_{m-1}\, r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + A_m. \end{aligned}$$

Soit H_1 le module de $A_1, \ldots H_{m-1}$ celui de A_{m-1}, H_m celui de A_m et supposons que l'on ait

$$A_1 = H_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1), \quad A_2 = H_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2), \text{ etc.}$$

On aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m[\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi] \\ & + H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \sqrt{-1}\sin[(m-1)\varphi + \alpha_1)] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + H_m(\cos\alpha_m + \sqrt{-1}\sin\alpha_m); \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P &= r^m\cos m\varphi + H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \ldots + H_m\cos\alpha_m, \\ Q &= r\sin m\varphi + H_1 r^{m-1}\sin[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \ldots + H_m\sin\alpha_m. \end{aligned}$$

Prenons le rayon r à la fois > 1 et $> K\sqrt{2}$, K désignant la somme

des modules $H_1, \ldots H_{m-1}, H_m$. Alors le signe de P sera semblable à celui de son premier terme toutes les fois que la valeur absolue de $\cos m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$: de même le signe du polynome Q sera celui de son premier terme $r^m \sin m\varphi$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nommons A_1, A_2, A_3, A_{4m} les points de la circonférence du cercle pour lesquels on a successivement

$$m\varphi = \frac{\pi}{4},\ m\varphi = \frac{3\pi}{4},\ m\varphi = \frac{5\pi}{4}, \ldots m\varphi = \frac{(8m-1)\pi}{4}.$$

Il est aisé de voir par une discussion toute semblable à celle du n° 6 que dans les intervalles A_2A_3, $A_4A_5, \ldots A_{4m}A_1$ la fraction $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira jamais, et que dans chacun des intervalles A_1A_2, $A_3A_4, \ldots A_{4m-1}$, où elle s'évanouira au contraire et ne deviendra jamais infinie, l'excès du nombre de fois où elle passera du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle passera du $-$ au $+$ sera égal à l'unité. L'excès total Δ pour le contour entier ABC sera ainsi égal à $2m$: la moitié m de cet excès donne le nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans le cercle $A_1A_2, \ldots A_{4m}$ dont le rayon est exprimé par un nombre quelconque plus grand que 1 et que $K\sqrt{2}$. On voit par là que *toute équation algébrique* $f(z) = 0$ *de degré* m *a* m *racines de la forme* $x + y\sqrt{-1}$ *et n'en a que* m. Le plus grand des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$ est une limite supérieure du module de toutes les racines : il serait facile de trouver une limite plus simple (*).

(*) Il nous resterait à expliquer les moyens de trouver l'excès Δ pour un contour donné. Mais afin d'éviter un double emploi, nous renverrons cette recherche à la fin de l'article suivant.

Autres démonstrations du même Théorème ;

PAR C. STURM.

Les nouvelles démonstrations que je vais donner du théorème de M. Cauchy, s'éloignent moins que la précédente de la méthode que cet illustre géomètre a suivie dans son mémoire ; elles sont fondées sur la décomposition en facteurs de la fonction qu'on égale à zéro. Je vais d'abord démontrer ce théorème pour une équation algébrique de degré quelconque en admettant comme déjà connu ce principe que toute équation algébrique a toujours une racine soit réelle soit imaginaire de la forme $a+b\sqrt{-1}$, d'où l'on conclut immédiatement qu'une équation du $m^{ième}$ degré a m racines.

Soit $F(z)=0$ l'équation proposée, $F(z)$ étant une fonction entière de z dont le degré est m, et dans laquelle les coefficients des puissances de z sont des quantités réelles ou imaginaires de la forme..... $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Soient $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$, $a''+b''\sqrt{-1}$,.... les m racines de cette équation parmi lesquelles il peut s'en trouver d'égales. On a d'abord

$$F(z)=(z-a-b\sqrt{-1})(z-a'-b'\sqrt{-1})(z-a''-b''\sqrt{-1}),\text{ etc...} \quad (1)$$

Si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, x et y étant des quantités réelles indéterminées, $F(z)$ prendra la forme $P+Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions entières et réelles de x et y, et l'équation précédente deviendra

$$\left.\begin{aligned} P+Q\sqrt{-1}=&[x-a+(y-b)\sqrt{-1}][x-a'+(y-b')\sqrt{-1}]\\ &[x-a''+(y-b'')\sqrt{-1}]\text{ etc.}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On peut regarder les indéterminées x et y comme les coordonnées d'un point quelconque M rapporté à un système d'axes rectangulaires tracés sur un plan, et alors la recherche des racines de l'équation

$F(z) = 0$ qui est devenue $P + Q\sqrt{-1} = 0$, revient à déterminer sur ce plan tous les points dont les coordonnées satisfont à la fois aux deux équations réelles $P = 0$, $Q = 0$.

Désignons ces points par K, K′, K″, etc. Leurs coordonnées sont a et b pour le point K, a' et b' pour le point K′, a'' et b'' pour K″, etc.

Posons

$$x - a + (y - b)\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$x - a' + (y - b')\sqrt{-1} = r'(\cos t' + \sqrt{-1}\sin t'),$$
$$x - a'' + (y - b'')\sqrt{-1} = r''(\cos t'' + \sqrt{-1}\sin t''),$$
etc.

Le produit de tous ces facteurs sera, d'après la formule connue,

$$rr'r''\ldots[\cos(t + t' + t'' + \ldots) + \sqrt{-1}\sin(t + t' + t'' + \ldots)].$$

En vertu de l'équation (2), ce produit doit être égal à $P + Q\sqrt{-1}$, on a donc

$$P = rr'r''\ldots\cos(t + t' + t'' + \ldots),$$
$$Q = rr'r''\ldots\sin(t + t' + t'' + \ldots),$$

et
$$\frac{P}{Q} = \cot(t + t' + t'' + \ldots),$$

La cotangente signifie ici le quotient du cosinus divisé par le sinus.

Puisqu'on a fait $x - a + (y - b)\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$,

on a
$$x - a = r\cos t, \quad y - b = r\sin t.$$

On voit que $x - a$ et $y - b$ sont les projections sur les deux axes rectangulaires de la droite qui joint le point fixe K au point quelconque M dont les coordonnées sont x et y. Par conséquent, r représente la longueur de cette droite, et t l'angle ou plutôt l'arc de cercle compris entre sa direction et celle d'une parallèle KX menée par le point K à l'axe Ox dans le sens des x positives, cet arc étant mesuré sur un cercle qui a pour centre le point K. L'arc t est nul lorsque la droite KM coïncide avec la parallèle KX à l'axe des x, et il peut prendre des valeurs quelconques soit positives, soit négatives, même au-delà d'une circonférence, si l'on fait tourner autour du point K cette droite KM supposée indéfinie. De même t', t''... seront les angles ou arcs de

cercle compris entre les droites K'M, K''M, et des parallèles à l'axe des x menées par les points K', K''.

Il s'agit maintenant de déterminer combien parmi ces points K, K', K'',... pour lesquels on a $P=0$, $Q=0$, il s'en trouve dans l'intérieur d'un contour fermé ABC tracé à volonté sur le plan xOy.

Concevons que le point M soit un point mobile qui parcoure le contour ABC en partant d'un point A de ce contour et allant toujours dans le même sens sans rétrograder, jusqu'à ce qu'il revienne au point de départ A. Lorsque le point M est en A, l'angle ou l'arc t a une valeur déterminée que nous désignerons par α; c'est la valeur de l'angle AKX. Supposons que le point fixe K soit dans l'intérieur du contour ABC. Lorsque le point M parcourra ce contour, l'arc t variera par degrés insensibles et pourra tantôt croître, tantôt décroître, même au-delà d'une circonférence, selon la forme du contour ABC. Mais quand le point M sera revenu en A, l'arc t se trouvera égal à sa valeur primitive α augmentée d'une circonférence. Ainsi l'on a $t=\alpha$ au moment où le point M part de A, et $t=\alpha+2\pi$ quand il revient en A après avoir parcouru le contour entier.

Mais si le point K est hors du contour ABC, l'arc t après avoir alternativement augmenté et diminué par degrés insensibles, finira par reprendre sa valeur primitive α, au moment où le point M reviendra en A.

On dira la même chose des autres arcs t', t'',... qui ont pour centres les points K', K''....

Supposons que parmi les points K, K', K'',... les uns soient situés hors du contour ABC, et les autres au dedans. Soit μ le nombre des points intérieurs. Désignons par $\mathcal{E}$ la somme des valeurs α, α', α'',... des arcs t, t', t'',.... au moment où le point M part du point A. Pendant que le point M parcourra le contour ABC, cette somme... $t+t'+t''+\ldots$ variera par degrés insensibles, et lorsque le point M reviendra en A, on aura $t+t'+t''+\ldots=\mathcal{E}+2\mu\pi$, puisque chacun des arcs t, t', t'', qui a pour centre un point intérieur doit être augmenté de 2π, quand le point M revient en A, tandis que les arcs qui ont pour centres des points extérieurs reprennent leurs valeurs primitives. Pour une position quelconque du point mobile, on a

$$\frac{P}{Q}=\cot(t+t'+t''+\ldots).$$

Je dis maintenant que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ doit s'évanouir pour différents points du contour ABC en passant du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif.

La cotangente d'un arc variable s'évanouit en même temps que son cosinus, quand cet arc devient égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. En s'évanouissant, la cotangente passe du positif au négatif ou du négatif au positif, selon que l'arc croît ou décroît en devenant égal à ce multiple; mais elle ne change pas de signe si l'arc atteint ce multiple sans l'outrepasser. L'arc $t+t'+t''+\ldots$ variant par degrés insensibles pendant le mouvement du point M, deviendra égal une ou plusieurs fois à chacun des 2μ multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre ε et... $\varepsilon+2\mu\pi$. Si l'on considère l'un quelconque de ces multiples, l'arc $t+t'+t''+\ldots$ doit lui devenir égal en croissant une fois de plus qu'en décroissant, puisque $t+t'+t''+\ldots$ commence par avoir au point de départ A une valeur ε plus petite que ce multiple, et finit par avoir une valeur plus grande $\varepsilon+2\mu\pi$, quand on revient au point A : alors $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ en s'évanouissant pour ce multiple-là, passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif. S'il arrive que la somme variable $t+t'+t''$. . devienne égale à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ qui ne soit pas compris entre ε et $\varepsilon+2\mu\pi$, elle l'atteindra autant de fois en augmentant qu'en diminuant; et par conséquent $\cot(t+t'+t''+\ldots)$, en s'évanouissant pour ce multiple-là passera du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif.

Puisque les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre ε et $\varepsilon+2\mu\pi$ sont au nombre de 2μ, que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ en s'évanouissant pour chacun de ces multiples, passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif, et qu'en s'évanouissant pour un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ non compris entre ε et $\varepsilon+2\mu\pi$, elle passe autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif; on en conclut que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ ou la quantité $\frac{P}{Q}$ qui lui est égale, en s'évanouissant pour différents points du contour ABC, passera du positif au

négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif. Ce qui est le théorème de M. Cauchy.

On peut en donner encore une démonstration analogue à la précédente, mais dans laquelle on ne suppose pas déjà connu le principe de l'existence des racines, qui deviendra au contraire une conséquence du théorème en question. On verra même par cette nouvelle démonstration qu'il s'étend à des équations non algébriques. Elle est fondée sur les propositions suivantes :

1re *Proposition*. Soient p et q des fonctions réelles de deux variables réelles x et y. Considérons x et y comme les coordonnées d'un point quelconque M rapporté à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy; et supposons que chacune des fonctions p, q, ait une valeur finie unique et déterminée pour tout point situé sur un contour ABC tracé dans le plan xOy (elles peuvent devenir infinies pour des points situés au dehors ou au dedans de ce contour). Admettons aussi que p et q ne soient nulles en même temps pour aucun point situé sur ce contour même. Si l'on conçoit que le point M dont les coordonnées sont x, y, parcoure le contour ABC (dans le sens ABC), la quantité $\frac{p}{q}$ pourra s'évanouir en changeant de signe pour différents points de ce contour. Soit δ l'excès du nombre de fois où $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant passe du négatif au positif (cet excès δ peut être un nombre positif, ou négatif, ou zéro). Si l'on fait $p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$, je dis que lorsque le point M partant du point A aura parcouru le contour entier ABC et sera revenu en A, l'arc t après avoir varié par degrés insensibles sera égal à la valeur primitive α qu'il avait au point de départ A plus $\delta\pi$.

En effet, au moment où le point mobile M part du point A, p et q ont des valeurs déterminées, et quand le point M revient en A, p et q reprennent ces mêmes valeurs; donc $\cos t$ et $\sin t$ reprennent aussi leurs valeurs primitives; donc α étant la valeur de l'arc t, au moment où le point M part de la position A; quand il y reviendra t sera égal à cette valeur primitive α ou bien à cette même valeur α *plus* ou *moins* un multiple de la circonférence, de sorte qu'en revenant

au point A, on aura $t = \alpha \pm 2k\pi$, k étant un nombre entier ou zéro.

Si l'on a $t = \alpha + 2k\pi$, t en variant par degrés insensibles pendant le mouvement du point M sur le contour ABC, deviendra égal une ou plusieurs fois à chacun des $2k$ multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre α et $\alpha + 2k\pi$, et il atteindra chacun de ces multiples une fois de plus en croissant qu'en décroissant, puisque cet arc t a d'abord au point de départ A une valeur α plus petite que le multiple de $\frac{\pi}{2}$ que l'on considère et finit par avoir une valeur plus grande quand le point M revient en A. Donc cot t en s'évanouissant pour ce multiple-là passera du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif. Si l'arc t devient égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ non compris entre α et $\alpha + 2k\pi$, il l'atteindra autant de fois en augmentant qu'en diminuant; et alors cot t, en s'évanouissant pour ce multiple passera du $+$ au $-$ autant de fois que du $-$ au $+$. On conclut de là que cot. t ou $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passera du positif au négatif $2k$ fois de plus que du négatif au positif. Ainsi le nombre que nous avons appelé δ est égal à $2k$, et l'on a $t = \alpha + \delta\pi$, quand le point M revient en A.

Si après avoir parcouru le contour entier, on a $t = \alpha - 2k\pi$, on prouvera de la même manière que cot. t ou $\frac{p}{q}$ devra s'évanouir en passant du positif au négatif $2k$ fois *de moins* que du négatif au positif, on aura donc $\delta = -2k$; et en revenant au point A, $t = \alpha + \delta\pi$, (puisqu'on a $t = \alpha - 2k\pi$).

Si le point M revenant en A, t reprenait sa valeur primitive α, cot. t en s'évanouissant passerait du $+$ au $-$ autant de fois que du $-$ au $+$ de sorte qu'on aurait $\delta = 0$, et en revenant au point A, la formule $t = \alpha + \delta\pi$ serait encore vérifiée.

2e *Proposition.* Soient p, q, p', q', p'', q'', etc. des fonctions des deux variables x et y ayant chacune une valeur finie et unique pour tout point situé sur le contour ABC. Le point M dont les coordonnées sont x et y parcourant le contour ABC (dans le sens ABC), soient δ, δ', δ'',... respectivement les nombres qui expriment combien de fois

chacune des quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,... en s'évanouissant pour différents points de ce contour passe du positif au négatif de plus que du négatif au positif. On suppose qu'aucune de ces fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$.... ne devient $\frac{0}{0}$ sur le contour même. Si l'on pose

$$P + Q\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1})(p'' + q''\sqrt{-1})\ldots$$

et $$\Delta = \delta + \delta' + \delta'' + \text{etc.}$$

le nombre Δ exprimera combien de fois la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif de plus que du négatif au positif. (Chacun des nombres δ, δ', δ'',... et Δ peut être positif, négatif, ou zéro.)

En effet posons $p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$,

$p' + q'\sqrt{-1} = r'(\cos t' + \sqrt{-1}\sin t')$,

etc.

Nous aurons $$\frac{P}{Q} = \cot.(t + t' + t'' + \ldots).$$

Au moment où le point M part du point A, les arcs t, t', t''... ont des valeurs déterminées α, α', α'',... désignons par β la somme $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ Quand le point M aura parcouru le contour entier ABC et sera revenu en A, on aura d'après la première proposition $t = \alpha + \delta\pi$, $t' = \alpha' + \delta'\pi$, $t'' = \alpha'' + \delta''\pi$, etc. et conséquemment $t + t' + t'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha''\ldots) + (\delta + \delta' + \delta'' + \ldots)\pi = \beta + \Delta\pi$. On en conclut par le raisonnement employé précédemment que $\cot(t + t' + t'' + \ldots)$, qui n'est autre chose que $\frac{P}{Q}$, en s'évanouissant pour différents points du contour ABC, passera du positif au négatif Δ fois de plus que du négatif au positif.

Corollaire. Si l'on pose $P + Q\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1})$ et si l'excès δ' qui se rapporte à $\frac{p'}{q'}$ est zéro, on aura $\Delta = \delta$, c'est-à-dire que l'excès du nombre des passages par zéro du $+$ au $-$ sur le nombre des passages par zéro du $-$ au $+$ sera le même pour $\frac{p}{q}$ et pour $\frac{P}{Q}$ qui est ici $\frac{pp' - qq'}{pq' + qp'}$.

Ce cas a lieu en particulier quand la quantité p' ne s'évanouit pas sur le contour ABC; car alors $\frac{p'}{q'}$ ou cot t' ne s'évanouit pas sur ce contour, de sorte qu'on a $\delta' = 0$.

On aura encore $\delta' = 0$, si l'on suppose $p' = 0$, car alors $\frac{p'}{q'}$ ou cot t' étant identiquement nulle, ne change pas de signe sur le contour ABC. Mais en faisant $p' = 0$, $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{pp' - qq'}{pq' + qp'}$ se réduit à $-\frac{q}{p}$. Donc l'excès δ est le même pour les deux quantités $\frac{p}{q}$ et $-\frac{q}{p}$; ce qu'il est facile au surplus de reconnaître *à priori*. (*Voyez* page 306.)

3e *Proposition*. Soient K, K', K''... des points dont le nombre est μ situés dans l'intérieur du contour ABC, et parmi lesquels il peut s'en trouver qui coïncident. Soient a et b les coordonnées du point K, a' et b' celles de K', a'' et b'' celles de K'', etc. Si l'on pose $P + Q\sqrt{-1} = [x - a + (y - b)\sqrt{-1}][x - a' + (y - b')\sqrt{-1}]$ etc. la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passera du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif, de sorte que pour $\frac{P}{Q}$ on aura $\Delta = 2\mu$.

En effet si l'on pose

$$x - a + (y - b)\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$
$$x - a' + (y - b')\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1} = r'(\cos t' + \sqrt{-1}\sin t')$$

t, t', t'',.. seront les angles ou arcs de cercles compris entre les rayons vecteurs KM, K'M, K''M .. et les parallèles à l'axe des x menées par les points K, K', K''.. Quand le point M a parcouru le contour entier et revient en A, chacun de ces arcs se trouve augmenté d'une circonférence 2π. Donc en vertu de la première proposition, pendant le mouvement du point M, chacune des quantités cot t ou $\frac{p}{q}$, cot t' ou $\frac{p'}{q'}$,... passera en s'évanouissant du positif au négatif deux fois de plus que du négatif au positif, de sorte que les nombres $\delta, \delta', \delta''$.. sont tous égaux à $+2$. Donc pour $\frac{P}{Q}$ on aura d'après la deuxième proposition, $\Delta = \delta + \delta' + \delta'' + \ldots = 2\mu$.

4e *Proposition*. Soient P et Q des fonctions réelles des deux va-

riables x et y ayant chacune une valeur finie et unique pour tout système de valeurs réelles de x et de y. Si le contour ABC ne renferme aucun point pour lequel on ait à la fois $P = 0$ et $Q = 0$, je dis qu'on aura $\Delta = 0$ pour $\frac{P}{Q}$, c'est-à-dire que si $\frac{P}{Q}$ s'évanouit pour différents points du contour ABC, $\frac{P}{Q}$ passera en s'évanouissant du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif.

Cette proposition est évidente, si dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $P = 0$.

Elle est encore vraie lorsque dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $Q = 0$. Car, d'après le corollaire de la deuxième proposition l'excès Δ est le même pour les deux quantités $\frac{P}{Q}$ et $-\frac{Q}{P}$, or Δ est nul pour $-\frac{Q}{P}$, puisque par hypothèse Q ne s'annulle pas sur le contour ABC ni au dedans, donc Δ est nul aussi pour $\frac{P}{Q}$. En voici d'ailleurs une autre raison. Au moment où le point M part du point A, $\frac{P}{Q}$ a une valeur et un signe déterminés; et quand le point M revient en A, $\frac{P}{Q}$ reprend la même valeur et le même signe; donc le point M parcourant le contour ABC, $\frac{P}{Q}$ ne peut changer de signe qu'un nombre pair de fois, toujours en s'évanouissant, puisque P seule peut devenir nulle, et en passant alternativement du positif au négatif et du négatif au positif; ainsi l'on a $\Delta = 0$.

Considérons maintenant un contour quelconque ABC qui ne renferme pas de point intérieur pour lequel on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$. On pourra évidemment partager l'aire comprise dans ce contour en plusieurs segments tels que pour tous les points situés dans l'un quelconque de ces segments et sur le contour même qui le termine l'une au moins des fonctions P, Q, ait toujours des valeurs différentes de zéro et de même signe. Si les contours qui terminent deux de ces segments ont une partie commune, on peut admettre que dans l'un de ces deux segments contigus, c'est P qui n'est jamais nulle, et que dans l'autre c'est Q. Car, si c'était la même fonction

P ou Q qui ne fût jamais nulle dans ces deux segments, on pourrait les réunir en un seul dans lequel cette même fonction ne serait jamais nulle, en supprimant la partie commune aux deux contours qui les renferment. Après qu'on aura ainsi supprimé ces lignes de séparation inutiles, la fonction P ne sera nulle pour aucun point commun à deux contours contigus, puisque, comme nous venons de le dire, P ne pourra jamais être nulle sur l'un de ces deux contours et que Q ne pourra pas l'être sur l'autre.

Cela posé, en parcourant l'un quelconque de ces contours partiels la quantité $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira pas ou bien elle s'évanouira en passant autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif, comme on l'a vu tout-à-l'heure. Donc, en parcourant le contour primitif unique ABC qui résulte de la suppression de toutes les parties communes, il est clair que $\frac{P}{Q}$ passera encore en s'évanouissant du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif ou que Δ sera nul pour le contour ABC, puisque $\frac{P}{Q}$ ne s'annulle sur aucune partie commune.

Maintenant il est facile d'établir le théorème de M. Cauchy. Soit $F(z) = 0$ l'équation proposée qui devient $P + Q\sqrt{-1} = 0$ quand on fait $z = x + y\sqrt{-1}$. Soit μ le nombre de ses racines $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, etc., correspondantes à des points K, K', K'',.. situés dans l'intérieur d'un contour quelconque ABC, de sorte qu'on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$, pour chacun de ces points. Soit aussi Δ l'excès du nombre de fois où la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passe du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant sur le même contour passe du négatif au positif. Il s'agit de prouver qu'on a toujours $\Delta = 2\mu$, quel que soit μ.

Ce théorème a lieu d'abord si le nombre μ est zéro, c'est-à-dire si au dedans du contour ABC il n'y a aucun point pour lequel on ait à la fois $P = 0$ et $Q = 0$; car alors on a aussi $\Delta = 0$, d'après notre proposition 4e. Supposons que le nombre μ des racines ren-

fermées dans le contour ABC ne soit pas nul; $F(z)$ est alors divisible par le produit des μ facteurs $z-a-b\sqrt{-1}$, $z-a'-b'\sqrt{-1}$, etc., (parmi lesquels il peut s'en trouver d'égaux). En désignant le quotient par $\varphi(z)$, on a donc

$$F(z)=(z-a-b\sqrt{-1})(z-a'-b'\sqrt{-1})(z-a''-b''\sqrt{-1})\ldots\times\varphi(z).$$

En remplaçant z par $x+y\sqrt{-1}$, $F(z)$ devient $P+Q\sqrt{-1}$, le produit des μ facteurs $z-a-b\sqrt{-1}$, $z-a'-b'\sqrt{-1}$, etc., devient une quantité de la forme $p+q\sqrt{-1}$, $\varphi(z)$ devient aussi $p'+q'\sqrt{-1}$; et l'on a $P+Q\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(p'+q'\sqrt{-1})$.

Supposons comme précédemment que le point mobile M dont les coordonnées sont x, y parcoure le contour ABC (dans le sens ABC).

La fonction $\varphi(z)$ ou $p'+q'\sqrt{-1}$ n'est nulle pour aucun point situé dans l'intérieur du contour ABC; donc d'après notre 4e proposition, en parcourant le contour ABC, on aura $\delta'=0$ pour la quantité $\frac{p'}{q'}$. D'après la 3e proposition, pour $\frac{p}{q}$ on aura $\delta=2\mu$. Donc pour $\frac{P}{Q}$ on aura d'après la 2e proposition $\Delta=\delta+\delta'=2\mu$. Ainsi le théorème est complétement démontré.

Il importe d'observer que cette démonstration s'applique non-seulement à une fonction entière de z qu'on égale à zéro, mais encore à toute fonction $F(z)$ qui devenant nulle pour différentes valeurs de z de la forme $a+b\sqrt{-1}$, donne toujours, étant divisée par $z-a-b\sqrt{-1}$ ou par une certaine puissance entière de ce facteur, un quotient qui ne devient ni nul ni infini pour cette valeur de z. Nous pourrions aussi modifier la forme de cette dernière démonstration, en faisant voir à l'aide de nos lemmes, que le théorème énoncé doit être vrai pour une équation qui a μ racines renfermées dans le contour ABC, s'il est vrai pour une équation qui n'en a que $\mu-1$, après avoir prouvé comme nous l'avons fait dans la 4e proposition, qu'il a lieu quand $\mu=0$.

On peut en déduire qu'une équation algébrique d'un degré quelconque a toujours autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré.

Supposons que l'équation $F(z)=0$ soit algébrique du $m^{ième}$ degré,

elle sera de la forme suivante :

$$z^m + A_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)z^{m-1} + \ldots\ldots + A_m(\cos\alpha_m + \sqrt{-1}\sin\alpha_m) = 0 \quad (3)$$

je dis qu'elle aura m racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Faisons $z = x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$; r est ici la distance du point M (x,y) à l'origine O et t l'angle que cette droite OM fait avec l'axe des x. En désignant par $P + Q\sqrt{-1}$ ce que devient $F(z)$, on trouve $P + Q\sqrt{-1}$ égal à

$$\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt \text{ multiplié par}$$

$$r^m + A_1 r^{m-1}(\cos\overline{\alpha_1 - t} + \sqrt{-1}\sin\overline{\alpha_1 - t}) + A_2 r^{m-2}(\cos\overline{\alpha_2 - 2t} + \sqrt{-1}\sin\overline{\alpha_2 - 2t}) + \text{etc.}$$

Désignons par $p + q\sqrt{-1}$ le premier facteur $\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt$ et par $p' + q'\sqrt{-1}$ le second facteur $r^m +$ etc.

On peut tracer autour de l'origine O un contour assez grand pour que la partie réelle p' de ce second facteur soit constamment positive pour tous les points situés sur ce contour ou au dehors. Car cette partie réelle p' est $r^m + A_1 r^{m-1}\cos\overline{\alpha_1 - t} + A_2 r^{m-2}\cos\overline{\alpha_2 - 2t} +$ etc. ; et l'on voit qu'elle sera positive, si la distance r de l'origine à un point quelconque M du contour ABC est égale ou supérieure au plus grand des modules A_1, A_2.. A_m augmenté de l'unité. En admettant que cette condition soit remplie, la fonction p' sera *à fortiori* positive pour tous les points situés hors de ce contour.

Le facteur $p' + q'\sqrt{-1}$ ne pourra donc être nul pour aucun point situé sur le contour ABC ou au dehors ; d'ailleurs le premier facteur $p + q\sqrt{-1}$ ou $\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt$ n'est nul pour aucun point du plan xOy; donc $P + Q\sqrt{-1}$ qui est le produit de ces deux facteurs, ne peut être nul pour aucun point situé sur le contour ABC ou au dehors. Ainsi toutes les racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$ que peut avoir l'équation proposée $F(z) = 0$ ou $P + Q\sqrt{-1} = 0$ répondent à des points situés dans l'intérieur de ce contour, et d'après le théorème général le nombre total de ces racines est égal à la moitié du nombre Δ qui exprime combien de fois la quantité $\frac{P}{Q}$

en s'évanouissant sur ce contour ABC passe du positif au négatif de plus que du négatif au positif.

Comme on a $P+Q\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(p'+q'\sqrt{-1})$ le nombre Δ est d'après notre 2e proposition la somme des deux nombres analogues δ, δ' relatifs aux quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$. Mais pour $\frac{p'}{q'}$ on a $\delta'=0$, puisque p' est positive pour tous les points du contour ABC. Je dis que pour $\frac{p}{q}$ on a $\delta=2m$. En effet, $\frac{p}{q}$ n'est autre chose que cot mt. Or, l'arc t ayant une valeur déterminée α au moment où le point M qui se meut sur le contour ABC part du point A, devient égal à $\alpha+2\pi$ quand ce point revient en A, de sorte que mt devient égal à $m\alpha+2m\pi$; d'où l'on conclut que cot mt passe en s'évanouissant du positif au négatif $2m$ fois de plus que du négatif au positif, ainsi pour $\frac{p}{q}$ l'on a bien $\delta=2m$.

Puisque la valeur de Δ relative à $\frac{P}{Q}$ est égale à $\delta+\delta'$ et qu'on vient de trouver $\delta'=0$ et $\delta=2m$, on en conclut $\Delta=2m$. Donc le nombre total des racines de l'équation algébrique $F(z)=0$ est égal à son degré m, puisqu'il doit être égal à la moitié de Δ.

Le raisonnement que je viens d'employer pour déduire du théorème de M. Cauchy la proposition que toute équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré a m racines, peut encore servir à prouver autrement que dans les nos 5 et 6 de l'article précédent, que si l'on trace un contour suffisamment petit autour d'un point K correspondant à une racine simple d'une équation quelconque $F(z)=0$, ou à une racine multiple de l'ordre n, on trouvera, en parcourant ce petit contour, $\Delta=2$ ou $\Delta=2n$, c'est-à-dire que la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant sur ce contour passera du positif au négatif 2 fois ou $2n$ fois de plus que du négatif au positif. D'un autre côté il a été prouvé dans notre 4e proposition et aussi dans l'article précédent qu'on a toujours $\Delta=0$ pour un contour qui ne renferme pas de racines. Cela posé, si l'on considère un contour quelconque qui renferme un certain nombre de racines, on peut le partager en plusieurs contours dont

les uns très petits ne renferment qu'une seule racine (simple ou multiple) et les autres n'en contiennent pas, et l'on fera voir comme dans l'article précédent, n°s 7 et 8 que le théorème de M. Cauchy ayant lieu pour chacun de ces contours partiels de l'une et de l'autre espèce, a lieu aussi pour le contour donné formé de leur réunion. Je n'insisterai pas davantage sur cette nouvelle démonstration du théorème, qu'il suffit d'avoir indiquée.

La proposition suivante mérite encore d'être remarquée. Soit $F(z) = 0$ une équation (algébrique ou non algébrique) qui devient $P + Q\sqrt{-1} = 0$ quand on fait $z = x + y\sqrt{-1}$ et qui a un certain nombre μ de racines renfermées dans l'intérieur du contour ABC, n'en ayant aucune sur ce contour même. Soit $f(z) = 0$ une autre équation qui devient $p + q\sqrt{-1} = 0$ en faisant $z = x + y\sqrt{-1}$ et qui a ν racines au dedans du même contour. On suppose qu'aucune des quantités P, Q, p, q ne peut devenir infinie pour des valeurs finies de x et de y. Si l'on divise $P + Q\sqrt{-1}$ par $p + q\sqrt{-1}$, on aura un quotient de la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, dans lequel les quantités p' et q' auront toujours des valeurs finies pour tous les points du contour ABC. Je dis qu'en parcourant le contour ABC, la quantité $\frac{p'}{q'}$ passera en s'évanouissant du positif au négatif $2(\mu - \nu)$ fois de plus que du négatif au positif, ou qu'on aura $\delta' = 2(\mu - \nu)$ pour $\frac{p'}{q'}$.

En effet on a d'après le théorème $\Delta = 2\mu$ pour $\frac{P}{Q}$, $\delta = 2\nu$ pour $\frac{p}{q}$ et d'après notre 2e proposition on a aussi $\Delta = \delta + \delta'$. De là résulte $\delta' = 2(\mu - \nu)$.

Donc quand on connaîtra δ' et l'un des deux nombres de racines μ, ν, on connaîtra l'autre. En particulier on aura $\delta' = 0$, si les deux équations $F(z) = 0$ et $f(z) = 0$ ont le même nombre de racines dans l'intérieur du contour ABC; et réciproquement.

La recherche du nombre des racines d'une équation $F(z) = 0$ contenues dans un contour donné étant réduite à trouver l'excès Δ pour ce contour, nous allons maintenant donner les moyens de déterminer ce nombre Δ, lorsque l'équation $F(z) = 0$ est algébrique.

Supposons que le contour ABC soit composé de plusieurs portions de lignes AB, BC, etc. Il faudra déterminer en parcourant successivement chacune de ces portions de lignes AB, BC, ... l'excès (positif, négatif ou zéro) du nombre de fois où la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif. Le nombre Δ sera égal à la somme de tous ces excès partiels relatifs aux différentes portions du contour ABC. Il suffit donc de considérer l'une de ces portions AB. On peut trouver l'excès qui s'y rapporte, lorsque les coordonnées x et y d'un point quelconque de cette ligne AB peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles d'une certaine variable s. On emploie à cet effet une méthode semblable à celle que j'ai donnée dans mon théorème pour la détermination du nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux limites quelconques.

P et Q devenant sur la ligne AB deux fonctions rationnelles de la variable s, leur quotient $\frac{P}{Q}$ prendra la forme d'une fraction $\frac{V}{V_1}$ dans laquelle V et V_1 seront deux fonctions entières de s. On fera sur ces deux polynomes V et V_1 l'opération nécessaire pour trouver leur plus grand commun diviseur, en ayant soin de changer les signes de tous les termes de chaque reste avant de le prendre pour diviseur du reste précédent. Ainsi en supposant que le degré de V par rapport à s soit supérieur ou égal à celui de V_1, on divisera V par V_1 jusqu'à ce qu'on arrive à un reste d'un degré inférieur à celui de V_1. On changera les signes de tous les termes de ce reste, et en le désignant après ce changement de signes par V_2, on divisera V_1 par V_2; on arrivera à un nouveau reste $-V_3$. On divisera de même V_2 par V_3, et en continuant ainsi on arrivera enfin à un dernier reste V_r indépendant de s ou qui contenant s divisera exactement le reste précédent V_{r-1}.

Si l'on parcourt la ligne AB (dans le sens ABC), s aura d'abord pour le point de départ A une certaine valeur α; s variera ensuite par degrés insensibles et finira par avoir pour le point B une valeur β plus grande ou plus petite que α. (s peut dans ses variations tantôt croître, tantôt décroître, et même ne pas rester comprise

entre les valeurs α et β relatives aux deux points extrêmes A et B.)

Cela posé, l'excès ε du nombre de fois où la quantité $\frac{V}{V_r}$ ou $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points de la ligne AB passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera en s'évanouissant du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des variations qui se trouveront dans la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2 \ldots V_r$ pour $s = \beta$ sur le nombre de leurs variations pour $s = \alpha$.

Cette proposition résulte des considérations suivantes: tandis que s varie depuis α jusqu'à β, la suite des signes des fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ pour chaque valeur de s ne peut s'altérer qu'autant qu'une de ces fonctions change de signe et par conséquent devient nulle. Quand c'est une des fonctions intermédiaires entre V et V_r qui s'annulle, on prouve aisément (comme dans la démonstration du théorème relatif aux racines réelles) que le nombre des variations dans la suite des signes de toutes les fonctions demeure le même, et quand s en croissant ou décroissant, atteint et dépasse une valeur qui annulle V, la suite des signes gagne ou perd une variation ou conserve le même nombre de variations selon qu'alors $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, ou du négatif au positif ou ne change pas de signe; cela est vrai, lors même que V et V_1 ont un plus grand diviseur commun V_r qui s'annulle pour la valeur de s que l'on considère, auquel cas toutes les fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ s'annullent en même temps. On conclut de là la proposition énoncée qui a lieu soit que V et V_1 aient ou n'aient pas de diviseur commun (*).

Si l'on trouve un plus grand commun diviseur V_r entre V et V_1, il pourra se faire qu'on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$, pour une valeur de s qui annullera ce plus grand commun diviseur et qui

(*) Les recherches qui m'ont conduit à mon théorème sur la détermination des racines réelles des équations m'avaient aussi fait rencontrer cette dernière proposition parmi plusieurs autres. Mais comme je n'en voyais pas alors l'utilité, je ne l'ai pas énoncée dans l'analyse de mon mémoire insérée au *Bulletin des Sciences* de juin 1829. J'en ai fait mention depuis dans le n° 20 du mémoire imprimé dans le *Recueil des Savans étrangers;* elle admet d'ailleurs les simplifications exposées dans ce mémoire.

répondra à un point situé sur la ligne AB entre A et B. Dans ce cas, P et Q étant nulles à la fois pour ce point-là, en substituant ses coordonnées dans la formule $x+y\sqrt{-1}$, on aura une racine simple ou multiple de l'équation $F(z)=0$. Si le plus grand commun diviseur entre V et V_1 ne devient nul pour aucun point de la ligne AB situé entre A et B, ou si l'on ne trouve pas de plus grand commun diviseur, on sera certain, pourvu qu'on n'ait supprimé d'avance aucun facteur commun à P et à Q, qu'il n'existe sur la ligne AB aucun point correspondant à une racine de l'équation $F(z)=0$. C'est en admettant cette hypothèse que nous avons démontré le théorème de M. Cauchy; les modifications qu'il faudrait y apporter dans le cas où il y aurait des racines sur le contour même ABC, exigeraient une discussion longue et minutieuse que nous avons voulu éviter en faisant abstraction de ce cas particulier.

Nous avons supposé le degré de V par rapport à s supérieur ou égal à celui de V_1. Si le degré de V est inférieur à celui de V_1, on cherchera encore le plus grand commun diviseur entre V et V_1 en divisant d'abord V_1 par V, puis V par le reste de la première division après avoir changé les signes de tous ses termes, et en continuant ainsi on formera cette suite de fonctions V_1, V, V_2, V_3, .. V_r. La différence qu'on obtiendra en retranchant le nombre des variations formées par leurs signes pour $s=\alpha$ du nombre des variations pour $s=\beta$, exprimera l'excès E du nombre de fois où la quantité $\frac{V_1}{V}$ en s'évanouissant sur la ligne AB passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif. Ce nombre E étant ainsi déterminé, l'excès cherché ε du nombre de fois où la quantité inverse $\frac{V}{V_1}$ en s'évanouissant sur la même ligne AB, passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif, sera égal à $-E$ ou à $-E+1$ ou à $-E-1$ selon que cette quantité $\frac{V}{V_1}$ aura des valeurs de même signe pour $s=\alpha$ et $s=\beta$, ou qu'elle sera positive pour $s=\alpha$ et négative pour $s=\beta$, ou qu'elle sera négative pour $s=\alpha$ et positive pour $s=\beta$.

En effet, la quantité $\frac{V}{V_1}$ peut changer de signe sur la ligne AB

en devenant tantôt nulle, tantôt infinie. L'excès i du nombre de fois où en devenant nulle ou infinie elle passe du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif est égal à la somme des deux nombres ε et E. D'un autre côté cet excès i est évidemment égal à zéro ou à $+1$ ou à -1, selon que $\frac{V}{V_1}$ a des valeurs de même signe pour $s=\alpha$ et $s=\beta$, ou que $\frac{V}{V_1}$ est positive pour $s=\alpha$ et négative pour $s=\beta$, ou qu'elle est négative pour $s=\alpha$ et positive pour $s=\beta$. Donc ε est bien égal à $-E$ dans le premier cas, à $-E+1$ dans le second et à $-E-1$ dans le troisième. Cette proposition a lieu, comme on voit, quand même V et V_1 ne seraient pas des fonctions entières de s.

On peut toujours rendre P et Q fonctions rationnelles d'une même variable s, lorsque la ligne AB est une droite, ou un cercle ou un arc de cercle.

Si la ligne AB est droite, il suffit de prendre pour s la distance d'un point quelconque de cette droite à un point fixe situé sur sa direction, ou bien encore on peut supposer que s n'est autre que x ou y. Si la droite AB est parallèle à l'axe des x, y est constante et il faut prendre $s=x$; si elle est parallèle à l'axe des y, x est constante et l'on prend $s=y$.

Si la ligne AB est un cercle ou un arc de cercle dont le rayon soit R et dont le centre ait pour coordonnées g et h, on fera $x=g+R\cos t$, $y=h+R\sin t$, et l'on prendra $s=\operatorname{tang}\frac{1}{2}t$; alors on aura $x=g+\frac{R(1-s^2)}{1+s^2}$, $y=h+\frac{2Rs}{1+s^2}$; et P, Q seront des fonctions rationnelles de cette nouvelle variable s, de sorte que $\frac{P}{Q}$ prendra la forme $\frac{V}{V_1}$, V et V_1 étant des fonctions entières de s.

Pour la pratique, ce qu'il y a de plus simple est de chercher par la méthode précédente les racines contenues dans des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes. On ne fait alors varier qu'une seule des coordonnées x, y dans P et Q qui sont des fonctions entières de x et y. On abrégera le calcul en supposant d'abord les deux côtés du rectangle qui sont parallèles à l'un des axes situés à des distances infinies de cet axe. Car alors en parcourant ces côtés-là pour lesquels on aura y ou $x=-\infty$ et $=+\infty$, la quantité $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira pas ou s'évanouira une seule

fois, et l'on verra aisément si en s'évanouissant elle passe du positif au négatif ou du négatif au positif.

On peut ainsi déterminer approximativement les parties réelles x et les parties y des racines représentées par $x+y\sqrt{-1}$; on obtiendra ensuite des valeurs plus exactes de ces racines par les méthodes d'approximation usitées.

On peut encore dans la pratique faire usage de la proposition suivante dont on peut donner une démonstration semblable à la première du présent article. Soit une équation algébrique $F(z)=0$ de la forme (3) qui devient $P+Q\sqrt{-1}=0$ en faisant $z=x+y\sqrt{-1}$.

Si l'on donne à y dans P et Q une valeur déterminée h positive ou négative, et si l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des racines $x+y\sqrt{-1}$ de l'équation $F(z)=0$, pour lesquelles y est plus grande que h sur le nombre des autres racines pour lesquelles y est plus petite que h.

Le degré m de l'équation $F(z)=0$ étant pair, si l'on donne à x dans P et Q une valeur déterminée g et si l'on fait croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ passera du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des racines de l'équation $F(z)=0$ pour lesquelles la partie réelle x est plus petite que g sur le nombre des autres racines pour lesquelles x est plus grande que g.

Le degré m étant impair, si l'on fait toujours $x=g$ dans P et Q et si l'on fait croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où la quantité $-\frac{Q}{P}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif sera encore égal à l'excès du nombre des racines de $F(z)=0$ pour lesquelles x est plus petite que g sur le nombre des racines pour lesquelles x est plus grande que g.

THÉORIE NOUVELLE

Du Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe;

PAR M. ST.-GUILHEM,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

LEMME Ier. Si les droites oa_1, oa_2, oa_3, etc., représentent les composantes de la vitesse oa dont un point o est animé, je dis que si l'on fait tourner un corps solide d'un mouvement de rotation autour de l'axe oa, avec une vitesse angulaire égale à oa, on pourra considérer ce corps comme tournant à la fois d'un mouvement de rotation autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc., avec des vitesses angulaires respectivement égales à oa_1, oa_2, oa_3, etc.

Pour le démontrer, menons par le point o un plan perpendiculaire à oa; prenons dans ce plan un point m situé à l'unité de distance du point o; si nous supposons ce point doué d'une vitesse angulaire égale à oa autour de oa, le corps dont il s'agit étant un corps solide, il suffira de prouver que le point m satisfait aux conditions énoncées. Or, menons par le point m un plan perpendiculaire à om; projetons sur ce plan les droites oa, oa_1, oa_2, etc. et appelons ces projections p, p_1, p_2, etc. : puisque des droites parallèles se projettent toujours sur un plan suivant des droites parallèles, il est clair que la droite p représenterait en grandeur et en direction la résultante des vitesses p_1, p_2, p_3, etc., si le point m était doué de ces vitesses. Imaginons que les droites p, p_1, p_2, p_3, etc., formant un système solide, tournent autour du point m dans le plan perpendiculaire à om, jusqu'à ce que la droite p vienne coïncider en direction avec la vitesse du point m; elle coïnci-

dera aussi en grandeur avec cette vitesse, car la droite oa étant parallèle au plan de projection s'est projetée sur ce plan dans sa véritable grandeur. La vitesse angulaire du point m sera donc la résultante des vitesses p_1, p_2, p_3, etc., dans leur nouvelle position. Désignons par l_1, l_2, l_3, etc., les distances du point m aux axes respectifs oa_1, oa_2, oa_3, etc. On voit facilement par la manière dont nous avons obtenu les droites p_1, p_2, p_3, etc. que l'on a les relations

$$p_1 = \overline{oa_1}.l_1, \quad p_2 = \overline{oa_2}.l_2, \quad p_3 = \overline{oa_3}.l_3, \text{ etc.}$$

Mais les droites p_1, p_2, p_3, etc., dans leur nouvelle position, sont respectivement perpendiculaires aux axes $\overline{oa_1}$, $\overline{oa_2}$, $\overline{oa_3}$, etc., et distantes de ces axes des quantités l_1, l_2, l_3, etc.: donc le point m peut être considéré comme tournant à la fois d'un mouvement de rotation autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc. avec des vitesses angulaires égales à oa_1, oa_2, oa_3, etc.; donc, etc.

Observation. Le sens dans lequel le corps tourne autour des axes oa_1, oa_2, oa_3, etc., est déterminé par la condition que si l'on fait coïncider successivement les directions de ces axes, sans altérer le mouvement de rotation du corps autour de ces axes, avec l'axe primitif oa, le corps tournera autour de oa dans le sens où le corps tournait autour de cet axe.

Lemme 2. Si un corps solide en mouvement renferme un point fixe, on peut se représenter le mouvement du corps comme un mouvement de rotation autour d'un axe dont la position varie au commencement de chaque instant et reste fixe pendant cet instant.

En effet, soit o le point fixe; m un point quelconque du corps dont la vitesse ne soit pas nulle. Menons par le point m un plan perpendiculaire à la vitesse de ce point; il est facile de voir que tous les autres points du corps situés dans ce plan, auront une vitesse perpendiculaire à ce plan. En effet, soit m' un autre point du corps situé dans ce plan: puisque le point m' reste à une distance constante du point o, sa vitesse sera nécessairement perpendiculaire à om': elle sera aussi perpendiculaire à la droite mm', car cette droite faisant au bout d'un instant un angle infiniment petit avec sa première position (sans quoi il y aurait des points du corps, situés à une distance finie du point fixe,

qui auraient des vitesses infiniment grandes, ce qu'on ne suppose pas), le point m' se mouvra nécessairement comme le point m suivant une droite perpendiculaire à mm'; donc la vitesse du point m' est perpendiculaire à la fois aux deux droites om', mm'; donc elle est perpendiculaire à leur plan. Si l'on construit d'une manière semblable le plan correspondant à un autre point du corps non situé dans le premier plan, il est visible que l'intersection de ces deux plans devra être immobile, car autrement les vitesses des différents points seraient à la fois perpendiculaires aux deux plans, ce qui est absurde. Donc, etc.

L'axe immmobile autour duquel le corps tourne pendant un instant, à une époque quelconque, est l'axe *instantané* du corps à cette époque.

Nota. Les deux lemmes précédents sont relatifs à des propriétés purement géométriques des corps solides : nous n'avons voulu employer pour les établir que des considérations de pure géométrie.

Recherche des équations différentielles du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

J'appellerai force effective la force qui agissant dans la direction de la vitesse produirait dans le premier instant la variation qu'éprouve cette vitesse dans cet instant.

Lorsqu'un corps sera considéré comme tournant à la fois autour de plusieurs axes, je nommerai la force effective correspondante au mouvement de rotation qui est censé avoir lieu autour de l'un des axes, la force effective de rotation autour de cet axe.

Le corps solide que nous allons considérer ayant un point fixe, j'imaginerai que l'on ait mené par ce point trois axes rectangulaires ox, oy, oz, immobiles dans le corps, et pour simplifier les calculs, je supposerai que ces trois axes sont les trois axes principaux du corps relatifs au point fixe.

Je regarderai, comme positifs, les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps, 1°. autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives ; 2°. autour de l'axe oy, des z positives vers les x positives ; 3°. autour de l'axe oz, des x positives vers les y positives.

L'axe instantané aura sa direction positive déterminée de manière

qu'en faisant coïncider cette direction avec la direction positive de l'axe ox par exemple, le corps tournera des y positives vers les z positives; il est facile de voir que si l'on fait coïncider la direction positive de l'axe instantané avec la direction positive de l'axe oy ou de l'axe oz, le corps tournera des z positives vers les x positives ou des x positives vers les y positives.

Les vitesses angulaires du corps autour des axes ox, oy, oz s'obtiendront, pour une époque quelconque du mouvement, en prenant sur la direction positive de l'axe instantané une longueur égale à la vitesse angulaire du corps autour de cet axe et en projetant cette droite sur les trois axes ox, oy, oz; les projections représenteront, pour la grandeur et pour le signe, les vitesses angulaires du corps autour des trois axes. Si ces projections sont positives, les mouvements de rotation auront lieu, 1°. autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives; 2°. autour de l'axe oy, des z positives vers les x positives; 3°. autour de l'axe oz, des x positives vers les y positives. Si quelqu'une de ces projections est négative, le mouvement de rotation correspondant aura lieu en sens contraire.

Cela posé, appliquons à chaque point du corps une force égale et contraire à la force effective qui sollicite ce point; il est évident qu'en vertu des liaisons qui unissent invariablement les différents points du corps, il y aura équilibre entre les forces nouvellement appliquées, les forces centrifuges développées autour de l'axe instantané et les forces motrices. Donc la somme des moments des forces effectives par rapport à chacun des axes ox, oy, oz, est égale à la somme des moments des forces centrifuges, plus la somme des moments des forces motrices, par rapport au même axe.

Évaluons chacune de ces sommes. Soit m un point du corps dont la masse est m, ρ sa distance à l'axe instantané, ω la vitesse angulaire du corps autour de cet axe. La force effective qui sollicite la molécule m a pour expression $m\rho\,\frac{d\omega}{dt}$: elle peut, d'après notre premier lemme, être remplacée par les trois forces effectives de rotation $ma\frac{dp}{dt}$, $mb\frac{dq}{dt}$, $mc\frac{dr}{dt}$ autour des axes ox, oy, oz; a, b, c, désignant les distances du point m aux axes ox, oy, oz, et p, q, r les vitesses angulaires du

corps autour des mêmes axes, lorsque le corps est considéré comme tournant à la fois autour de ces trois axes.

Les moments de ces forces autour des axes ox, oy, oz sont respectivement $ma^2\frac{dp}{dt}$, $mb^2\frac{dq}{dt}$, $mc^2\frac{dr}{dt}$. Or, d'après une propriété facile à démontrer des axes principaux, les forces effectives de rotation autour de l'un des axes principaux se font équilibre autour de chacun des deux autres (*). Donc, la somme des moments des forces effectives, par rapport à chacun des trois axes principaux, est égale à la somme des moments des forces effectives de rotation autour de ces axes, par rapport aux mêmes axes. Donc, si l'on désigne par A, B, C les moments d'inertie du corps, par rapport aux trois axes principaux, les sommes des moments des forces effectives autour de ces axes seront respectivement $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$.

Passons à l'évaluation des moments U, V, W des forces centrifuges. Soient x, y, z, les coordonnées du point m, par rapport aux axes ox, oy, oz; h la distance de l'origine des axes au plan perpendiculaire à l'axe instantané, mené par le point m; la force centrifuge du point m sera évidemment égale à $m\omega^2\rho$. Cette force sera équivalente, à cause du point fixe, à la force $m\omega^2 h$ appliquée au point m, suivant une droite

(*) Considérons la force $mb\frac{dq}{dt}$; le moment de cette force autour de l'axe ox est, comme il est facile de le voir par une figure, $-mb\frac{dq}{dt}\cdot\frac{x}{b}\cdot y = -\frac{dq}{dt}\cdot mxy$. (Le signe — provient de ce que la force $mb\frac{dq}{dt}$ tendant par hypothèse à faire tourner le point m, qui est dans l'angle des coordonnées positives, des z positives vers les x positives, tendra à faire tourner ce point, autour de l'axe ox, des z positives vers les y positives; par conséquent son moment par rapport à l'axe des x sera négatif.) La somme des moments des forces effectives de rotation autour de l'axe des y, par rapport à l'axe des x, sera donc $-\frac{dq}{dt}\Sigma mxy$, d'où l'on voit que ces forces se feront équilibre autour de l'axe des x, si l'on a $\Sigma mxy = 0$, c'est-à-dire si l'axe des x est un axe principal du corps. En faisant les mêmes calculs pour tous les autres cas, on tirera toujours une conclusion semblable; donc, etc. Si les axes ox, oy, oz n'étaient pas les axes principaux du corps, ces mêmes calculs feraient connaître les moments des forces dont il s'agit.

parallèle à l'axe instantané. Cette dernière force fera avec les axes des angles dont les cosinus seront $\pm\frac{p}{\omega}$, $\pm\frac{q}{\omega}$, $\pm\frac{r}{\omega}$ (le signe $+$ ou le signe $-$ ayant lieu suivant que la force est parallèle à la direction positive ou négative de l'axe instantané). Les projections de cette force sur les axes ox, oy, oz seront donc $\pm m\omega ph$, $\pm m\omega qh$, $\pm m\omega rh$: par conséquent, les moments de la force $m\omega^2 h$ autour des axes ox, oy, oz, seront, soit que l'on adopte le signe supérieur ou le signe inférieur, $m\omega h(ry - qz)$, $m\omega h(pz - qx)$, $m\omega h(qx - py)$.

Remarquons d'ailleurs que le plan mené par le point m perpendiculairement à l'axe instantané a pour équation

$$h = \frac{p}{\omega}x + \frac{q}{\omega}y + \frac{r}{\omega}z :$$

en substituant pour h cette valeur dans les expressions précédentes et faisant la somme de tous les moments relatifs à chaque axe, on aura

$$\begin{aligned} U &= \Sigma m(ry - qz)(px + qy + rz), \\ V &= \Sigma m(pz - rx)(px + qy + rz), \\ W &= \Sigma m(qx - py)(px + qy + rz), \end{aligned}$$

ou simplement, en observant que l'on a $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mzx = 0$, $\Sigma mxy = 0$,

$$\begin{aligned} U &= rq(B - C), \\ V &= pr(C - A), \\ W &= qp(A - B). \end{aligned}$$

Il ne reste plus à évaluer que les moments des forces motrices données par rapport aux axes ox, oy, oz, ce qui ne peut présenter aucune difficulté, lorsqu'on connaît la grandeur et la position de ces forces par rapport à ces axes ; en désignant les trois sommes de moments de ces forces, par rapport à ces trois axes, par F, G, H, on aura définitivement les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= F + rq(B - C), \\ B\frac{dq}{dt} &= G + pr(C - A), \\ C\frac{dr}{dt} &= H + qp(A - B). \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ces équations feront connaître, à une époque quelconque, les vitesses angulaires du corps autour des trois axes principaux.

Pour compléter la solution du problème que nous nous sommes proposé, il reste à déterminer la position d'un des axes principaux à une époque quelconque. Pour cela (Planche I, fig. 1) du point o, comme centre avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère; soit ABC le cercle suivant lequel elle coupe un plan fixe dans l'espace; x, y, z les points où les axes principaux ox, oy, oz, viennent rencontrer la surface de cette sphère; A le point où le grand cercle xy vient rencontrer le cercle fixe ABC. Soit ψ la distance angulaire du point A à un point fixe D du cercle ABC; θ l'angle que l'arc Ax fait avec l'arc AD et ψ, l'arc Ax. Il est évident qu'au moyen des trois quantités ψ, θ et φ le point x sera parfaitement déterminé dans l'espace. Cherchons les variations qu'éprouvent les trois quantités ψ, θ et φ dans l'instant dt. D'après les principes du calcul infinitésimal, la variation de chacune de ces quantités sera égale à la somme des variations infiniment petites qu'elle éprouvera en faisant tourner le corps successivement autour des trois axes ox, oy, oz, avec les vitesses angulaires p, q, r.

Nous désignerons la variation d'une quelconque de ces quantités résultant de la rotation du corps autour de l'axe ox par la caractéristique d_1; autour de l'axe oy par d_2, autour de l'axe oz par d_3. D'après cette convention, on aura $d\psi = d_1\psi + d_2\psi + d_3\psi$, et ainsi des autres.

Supposons qu'en faisant tourner le corps autour de l'axe ox, des y positives vers les z positives, le cercle Ax ait pris la position ax; qu'en faisant tourner le corps autour de oy, des z positives vers les x positives, le cercle Ay ait pris la position $a'y$; enfin, qu'en faisant tourner le corps autour de oz, des x positives vers les y positives, le cercle Bz ait pris la position bz.

Abaissons des points a et a' des perpendiculaires sur l'arc Ax, prenons à partir du point A sur l'arc Ax, une longueur AN égale à 90°; abaissons du point N deux perpendiculaires, l'une sur le cercle ax, l'autre sur le cercle $a'y$.

Cela posé, rappelons-nous que dans un triangle rectiligne rectangle, un côté est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle op-

posé ou par le cosinus de l'angle adjacent et que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons. Nous trouverons facilement à l'aide de la figure, les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d_1\varphi &= d_1\psi \cos\theta, \\ d_2\varphi &= d_2\psi \cos\theta, \\ d_3\varphi &= rdt \\ 0 &= d_3\psi \cos\theta, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\psi \sin\theta &= pdt \,.\, \sin\varphi, \\ d_2\psi \sin\theta &= qdt \,.\, \cos\varphi, \\ d_3\psi \sin\theta &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\theta &= -\, pdt \,.\, \cos\varphi, \\ d_2\theta &= qdt \,.\, \sin\varphi, \\ d_3\theta &= 0; \end{aligned}\right\}$$

de ces équations on déduit immédiatement,

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= d\psi \cos\theta + rdt \\ d\psi \sin\theta &= pdt \sin\varphi + qdt \cos\varphi, \\ d\theta &= qdt \sin\varphi - pdt \,.\, \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Ces trois équations jointes aux équations (A) résolvent complétement le problème du mouvement d'un corps solide autour du point fixe.

Nota. En tirant des équations (B), les valeurs de pdt, qdt, rdt, on obtient facilement les équations que l'on donne ordinairement dans les traités de Mécanique.

NOTE

Relative à la détermination des plans principaux d'une surface du second degré rapportée à trois axes quelconques ;

PAR M. S^T GUILHEM,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy=Gx+Hy+Kz+T, \\ \text{ou, pour abréger,} \quad \Phi(x,y,z)=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

l'équation de la surface dont il s'agit. Menons par un point arbitraire $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ une droite dont l'unité de longueur projetée sur les axes des x, des y, des z, parallèlement aux plans des yz, zx, xy, ait pour projections sur ces axes les trois quantités a, b, c. Cette droite sera représentée par les trois équations

$$(2)\quad x=x_{,}+ar,\quad y=y_{,}+br,\quad z=z_{,}+cr,$$

r étant la distance du point $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ au point (x,y,z). Si l'on met pour x, y, z ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme.. $Pr^2+Qr+R=0$.

Pour avoir l'équation d'un plan diamétral qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la droite (2), il suffira évidemment de poser $Q=0$, ou bien

$$(3)\quad (2Aa+Ec+Fb)x_{,}+(2Bb+\ldots)y_{,}+(2Cc+\ldots)z_{,}+S=0,$$

en désignant par S le terme constant.

Pour que ce plan soit un plan principal, il faut qu'en décrivant de l'origine des coordonnées comme centre, avec un rayon égal à l'unité, une sphère, le plan diamétral de cette sphère, conjugué aux cordes parallèles à la droite (2), soit parallèle à ce plan. Désignons par α, β, γ les angles que les axes des z, des x et des y font respectivement avec les axes des y, des z et des x; l'équation de la sphère sera

$$(4)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma = 1, \\ \text{ou pour abréger, } \Psi(x, y, z) = 1; \end{cases}$$

l'équation du plan diamétral qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à la droite (2), sera

$$(5)\quad 2(a + c\cos\beta + b\cos\gamma)x_{,} + 2(b + \ldots)y_{,} + 2(c + \ldots)z_{,} = 0,$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan (3), il faut que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{2Aa + Ec + Fb}{2(a + c\cos\beta + b\cos\gamma)} = \frac{2Bb + \ldots.}{2(b + \ldots)} = \frac{2Cc + \ldots.}{2(c + \ldots)} = \lambda.$$

Désignons par L, M, N, P, Q, R les coefficients de x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy dans la fonction $\Phi(x, y, z) - \lambda\Psi(x, y, z)$, en ayant soin de réduire les trois derniers à la moitié de leur valeur. On aura évidemment les trois équations suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} La + Rb + Qc = 0, \\ Ra + Mb + Pc = 0, \\ Qa + Pb + Nc = 0. \end{cases}$$

Le terme constant étant égal à o dans ces trois équations, le dénominateur commun des valeurs de a, b, c doit aussi être égal à o; car ces valeurs ne peuvent pas être nulles toutes trois à la fois. Formant ce dénominateur, d'après la formule connue, nous aurons immédiatement

$$L(MN - P^2) + R(PQ - NR) + Q(PR - MQ) = 0,$$

ou bien,

$$(8)\quad LMN - LP^2 - MQ^2 - NR^2 + 2PQR = 0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à λ.

Ajoutons que ses trois racines sont toujours réelles. Pour le démontrer, prenons λ de manière que $MN - P^2 = 0$, c'est-à-dire de manière que $(B - \lambda)(C - \lambda) - (\frac{1}{2}D - \lambda \cos \alpha)^2 = 0$. Il est facile de voir que cette équation admettra deux racines réelles, l'une qui rendra M et N négatifs, l'autre qui les rendra positifs. En effet, si l'on prend successivement $\lambda = -\infty$, $\lambda = B$ ou $= C$, $\lambda = \infty$, on a nécessairement deux variations de signes; donc cette équation a deux racines réelles, l'une comprise entre l'infini négatif et la plus petite des deux quantités B et C, l'autre entre la plus grande de ces deux quantités et l'infini positif. Soient m et n ces deux racines : si on les substitue dans le premier membre de l'équation (8) mis sous la forme $-(MQ^2 + NR^2 + 2\sqrt{MN}.QR)$, elles donneront la première un résultat positif, la seconde un résultat négatif. Observons d'ailleurs que le terme dépendant de λ^3 dans le premier membre de l'équation (8), est le suivant :

$$-\lambda^3(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma),$$

et que la quantité comprise entre parenthèses dans ce terme est le quarré du volume d'un parallélépipède dont les arètes contiguës coïncideraient en direction avec les axes et seraient toutes trois égales à l'unité (Voyez *Géométrie* de Legendre, page 300). Donc si l'on fait successivement $\lambda = \infty$, $\lambda = m$, $\lambda = n$, $\lambda = -\infty$, on aura trois variations de signes. Donc l'équation (8) a ses trois racines réelles; à chaque valeur de λ il correspond une valeur de $\frac{a}{c}$ et de $\frac{b}{c}$; et comme c est alors donné par la formule

$$c^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1 + 2\frac{b}{c}\cos\alpha + 2\frac{a}{c}\cos\beta + 2\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cos\gamma\right) = 1,$$

on pourra toujours trouver pour chaque valeur de λ les valeurs des trois quantités a, b, c qui détermineront la direction d'un plan principal. La surface donnée aura donc trois plans principaux, lesquels seront nécessairement rectangulaires entre eux.

Menons par l'origine trois plans parallèles aux trois plans dont nous venons de déterminer la direction et rapportons la surface aux trois axes suivant lesquels ces trois plans se coupent; l'équation résultante

sera de la forme

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \text{une fonction linéaire de } x, y, z:$$

les trois quantités A′, B′, C′, sont faciles à déterminer, ou plutôt elles le sont déjà; en effet, désignons par a, b, c, les projections de l'unité de longueur du nouvel axe des x sur les anciens axes; par x' le nouvel x pour le distinguer de l'ancien : on aura

$$x = ax' + \ldots, \quad y = bx' + \ldots, \quad z = cx' + \ldots;$$

donc le coefficient de x^2 dans la transformée, sera

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dbc + Eca + Fab.$$

Or, observons que si l'on multiplie les deux termes du premier membre des équations (6) par a, les deux termes du deuxième membre par b, les deux termes du troisième par c, qu'on ajoute ensuite les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, cette dernière somme sera égale à 2, la première sera égale au double de la quantité précédente; d'où l'on conclura que la quantité précédente est égale à λ. Donc A′ est une des racines de l'équation (8). On ferait voir de même que B′, C′, sont deux racines de la même équation. Donc A′, B′, C′, sont les trois valeurs λ qu'on a déjà employées pour déterminer les directions des nouveaux axes.

Déterminons maintenant la position des trois plans principaux. Si la surface a un centre à une distance finie, les trois plans principaux passeront par ce point: en désignant par $2T'$ ce que devient $\varphi(x, y, z) + T$, lorsqu'on met pour x, y, z, les coordonnées du centre, l'équation de la surface rapportée à son centre et à ses axes principaux sera

$$\frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{A'}\right)^2}} \pm \frac{y^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{B}\right)^2}} \pm \frac{z^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{C'}\right)^2}} = 1:$$

on suppose qu'on a pris pour axe des x un des trois axes principaux qui rencontre la surface.

Si la surface a son centre à une distance infinie, l'équation (8) est satisfaite en faisant $\lambda = 0$; car si l'on fait $\lambda = 0$ dans les équations (7), ces équations coïncident, à une constante près, avec celles qui servent

à déterminer les coordonnées du centre. Donc le dénominateur commun de ces valeurs est égal à o. Donc l'équation (8) est satisfaite.

Supposons qu'on ait pris pour axe des x la droite pour laquelle on a $\lambda = 0$: cette droite ne rencontre la surface qu'en un seul point, car on a, dans cette hypothèse,

$$2Aa + Ec + Fb = 0, \quad 2Bb + \ldots = 0, \quad 2Cc + \ldots = 0;$$

par conséquent, la droite dont il s'agit est nécessairement représentée par les équations

$$2Ax + Ez + Fy = 0, \quad 2By + \ldots = 0, \quad 2Cz + \ldots = 0:$$

or l'intersection de cette droite avec la surface est la même que celle de cette droite avec le plan $\varphi(x, y, z) = 0$. L'équation de la surface se réduira donc dans ce cas à la forme

$$B'y^2 + C'z^2 = Gx + Hy + Kz + T,$$

laquelle pourra encore se transformer ainsi,

$$\frac{(y-\eta)^2}{2\left(\frac{G}{2B'}\right)} \pm \frac{(z-\zeta)^2}{2\left(\frac{G}{2C'}\right)} = x - \xi.$$

On suppose dans cette équation que le sens des x positifs a été choisi convenablement.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point (ξ, η, ζ), on aura l'équation

$$\frac{y^2}{2\left(\frac{G}{2B'}\right)} \pm \frac{z^2}{2\left(\frac{G}{2C'}\right)} = x,$$

qui est celle de la surface rapportée à son diamètre principal. Les deux plans des zx et des xy sont les seuls plans principaux de la surface; le troisième est à l'infini.

Examen du cas où la surface donnée est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{p'^2} + \frac{y^2}{q'^2} + \frac{z^2}{r'^2} = 1.$$

Si l'on fait $\lambda = 1$, l'équation (8), appliquée au cas actuel, devient

$$t^3 - (p'^2 + q'^2 + r'^2)t^2 + (q'^2 r'^2 \sin^2\alpha + r'^2 p'^2 \sin^2\beta + p'^2 q'^2 \sin^2\gamma)t$$
$$- p'^2 q'^2 r'^2 \mathrm{v}^2 = 0.$$

en posant

$$\mathrm{v} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}:$$

les trois racines de cette équation donneront visiblement les carrés des trois demi-axes principaux.

Cette équation montre en même temps que si un ellipsoïde est rapporté à trois diamètres conjugués quelconques, 1°. la somme des quarrés des demi-axes conjugués est constante; 2°. la somme des carrés des parallélogrammes construits sur les demi-axes conjugués pris deux à deux est constante; 3°. le carré du parallélépipède construit sur les demi-axes conjugués est constant.

On trouverait d'une manière semblable les relations analogues pour les hyperboloïdes.

Examen du cas où la surface donnée est représentée par une équation de la forme $\frac{y^2}{2q'} + \frac{z^2}{2r'} = x$.

J'appellerai les tangentes à la surface qui coïncident avec les axes des y et des z, les *tangentes conjuguées*, correspondantes au diamètre qui coïncide avec l'axe des x. J'appellerai $2q'$ et $2r'$ les paramètres conjugués du diamètre qui coïncide avec l'axe des x, relatifs aux tangentes qui coïncident avec les axes des y et des z. Si les axes sont rectangulaires, ces paramètres sont les paramètres principaux de la surface.

Cela posé, soit comme précédemment $\lambda = \frac{1}{t}$ l'équation (8) appliquée au cas actuel devient

$$t^2 - (2r' \sin^2\beta + 2q' \sin\gamma^2)t + 4p'q'\mathrm{v}^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation donneront les deux paramètres principaux de la surface.

Cette équation démontre en même temps les théorèmes suivants : Lorsqu'un paraboloïde elliptique est rapporté à l'un quelconque de ses diamètres et à deux tangentes conjuguées correspondantes, si l'on prend sur le diamètre à partir de l'origine une longueur égale à l'unité, sur chacune des deux tangentes correspondantes à ce diamètre une longueur égale à la racine quarrée du paramètre relatif à cette tangente, 1°. la somme des quarrés des parallélogrammes qui ont pour côté commun la longueur prise sur ce diamètre, et pour l'autre côté la longueur prise sur chacune des tangentes conjuguées, est constante; 2°. le quarré du volume ou simplement le volume du parallélépipède construit sur les longueurs qu'on a prises sur le diamètre et sur les tangentes conjuguées est constant (*).

On trouverait de la même manière, les relations analogues pour le paraboloïde hyperbolique. Ces relations n'avaient pas, je crois, encore été remarquées.

(*) Après avoir trouvé ces théorèmes par la méthode qui vient d'être indiquée, je me suis aperçu qu'on pouvait les déduire fort simplement des relations connues entre les diamètres principaux et les diamètres conjugués d'un ellipsoïde; en effet, soient a, b, c les trois diamètres principaux de l'ellipsoïde ; a', b', c' trois diamètres conjugués; α, β, γ les angles que les diamètres c', b', a' font respectivement avec les diamètres b', a', c' : on aura les trois relations suivantes

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2 \\ b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=b'^2c'^2\sin^2\alpha+c'^2a'^2\sin^2\beta+a'^2b'^2\sin^2\gamma \\ a^2b^2c^2=a'^2b'^2c'^2\mathrm{v}^2, \end{cases}$$

v^2 désignant le quarré du volume du parallélépipède dont les arètes contiguës coïncident en direction avec les diamètres a',b',c' et sont toutes trois égales à l'unité.

Divisons la première des équations (1) par a^2 ; la deuxième par a^3; la troisième par a^4. Faisons croître ensuite a, b, c, a', b', c' indéfiniment, mais de manière qu'à la limite $\frac{a}{a'}=1$, $\frac{b^2}{a}=q$, $\frac{c^2}{a}=r$, $\frac{b'^2}{a'}=q'$, $\frac{c'^2}{a'}=r'$: nous aurons les relations

$$\begin{gathered} 1=1, \\ q+r=q'\sin^2\gamma+r'\sin^2\beta, \\ qr=q'r'\mathrm{v}^2, \end{gathered}$$

lesquelles donnent lieu aux théorèmes énoncés dans le texte.

GÉOMÉTRIE.

Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions.— Géométrie de la Sphère. — Hyperboloïde à une nappe ;

PAR M. CHASLES (*).

Si l'on fait tourner autour de deux points fixes, dans un plan, deux droites rectangulaires, leur point d'intersection décrit une circonférence de cercle ; et si l'on prend sur la droite qui joint les deux points fixes, deux autres points qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers, les distances de chaque point de la circonférence du cercle à ces deux nouveaux points sont entre elles dans un rapport constant.

Nous nous proposons de démontrer les propriétés analogues, dans l'espace, à ces deux propriétés élémentaires du cercle ; lesquelles sont relatives à deux plans rectangulaires qui tournent autour de deux droites fixes, ou à deux arcs de grands cercles de la sphère qui tournent autour de deux points fixes en se coupant à angle droit.

(*) J'emploierai le plus souvent, dans les articles que M. le Rédacteur de ce *Journal* voudra bien accueillir, des considérations de Géométrie, de préférence à la voie du calcul. Quelquefois cette manière aura sur l'analyse l'avantage de la brièveté ; d'autres fois, ce sera le contraire. Dans ce second cas, je prie le lecteur de voir, dans mon travail, non point seulement quelques théorèmes nouveaux, ou peut-être déjà connus, qu'on démontrerait plus aisément d'une autre manière, mais un exercice sur la méthode purement géométrique, auquel je me serai livré par goût.

Supposons d'abord que les deux droites fixes soient situées dans un même plan. Si, autour de ces deux droites, on fait tourner deux plans rectangulaires, *la droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré qui passera par ces deux droites, et dont les sections circulaires seront dans des plans perpendiculaires à ces mêmes droites respectivement.*

En effet, quand deux plans sont rectangulaires, tout plan perpendiculaire à l'un d'eux les coupe suivant deux droites rectangulaires ; donc un plan transversal perpendiculaire à l'une des deux droites fixes coupe les deux plans mobiles suivant deux droites rectangulaires : or ces deux droites passent par les deux points fixes où le plan transversal coupe les deux droites fixes; leur point d'intersection engendre donc un cercle passant par ces deux points fixes, et sur lequel s'appuie la droite d'intersection des deux plans mobiles. Ce qui démontre le théorème.

Soient (Planche I, fig. 2) SO, SO′, les deux droites fixes, et soit OmO′ la section circulaire faite dans le cône par un plan transversal perpendiculaire à la première droite SO.

La droite OO′ est un diamètre du cercle. Nous supposons, pour nous représenter la figure, que le cercle est situé dans un plan vertical, et les deux droites SO, SO′, dans un plan horizontal.

Prenons les deux points D, D′, conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre OO′ $\left(\text{c'est-à-dire tels que l'on ait } \frac{DO}{DO'} = \frac{D'O}{D'O'}\right)$; et menons les deux droites SD, SD′; elles seront conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites fixes SO, SO′ (c'est-à-dire qu'on aura $\frac{\sin DSO}{\sin DSO'} = \frac{\sin D'SO}{\sin D'SO'}$). Je dis que *les distances de chaque point* m *de la circonférence du cercle, aux deux droites* SD, SD′, *seront entre elles dans un rapport constant.*

Ainsi soient mp, mp' les perpendiculaires abaissées du point m sur les droites SD, SD′; il faut prouver que l'on a $\frac{mp}{mp'} =$ constante.

On a $\quad mp = m\mathrm{D}.\sin m\mathrm{DS}, \quad mp' = m\mathrm{D}'.\sin m\mathrm{D}'\mathrm{S}$;

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{m\mathrm{D}}{m\mathrm{D}'} \cdot \frac{\sin m\mathrm{DS}}{\sin m\mathrm{D}'\mathrm{S}}.$$

Soient Oq, Oq' les perpendiculaires abaissées du point O sur les deux droites mD, mD'; ces deux perpendiculaires sont égales entre elles, car on

$$Oq = OD.\sin mDO, \quad Oq' = OD'.\sin mD'O; \quad \frac{Oq}{Oq'} = \frac{OD}{OD'} \cdot \frac{\sin mDO}{\sin mD'O}.$$

Or, dans le triangle DmD', on a

$$\frac{\sin mDO}{\sin mD'O} = \frac{mD'}{mD} = \text{constante} = \frac{OD'}{OD};$$

d'où $\quad OD.\sin mDO = OD'.\sin mD'O$; et, par suite, $Oq = Oq'$.

La droite OS étant perpendiculaire au plan du cercle, et les points q, q' étant les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les deux droites mD, mD' comprises dans ce plan, les droites Sq, Sq' sont les perpendiculaires abaissées du point S sur ces droites mD, mD'; et ces perpendiculaires sont égales, puisque $Oq = Oq'$.

On a dans le triangle SqD, rectangle en q, $\sin mDS = \frac{Sq}{SD}$. Pareillement, $\sin mD'S = \frac{Sq'}{SD}$, d'où, à cause de $Sq = Sq'$,

$$\frac{\sin mDS}{\sin mD'S} = \frac{SD'}{SD}.$$

Il vient donc

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{mD}{mD'} \cdot \frac{SD'}{SD}.$$

Le rapport $\frac{mD}{mD'}$ est constant, par la propriété connue du cercle; SD, SD' sont constantes; le rapport $\frac{mp}{mp'}$ est donc constant, quelle que soit la position du point m sur la circonférence du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Le rapport des sinus des angles que la droite Sm fait avec les deux droites SD, SD' est le même que celui des perpendiculaires mp, mp'; ce rapport des deux sinus est donc constant. On conclut donc, de ce que nous venons de démontrer, ce théorème :

Théorème I. *Si, autour de deux droites fixes situées dans un même plan, on fait tourner deux plans rectangulaires;*

1°. *La droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré;*

2°. *Les plans des sections circulaires de ce cône seront perpendiculaires aux deux droites fixes, respectivement;*

3°. *Si dans le plan de ces deux droites, et par leur point de rencontre, on mène deux autres droites qui soient conjuguées harmoniques par rapport aux deux premières, les sinus des angles que chaque arête du cône fera avec ces deux nouvelles droites seront entre eux dans une raison constante.*

Nous pourrions exprimer cette troisième partie du théorème, en disant que *les distances de chaque point de la surface du cône, aux deux nouvelles droites, sont entre elles dans un rapport constant.*

Quand on a un cône du second degré, si par son sommet on mène des droites perpendiculaires à ses plans tangents, ces droites forment un second cône qui est aussi du second degré, et qui jouit de cette propriété réciproque, que ses plans tangents sont perpendiculaires aux arètes du premier (*). Ces deux cônes sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre. Leur considération sert pour doubler les propriétés des cônes du second degré, de même que le triangle *réciproque*, ou supplémentaire, sur la sphère, sert pour doubler, ou dualiser, les propositions sphériques. Une propriété très importante de deux cônes supplémentaires, dont nous allons faire usage, c'est que *les lignes focales de l'un sont perpendiculaires respectivement aux plans des sections circulaires de l'autre* (**).

D'après cela, le théorème énoncé ci-dessus nous donne, par la considération du cône supplémentaire, le suivant :

Théorème II. *Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris pour le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans les deux plans fixes respectivement;*

(*) Nous avons donné la démonstration de cette proposition dans notre *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré.*

(**) *Voir* le Mémoire cité; page 13. Les lignes *focales* d'un cône du second degré sont deux droites qui jouissent de propriétés analogues à celles des foyers dans les coniques.

1°. *Le plan de cet angle droit enveloppera un cône du second degré ;*

2°. *Les lignes focales de ce cône seront perpendiculaires aux deux plans fixes, respectivement ;*

3°. *Si par la droite d'intersection de ces deux plans on mène deux autres plans fixes qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (*), *les sinus des angles que le plan de l'angle mobile fera avec ces deux nouveaux plans seront entre eux dans un rapport constant.*

En observant que, dans un angle trièdre, les sinus des angles plans sont entre eux comme les sinus des angles dièdres opposés, on voit qu'on pourrait donner à la troisième partie de chacun des deux théorèmes précédents un autre énoncé.

Les propriétés des cônes du second degré donnent toujours lieu à des propriétés correspondantes des *coniques sphériques*. On a appelé ainsi les courbes à double courbure qui résultent de l'intersection d'une sphère par un cône du second degré qui a son sommet au centre de la sphère. Ce sont des *lignes de courbure* du cône. Ces courbes ont des *foyers* qui sont les points où les droites *focales* du cône percent la sphère. Les plans menés par le sommet du cône, parallèlement aux plans de ses sections circulaires, coupent la sphère suivant deux grands cercles qui jouent, par rapport aux coniques sphériques, un rôle aussi important que celui de leurs foyers. Nous avons appelé ces arcs de grands cercles les *arcs cycliques* de la courbe (**), à cause de la dénomination de *plans cycliques* que nous avions adoptée pour les plans menés par le sommet d'un cône, parallèlement aux plans de ses sections circulaires. Les propriétés des arcs cycliques d'une conique sphérique sont nombreuses. Plusieurs sont analogues aux propriétés des asymptotes dans les coniques planes. Par exemple, le trian-

---

(*) Deux plans C, D, menés par l'intersection de deux premiers plans A, B, sont dits *conjugués harmoniques* par rapport à ceux-ci, quand on a $\frac{\sin \widehat{C, A}}{\sin \widehat{C, B}} = \frac{\sin \widehat{D, A}}{\sin \widehat{D, B}}$.

(**) *Mémoire de Géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques;* in-4°, 1831, Bachelier.

gle formé par les deux arcs cycliques et l'arc de grand cercle tangent à la conique en un quelconque de ses points, a sa surface constante.

Ces définitions étant admises, les deux théorèmes démontrés ci-dessus donnent les deux suivants :

Théorème III. *Étant pris sur la sphère deux points fixes, si autour de ces deux points on fait tourner deux arcs de grands cercles, faisant entre eux un angle droit ;*

1°. *Le point d'intersection de ces deux arcs décrira une conique sphérique ;*

2°. *Les arcs cycliques de cette courbe seront dans des plans perpendiculaires aux rayons de la sphère qui aboutissent aux deux points fixes ;*

3°. *Si, sur l'arc de grand cercle qui joint ces deux points, on prend deux autres points, qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (*), *le rapport des sinus des arcs menés de chaque point de la conique à ces deux nouveaux points, sera constant.*

Théorème IV. *Étant donnés sur la sphère deux arcs de grands cercles fixes, si l'on fait mouvoir un arc de grand cercle égal à un quadrant, de manière que ses deux extrémités glissent sur les deux arcs fixes ;*

1°. *Cet arc mobile enveloppera une conique sphérique ;*

2°. *Les foyers de cette courbe seront les pôles des deux arcs de grands cercles fixes ;*

3°. *Si, par le point d'intersection de ces deux arcs, on mène deux arcs de grands cercles, conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (**), *les sinus des inclinaisons du quadrant mobile sur ces*

(*) Deux points c, d, pris sur l'arc de grand cercle qui passe par deux points donnés a, b, sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux-ci, quand on a

$$\frac{\sin . ca}{\sin . cb} = \frac{\sin . da}{\sin . db}.$$

(**) Deux arcs de grands cercles C, D, menés par le point d'intersection de deux autres arcs de grands cercles A, B, sont conjugués harmoniques par rapport à ceux-ci, quand on a

$$\frac{\sin . \widehat{C, A}}{\sin . \widehat{C, B}} = \frac{\sin . \widehat{D, A}}{\sin . \widehat{D, B}}.$$

deux nouveaux arcs, seront entre eux dans un rapport constant.

Maintenant considérons deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et faisons tourner autour d'elles deux plans rectangulaires; la surface engendrée par leur droite d'intersection devient un hyperboloïde; et les analogies que nous avons trouvées, dans le théorème I, entre le cône et le cercle, se conservent dans cet hyperboloïde.

Voici le théorème qui les exprime :

THÉORÈME V. *Si, autour de deux droites fixes, situées d'une manière quelconque dans l'espace, on fait tourner deux plans rectangulaires,*

1°. *La droite d'intersection de ces deux plans engendrera un hyperboloïde à une nappe;*

2°. *Les plans des sections circulaires de cet hyperboloïde seront perpendiculaires aux deux droites respectivement;*

3°. *On pourra mener, d'une infinité de manières, deux autres droites dans l'espace, telles que les distances de chaque point de l'hyperboloïde à ces deux droites seront entre elles dans un rapport constant.*

En effet, concevons un plan transversal perpendiculaire à l'une des deux droites fixes, autour desquelles tournent les deux plans rectangulaires; il coupera ces deux plans suivant deux droites qui seront rectangulaires, comme dans le cas où les deux droites fixes sont situées dans un même plan. Donc la droite d'intersection des deux plans mobiles s'appuie sur la circonférence de cercle située dans le plan transversal, et qui a pour diamètre la droite qui joint les deux points où ce plan rencontre les deux droites fixes. Or, cette droite d'intersection des deux plans mobiles s'appuie sur les deux droites fixes. On conclut de là qu'elle engendre un hyperboloïde; car prenons trois positions de cette droite génératrice, et considérons-les comme les trois directrices d'un hyperboloïde; cet hyperboloïde passera par les deux droites fixes, puisque ces trois directrices s'appuient sur ces deux droites; de plus, cet hyperboloïde passera par la circonférence du cercle, parce qu'il passera par cinq points de cette courbe, qui sont ceux où les deux droites fixes et les trois positions de la droite mobile, prises pour directrices de l'hyperboloïde, s'appuient sur cette circonférence. Ainsi, cette circonférence est tout entière sur l'hyperboloïde. Il en résulte

que la droite d'intersection de deux plans rectangulaires quelconques, menés par les deux droites fixes, a trois points communs avec l'hyperboloïde; lesquels points sont situés sur la circonférence et sur les deux droites fixes; cette droite est donc tout entière sur l'hyperboloïde.

Ainsi, il est démontré que *quand deux plans rectangulaires tournent autour de deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, leur droite d'intersection engendre un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont dans des plans perpendiculaires aux deux droites respectivement.*

MM. Hachette et Binet, en démontrant par l'analyse la première partie de ce théorème (*Correspondance polytechnique*, t. II, p. 71), avaient bien remarqué que l'hyperboloïde n'était pas d'une construction générale, parce que son équation, rapportée à ses trois axes principaux ne contenait que deux constantes. Mais ces deux géomètres n'avaient pas recherché à quel fait géométrique répondait ce résultat de l'analyse. Notre démonstration montre que le caractère particulier de l'hyperboloïde consiste en ce que les plans de ses sections circulaires sont perpendiculaires respectivement à deux génératrices.

L'hyperboloïde jouit de cette autre propriété caractéristique, que chacun de ses points a ses distances à deux droites fixes dans un rapport constant; et il existe une infinité de systèmes de deux droites pour lesquelles cela a lieu; de sorte que le rapport étant donné, les deux droites pourront être déterminées.

Cette proposition est la troisième partie du théorème que nous avons énoncé; en voici la démonstration.

Soit OO′ la droite qui mesure la plus courte distance des deux droites OA, O′A′, autour desquelles on fait tourner les deux plans rectangulaires. Par cette droite OO′ menons le plan perpendiculaire à la droite OA; il coupera l'hyperboloïde suivant une circonférence de cercle OmO′, ainsi que nous l'avons démontré.

Soit μ un rapport donné; sur la droite OO′, et sur son prolongement, je prends deux points D, D′, tels que l'on ait $\frac{OD}{OD'} = \frac{O'D}{O'D'} = \mu$; et par ces deux points, respectivement, je mène deux droites DB, D′B′, perpendiculaires à la droite OO′, et telles que l'on ait

$$\frac{\sin(OA,\ DB)}{\sin(OA,\ D'B')} = \frac{\sin(O'A',\ DB)}{\sin(O'A',D'B')} = \mu\,(^*);$$

je dis que ces deux droites DB, D'B', jouiront de cette double propriété :

1°. Que le rapport des distances de chaque point m de la circonférence OmO', à ces deux droites, est constant et égal à $\frac{OD}{OD'} = \mu$;

2°. Que le rapport des distances de chaque point de l'une quelconque des deux droites OA, O'A', à ces deux mêmes droites DB, D'B', est aussi constant, et égal à μ.

En effet, la perpendiculaire abaissée du point m sur la droite DB est égale à mD.sin.mDB (Planche I, fig. 3); et la perpendiculaire abaissée du même point sur la droite D'B' est égale à mD'.sin.mD'B'. Le rapport de ces deux perpendiculaires est donc égal à

$$\frac{mD}{mD'} \cdot \frac{\sin.mDB}{\sin.mD'B'}.$$

Or, on a dans l'angle trièdre dont les trois arêtes sont DO, Dm, DB', et dont l'angle plan $\widehat{ODB}$ est droit, cos.mDB=sin.mDO.cos.(mDO,ODB).

Pareillement,

$$\cos.mD'B' = \sin.mD'O.\cos.(mD'O,\ OD'B').$$

Donc,
$$\frac{\cos.mDB}{\cos.mD'B'} = \frac{\sin.mDO}{\sin.mD'O} \cdot \frac{\cos.(mDO,\ ODB)}{\cos.(mD'O,\ OD'B')}.$$

On a
$$\frac{\sin.mDO}{\sin.mD'O} = \frac{mD'}{mD} = \text{const.} = \frac{OD'}{OD};$$

et
$$\frac{\cos.(mDO,\ ODB)}{\cos.(mD'O,\ OD'B')} = \frac{\sin(OA,\ DB)}{\sin(OA,\ D'B')} = \frac{OD}{OD'}.$$

(*) On voit que cela se réduit à prendre deux points D, D', tels que le rapport des distances de chacun des deux points O, O', à ces deux points, soit égal à μ; et quant à la direction des droites DB, D'B', qu'on mène par le point O une parallèle Oa' à O'A', et qu'on cherche deux droites, Ob, Ob', telles que le rapport des distances de chaque point de l'une quelconque des deux OA, Oa', à ces deux droites, soit égal à μ; les droites DB, D'B' devront être parallèles à Ob, Ob', respectivement.

Les deux points D, D', sont conjugués harmoniques par rapport aux deux O, O'; et les deux droites Ob, Ob', sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux OA, Oa'

Donc, $$\frac{\cos.mDB}{\cos.mD'B'} = 1.$$

Donc les angles mDB et $mD'B'$ sont égaux, et l'on a..... $\sin mDB = \sin mD'B'$; et par conséquent le rapport des perpendiculaires abaissées du point m sur les deux droites DB, DB', est simplement $\frac{mD}{mD'} = \frac{OD}{OD'} = \mu$. C. Q. F. P.

Maintenant il nous faut prouver que les distances d'un point quelconque a, de la droite OA, aux deux droites DB, D'B', sont encore entre elles dans le rapport $\frac{OD}{OD'}$.

Que d'un point a de OA on abaisse une perpendiculaire aq sur Db parallèle à OA, du point q une perpendiculaire qp sur DB; ap sera perpendiculaire sur DB; et l'on aura dans le triangle apq rectangle en q,

$$\overline{ap}^2 = \overline{aq}^2 + \overline{qp}^2 = \overline{aq}^2 + \overline{qD}^2 . \sin^2 . qDB.$$

Pareillement ap' étant la perpendiculaire abaissée du point a sur la seconde droite D'B', on aura

$$\overline{ap'}^2 = \overline{aq'}^2 + \overline{q'p'}^2 = \overline{aq'}^2 + \overline{q'D'}^2 \sin^2 . q'D'B'.$$

Or on a $$\frac{\sin . qDB}{\sin . q'D'B'} = \frac{OD}{OD'}; \quad aq = OD, \quad aq' = OD';$$

il vient donc

$$\overline{ap}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{aO}^2 . \sin^2 . qDB,$$

et $$\overline{ap'}^2 = \overline{OD'}^2 + \overline{aO}^2 . \frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2} . \sin^2 . qDB = \frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2}\left[\overline{OD}^2 + \overline{aO}^2 . \sin^2 . qDB\right];$$

$$\overline{ap'}^2 = \frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2} . \overline{ap}^2.$$

D'où $\frac{ap}{ap'} = \frac{OD}{OD'}$. C. Q. F. D.

Il résulte de là, sans qu'il soit besoin d'une nouvelle démonstration, que les distances d'un point quelconque de la seconde droite O'A', aux deux droites DB, D'B', sont aussi entre elles dans le rapport $\frac{OD}{OD'}$.

Ainsi il est prouvé que, si l'on demande le lieu géométrique d'un

point dont les distances aux deux droites DB, D'B' soient entre elles dans le rapport de OD à OD', ce lieu sera une surface qui passera par les deux droites OA, O'A', et par la circonférence de cercle OmO'. Or ce lieu sera évidemment une surface du second degré, parce que la formule de géométrie analytique qui donne le carré de la distance d'un point à une droite, contient les coordonnées de ce point au second degré; ce lieu sera donc un hyperboloïde à une nappe, passant par les deux droites OA, O'A', et par la circonférence de cercle OmO'. Mais il n'existe qu'un hyperboloïde qui satisfasse à cette double condition, c'est celui qui est engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant autour des deux droites OA, O'A'; donc cet hyperboloïde jouit de la propriété que les distances de chacun de ses points aux deux droites DB, D'B' sont entre elles dans un rapport constant.

Ainsi le théorème V est démontré.

On prouverait aisément que chaque point de la droite Oa', menée parallèlement à la droite O'A', a ses distances aux deux droites DB, D'B', dans le rapport μ; par conséquent cette droite est sur l'hyperboloïde. Pareillement la parallèle à la droite OA, menée par le point O', est sur l'hyperboloïde. On conclut de là que les plans tangents à l'hyperboloïde, aux points O, O', sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite OO'; ce qui prouve que ces points sont deux sommets de la surface.

Démonstration du Parallélogramme des Forces ;

PAR M. AIMÉ.

1er LEMME. Si deux forces égales sont appliquées au point o (Planche I, fig. 4), leur résultante, qui divisera leur angle en deux parties égales, sera d'autant plus petite que l'angle approchera plus de deux droits.

Considérons en effet les deux angles $P'oP''$ et PoP''', tels qu'ils soient divisés en deux parties égales par la droite AB, et que l'on ait $PoP''' < P'oP''$; si l'on applique quatre forces égales suivant les directions des côtés de ces angles et qu'on les représente par les lignes oP, oP', oP'', oP''', la résultante des deux forces oP, oP' sera dirigée suivant oR et celle des deux autres suivant oR'. Or, puisque l'angle RoR' est dirigé du côté de oA, la résultante totale tombera sur oA; ce qui prouve clairement que les deux forces oP, oP''' ont une résultante plus grande que celle des deux forces oP', oP''.

2e LEMME. Le rapport entre la résultante de deux forces égales et l'une des composantes est constant, quand l'angle des forces ne variant pas, on fait seulement varier la grandeur des forces.

Cela est évident dans le cas des forces commensurables. Supposons donc deux forces égales appliquées au point A (Planche I, fig. 5), représentées en grandeur par les lignes AC, AC', et incommensurables avec l'unité de force. Considérons deux forces AB, AB' égales et commensurables et supposons que dans ce cas on sache que leur résultante est représentée par $2Ao$, je dis que l'on pourra en conclure que la résultante de AC, AC' est représentée par $2Ao'$. Car si la résultante était représentée en grandeur par $2Ao''$, on pourrait prendre une unité de force assez petite pour qu'en la portant sur AC et AC' un même nombre de fois, on obtînt deux forces égales AD et AD', dont la nouvelle résultante $2Ao'''$ se trouvât comprise entre Ao'' et Ao'. On arriverait donc à une

absurdité, car la résultante des deux forces AD et AD′ ne peut être plus grande que celle des deux forces AC, AC′.

3ᵉ Lemme. Soient quatre forces égales P, P′, P″, P‴ (fig. 6) appliquées au point S; appelons α chacun des deux angles égaux PSP″ et P‴SP′; désignons par β l'angle P″SP‴. Alors l'angle PSP′ sera égal à $\beta + 2\alpha$. Divisons chaque angle α en deux parties égales par les droites SA, SA′; l'angle ASA′ sera $\beta + \alpha$. Divisons en deux parties égales l'angle β par la droite So. Cette construction étant effectuée, je veux établir que si pour trois quelconques des quatre angles α, β, $\beta + \alpha$, $\beta + 2\alpha$, la résultante de deux forces égales est représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent les forces, elle le sera aussi pour le quatrième.

En effet, menons PoP′, Ao'A′, P″o''P‴. Nous avons par construction $4So' = 2So + 2So''$; or, dans tous les cas, nous devons avoir la résultante des quatre forces P, P′, P″, P‴ égale à celle des deux résultantes de P, P″ et P′, P‴. Si donc le parallélogramme des forces est vrai par exemple pour les trois angles α, β, $\beta + \alpha$, il sera vrai pour $\beta + 2\alpha$. Car soit x la grandeur de la résultante pour l'angle $\beta + 2\alpha$: on aura $4So' = x + 2So''$, d'où l'on tire $x = 2So$. C. Q. F. D.

4ᵉ Lemme. Si la résultante de deux forces égales faisant entre elles un angle 2α est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent ces forces, la même chose aura lieu pour un angle moitié moindre α.

Pour le prouver, faisons $\beta = 0$ dans la figure 6 qui se change alors dans la figure 7. Je dis que 2SA représentera la résultante des deux forces égales P, P‴ comprenant entre elles un angle α. En effet, représentons par $2x$ la grandeur inconnue de cette résultante qui divise l'angle PSP″ en deux parties égales : $2x$ sera aussi la résultante des forces P′, P‴ : la résultante des forces $2x$ dirigées suivant SA, SA′, n'est autre chose que la résultante totale $4So'$; l'angle ASA′ est d'ailleurs égal à α comme l'angle PSP‴ : en vertu du 2ᵉ lemme, nous pouvons donc poser $\frac{4So'}{2x} = \frac{2x}{SP}$; et puisque l'on a $\frac{So'}{SA} = \frac{SA}{SP}$, il en résulte $x = SA$, C. Q. F. D.

Ces quatre lemmes étant établis, nous pouvons démontrer facilement le théorème suivant :

Théorème. Si deux forces P et P′ faisant entre elles un angle α,

sont appliquées à un même point, la résultante de ces deux forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent en grandeur et en direction les forces données.

Pour le démontrer, je vais distinguer deux cas : d'abord celui de deux forces égales ; ensuite celui de deux forces inégales.

1er *Cas*. Nous avons, établi dans le quatrième lemme, que si deux forces égales faisant un angle α déterminé, ont leur résultante représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les forces, pour un angle moitié moindre $\frac{\alpha}{2}$ la résultante sera aussi représentée par la nouvelle diagonale. Il en sera évidemment de même pour $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$...., et pour $\frac{\alpha}{2^m}$. Dans le troisième lemme, faisons $\beta = 0$, et nous verrons que si le théorème du parallélogramme des forces est vrai pour un angle α, il sera vrai pour 2α : faisons ensuite $\beta = \alpha$, et nous verrons qu'il est vrai pour 2α : faisons $\beta = 2\alpha$, et nous verrons qu'il est vrai pour 3α, puis enfin pour $n\alpha$. Ainsi le théorème sera vrai pour $\frac{n\alpha}{2^m}$, si l'on peut trouver pour α une certaine valeur différente de zéro qui satisfasse aux conditions du théorème. Or, dans le cas de trois forces égales situées dans un même plan et faisant entre elles des angles de 120°, le théorème a lieu évidemment. Donc il est généralement vrai pour un angle dont la valeur numérique peut se mettre sous la forme $\frac{n \times 120^\circ}{2^m}$. Je dis maintenant qu'il est encore vrai même pour un angle dont la valeur numérique ne serait pas réductible à cette forme. En effet, supposons que pour l'angle P″SP‴ (fig. 6), la résultante au lieu d'être 2S*o*″ soit plus petite et représentée par 2S*o*‴. Nous pourrons trouver un angle PSP′ de la forme $\frac{n \times 120^\circ}{2^m}$, et tel que sa résultante 2S*o* soit plus grande que 2S*o*‴ ; or d'après le 1er lemme, l'angle PSP′ étant plus ouvert que P″SP‴, il correspond à une résultante plus petite. Nous voyons donc que notre supposition nous conduit à une absurdité. On ferait voir de même que la résultante ne peut être plus grande que 2S*o*″. Donc elle lui est égale.

Nous avons dit que le théorème avait lieu évidemment pour l'angle de 120°: on peut faire voir *à priori*, qu'il a encore lieu pour une infinité d'angles. En effet, supposons les trois angles P''SP', PSP'', ASA' égaux chacun à 120° (fig. 7). Faisons tourner l'angle P''SP autour de SA, comme charnière, de manière que son plan devienne perpendiculaire à celui de la figure. Faisons tourner de même P'SP''' autour de SA'. Les deux forces P' et P'' feront alors un certain angle pour lequel je dis que le théorème a lieu. En effet, les résultantes de P', P'' et de P, P''' sont égales entre elles; de plus leur somme est égale à celle des deux forces 2SA, 2SA', où à 4S*o*'. Or, 2S*o*' est précisément la diagonale du parallélogramme construit sur P et P''' et aussi de celui construit sur P', P''. On pourrait répéter la même opération en se servant du nouvel angle PSP''' et l'on voit que l'on aurait une infinité d'angles différents avant d'arriver à un angle égal à deux droits.

2e *Cas*. Il reste à examiner le cas de deux forces inégales faisant entre elles un angle quelconque.

Représentons par BS et SA (fig. 8) la grandeur et la direction des deux forces données. Cherchons la résultante de ces deux forces. Pour la trouver, nous pouvons appliquer sur BS une autre force égale à BS, sur SA une autre force égale à SA.

Dans ce nouvel état, la résultante totale aura la direction et une grandeur double de la première résultante. Or je dis qu'on peut facilement trouver cette nouvelle force. En effet par SA, supposé plus petit que BS, nous pouvons mener un plan perpendiculaire à celui du triangle BSA, et construire sur la ligne CC' perpendiculaire à SA un triangle isoscèle dont les deux côtés soient égaux chacun à BS. Nous pourrons remplacer les deux forces SA par les nouvelles forces SC, SC'. Combinons maintenant BS avec SC: nous aurons une résultante égale à 2SD; de même BS et SC' nous donneront 2SD' égal à 2SD. Donc la résultante totale est égale à 4S*o*; donc dans le cas de deux forces quelconques faisant un angle aussi quelconque entre elles, la résultante est égale à la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés qui représentent les forces en grandeur et en direction.

Intégration de l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^m y}{dx^m} + \frac{Qd^n y}{dx^n} + \text{etc.} = V$,

dans laquelle on suppose p, q, m, n, *etc., des nombres entiers;* P, Q, *etc. des coefficients constans et* V *une fonction quelconque de la variable indépendante* x;

PAR A.-M. FAVRE-ROLLIN (*).

Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il y a dans le premier membre de l'équation proposée trois termes seulement: le lecteur verra sans peine que notre méthode reste la même quel que soit le nombre des termes de ce premier membre.

Soit donc l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^m y}{dx^m} + \frac{Qd^n y}{dx^n} = V.$ (1)

Je prends la différentielle à indice $\frac{p}{q}$ de chaque membre, et je trouve

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \frac{Pd^{m+\frac{p}{q}}y}{dx^{m+\frac{p}{q}}} + \frac{Qd^{n+\frac{p}{q}}y}{dx^{n+\frac{p}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}},$$

ce qui revient à

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n}\right)\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}. \qquad (2)$$

Substituant dans l'équation (2) la valeur de $d^{\frac{p}{q}}y$ tirée de l'équation (1), on a

(*) J'ai traité cette question et d'autres plus générales dans un Mémoire destiné au prochain cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. (J. LIOUVILLE.)

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}}+\left(\frac{Pd^m}{dx^m}+\frac{Qd^n y}{dx^n}\right)\left(V-P\frac{d^m y}{dx^m}-\frac{Qd^n y}{dx^n}\right)=\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}},$$

ou bien

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}}-\left(P^2\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}+2PQ\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}+Q^2\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)=\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}-\left(\frac{Pd^m}{dx^m}+\frac{Qd^n}{dx^n}\right)V,$$

équation que je mets sous la forme

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}}-\left(\frac{Pd^m y}{dx^m}+\frac{Qd^n y}{dx^n}\right)^2=\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}-\left(\frac{Pd^m}{dx^m}+\frac{Qd^n}{dx^n}\right)V, \qquad (3)$$

en observant que les exposants du développement de $\left(\frac{Pd^m y}{dx^m}+\frac{Qd^n y}{dx^n}\right)^2$, par rapport aux quantités $\frac{d^m y}{dx^m}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ devront porter sur les indices de différentiation, et non sur ces quantités elles-mêmes, et indiqueront combien de fois les indices m et n doivent être répétés et non combien de fois $\frac{d^m y}{dx^m}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ doivent être multipliés par eux-mêmes.

Traitant l'équation (3), comme on a traité l'équation (1), on arrivera facilement à la nouvelle équation

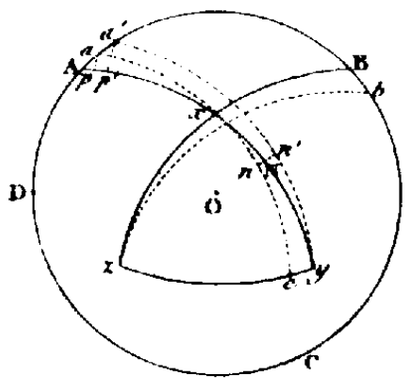
$$\frac{d^{\frac{3p}{q}}y}{dx^{\frac{3p}{q}}}+\left(\frac{Pd^m y}{dx^m}+\frac{Qd^n y}{dx^n}\right)^3=\frac{d^{\frac{2p}{q}}V}{dx^{\frac{2p}{q}}}-\left(\frac{Pd^m}{dx^m}+\frac{Qd^n}{dx^n}\right)\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}+\left(\frac{Pd^m}{dx^m}+\frac{Qd^n}{dx}\right)^2V.$$

En continuant ainsi l'on aura, si q est un nombre entier, l'équation finale

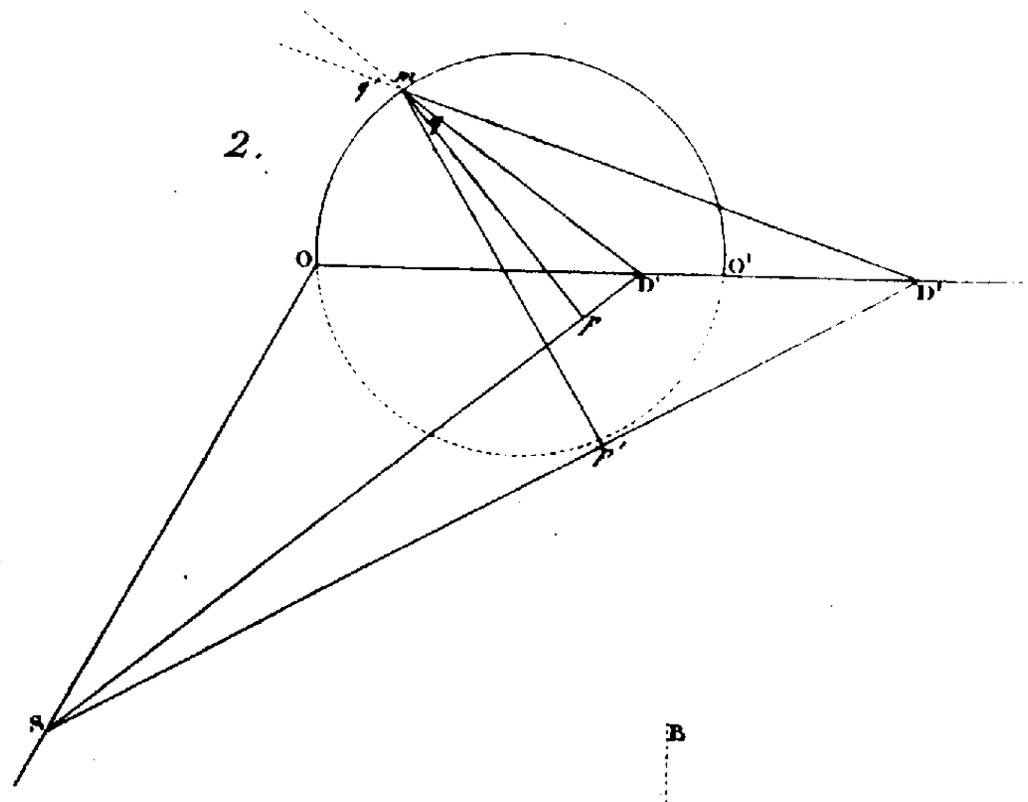
$$\frac{d^{q\cdot\frac{p}{q}}y}{x^{q\cdot\frac{p}{q}}}\pm\left(\frac{Pd^m y}{dx^m}+\frac{Qd^m y}{dx^n}\right)^q=\begin{cases}\dfrac{d^{(q-1)\frac{p}{q}}V}{dx^{(q-1)\frac{p}{q}}}-\left(\dfrac{Pd^m}{dx^m}+\dfrac{Qd^n}{dx^n}\right)\dfrac{d^{(q-2)\frac{p}{q}}V}{dx^{(q-2)\frac{p}{q}}}+\left(\dfrac{Pd^m}{dx^m}+\dfrac{Qd^n}{dx^n}\right)^2\dfrac{d^{(q-3)\frac{p}{q}}V}{dx^{(q-3)\frac{p}{q}}}+\ldots\\ \ldots\pm\left(\dfrac{Pd^m}{dx^m}+\dfrac{Qd^n}{dx^n}\right)^{q-1}V\end{cases}$$

facile à intégrer, puisque la variable y n'est plus affectée de différentielles à indices fractionnaires. (Le signe $+$ devra être pris si q est impair, et le signe $-$ devra l'être si q est pair.)

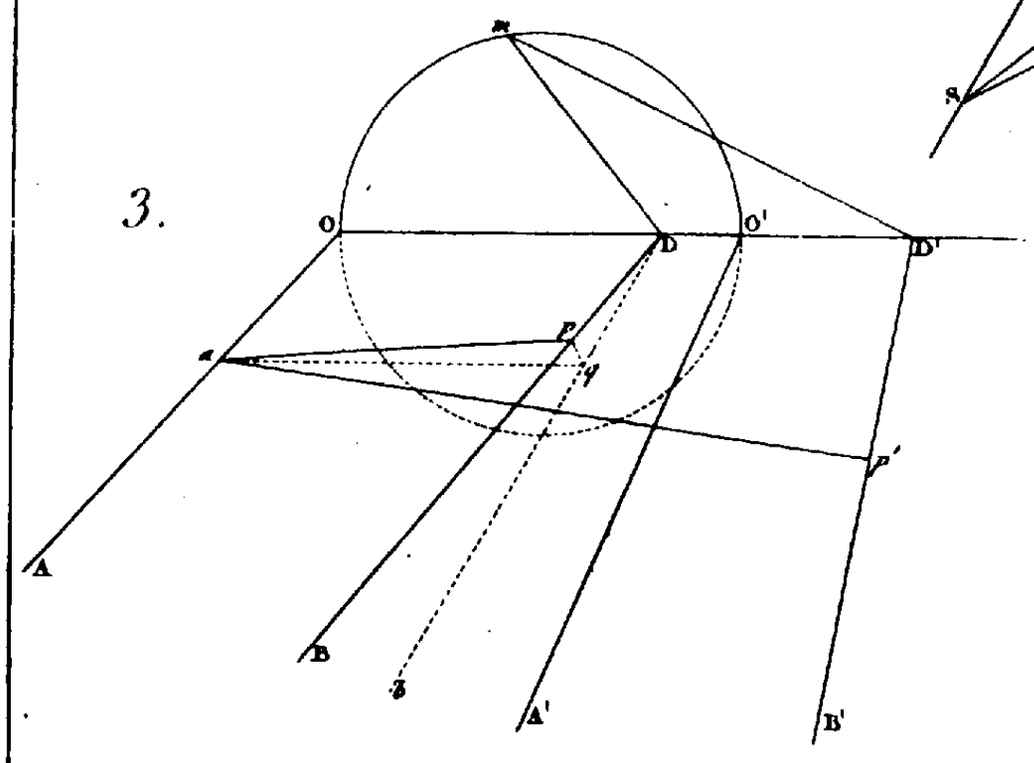
Fig. 1.



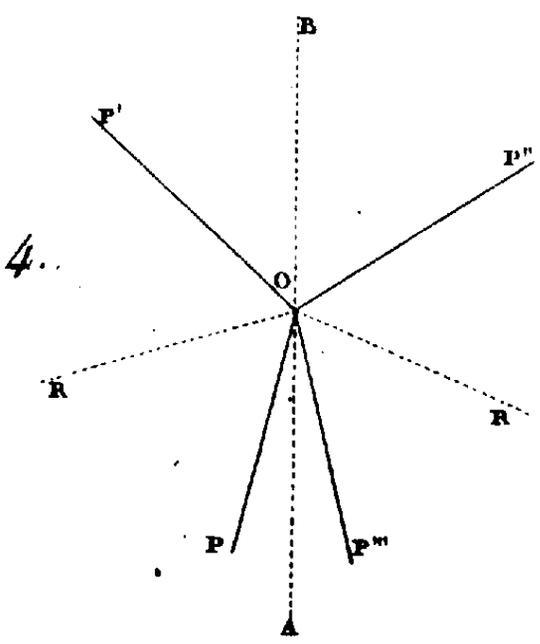
2.



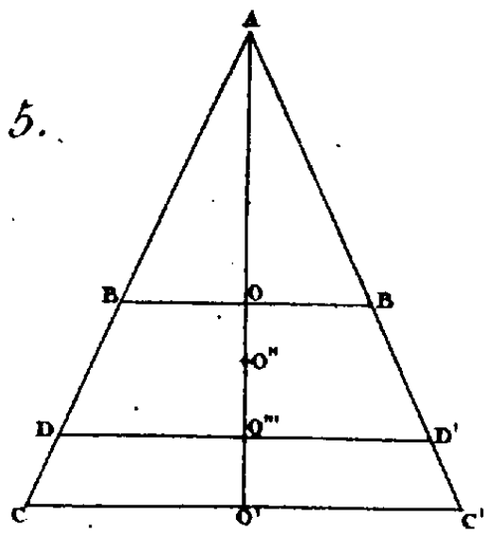
3.



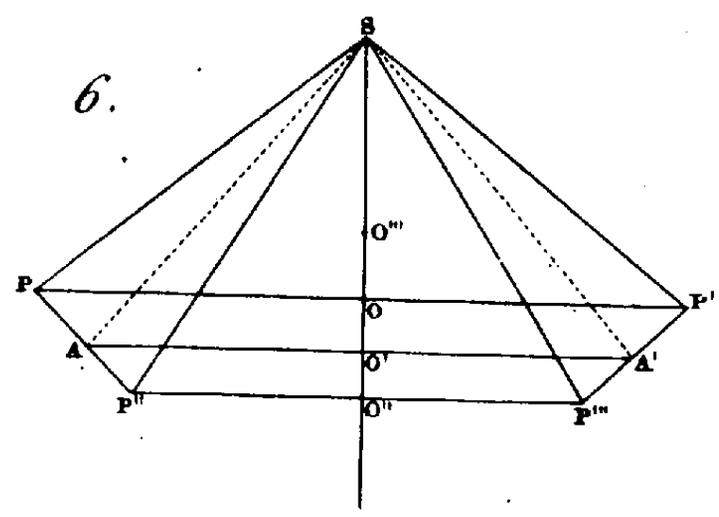
4.



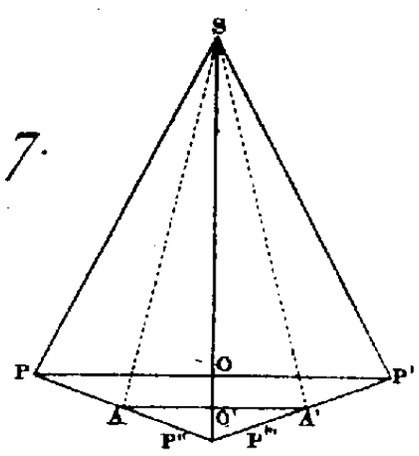
5.



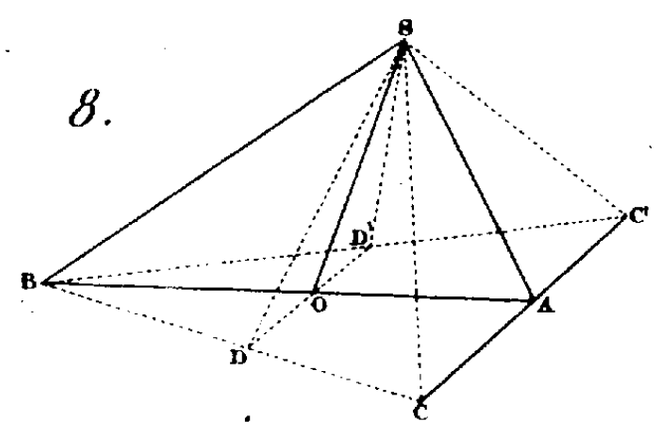
6.



7.



8.



NOTE

Sur la résolution des Équations numériques ;

PAR M. VINCENT (*).

1. Dans une note qui m'est commune avec M. *Bourdon*, et qui fait partie de la *sixième édition* de son *Algèbre*, il a été démontré que *Si dans une équation numérique rationnelle en* x *dépourvue de racines égales, on fait successivement, et conformément au procédé de Lagrange,*

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad x' = c + \frac{1}{x'''} \ldots\ldots,$$

on parvient toujours par la suite des transformations, et quels que soient d'ailleurs les nombres a, b, c... [supposés toutefois positifs et > 1], *à une équation transformée qui se trouve dans l'un de ces deux cas : ou de ne plus avoir que des permanences, ou de ne plus offrir qu'*UNE *variation ;* dans ce second cas, l'équation en x a une racine réelle positive représentée par la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}},$$

et n'en a qu'une seule de cette valeur; le premier cas, au contraire, arrive toutes les fois que l'équation n'a aucune racine susceptible de l'expression indiquée.

Non-seulement cette propriété des équations numériques, pro-

(*) Cette Note a déjà été publiée dans les *Mémoires de la Société royale de Lille* (année 1834) : dans l'intérêt des professeurs, nous avons cru devoir la réimprimer ici, avec quelques additions que l'auteur y a faites depuis. J. L.

priété exclusivement inhérente à la réduction de leurs racines réelles en fractions continues, est tout-à-fait suffisante, ainsi qu'on peut le voir, pour conduire à la séparation de ces racines, comme naturellement, c'est-à-dire sans que l'on soit obligé de déterminer *à priori* leur quotité ou de leur assigner des limites (*), et pourvu seulement qu'afin de s'épargner une infinité d'essais inutiles, on se laisse diriger dans le choix des nombres a, b, c,.... par le théorème de M. *Budan* (**);

(*) Qui ne connaît aujourd'hui le beau théorème découvert par M. *Sturm* sur les limites des racines?.... Bien que la méthode de résolution proposée dans ce qui va suivre, en soit absolument indépendante, toute complète et rigoureuse qu'elle nous paraisse, le théorème de M. *Sturm* n'en est pas moins d'une extrême importance à nos yeux, pour la facilité avec laquelle il permet de reconnaître *à priori* le nombre et les limites des racines réelles; et sous ce rapport il offrira toujours un puissant auxiliaire à toutes les méthodes de résolution, quelques avantages qu'elles puissent d'ailleurs présenter. Il ne faut pas perdre de vue, au surplus, que l'emploi du procédé de M. *Sturm* se trouve tout préparé par les opérations nécessaires à la séparation préalable des racines égales.

(**) Ce théorème peut être énoncé comme il suit :

Si, dans une équation en x *que nous représenterons par* $f(x)=0$, *on fait alternativement* $x=p+x'$, $x=q+x''$, p *et* q *étant deux nombres réels de signes quelconques, et tels que l'on ait* $p<q$ [c'est-à-dire que p soit le plus rapproché de l'infini négatif, et q le plus rapproché de l'infini positif] : — 1° *La transformée en* $x'=x-p$ *ne peut avoir moins de variations que la transformée en* $x''=x-q$; — 2° *le nombre des racines réelles de l'équation* $f(x)=0$, *comprises entre* p *et* q, *ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de la transformée en* $(x-p)$ *à la transformée en* $(x-q)$; — 3° *quand le premier nombre est moindre que le second, la différence est toujours un nombre pair.* — [Dans le cas particulier où l'un des nombres p, q, serait nul, la transformée correspondante devrait être remplacée par la proposée elle-même].

Fourier, qui était parvenu de son côté au même théorème, et qui en a donné, dans son *Analyse des équations*, ouvrage publié après sa mort par M. *Navier*, une démonstration différente de celle de M. *Budan*, l'énonce d'une autre manière qui revient à-peu-près à la suivante :

Si dans la suite des $(m+1)$ *fonctions* $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$..., $f^{(m)}(x)$, *on substitue alternativement à la place de* x *deux nombres réels quelconques* p, q [p *étant* $<q$], *et que l'on représente par* P, Q, *les deux suites de nombres résultant respectivement de ces substitutions :* — 1° *La suite* P *ne peut présenter moins de variations que la suite* Q; — 2° *le nombre des racines réelles de l'équation* $f(x)=0$,

mais en outre, la même propriété fournit un caractère au moyen duquel on peut reconnaître d'une manière certaine quand cette séparation est complétement effectuée. Pour ces deux raisons, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de reprendre ici la proposition énoncée, et de faire voir comment elle peut se déduire de la théorie des fonctions dérivées, indépendamment de l'*algorithme* particulier sur lequel reposait sa première démonstration.

Ensuite, m'appuyant sur la propriété citée et profitant des travaux de M. *Budan* et de ceux de *Fourier*, j'indiquerai, pour résoudre les équations, un procédé mixte qui, réunissant autant que possible, la rapidité de la méthode de *Newton* avec la sûreté de celle de *Lagrange*, me paraît offrir les avantages de l'une et de l'autre sans en avoir les inconvénients.

2. Supposons donc, pour démontrer la proposition énoncée ci-dessus (1), que l'on ait effectué les substitutions successives

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad x'' = c + \frac{1}{x'''} \ldots ;$$

soient $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$, deux réduites consécutives de la fraction continue qui

---

comprises entre p *et* q, *ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de l'hypothèse* x=p *à l'hypothèse* x=q ; —3° *quand le premier nombre est moindre que le second, la différence est toujours un nombre pair.*

Pour l'historique de ce théorème, ainsi que pour l'examen des avantages qu'il présente dans les applications et les points de vue sous lesquels il pouvait laisser quelque chose à désirer, nous renverrons aux *Leçons d'Algèbre* de M. *Lefébure de Fourcy*.

Il est surprenant que *Fourier* n'ait pas cherché, dans son ouvrage, à démontrer la proposition qui fait l'objet principal de la présente note, et qui seule, à ce qu'il nous semble, pouvait donner à sa méthode tout le degré de rigueur et de précision dont elle est susceptible. Il a bien, à la vérité, dans les *Mémoires de l'Institut* (année 1827), énoncé que la réduction en fractions continues devait toujours effectuer la distinction des racines réelles et des racines imaginaires; mais il n'a donné aucune preuve de cette assertion, et n'a pas non plus expliqué de quelle manière ce départ pouvait s'opérer. — [D'un autre côté, l'on croit qu'une proposition relative à cet objet se trouvait dans ses papiers. Il est à craindre que la nouvelle perte que les sciences viennent de faire dans la personne de M. Navier, ne nous prive de ce document qu'il eût été intéressant de posséder.]

résulte de ces transformations, et y le dénominateur complet de la fraction intégrante qui vient immédiatement après, de sorte que l'on ait

$$x = \frac{qy + p}{q'y + p'} :$$

l'équation transformée en y pourra alors être considérée comme le résultat de la substitution immédiate de cette valeur de x dans l'équation proposée en x; de même que réciproquement, en éliminant y entre cette transformée et la valeur precédente de x, on retomberait sur l'équation primitive.

Cela posé, considérons les facteurs réels du premier et du second degré de l'équation en x; examinons les facteurs en y qui leur correspondent respectivement dans l'équation en y; et par suite voyons quelle forme prendra cette dernière équation elle-même.

Soit d'abord un facteur réel du premier degré $(x - \alpha)$. Il en résultera

$$\frac{qy + p}{q'y + p'} = \alpha;$$

d'où

$$q'\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right) y + p'\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) = 0.$$

Or, pour que ce facteur du premier degré en y puisse avoir *une* variation [et, par conséquent, en introduire *au moins une* dans l'équation en y], il faut et il suffit que la racine α soit comprise entre les deux réduites consécutives $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$; et comme ces réduites, quelles que soient les fractions intégrantes successives avec lesquelles on les forme, tendent continuellement vers l'égalité puisque leurs différences consécutives vont sans cesse en diminuant, il s'ensuit qu'après un certain nombre de transformations, une seule des valeurs de x [supposées toutes inégales entr'elles], pourra rester comprise entre deux réduites consécutives, lesquelles représenteront alors des valeurs de plus en plus approchées de cette racine.

Soit maintenant un facteur réel du second degré, tel que

$$\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2)\right],$$

correspondant à un couple de racines imaginaires

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}.$$

Il en résultera

$$\frac{qy + p}{q'y + p'} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1};$$

ce qui donnera le facteur double du premier degré :

$$q'\left[\frac{q}{q'} - \left(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}\right)\right]y + p'\left[\frac{p}{p'} - \left(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}\right)\right],$$

et par suite le facteur réel du second degré :

$$\begin{aligned} & q'^2\left[\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right]y^2 \\ + 2q'p'&\left[\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) + \beta^2\right]y \\ & + p'^2\left[\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right]. \end{aligned}$$

Or, pour que ce facteur puisse introduire des variations dans l'équation en y, il faut nécessairement que l'on ait :

$$\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) + \beta^2 < 0;$$

ce qui exige *deux conditions* : la première, que α ou la partie réelle des deux racines, soit comprise entre les deux réduites consécutives $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$; la seconde, que le carré de β ou du coefficient de $\sqrt{-1}$ dans ces deux racines, soit inférieur à la valeur numérique du produit

$$\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right),$$

et à plus forte raison, que β soit $< \frac{1}{2p'q'}$, puisque les valeurs numériques des facteurs

$$\pm\left(\frac{p}{p'} - \alpha\right) \text{ et } \mp\left(\frac{q}{q'} - \alpha\right)$$

forment une somme égale à

$$\pm\left(\frac{p}{p'} - \frac{q}{q'}\right) \text{ ou à } \frac{1}{p'q'}.$$

La première de ces deux conditions pourrait bien être remplie indéfiniment, et alors la série des réduites convergerait vers un nombre égal à la quantité α; mais la seconde finira tôt ou tard par ne l'être plus, puisque, les dénominateurs des réduites croissant indéfiniment, la différence de deux réduites consécutives peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Il résulte de là, que par la suite des calculs, on parviendra toujours à une équation qui se trouvera dans l'un de ces deux cas: ou que *tous ses facteurs réels*, tant du premier degré que du second, seront *composés de termes entièrement positifs*; ou bien que ces facteurs seront *positifs à l'exception d'un seul* de la forme $(y-\varphi)$, φ étant un nombre positif et >1. Dans le premier cas, l'équation n'aura évidemment que des permanences; dans le second, on sait déjà qu'elle doit avoir un nombre *impair* de variations, et nous allons prouver que ce nombre impair finit toujours par se réduire à *un*. — (*Voyez* une *Addition* à la fin du cahier.

3. Pour cela, faisons un moment abstraction du facteur $(y-\varphi)$ et de tous ceux qui lui correspondaient dans les équations en $x, x', x''\ldots$; puis, dans le produit des autres facteurs de l'équation en x, produit que nous appellerons X et que nous supposerons du degré m, remplaçons x par

$$\frac{qy+p}{q'y+p'} = \frac{q}{q'} + \frac{pq'-qp'}{q'(q'y+p')} = \frac{q}{q'} \pm \frac{1}{q'(q'y+p')};$$

ou simplement faisons $x = k + u$, en posant, pour abréger,

$$\frac{q}{q'} = k \qquad \text{et} \qquad \frac{\pm 1}{q'(q'y+p')} = u.$$

Alors, en représentant par K, K', K''..... $K^{(m)}$, ce que deviennent respectivement le polynome X et ses dérivés successifs jusqu'à l'ordre m inclusivement quand on y fait $x+k$, nous aurons identiquement:

$$X = K + \frac{K'u}{1} + \frac{K''u^2}{1.2} + \frac{K'''u^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{K^{(m)}u^m}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

Or, la valeur de u peut se mettre sous la forme suivante:

$$u = \frac{\pm \frac{1}{q'^2}}{y + \frac{p'}{q'}} = \frac{i}{y+t},$$

en posant encore, pour abréger,

$$\frac{\pm 1}{q'^2} = i \qquad \text{et} \qquad \frac{p'}{q'} = t;$$

donc nous aurons pour le développement de X,

$$X = K + \frac{K'}{1} \cdot \frac{i}{y+t} + \frac{K''}{1.2} \cdot \frac{i^2}{(y+t)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{K^{(m)}}{1.2.3\ldots\ldots m} \cdot \frac{i^m}{(y+t)^m};$$

d'où résultera, après la multiplication par $(y+t)^m$, le polynome en y:

$$K(y+t)^m + \frac{K'i}{1}(y+t)^{m-1} + \frac{K''i^2}{1.2}(y+t)^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{K^{(m)}i^m}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

Maintenant, la fraction $i = \frac{\pm 1}{q'^2}$ qui entre dans ce polynome, diminue à mesure que le nombre des transformations se multiplie, et peut devenir, par la suite du calcul, moindre que toute quantité donnée; et comme d'ailleurs le coefficient K conserve toujours une valeur finie, attendu que par hypothèse l'équation primitive en x n'ayant pas de racines égales, la quantité k ne saurait être la valeur approchée d'aucune racine du polynome X, il s'ensuit que les polynomes transformés tendent sans cesse vers une limite, de la forme

$$K(y+t)^m;$$

c'est-à-dire [abstraction faite du coefficient K], qu'ils approchent continuellement de la puissance m^e d'un binome dont le premier terme est l'inconnue y de l'équation transformée, et le second terme une quantité numérique $\left[t = \frac{p'}{q'}\right]$ égale au rapport du dénominateur d'une réduite au dénominateur de la réduite suivante, rapport qui, par conséquent, est toujours *moindre que l'unité*.

Mais on sait: — 1° que dans le développement de toute puissance entière d'un binome, les coefficients vont en augmentant depuis les deux termes extrêmes jusqu'au milieu.

Donc, dans le développement de $K(y+t)^m$, en tenant compte des puissances successives de t, puissances qui vont en diminuant puisque t est < 1, *plus de la moitié des coefficients des puissances successives et ascendantes de* y *vont en augmentant.*

2° On sait encore que dans ce même développement de $(y+t)^m$, le rapport de chaque coefficient au précédent, en avançant d'un quelconque des deux termes extrêmes vers l'autre terme extrême, va en diminuant, puisque la fraction $\frac{m-n+1}{n}$, qui représente le rapport du $(n+1)^e$ coefficient au n^e, va elle-même en diminuant à mesure que n augmente; ou bien, ce qui est la même chose, *le rapport de chaque coefficient au suivant va en augmentant.*

Donc, en effectuant sur le polynome X [que nous supposerons, pour fixer les idées, du 6e degré], la série des opérations indiquées, et poussant le calcul suffisamment loin, on arrivera toujours à un polynome en y, tel que le suivant :

$$Py^6 + Qy^5 + Ry^4 + Sy^3 + Ty^2 + Uy + V,$$

dans lequel, les coefficients P, Q, R..... étant tous positifs, on aura en outre les deux inégalités continues :

1° *Entre plus de la moitié de ces coefficients* depuis V jusqu'à P :

$$V < U < T < S \ldots\ldots\ldots;$$

2° *Depuis le dernier terme jusqu'au premier :*

$$\frac{V}{U} < \frac{U}{T} < \frac{T}{S} < \frac{S}{R} < \frac{R}{Q} < \frac{Q}{P}.$$

Cela posé, en multipliant le polynome en y par le facteur $(y-\varphi)$, on aura pour produit :

$$\begin{aligned}
&Py^7 \\
&+ (Q - P\varphi)\,y^6 \\
&\quad + (R - Q\varphi)\,y^5 \\
&\qquad + (S - R\varphi)\,y^4 \\
&\qquad\quad + (T - S\varphi)\,y^3 \\
&\qquad\qquad + (U - T\varphi)\,y^2 \\
&\qquad\qquad\quad + (V - U\varphi)\,y \\
&\qquad\qquad\qquad - V\varphi.
\end{aligned}$$

Or, puisque d'ailleurs $\varphi > 1$, on a d'abord

$$\begin{aligned} V &< U < U\varphi, \\ U &< T < T\varphi, \\ T &< S < S\varphi \ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

d'où il résulte que toujours *au moins la moitié des termes* du produit total, à commencer par le dernier, *sont négatifs;* et quant aux termes de degrés plus élevés en y, *un ou plusieurs* d'entre eux peuvent être encore négatifs; mais dès que l'un d'eux est positif, les autres de degrés plus élevés le sont aussi. Par exemple, si

$$S > R\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi < \frac{S}{R},$$

il en résulte *à fortiori:*

$$\varphi < \frac{R}{Q}, \qquad \text{d'où} \qquad R > Q\varphi,$$
$$\varphi < \frac{Q}{P}, \qquad \text{d'où} \qquad Q > P\varphi;$$

et de même des autres termes s'il y en avait davantage.

Ainsi, comme il fallait le démontrer, l'équation que l'on obtient en égalant à *zéro* le polynome en y, *ne peut avoir plus d'une variation;* et d'ailleurs, à cause du premier terme qui est positif, on voit qu'*elle en a nécessairement une.*

4. Examinons maintenant comment cette propriété des équations peut servir à faciliter et à simplifier la recherche de leurs racines; et pour cela, expliquons d'abord en peu de mots le procédé auquel on est naturellement conduit par le théorème de M. Budan, lorsqu'on veut exprimer ces racines en fractions continues.

Soit, pour cela, l'équation générale:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots\ldots\ldots = 0.$$

En posant $x = a + x'$, on aura pour transformée:

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)\frac{x'}{1} + f''(a)\frac{x'^2}{1.2} + f'''(a)\frac{x'^3}{1.2.3}$$
$$+ f''''(a)\frac{x'^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Alors, si l'on fait

$$f(a) = A',$$
$$\frac{f'(a)}{1} = B',$$
$$\frac{f''(a)}{1.2} = C',$$
$$\frac{f'''(a)}{1.2.3} = D',$$
$$\frac{f''''(a)}{1.2.3.4} = E',$$

.....

l'équation en x' pourra s'écrire ainsi :

$$A' + B'x' + C'x'^2 + D'x'^3 + E'x'^4 \ldots\ldots\ldots = 0.$$

De plus, si l'on suppose $a = 1$, on aura simplement :

$$\begin{aligned}
f(1) &= A' = A + B + C + D + E \ldots\ldots \\
\frac{f'(1)}{1} &= B' = B + 2C + 3D + 4E \ldots\ldots \\
\frac{f''(1)}{1.2} &= C' = C + 3D + 6E \ldots\ldots \\
\frac{f'''(1)}{1.2.3} &= D' = D + 4E \ldots\ldots \\
\frac{f''''(1)}{1.2.3.4} &= E' = E \ldots\ldots
\end{aligned}$$

.....;

et généralement, quel que soit le degré de l'équation en x, on obtiendra toujours facilement et à la seule inspection, les coefficients de la transformée en $x' = (x - 1)$, d'après la formule du *Triangle arithmétique*.

La même règle qui sert à passer de l'équation en x à l'équation en $(x - 1)$, conduira de celle-ci à la transformée en $(x - 2)$, de là à la transformée en $(x - 3)$.... ; et ainsi de suite.

On obtiendrait, pour la même équation et par un procédé pareil, les transformées en $(x + 1)$, $(x + 2)$, $(x + 3)$, .. etc., en observant seulement de changer, dans chacune des sommes qu'exige le calcul des coefficients A', B', C', D'..., les signes de tous les termes de rang pair.

5. Cela posé, admettons que l'on ait déterminé les coefficients des transformées successives en $(x \mp 1)$, en $(x \mp 2)$, en $(x \mp 3)\ldots$, et que l'on soit parvenu ainsi, d'une part à une transformée en $(x - l)$ qui n'ait plus que des permanences, et d'autre part à une transformée en $(x + l')$ qui n'ait plus que des variations.

Cette opération faite, on connaît les parties entières de toutes les racines réelles que l'équation en x *a ou peut avoir.*

En effet [les racines entières étant supposées déjà extraites], pour que deux nombres entiers consécutifs, $\pm a$, $\pm(a+1)$ [a pouvant d'ailleurs être nul], comprennent une racine ou plusieurs, *il est nécessaire*, relativement aux racines positives, que la transformée en $(x - a)$ ait plus de variations que la transformée suivante en $(x - a - 1)$, et pour les racines négatives, que la transformée en $(x + a)$ ait moins de variations que la transformée en $(x + a + 1)$. Mais ne nous occupons que des racines positives (*).

Si donc, dans le passage de la transformée en $(x - a)$ à la transformée en $(x - a - 1)$, un certain nombre de variations ont disparu, alors seulement il y a lieu de *supposer* l'existence de racines réelles comprises entre a et $(a + 1)$, en nombre égal *au plus* à celui des variations perdues.

Dans cette hypothèse, on pose $x - a = \frac{1}{x'}$; et les coefficients de l'équation en x' s'obtiennent en renversant simplement l'ordre des coefficients de l'équation en $(x - a)$ [et changeant, s'il y a lieu et si l'on veut, tous les signes, afin de rendre le premier positif]; puis on calcule les coefficients des transformées en $(x' - 1)$, en $(x' - 2)$, en $(x' - 3)$,..... jusqu'à ce qu'on arrive à une transformée qui n'ait plus que des permanences.

La valeur x' devant être *plus grande que l'unité* pour toute valeur réelle de x comprise entre a et $(a+1)$, il s'ensuit qu'il ne saurait exister de pareilles valeurs de x si l'équation en $(x' - 1)$ n'avait déjà plus que

(*) Dans les applications, il est préférable pour la simplicité de la méthode, de ramener la recherche des racines négatives à celle des racines positives, en changeant préalablement le signe de x dans l'équation proposée. Par ce moyen, on évite le procédé de calcul des transformées en $(x + 1)$, $(x + 2)$....

des permanences; et généralement, le nombre des racines réelles de l'équation proposée, comprises entre a et $(a+1)$, peut être tout au plus égal à celui des variations de l'équation en $(x'-1)$.

Maintenant, pour qu'une valeur de x' [ou plusieurs] soit comprise entre b et $(b+1)$, b étant un nombre entier positif *au moins égal à l'unité*, il faut que, dans le passage de l'équation en $(x'-b)$ à l'équation en $(x'-b-1)$, un certain nombre de variations aient disparu; et c'est seulement dans cette hypothèse que l'on peut supposer des valeurs de x', en nombre égal au plus à celui de ces variations, comprises entre b et $(b+1)$.

On fait alors $x'-b=\frac{1}{x''}$; les coefficients de l'équation en x'' s'obtiennent encore en renversant simplement l'ordre des coefficients de l'équation en $(x'-b)$; et l'on calcule de même les coefficients des transformées en $(x''-1)$, en $(x''-2)$, en $(x''-3)$,..., jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée qui n'ait plus que des permanences.

En raisonnant sur x'' comme on a raisonné sur x', on fait, s'il y a lieu, $x''-c=\frac{1}{x'''}$, puis $x'''-d=\frac{1}{x^{\text{IV}}}$,.....; et ainsi de suite.

On opère, d'ailleurs, comme il vient d'être développé, pour tout système de deux équations ou de deux transformées consécutives, entre lesquelles il a disparu des variations [sans tenir compte, toutefois, de celles qui disparaissent entre les transformées en x' et $(x'-1)$, en x'' et $(x''-1)$,...]; et l'on pousse chacune de ces séries ou *branches* d'opérations, jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation en $x^{(n)}$, telle que la transformée en $(x^{(n)}-1)$, qui s'en déduit, ou n'ait plus que des permanences, ou ne présente plus qu'une seule variation. Toute série d'opérations qui se trouve dans le premier cas, est terminée, et ne donne aucune racine réelle. Dans le second cas, au contraire, les valeurs déjà obtenues dans la série correspondante, pour x, x', x'', x''', x^{IV},..., forment une fraction continue dont les réduites successives représentent des valeurs de plus en plus approchées de l'une des racines réelles de l'équation proposée.

6. Ces racines se trouvant ainsi complétement séparées, soit y l'inconnue de la dernière transformée relative à l'une d'elles. Pour approcher davantage de la valeur de cette racine, nous pourrions continuer

le calcul en suivant toujours la même marche ; et nous serions sûrs de n'avoir, dans toutes les transformées subséquentes, qu'une seule variation, et par conséquent une seule racine positive, laquelle, de plus, serait toujours nécessairement plus grande que l'unité.

Mais les approximations successives fournies par la réduction en fraction continue ne croissant que très lentement, changeons maintenant notre marche, et exprimons en décimales la valeur cherchée de y, suivant le procédé de *Newton*.

Ce procédé, dans le cas actuel, et vu la forme particulière à laquelle nous avons ramené l'équation à résoudre, se trouve affranchi des inconvénients qu'il présente dans le cas général ; et en outre, comme on va le voir, il n'exige nullement ici la considération des différentes hypothèses que *Fourier* a dû discuter dans son ouvrage (*).

Notre équation en y n'ayant qu'une variation, *deux* conditions faciles à remplir sont seules nécessaires pour assurer la régularité, la simplicité, et la rapidité du calcul qu'exige sa résolution ; et ces deux conditions peuvent même se réduire à *une* seule, savoir : *Que l'on connaisse une première valeur suffisamment approchée de* y *et moindre que sa valeur exacte*, pour laquelle il suffira souvent de prendre sa partie entière.

Afin d'expliquer ceci, faisons $y=g+h$, g étant la valeur approchée et déjà connue de y, et h la quantité *positive* inconnue qu'il faut ajouter à g pour avoir la valeur totale. En représentant par $f(y)=0$ l'équation en y, on aura :

$$f(g+h)=0,$$

ou, en développant,

$$f(g)+f'(g)\frac{h}{1}+f''(g)\frac{h^2}{1.2}+f'''(g)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots+f^{(m)}(g)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}=0,$$

équation qui, d'après le théorème de M. *Budan*, ne pourra non plus avoir qu'*une seule variation*.

(*) Voyez sur cet objet, outre les *Leçons d'Algèbre* de M. *Lefébure de Fourcy*, le *Traité élémentaire d'Algèbre* de MM. *Mayer* et *Choquet*.

Maintenant, de l'équation précédente on tire

$$h = -\frac{f(g)}{f'(g)} - \left\{ \frac{f''(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{f'''(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{f^{(m)}(g)}{f'(g)} \cdot \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \right\}.$$

Or, on sait que dans un pareil développement, il est toujours possible de prendre h assez petit pour que le signe de la somme ne dépende que de celui de son premier terme; donc puisque h doit être positif, les deux quantités $f(g)$ et $f'(g)$ seront de signes contraires, c'est-à-dire que $f(g)$ étant négatif, $f'(g)$ sera positif; et alors *la variation unique de l'équation en* h *se trouvera située entre le terme tout connu* f(g) *et le terme du premier degré* hf'(g). Telle est la *première condition* que nous exigeons avant de procéder à l'approximation *newtonienne;* et cette condition sera toujours aisée à remplir : quand la partie entière de y, prise pour g, ne suffira pas, on cherchera le chiffre des *dixièmes* par les moyens usités, le chiffre des *centièmes* si cela était nécessaire, et ainsi de suite; mais, nous le répétons, très souvent la partie entière suffira, et elle ne sera même pas toujours indispensable.

Cette première condition remplie, les fonctions dérivées $f''(g)$, $f'''(g)$, ... etc., seront toutes positives; et en prenant $\frac{-f(g)}{f'(g)}$ pour la valeur de h, on aura nécessairement une quantité trop forte.

Quant à la limite de l'erreur, il est clair que si l'on nomme M la plus grande valeur que puisse prendre le plus grand des coefficients de h^2, h^3,... dans l'accolade, cette erreur sera moindre que la somme des termes de la progression

$$M(h^2 + h^3 + h^4 + \ldots . h^m),$$

ou

$$Mh^2 \frac{1 - h^{m-1}}{1 - h},$$

ou enfin, plus simplement, et *à fortiori*, elle sera moindre que

$$M \frac{h^2}{1 - h}.$$

Quoique la valeur numérique de cette expression soit très facile à calculer, nous pouvons encore, à l'exemple de *Fourier*, obtenir une évaluation plus simple de la limite de l'erreur, en ne considérant que le coefficient de h^2 : car il résulte d'une proposition démontrée par

Lagrange, que si g et g' sont deux nombres comprenant y, et ne différant, par exemple, que d'*une* seule unité d'un certain ordre décimal, le premier nombre g étant ainsi une limite inférieure de y, et le second g' une limite supérieure, l'erreur commise lorsqu'on fait $h = \frac{-f(g)}{f'(g)}$ est toujours moindre que $\frac{1}{2}\frac{f''(g')}{f'(g)}h^2$. Par conséquent, la fraction $\frac{1}{2}\frac{f''(g')}{f'(g)}$, que nous représenterons maintenant par M, étant déterminée une fois pour toutes dès le commencement du calcul pour deux valeurs de g et g' qui ne diffèrent que d'*une unité*, d'*un dixième*..., pourra servir dans toute la suite des opérations, à apprécier l'erreur commise sur l'évaluation de h : il suffira pour cela de multiplier M par la fraction variable h^2, ou simplement par l'unité de l'ordre immédiatement supérieur au premier chiffre significatif de h.

Ainsi, tant que l'on ne connaîtra que la partie entière de la racine, on devra faire $h = 1$; et pour que l'on puisse alors passer sans recherche intermédiaire à la détermination des chiffres décimaux, il faudra que M *soit* $< \frac{1}{10}$: c'est *la seconde condition* dont nous avons parlé; quand elle ne sera pas remplie, on déterminera par des essais directs; comme nous l'avons dit plus haut, le chiffre des *dixièmes*. On pourra ensuite chercher le chiffre des *centièmes* en divisant $-f(g)$ par $f'(g)$, pourvu toutefois que M soit < 1 ; sans quoi il faudra aussi déterminer directement le chiffre des *centièmes*... ; et ainsi de suite.

Généralement, représentons par n le nombre des chiffres décimaux déjà déterminés, et par ν le nombre des chiffres de la partie entière de M. Quand M sera compris entre 1 et 0,1, ν sera égal à *zéro*; quand M sera moindre que 0,1, ν deviendra négatif, et sa valeur absolue représentera le nombre de *zéros* placés entre la virgule décimale et le premier chiffre significatif; enfin, dans le cas particulier où M serait une puissance exacte de 10 ou de 0,1, la valeur de ν, positive ou négative, serait l'exposant de cette puissance (*).

Cela posé, pour que l'on puisse obtenir une nouvelle valeur approchée de la racine avec n' chiffres décimaux exacts, n' étant $> n$, et

(*) Le nombre n est également susceptible de devenir négatif, ce qui pourrait arriver si tous les chiffres de la partie entière même n'étaient pas encore déterminés.

$(n' - n)$ étant le nombre des nouveaux chiffres décimaux, il faudra que l'on ait

$$\frac{10^{\nu}}{10^{2n}} < \text{ ou } = \frac{1}{10^{n'}},$$

ou

$$10^{2n-\nu-n'} > \text{ ou } = 1,$$

ou enfin

$$2n - \nu - n' > \text{ ou } = 0.$$

Par conséquent, le nombre $(n' - n)$ des nouveaux chiffres décimaux qu'il sera permis de calculer, est égal à $(n - \nu)$; ou bien, le nombre total des chiffres alors connus, ou n', est égal à $2n - \nu$; et ainsi il est constamment le double du nombre des chiffres connus par l'approximation précédente, *plus* ou *moins* [suivant la valeur de M] le nombre constant ν (*).

Au reste, tout ceci a été longuement expliqué par *Fourier* dans son *Analyse des équations*. Seulement ici, nous le répétons, *à cause de la forme particulière* à laquelle l'équation a été ramenée, *le quotient de* $-f(g)$ *par* $f'(g)$ *est toujours une limite supérieure de la racine, et ce nombre diminué d'une unité du dernier ordre décimal, toujours une limite inférieure;* et c'est cette dernière qu'il faut prendre pour valeur de g dans l'approximation suivante.

Une remarque est encore nécessaire relativement à la valeur du quotient dont nous parlons : ce quotient n'est ordinairement pas exact; et lorsqu'on a déterminé les n' chiffres cherchés, on néglige les suivants. — Or, si cette partie négligée approche beaucoup d'*une* unité de l'ordre précédent, on devra [la limite de l'erreur ayant été prise nécessairement au-dessus de sa valeur exacte] on devra regarder comme probable que la partie restante est inférieure à la véritable valeur de la racine; et alors on prendra cette partie pour la valeur suivante de g. Il n'y aurait qu'un très petit inconvénient à se tromper sur ce point, et l'on reconnaîtrait immédiatement l'erreur à l'approximation suivante : car alors $f(g)$ se trouverait positif au lieu d'être négatif comme il le devrait, la nouvelle équation en h ayant perdu sa variation. — Au

(*) Dans les cas ordinaires, les chiffres qui exigent une détermination directe, sont les deux premiers de la racine, quel que soit d'ailleurs le nombre de ceux qui composent la partie entière; quant aux nombres de chiffres déterminés après ces deux-là dans les approximations subséquentes, ils suivent la loi de la progression $\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : ..... etc.

contraire, lorsque la partie du quotient que l'on aura négligée ne sera qu'une petite fraction de l'unité de l'ordre précédent, il sera probable que la partie restante n'est pas inférieure à la véritable valeur de la racine; et l'on devra retrancher une unité. Dans ce cas, une fausse induction se reconnaîtrait encore à l'approximation suivante, parce que l'on retrouverait dans la nouvelle valeur de h, l'unité supprimée à tort. On pourrait alors, soit continuer la résolution avec cette dernière valeur de h, soit reprendre le calcul de l'approximation précédente après y avoir rectifié la valeur de g; et ce second parti sera toujours à préférer, afin de ne pas compromettre le degré d'exactitude des approximations ultérieures.

Ainsi, dans la règle que l'on vient de donner pour la détermination de la valeur de h, on peut sous-entendre que le quotient de $-f$ par f' est calculé à *une demi-unité* près *du dernier ordre décimal*, sauf à vérifier la limite inférieure prise en conséquence pour la valeur de h, afin de s'assurer que cette valeur n'est pas trop petite ou trop grande d'une unité du dernier ordre (*).

7. Maintenant, l'équation en y étant supposée complétement résolue, il reste à savoir avec quel degré d'approximation l'on pourra obtenir la valeur de x lorsqu'on y introduira celle de y.

Pour cela, rappelons que l'on a

$$x = \frac{qy + p}{q'y + p'};$$

désignons par γ la valeur approchée de y, déterminée au moyen du calcul précédent, et supposée, comme nous l'avons dit, inférieure à la véritable; et soit ε l'unité du dernier ordre décimal de γ : la véritable valeur de y sera comprise entre γ et $\gamma+\varepsilon$; celle de x le sera entre

$$\frac{q\gamma + p}{q'\gamma + p'} \quad \text{et} \quad \frac{q(\gamma + \varepsilon) + p}{q'(\gamma + \varepsilon) + p'};$$

et ainsi l'erreur commise sur la valeur de x en la supposant égale à

(*) Dans le cas où la rectification dont nous parlons ici serait nécessaire, il est facile de voir que les calculs déjà faits donnent un moyen très simple de l'effectuer, sans que l'on ait besoin pour cela de recommencer toutes les opérations; il est sans doute inutile que nous insistions là-dessus.

la première de ces deux fractions, sera moindre que leur différence, ou que

$$\frac{q\gamma+p}{q'\gamma+p'}-\frac{q(\gamma+1)+p}{q'(\gamma+1)+p'}=\frac{(pq'-qp')1}{(q'\gamma+p')(q'\gamma+p'+q'1)}$$
$$=\frac{\pm 1}{(q'\gamma+p')(q'\gamma+p'+q'1)};$$

et par conséquent, *à fortiori*, cette erreur sera moindre que la valeur numérique de la fraction $\frac{1}{(q'\gamma+p')^2}$.

Donc, pour avoir la valeur de x réduite en décimales, on appréciera *à vue* le nombre des chiffres contenus dans le carré de la partie entière de $(q'\gamma+p')$; et ce nombre de chiffres *diminué d'un* sera celui des chiffres décimaux exacts que l'on pourra obtenir dans la valeur de x, de plus que dans celle de γ.

Quant au sens de l'erreur, il dépend du rang de la transformée en γ, toute valeur approchée de la racine de cette équation, pourvu qu'elle le soit *par défaut* et *non par excès*, jouissant à cet égard des mêmes propriétés que le quotient entier incomplet qu'elle remplace. Cette erreur est donc de sens contraire à celle que produit la réduite précédente $\frac{q}{q'}$, en supposant toutefois que l'on n'ait apporté aucune altération au quotient de $q\gamma+p$ par $q'\gamma+p'$.

8. Pour faire une première application de ce qui précède, je prendrai l'équation suivante, déjà traitée par Lagrange :

$$x^3-7x+7=0.$$

Je forme le tableau des coefficients des différentes transformées, d'après la méthode du *numéro* 4; et j'obtiens ainsi

	A	B	C	D	
-4	-29	$+41$	-12	$+1$	
-3	$+1$	$+20$	-9	$+1$	$-x=3+\frac{1}{x'}$
-2	$+13$	$+5$	-6	$+1$	
-1	$+13$	-4	-3	$+1$	
∓ 0	$+7$	-7	∓ 0	$+1$	
$+1$	$+1$	-4	$+3$	$+1$	$x=1+\frac{1}{x'}$, ... (?)
$+2$	$+1$	$+5$	$+6$	$+1$	

D'où je conclus que l'équation proposée a *nécessairement* une racine réelle négative comprise entre -3 et -4; et que les deux autres racines, si elles sont réelles, *ce qui est encore douteux*, ne peuvent être que positives et comprises en $+1$ et $+2$.

Occupons-nous d'abord de ces dernières.

Pour *reconnaître leur nature* et en *obtenir une première valeur approchée* si elles sont réelles, je fais d'abord, comme il a été dit au *numéro* 5, $x = 1 + \frac{1}{x'}$, d'où résulte l'équation

$$x'^3 - 4x'^2 + 3x' + 1 = 0;$$

qui donne de même, pour les coefficients de ses transformées,

	A	B	C	D	
0	$+1$	$+3$	-4	$+1$	
1	$+1$	-2	-1	$+1$	$x' = 1 + \frac{1}{x''}$.
2	-1	-1	$+2$	$+1$	
3	$+1$	$+6$	$+5$	$+1$	$x' = 2 + \frac{1}{x''}$.

Ainsi, je vois que les deux racines cherchées sont réelles, et que x' est compris, pour l'une entre 1 et 2, et pour l'autre entre 2 et 3. Les racines se trouvent donc déjà complétement séparées; les deux premières valeurs approchées de chacune d'elles sont :

$$x_1 = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}; \qquad x_2 = \frac{1}{1}, \frac{3}{2};$$

et pour en avoir une troisième, je fais alternativement les deux hypothèses :

$$x' = 1 + \frac{1}{x''}, \qquad x' = 2 + \frac{1}{x''};$$

d'où résultent les deux équations en x'' :

$$x''^3 - 2x''^2 - x'' + 1 = 0 \qquad (1),$$
$$x''^3 + x''^2 - 2x'' - 1 = 0 \qquad (2).$$

La première de ces équations n'étant pas encore ramenée à n'avoir qu'une variation, je continue la réduction des racines en fraction continue; et je forme pour cela les deux tableaux (1) et (2) qui

suivent :

(1)	A	B	C	D
0	+ 1	− 1	− 2	+ 1
1	− 1	− 2	+ 1	+ 1
2	− 1	+ 3	+ 4	+ 1
3	+ 7	+ 14	+ 7	+ 1

$$x'' = 2 + \frac{1}{x^{\text{iv}}}.$$

(2)	A	B	C	D
0	− 1	− 2	+ 1	+ 1
1	− 1	+ 3	+ 4	+ 1
2	+ 7	+ 14	+ 7	+ 1

$$x'' = 1 + \frac{1}{x^{\text{iv}}};$$

d'où il résulte que la valeur de x'' est comprise, pour x_1, entre 2 et 3, et pour x_2 entre 1 et 2; ce qui donne les deux nouvelles réduites :

$$x_1 = \frac{5}{3}, \qquad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Quant aux équations en x''' qui s'en déduisent, elles sont identiques; et ainsi la détermination des deux racines positives de l'équation proposée est ramenée à la résolution d'une seule transformée, qui est la suivante :

$$x'''^3 - 3x'''^2 - 4x''' - 1 = 0.$$

Cette équation en x''' n'ayant plus qu'*une* variation, on pourrait passer à la résolution en décimales, suivant la méthode indiquée au *numéro* 6. Mais rien n'obligeant à adopter cette nouvelle marche pour *la première* équation qui se présente avec une seule variation; et, de plus, les dernières réduites obtenues n'ayant encore que de très petits dénominateurs, circonstance qui ne permettrait pas d'élever de beaucoup le degré d'approximation fourni par la résolution en décimales (*voyez* 7), je cherche encore une valeur réduite de chaque racine; il y a d'ailleurs pour cela, dans l'exemple actuel, une raison que l'on comprendra dans un instant.

Je forme donc le tableau des coefficients pour les transformées en $(x''' - 1)$, $(x''' - 2)$, ...; et j'ai ainsi :

	A	B	C	D
0	-1	-4	-3	$+1$
1	-7	-7	∓ 0	$+1$
2	-13	-4	$+3$	$+1$
3	-13	$+5$	$+6$	$+1$
4	-1	$+20$	$+9$	$+1$
5	$+29$	$+41$	$+12$	$+1$

$$x''' = 4 + \frac{1}{y},$$

ce qui me donne une valeur de x''' comprise entre 4 et 5, et par suite les deux nouvelles réduites

$$x_1 = \frac{22}{13}, \qquad x_2 = \frac{19}{14},$$

toutes deux exactes à moins d'*un centième* près.

Alors je fais

$$x''' = 4 + \frac{1}{y};$$

et l'équation à résoudre sera la suivante, à laquelle je m'arrêterai pour chercher en décimales la valeur de sa racine positive:

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0.$$

Mais auparavant, j'observerai encore que cette équation est également propre à donner la racine négative de la proposée: en effet, si dans cette dernière on fait $x = -\left(3 + \frac{1}{y}\right)$, on obtient de nouveau la même équation en y; et telle est la raison de préférence que j'ai indiquée tout à l'heure. Ainsi, la racine positive de cette seule équation en y donnera les trois racines de la proposée (*), au moyen des trois formules suivantes:

$$x_1 = \frac{22y + 5}{13y + 3}, \quad x_2 = \frac{19y + 4}{14y + 3}, \quad x_3 = -\frac{3y + 1}{y}.$$

Cherchons donc cette valeur de y.

9. Sans avoir besoin de développer le tableau complet des trans-

(*) Cette propriété de l'équation en y mériterait peut-être un examen spécial.

formées en $(y-1)$, $(y-2)$,....., on voit sur-le-champ, en mettant les deux premiers termes sous la forme $(y-20)y^2$, que la racine cherchée et comprise entre 20 et 21 (*).

Je fais donc $y=20+h$; et en nommant $f(y)$ le premier membre de l'équation en y, et $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$, ses dérivés, j'exécute le calcul suivant (*voyez* 6):

$$f(20+h)=$$
$$f(20)+f'(20)\frac{h}{1}+f''(20)\frac{h^2}{1.2}+f'''(20)\frac{h^3}{1.2.3}=0;$$

$$f(20)=20^3-20.20^2-9.20^1-1=-181\ (**);$$
$$\frac{1}{1}f'(20)=3.20^2-40.20^1-9=391;$$
$$\frac{1}{1.2}f''(20)=3.20^1-20=40;$$
$$\frac{1}{1.2.3}f'''(20)=1=1.$$

D'où résulte l'équation en h:

$$h^3+40h^2+391h-181=0;$$

et par suite, $$h=\frac{181}{391}-\frac{40}{391}h^2-\frac{1}{391}h^3.$$

Pour voir si le premier terme de cette valeur de h est suffisant pour m'en faire connaître, sans erreur, le chiffre des *dixièmes*, je remplace dans le coefficient de h^2, le numérateur $40=\frac{1}{2}f''(20)$,

---

(*) Une abréviation analogue peut être employée pour l'équation ci-dessus en x^m.

(**) Cette réduction peut s'effectuer très simplement et *à vue*, de la manière suivante :

$20-20=0$; $0\times20=0$; $0-9=-9$; $-9\times20=-180$; $-180-1=-181=f$.

De même pour f' :

$20\times3=60$; $60-40=20$; $20\times20=400$; $400-9=391$.

Et ainsi des autres.

Cette marche, que j'emploierai dans les tranformations suivantes, me paraît préférable à celle de Fourier, en ce qu'outre l'avantage d'une grande simplicité, elle présente encore celui de donner les diverses fonctions f, f', f''... indépendamment les unes des autres.

par le nombre $43 = \frac{1}{2} f''(21)$(*); et j'obtiens ainsi, pour la valeur de M (*voyez* 6) réduite en décimales,

$$M = \frac{43}{391} = 0,11, \text{ à très peu près.}$$

A la rigueur il faudrait, pour remplir la seconde condition exigée au *numero* 6, que M ne dépassât pas *un dixième;* mais comme l'excès est peu considérable, et que d'ailleurs Mh^2 n'est pas la valeur exacte de l'erreur, mais une limite supérieure de cette erreur, je puis me permettre, *sauf vérification* du résultat obtenu en conséquence, et sauf les observations faites au *numéro* 6, de prendre pour la valeur de h à *un dixième* près, la fraction $\frac{181}{391}$. Or, cette fraction, réduite en décimales, donne

$$h = 0,46;$$

donc 4 est la valeur probable du chiffre des *dixièmes* de y, ce qui se vérifiera en effet à l'approximation suivante; et d'ailleurs, on voit dès à présent, que le produit $0,11 \times (0,4)^2$ est moindre que 0,02, et que par conséquent la valeur de h dépasse 0,44. Mais nous devons, pour le moment, nous en tenir au premier chiffre.

Je fais donc maintenant $y = 20,4 + h'$; et pour obtenir les coefficients des diverses puissances de h' qui entrent dans le développement de $f(20,4 + h')$, j'effectue le calcul suivant, profitant ainsi des valeurs déjà calculées de $f(20)$, $f'(20)$, et $f''(20)$:

$$f(20,4) = (0,4)^3 + 40(0,4)^2 + 391(0,4)^1 - 181;$$

$$\frac{1}{1} f'(20,4) = 3(0,4)^2 + 80(0,4)^1 + 391;$$

$$\frac{1}{1.2} f''(20,4) = 3(0,4)^1 + 40;$$

$$\frac{1}{1.2.3} f'''(20,4) = 1 \text{ (**)}.$$

(*) Le numérateur de M s'obtiendra constamment, *dans une équation du troisième degré*, en ajoutant à la valeur numérique déjà calculée pour $\frac{1}{2} f''(g)$, *trois unités du dernier ordre* décimal. — On peut établir pour chaque degré une règle analogue.

(**) Les quantités désignées par $\frac{f'''}{1.2.3}$ étant constantes et égales à 1 dans toute la suite du calcul, je me dispenserai dorénavant de les indiquer.

$$\begin{array}{r} 0{,}4 \\ +\ 40 \\ \hline 40{,}4 \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 16{,}16 \\ +\ 391{,} \\ \hline 407{,}16 \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 162{,}864 \\ -181{,} \\ \hline -\ 18{,}136 = f \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,} \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 1{,}2 \\ +\ 80{,} \\ \hline 81{,}2 \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 32{,}48 \\ +\ 391{,} \\ \hline +\ 423{,}48 = \tfrac{1}{1}f' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,} \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 1{,}2 \\ +\ 40{,} \\ \hline +\ 41{,}2 = \tfrac{1}{1.2}f'' \end{array}$$

Je divise ensuite $-$ 18,136 par $+$ 423,48; le quotient, à *un demi-millième* près, étant 0,043, je fais $h' = 0{,}042$, et j'ai ainsi pour nouvelle valeur de y,

$$y = 20{,}442.$$

Observons en passant, que l'incertitude dont la valeur de la limite M restait affectée dans le calcul de la première approximation, se trouve maintenant détruite; car on a

$$\frac{\frac{1}{2}f''\ (20{,}5)}{f'\ (20{,}4)} = \frac{41{,}5}{423{,}48} = \frac{1}{10{,}2} \text{ ou } = 0{,}09\ldots\ldots;$$

et ainsi la valeur de M est bien réellement et pour toute la suite du calcul, inférieure à 0,1.

Je fais actuellement $y = 20{,}442 + h''$; et je développe comme ci-dessus les valeurs de $f(20{,}442)$, de f', de $\frac{1}{2}f''\ldots$, en y faisant servir les valeurs déjà obtenues pour $f(20{,}4)$, $f'(20{,}4)\ldots$, etc.

$$f(20{,}442) = (0{,}042)^3 + 41{,}2(0{,}042)^2 + 423{,}48(0{,}042)^1 - 18{,}136$$
$$\tfrac{1}{1}f'(20{,}442) = 3(0{,}042)^2 + 82{,}4(0{,}042)^1 + 423{,}48$$
$$\tfrac{1}{2}f''(20{,}442) = 3(0{,}042)^1 + 41{,}2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}042 \\ +\quad 41{,}2 \\ \hline 41{,}242 \\ \times\quad 0{,}042 \\ \hline 82\,484 \\ 1\,649\,68 \\ \hline 1{,}732\,164 \\ +423{,}48 \\ \hline 425{,}212\,164 \\ \times\quad 0{,}042 \\ \hline 850\,424\,328 \\ 17\,008\,486\,56 \\ \hline 17{,}858\,910\,888 \\ -\ 18{,}136 \\ \hline -\ 0{,}277\,089\,112 = f. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3, \\ \times\quad 0{,}042 \\ \hline 0{,}126 \\ +\ 82{,}4 \\ \hline 82{,}526 \\ \times\ 0{,}042 \\ \hline 165\,052 \\ 330\,104 \\ \hline 3{,}466\,092 \\ +\ 423{,}48 \\ \hline +\ 426{,}946\,092 = f' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3, \\ \times\quad 0{,}042 \\ \hline 0{,}126 \\ +\ 41{,}2 \\ \hline +\ 41{,}326 = \tfrac{1}{3} f'' \end{array}$$

Maintenant je divise cette valeur de f par celle de f'; et le quotient, à *une demi-unité* près du *septième ordre*, étant

$$0,\ 0\ 00\ 6490,$$

je fais $\quad h'' = 0,\ 0\ 00\ 6489,$

d'où $\quad y = 20,\ 4\ 42\ 6489;$

et je continue le calcul de la même manière.

J'obtiens ainsi les valeurs suivantes, que je ne fais que rapporter :

$$\left.\begin{array}{rl} f\ (20{,}4\ 42\ 6489) = & (0{,}0\ 00\ 6489)^3 \\ +\ 41{,}3\ 26 & (0{,}0\ 00\ 6489)^2 \\ +\ 426{,}9\ 46\ 0\ 92 & (0{,}0\ 00\ 6489)^1 \\ -\ 0{,}2\ 77\ 0\ 89\ 1\ 12 & \end{array}\right\} =$$

$$-\ 0{,}0\ 00\ 0263\ 9\ 14\ 3914\ 2\ 43\ 1831;$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{1}f'(20{,}4\ 42\ 6489) = 3\,(0{,}0\ 00\ 6489)^2 \\ +\ 82{,}6\ 52\,(0{,}0\ 00\ 6489)^1 \\ +\ 426{,}9\ 46\ 0\ 92\end{array}\right\} =$$

$$426{,}9\ 99\ 7261\ 4\ 60\ 1363\,;$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{1.2}f''(20{,}4\ 42\ 6489) = 3\,(0{,}0\ 00\ 6489)^1 \\ +\ 41{,}3\ 26\end{array}\right\} =$$

$$41{,}3\ 27\ 9467\,;$$

$$\begin{aligned} -f:f' &= 0,\ 0\ 00\ 0000\ 61806689\,; \\ h''' &= 0,\ 0\ 00\ 0000\ 61806688\,; \\ y &= 20,\ 4\ 42\ 6489\ 61806688. \end{aligned}$$

Continuant, et abrégeant encore, j'obtiens pour dernière approximation de la valeur de y,

$$\begin{aligned} f &= -0{,}0\ 00\ 0000000001345\,64\,2116\ 86046287\ 1\ 57\ 5556\ 72547328, \\ f' &= 426{,}9\ 99\ 7312\,57000656\ 1\ 95\ 2592\ 44588032\,, \\ f'' &= 41{,}3\ 27\ 9468\,85420064, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f:f' &= 0,\ 0\ 00\ 0000\ 00000000\ 31513886\,73961020, \\ h'''' &= 0,\ 0\ 00\ 0000\ 00000000\ 31513886\,73961019, \\ y &= 20,\ 4\ 42\ 6489\ 61806688\ 31513886\,73961019, \end{aligned}$$

valeur exacte jusqu'à la *trente-unième* décimale.

Une approximation de plus me donnerait *soixante-trois* décimales; mais j'abandonne ce calcul qui ne présente d'autre difficulté que celle de trouver un espace suffisant pour y placer tous les chiffres à leurs rangs respectifs.

10. Reste à substituer ce résultat dans les expressions trouvées au *numéro* 8 pour x_1, x_2, et x_3; ce qui donne

$$x_1 = \frac{454\ \ 7\ 38\ 2771\ 59747142\ 93305508\,27142418}{268\ \ 7\ 54\ 4365\ 03486948\ 09680527\,61493247}\,;$$

$$x_2 = \frac{392\ \ 4\ 10\ 3302\ 74327077\ 98763848\,05259361}{289\ \ 1\ 97\ 0854\ 65293636\ 41194414\,35454266}\,;$$

$$-\,x_3 = \frac{62\ \ 3\ 27\ 9468\ 85420064\ 94591660\,21883057}{20\ \ 4\ 42\ 6489\ 61806688\ 31513886\,73961019}.$$

Enfin, si l'on veut exprimer les valeurs de x_1, x_2, x_3, en décimales, il faut observer que la valeur de y remplace le dénominateur incomplet 20 dans les réduites

$$x_1 = \frac{22.20 + 5}{13.20 + 3} = \frac{445}{263},$$
$$x_2 = \frac{19.20 + 4}{14.20 + 3} = \frac{384}{283},$$
$$-x_3 = \frac{3.20 + 1}{20} = \frac{61}{20}.$$

Or, les deux premières pouvant être calculées exactement avec *quatre* décimales, et la troisième avec *deux*, il s'ensuit que si l'on remplace le nombre entier 20 par la valeur trouvée de y, x_1 et x_2 pourront être obtenues exactement jusqu'à la *trente-cinquième* décimale inclusivement, et x_3 jusqu'à la *trente-troisième*. Au reste, on peut aussi obtenir exactement les deux dernières décimales de x_3, en observant que la valeur absolue de cette racine doit être égale à la somme des deux autres. Et l'on a ainsi

$$x_1 = 1,\ 692\ 021\ 471\ 630\ 095\ 869\ 627\ 814\ 897\ 002\ 069\ 14,$$
$$x_2 = 1,\ 356\ 895\ 867\ 892\ 209\ 443\ 894\ 399\ 510\ 021\ 300\ 58,$$
$$-x_3 = 3,\ 048\ 917\ 339\ 522\ 305\ 313\ 522\ 214\ 407\ 023\ 369\ 72,$$

valeurs exactes jusqu'à la *trente-cinquième* décimale inclusivement; l'approximation suivante eût conduit jusqu'à la *soixante-septième*.

11. Je vais encore m'occuper de quelques exemples; mais je n'en pousserai le calcul que jusqu'à la séparation des racines, ce qui est suffisant pour le but principal que je me suis proposé, et je ne ferai qu'indiquer le tableau des opérations.

Deuxième application.

$$x^6 - 12x^4 - 2x^3 + 37x^2 + 10x - 10 = 0.$$

Cet exemple, dont je dois la communication à la complaisance de M. *de Fourcy*, est très propre à faire ressortir l'avantage de la réduction en fraction continue; car le premier membre étant le développe-

ment du produit des trois facteurs

$$x^2 + 2x - 1, \quad x^2 - 2x - 2, \quad \text{et} \quad x^2 - 5,$$

dont les racines sont respectivement

$$x = -1 \pm \sqrt{2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}, \quad \text{et } x = \pm \sqrt{5},$$

a toutes ses racines réelles. Et bien que *deux* d'entre elles soient comprises entre $+2$ et $+3$, et *deux* autres entre -2 et -3, on va voir que la séparation s'en fait avec la plus grande facilité.

	A	B	C	D	E	F	G	
-3	$+104$	-428	$+..$	$-..$	$+..$	$-..$	$+1$	
-2	$+6$	$+30$	$+1$	-66	$+48$	-12	$+1$	$-x=2+\frac{1}{x'}\ldots?$
-1	$+8$	-28	-14	$+26$	$+3$	-6	$+1$	
0	-10	$+10$	$+37$	-2	-12	0	$+1$	$-x=\frac{1}{x'},$
$+1$	$+24$	$+36$	-26	-30	$+3$	$+6$	$+1$	$x=\frac{1}{x'},$
$+2$	$+14$	-58	-23	$+62$	$+48$	$+12$	$+1$	
$+3$	$+60$	$+....$	$+..$	$+..$	$+..$	$+..$	$+1$	$x=2+\frac{1}{x'}\ldots?$

$$x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	$+1$	$+12$	$+48$	$+62$	-23	-58	$+14$	
1	$+56$	-4	-274	-330	-103	$+26$	$+14$	
2	-615	-1740	-1412	-202	$+237$	$+110$	$+14$	$x'=1+\ldots.$
3	-3608	-3588	$+714$	$+2126$	$+997$	$+194$	$+14$	
4	-3151	$+9260$	$+15224$	$+8334$	$+2177$	$+278$	$+14$	
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+14$	$x'=4+\ldots.$

$$-x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	$+1$	$+12$	$+48$	$+66$	-1	-30	$+6$	
1	$+104$	$+196$	$+42$	-110	-59	$+6$	$+6$	
2	$+185$	-220	-492	-166	$+61$	$+42$	$+6$	$x'=2+\ldots.$
3	-584	-1212	-114	$+618$	$+361$	$+78$	$+6$	
4	-84	$+2284$	$+4776$	$+2962$	$+841$	$+114$	$+6$	
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+6$	$x'=4+\ldots.$

Résumé : *six racines réelles.*

$$\text{Positives}\begin{cases}1^{re}\text{ entre } 0 \text{ et } 1,\\ 2^{e}\ x = 2 + \frac{1}{1+\ldots},\\ 3^{e}\ x = 2 + \frac{1}{4+\ldots}.\end{cases}\quad\Bigg|\quad\text{Négatives}\begin{cases}1^{re}\text{ entre } 0 \text{ et } -1,\\ 2^{e}\ -x = 2 + \frac{1}{2+\ldots},\\ 3^{e}\ -x = 2 + \frac{1}{4+\ldots}\end{cases}$$

12. *Troisième application.*

$$x^6 - 6x^5 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1 = 0.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
-1	+ 27	− 37	+ 15	− 40	+ ..	− ..	+ 1	$-x=\frac{1}{x'}$ { 3 racines dont 2 douteuses.
0	− 1	− 1	+ 60	+ 40	0	− 6	+ 1	
$+1$	+ 93	+ 215	+ 135	− 0	− 15	+ 0	+ 1	$x=\frac{1}{x'}$: *une* racine *réelle*.
$+2$	+ 429	+ 431	+ 60	− 40	0	+ 6	+ 1	$x=2+\frac{1}{x'}$ { 2 racines douteuses.
$+3$	+ 887	+ 467	+ 15	+ 40	+ 45	+ 12	+ 1	

$$x = 2 + \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	+ 1	+ 6	0	− 40	+ 60	+ 431	+ 429	2 racines *imaginaires*.
1	+	+	+	+	+	+	+	

$$-x = \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
0	− 1	− 6	0	+ 40	− 60	− 1	+ 1	*une* racine *réelle*, et
1	− 27	− 125	− 235	− 90	− 50	+ 5	+ 1	2 racines *imaginaires*.

Résumé.

Quatre racines *imaginaires ;*
Une racine *réelle* entre 0 et + 1 ;
Une racine *réelle* entre 0 et − 1.

13. *Quatrième et dernière application.*

Je considère une dernière équation que je trouve à la page 196 du 15e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et qui résulte d'un calcul pris pour exemple par M. *Bret*, dans sa théorie de l'élimination.

Cette équation est du 9e degré ; mais elle a pour racine $+1$ et -1 ; j'y supprime donc les facteurs $(x-1)$ et $(x+1)$, quoique ces facteurs puissent facilement se découvrir par la méthode même ; et j'obtiens alors pour l'équation à résoudre,

$$7x^7 - 6x^6 - 7x^5 + 8x^4 + 7x^3 - 23x^2 - 22x - 5 = 0.$$

Racines positives.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	−5	−22	−23	+7	+8	−7	−6	+4	$x=\frac{1}{x'}$ } 2 racines douteuses.
+1	−44	−58	−30	−11	+23	+41	+22	+4	
+2	+33	+326	+...	+...	+...	+...	+...	+4	$x=2+\frac{1}{x'}$ } *une* racine *réelle*
+3	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+4	

$$x = \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+4	−6	−7	+8	+7	−23	−22	−5	2 racines *imaginaires*.
+1	−41	—	—	—	—	—	—	—	

Racines négatives.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+5	−22	+23	+7	−8	−7	+6	+4	$-x=\frac{1}{x'}$ } 4 racines douteuses
1	+8	+42	+....	+...	+....	+....	+....	+4	

$$-x = \frac{1}{x'}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+4	+6	−7	−8	+7	+23	−22	+5	$x'=1+\frac{1}{x''}$ } 4 racines douteuses.
1	+8	+14	+16	−15	+33	−4	+13	+5	
2	+..	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+.	

$$x' = 1 + \frac{1}{x''}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	
0	+5	+13	−4	+33	−15	+16	+14	+8	4 racines *imaginaires*.
1	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	+...	

Résumé.

Une seule racine *réelle* comprise entre 2 et 3.

Addition au numéro 2.

Comme le calcul de la recherche des *deux racines indiquées* par les variations du facteur réel du second degré, produit de deux facteurs imaginaires du premier, ne se termine que quand ces deux variations disparaissent entre une *transformée principale* en y et sa première *transformée secondaire* en $(y-1)$, il est nécessaire, pour compléter les développemens contenus dans le *numéro* 2, de faire voir que ces deux variations finissent en effet par disparaître entre deux pareilles transformées.

Et en effet, si l'on pose $y = 1 + y'$, et que l'on ordonne par rapport à y', on obtient

$$\begin{array}{r} q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]y'^2 \\ \left.\begin{array}{r} +\,2q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right] \\ +\,2p'q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)+\beta^2\right] \end{array}\right\} y' \\ \left.\begin{array}{r} +\,q'^2\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right] \\ +\,2p'q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)+\beta^2\right] \\ +\,p'^2\left[\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)^2+\beta^2\right] \end{array}\right\} . \end{array}$$

Or, on voit d'abord que le coefficient du terme en y'^2 et le terme sans y', sont essentiellement positifs, car ils ne sont respectivement autre autre chose que

$$(q - q'\alpha)^2 + q'^2\beta^2,$$

et $$[(q - q'\alpha) + (p - p'\alpha)]^2 + (q' + p')^2\beta^2.$$

Quant au coefficient de y', il peut se mettre sous la forme suivante :

$$2q'\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)(q - q'\alpha + p - p'\alpha) + (q' + p')\beta^2\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2q'(q'+p')\left[\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)+\beta^2\right].$$

Maintenant, d'après une propriété des fractions continues, $\frac{q+p}{q'+p'}$ est compris entre $\frac{p}{p'}$ et α; de sorte de $\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)$, étant de même signe que $\left(\frac{p}{p'}-\alpha\right)$, est de signe contraire à $\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)$; et par suite le produit $\left(\frac{q}{q'}-\alpha\right)\left(\frac{q+p}{q'+p'}-\alpha\right)$ est négatif. Comme d'ailleurs la somme de ses facteurs vaut $\pm\left(\frac{q}{q'}-\frac{q+p}{q'+p'}\right)=\frac{1}{q'(q'+p')}$, et que par conséquent ce produit a lui-même pour valeur *maximum* $\frac{1}{4q'^2(q'+p')^2}$, nombre qui peut devenir moindre que toute fraction donnée, il s'ensuit que sa racine carrée ou $\frac{1}{2q'(q'+p')}$ finira par devenir moindre que β; et alors le facteur du second degré en y' que nous considérons, n'aura que des permanences; *ce qu'il fallait prouver.*

Il est bon de faire également une observation sur les facteurs réels du premier degré et de la forme $(y-\varphi)$, pour lesquels nous avons dit que l'on doit avoir $\varphi > 1$. Le calcul que l'on exécute peut bien, à la vérité, donner implicitement lieu à de semblables facteurs dans lesquels le nombre φ soit moindre que *l'unité.* Mais outre que ces facteurs doivent évidemment perdre leur variation à la transformation suivante, il est facile de reconnaître encore, qu'ils correspondent à des racines réelles de l'équation proposée, exprimables par des fractions continues identiques jusqu'à la précédente réduite exclusivement, à la fraction calculée; de telle sorte que pour représenter ces racines, il faudrait reprendre la même fraction continue, en altérant seulement la dernière réduite par une augmentation convenable du quotient incomplet qui avait servi à la former.

Il serait sans doute superflu d'entrer dans plus de détails à ce sujet.

MÉMOIRE

Sur une classe d'Équations à différences partielles ;

PAR C. STURM.

Les géomètres ont résolu un grand nombre de problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de différentes formes et aux petits mouvements vibratoires des corps solides élastiques, des corps flexibles et des fluides, en supposant ces corps homogènes et identiques dans toutes leurs parties. Dans la théorie de la chaleur la fonction inconnue qui représente la température variable d'un point quelconque du corps dépend de l'intégration d'une équation à différences partielles contenant sous forme linéaire cette fonction, sa différentielle ou dérivée première par rapport au temps et ses différentielles partielles du premier et du second ordre, quelquefois même d'un ordre supérieur au second par rapport aux coordonnées d'un point quelconque, toutes ces différentielles étant multipliées par des fonctions connues de ces coordonnées. Dans les questions dynamiques, les fonctions inconnues qui représentent les déplacements d'un point quelconque suivant certaines directions dépendent aussi d'équations à différences partielles linéaires qui renferment les différentielles secondes de ces fonctions par rapport au temps et leurs différentielles partielles de différents ordres par rapport aux coordonnées, multipliées par des fonctions connues de ces coordonnées.

Les solutions qu'on a données de ces diverses questions sont analogues à celle du problème de la corde vibrante qu'on doit à D. Ber-

nouilli et à Lagrange. Elles se composent de la somme d'une infinité de solutions particulières d'une même forme déterminée. Les cas les plus simples qu'il faut d'abord considérer, sont ceux où la fonction inconnue ne dépend que du temps et d'une autre variable indépendante qui fixe la position d'un point quelconque du corps; alors chaque terme de la série qui représente cette fonction satisfait séparément à l'équation à différences partielles qui a lieu pour tous les points du corps et à des équations particulières qui ont lieu à ses limites. Le terme général de la série est le produit de deux quantités distinctes; la première est une exponentielle dont l'exposant est égal au temps multiplié par un certain paramètre ou bien c'est le sinus ou le cosinus du temps multiplié encore par un paramètre; la seconde quantité est une fonction de la variable indépendante autre que le temps, et du même paramètre, laquelle dépend d'une équation différentielle ordinaire de forme linéaire; on obtient cette équation en substituant dans l'équation à différences partielles, à la place de la fonction inconnue le produit des deux facteurs dont il s'agit, et supprimant le premier qui se trouve commun à tous les termes de l'équation. Cette seconde fonction qui ne renferme pas le temps et qu'on peut multiplier par un coefficient constant arbitraire, doit aussi satisfaire aux équations aux limites; et de là résulte une équation transcendante déterminée dont l'inconnue est le paramètre qui multiplie le temps dans l'exponentielle, ou sous le sinus ou le cosinus, et dont les racines en nombre infini sont toutes les valeurs de ce paramètre, valeurs qu'il faut substituer successivement dans le terme général de la série. On achève ensuite la solution en déterminant par des méthodes connues les coefficients arbitraires de cette série, de telle sorte qu'à l'origine du temps elle représente l'état initial de la fonction dont on cherche l'état variable.

Ces problèmes, même restreints, comme nous venons de le dire au cas d'une seule dimension deviennent beaucoup plus difficiles, quand le corps dont on s'occupe n'est pas homogène dans toutes ses parties, c'est-à-dire quand les qualités spécifiques, telles que la densité ou l'épaisseur, la capacité de chaleur, la conductibilité, l'élasticité, sont variables d'un point à un autre suivant des lois quelconques. Les équations du problème étant posées, il faut toujours commencer,

comme précédemment, par chercher des valeurs particulières de la fonction inconnue qui satisfassent à toutes ces équations, à l'exception de celle qui exprime l'état initial qu'on suppose arbitraire. Une quelconque de ces valeurs particulières est encore le produit de deux quantités de même nature que dans le cas de l'homogénéité. Mais ici l'on est arrêté d'abord par la difficulté d'intégrer l'équation différentielle linéaire à laquelle doit satisfaire la fonction de la variable indépendante autre que le temps et du paramètre indéterminé, et ensuite par celle de former et de résoudre l'équation transcendante qui doit donner les valeurs de ce paramètre. Dans les questions même les plus simples et les plus connues relatives à des corps homogènes, où l'on est parvenu à intégrer l'équation différentielle dont il s'agit et à écrire l'équation transcendante, sous forme finie ou en série, on a quelque peine à démontrer que cette équation doit avoir des racines réelles en nombre infini, et à reconnaître la marche et les propriétés distinctives des fonctions qu'on obtient en substituant ces différentes racines à la place du paramètre indéterminé dans l'expression analytique de la fonction satisfaisant à l'équation différentielle qu'on a intégrée. On ne voit pas non plus comment les altérations qu'on peut faire éprouver aux qualités spécifiques du corps influent sur la grandeur des racines et sur les propriétés des fonctions qui en dépendent. Ces discussions me semblent indispensables, si l'on veut bien connaître les circonstances les plus intéressantes de ces phénomènes; elles doivent même nécessairement précéder la recherche de l'intégrale générale.

Le présent mémoire a pour objet les questions nouvelles que je viens d'indiquer rapidement. Je crois les avoir résolues pour les cas assez nombreux où la fonction inconnue dépend d'une équation linéaire à différences partielles contenant cette fonction, sa différentielle première ou seconde par rapport au temps et ses deux différentielles première et seconde par rapport à une autre variable qui fixe la position d'un point quelconque du corps, la fonction et ses différentielles étant multipliées par des fonctions connues de la dernière variable.

Pour plus de précision et de clarté, j'ai choisi comme exemple un

problème qui a toute la généralité qu'on peut désirer dans le cercle que je me suis tracé. Je considère la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe d'une matière homogène ou non homogène et d'un épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à l'axe aient sensiblement la même température au même instant; cette barre est placée dans un milieu d'une température constante qu'on peut supposer égale à zéro M. Poisson a donné dans son grand ouvrage sur la chaleur les équations de ce problème et leur a appliqué ses méthodes générales d'intégration; mais il ne s'est pas occupé des propriétés de l'équation transcendante et des intégrales particulières que j'ai cru devoir étudier. J'ai fait usage dans mes recherches de la théorie sur les équations différentielles linéaires du second ordre que j'ai exposée dans un précédent mémoire publié dans le Journal de M. Liouville. Je vais indiquer sommairement les principaux résultats auxquels je suis arrivé.

Je cherche d'abord suivant la méthode connue que j'ai rappelée plus haut, des valeurs particulières de la fonction qui désigne la température variable d'un point quelconque de la barre; je suppose donc cette fonction égale au produit de l'exponentielle e^{-rt} par une fonction V de l'abscisse x et du paramètre indéterminé r indépendante du temps t. L'équation transcendante en r à laquelle on arrive n'a pas de racines imaginaires, ainsi que M. Poisson l'a démontré pour cette équation et en général pour toutes celles qu'on rencontre dans les problèmes de physique mathématique. Je fais voir en outre que la même équation n'a pas de racines égales et qu'elle n'a pas de racines négatives. Je prouve ensuite à l'aide de ma théorie sur les équations différentielles linéaires du second ordre, qu'elle a une infinité de racines positives dont la plus petite peut être zéro dans un cas particulier. En substituant chacune de ces racines à la place du paramètre indéterminé dans la formule Ve^{-rt}, on a donc une infinité de solutions particulières, satisfaisant à l'équation à différences partielles et aux deux équations qui ont lieu aux extrémités de la barre. Si les températures initiales sont exprimées par la fonction V qui correspond à l'une des racines de l'équation en r, les températures variables de tous les points seront exprimées par le seul terme Ve^{-rt}; elles seront donc à

chaque instant proportionnelles à leurs valeurs initiales, et pour des temps croissants en progression arithmétique, ces températures, abstraction faite de leur signe lorsqu'elles seront négatives, décroîtront en progression géométrique d'autant plus rapidement que la racine r sera plus grande. Les propriétés qui distinguent ces états *simples* en nombre infini où les températures variables sont exprimées par un seul terme ne sont autres que celles des fonctions V correspondantes aux différentes racines de l'équation transcendante. Voici les plus remarquables.

Aucune de ces fonctions ne peut s'évanouir sans changer de signe.

La première de ces fonctions, celle qui répond à la plus petite racine conserve constamment le même signe dans toute l'étendue de la barre.

La seconde, qui répond à la deuxième racine, change de signe une fois pour un point situé entre les deux extrémités de la barre.

La troisième fonction change de signe deux fois entre les mêmes extrémités.

La quatrième change de signe trois fois, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini.

Deux de ces fonctions correspondantes à deux racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement; celle qui répond à la plus grande de ces deux racines s'évanouit la première, en partant de l'une des extrémités de la barre. Entre deux points consécutifs de la barre pour lesquels une de ces fonctions est nulle, il y a toujours au moins un point pour lequel l'une quelconque des fonctions correspondantes à des racines plus grandes change de signe, et il y a au plus autant de points pour lesquels cette dernière fonction change de signe qu'il y a d'unités de différence entre les indices de ces deux fonctions.

Ainsi ces fonctions données par une même équation différentielle linéaire du deuxième ordre contenant un paramètre variable, jouissent de propriétés analogues à celles des sinus des multiples d'une variable qui sont les fonctions les plus simples de cette espèce; mais les intervalles compris entre les points consécutifs pour lesquels chaque fonction change de signe ne sont pas égaux; ils ont des relations déterminées avec les qualités spécifiques de la substance, et

varient en même temps que celles-ci suivant certaines lois, ainsi que les racines r de l'équation transcendante. Par exemple si le pouvoir émissif augmente à l'une des extrémités de la barre, les points pour lesquels chaque fonction s'annullera s'éloigneront de cette extrémité, et toutes les racines r de l'équation transcendante deviendront à la fois plus grandes.

J'établis des propositions analogues relativement aux valeurs maxima de ces fonctions et à d'autres valeurs plus ou moins remarquables.

Après avoir ainsi discuté les solutions particulières, je donne d'après les méthodes connues l'intégrale générale pour un état initial arbitraire.

Avant que les températures de la barre soient réduites à zéro, il y aura une époque où elles seront exprimées sensiblement par le premier terme de la série qui représente l'intégrale générale; cet état final des températures se confondra donc avec le premier des états simples que nous avons considérés précédemment; par conséquent après un temps plus ou moins long les températures de tous les points de la barre seront supérieures ou inférieures à la température fixe du milieu, ce qui peut n'avoir pas lieu pour les températures initiales.

Cette propriété exige cependant que le coefficient du premier terme de la série qu'on obtient par une intégrale définie, ne soit pas nul. S'il est nul, et si celui du second terme ne l'est pas, l'état final des températures sera le second de nos états simples, de sorte que les températures finales seront supérieures à celle du milieu dans une portion de la barre et inférieures dans la portion restante.

En assujettissant à de nouvelles conditions la fonction qui représente les températures initiales, l'état final pourra se réduire à tel état simple qu'on voudra. Toutefois je pense que ce résultat mathématique ne pourrait guère être vérifié par l'expérience, parce que les équations de la chaleur ne sont pas d'une exactitude absolue.

En général, les variations de signe qui peuvent exister dans les températures initiales doivent, le temps croissant, disparaître les unes après les autres.

J'ai examiné de quelle manière cette disparition s'opère et je

suis arrivé à un théorème très complet qui comprend le cas où ces variations de signe ne disparaîtraient pas toutes. J'en ai déduit comme corollaire ces propriétés nouvelles et curieuses de la fonction qu'on forme en ajoutant ou superposant un nombre quelconque de solutions particulières, le temps ayant une valeur déterminée quelconque.

En premier lieu, cette fonction qui ne renferme que la seule variable x, s'évanouit en changeant de signe entre les deux extrémités de la barre au moins autant de fois que celui de ses termes dont l'indice est le moindre. Elle peut en outre être nulle à l'une des extrémités ou à deux extrémités de la barre. En second lieu, cette fonction s'annulle au plus autant de fois que celui de ses termes dont l'indice est le plus grand. Dans cette seconde partie du théorème, une valeur de x qui annulle la fonction dont il s'agit et quelques-unes de ses différentielles successives par rapport à x doit être considérée comme une racine multiple et comptée pour autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de la première des différentielles qu'elle n'annulle pas, si cette valeur de x est comprise entre celles qui répondent aux deux extrémités de la barre. Mais si la fonction et quelques-unes de ses différentielles successives se trouvent nulles pour la valeur de x qui répond à l'une des extrémités de la barre, le degré de multiplicité de cette valeur de x est seulement la moitié de l'ordre de la première différentielle qui ne s'annulle pas, cet ordre ne pouvant être alors qu'un nombre pair.

M. Liouville a démontré directement ce théorème, qui n'était pour moi qu'un corollaire du précédent, sans s'occuper du cas particulier où la fonction serait nulle à l'une des extrémités de la barre. J'en ai aussi trouvé après lui une autre démonstration directe que je donne dans ce mémoire. M. Liouville a fait usage du même théorème dans un très beau Mémoire qu'il a publié dans le numéro de juillet de son journal et qui a pour objet le développement d'une fonction arbitraire en une série composée des fonctions V que nous avons considérées.

Ces résultats s'étendent avec quelques légères modifications au mouvement linéaire de la chaleur dans un globe ou dans un cylindre composé de couches concentriques infiniment minces, telles que la densité, la capacité de chaleur et la conductibilité, sont les mêmes pour tous

les points d'une même couche, mais variables d'une couche à une autre; ce corps est placé dans un milieu d'une température constante, ou bien sa surface est entretenue à une température fixe. Les propriétés relatives aux *maxima* sont plus simples que dans la barre. Après un temps plus ou moins long, les températures de toutes les couches qui composent le corps deviennent supérieures à la température fixe du milieu et croissantes depuis la surface extérieure jusqu'au centre, ou bien au contraire ces températures deviennent inférieures à celle du milieu et décroissantes depuis la surface jusqu'au centre. J'ai énoncé cette proposition dans le *Bulletin des Sciences* de 1829. Comme pour la démontrer on n'a besoin de considérer que le premier terme de la série qui exprime l'intégrale générale, j'en avais une démonstration indépendante de ma théorie sur les équations différentielles linéaires du 2e ordre: je la donne dans le présent Mémoire. On peut d'ailleurs déterminer avec une approximation suffisante la fonction à laquelle les températures finales deviennent proportionnelles dans la barre, la sphère et le cylindre.

La même analyse, convenablement modifiée, donne les lois du mouvement linéaire de la chaleur dans une barre composée d'un nombre quelconque de parties hétérogènes, comme aussi dans un globe et dans un cylindre plein ou creux, composé de couches hétérogènes d'épaisseurs quelconques, telles que les qualités spécifiques varient brusquement dans le passage d'une substance à une autre.

Toute cette théorie s'applique sans aucune difficulté à plusieurs problèmes dynamiques, parmi lesquels je citerai ceux qui ont pour objet les vibrations d'une corde homogène ou non homogène d'une épaisseur et d'une élasticité variables, les oscillations d'une chaîne pesante de densité variable suspendue par l'un de ses bouts ou par les deux bouts, et le mouvement vibratoire d'une colonne d'air de densité et d'élasticité variables.

I.

Considérons la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe d'une matière homogène ou non homogène et d'une épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à la ligne qu'on prend pour l'axe de la barre aient sensiblement la même température au même instant. Ce corps est placé dans un milieu dont la température est constante; nous la prendrons pour le zéro de l'échelle thermométrique. Le mouvement de la chaleur dans cette barre, n'ayant lieu que dans le sens de son axe, est représenté par l'équation suivante:

$$g\frac{du}{dt} = \frac{d.\left(k\frac{du}{dx}\right)}{dx} - lu \qquad (1)$$

x désigne la portion de l'axe de la barre comprise entre une section quelconque ω perpendiculaire à cet axe et un point fixe pris sur le même axe, u est la température de cette section au bout du temps t. g représente le produit de la chaleur spécifique de la barre à l'endroit où est faite la section ω par l'aire de cette section; k est le produit de la *conductibilité intérieure* en cet endroit par la même aire ω; enfin l exprime le produit du contour de la section ω par *le pouvoir émissif* au même lieu; l dépend de la matière de la barre et du degré de poli de sa surface. Nous regarderons les trois quantités g, k et l comme des fonctions de x positives données pour tous les points de la barre; chacune d'elles peut se réduire à une constante.

La fonction u doit remplir encore d'autres conditions.

On doit avoir

$$k\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \qquad (2)$$

$$k\frac{du}{dx} + \mathrm{H}u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}, \qquad (3)$$

x et X étant les valeurs de x qui répondent aux deux extrémités de la barre, h et H des constantes positives qui mesurent la grandeur du rayonnement à ces extrémités.

Au lieu de la condition (2) on peut se donner celle que u ou $\frac{du}{dx}$

soit nulle pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t; cela revient à supposer h infinie ou nulle dans l'équation (2). Si par exemple on doit avoir $u = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on écrira l'équation (2) ainsi :

$$\frac{k}{h}\frac{du}{dx} - u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}$$

puis on y fera $\frac{1}{h} = 0$ ou h infinie. De même l'équation (3) deviendra $u = 0$ ou $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, si l'on fait H infinie ou nulle.

Enfin il faut qu'on ait encore

$$u = f(x) \text{ pour } t = 0 \qquad (4)$$

$f(x)$ étant une fonction donnée de x qui représente les températures initiales des points de la barre, et qui prise pour u doit vérifier les équations (2) et (3); elle est d'ailleurs arbitraire.

On verra facilement que les équations (1), (2), (3), (4) déterminent complétement la fonction u pour toutes les valeurs de t et pour celles de x comprises entre x et X, et qu'au contraire il y aurait indétermination, si en conservant l'équation (1), on supprimait l'une quelconque des équations (2), (3), (4).

II.

Pour arriver à l'expression de u en fonction de x et de t, on commence par chercher, suivant la méthode connue, des valeurs particulières de u qui satisfassent à l'équation (1) et aux équations (2) et (3) en faisant abstraction de la condition (4), $u = f(x)$ pour $t = 0$. On suppose

$$u = \mathrm{V}e^{-rt} \qquad (5)\ (*)$$

r étant une constante indéterminée indépendante de x et de t, et V une fonction de x indépendante de t. En substituant à la place de u cette valeur hypothétique (5) dans les trois équations (1), (2), (3), e^{-rt} disparaît comme facteur commun, et l'on trouve pour déterminer V et r les équations suivantes.

(*) On peut voir dans les ouvrages de M. Poisson et surtout dans sa *Théorie de la Chaleur*, chap. VI, les considérations qui conduisent à chercher des intégrales particulières de la forme (5) et à prendre pour l'intégrale générale la somme de toutes les intégrales de cette forme.

On a d'abord

$$\frac{d.\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr-l)V = 0 \qquad (6)$$

pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X;

et en outre $$k\frac{dV}{dx} - hV = 0, \text{ pour } x = \mathrm{x} \qquad (7)$$

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0, \text{ pour } x = X. \qquad (8)$$

La valeur de l'une des quantités V, $\frac{dV}{dx}$, pour $x = \mathrm{x}$ reste indéterminée et peut être prise à volonté; celle de l'autre est donnée par l'équation (7). Cette équation (7) se réduit à $\frac{dV}{dx} = 0$ ou à $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, selon qu'on y suppose h nulle ou infinie. Il faut alors donner à celle des quantités V, $\frac{dV}{dx}$, qui ne doit pas être nulle pour $x = \mathrm{x}$, une valeur arbitraire.

Dès que les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ sont fixées, la fonction V est entièrement déterminée par l'équation différentielle (6) pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X; quoiqu'on ne sache intégrer cette équation que dans un très petit nombre de cas particuliers, on conçoit que la fonction V existe et a pour chaque valeur de x une valeur réelle unique qui dépend de celles de x et de r; on peut toujours la développer en une série convergente, comme M. Liouville l'a fait voir dans son Mémoire inséré au n° de juillet de son journal (page 255.)

Jusqu'ici la constante r est arbitraire; mais maintenant elle doit être déterminée de telle sorte qu'on ait

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0 \text{ pour } x = X \qquad (8)$$

Cette équation (8) peut se réduire soit à $V = 0$, soit à $\frac{dV}{dx} = 0$, pour $x = X$, en faisant H infinie ou nulle.

On aura ainsi une équation en r que nous représenterons par $F(r) = 0$ et qui fournira différentes valeurs de cette inconnue r.

Il est clair qu'on obtiendrait la même équation $F(r) = 0$, si

l'on se donnait la valeur de l'une des quantités $V, \frac{dV}{dx}$, pour $x = X$, qu'on tirât celle de l'autre de l'équation (8), et qu'on substituât les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ que fournirait l'intégration de l'équation différentielle (6) dans l'équation (7) qui doit avoir lieu pour $x = x$.

Il faut maintenant examiner les propriétés des racines de cette équation $F(r) = 0$.

III.

Nous allons démontrer d'abord que *cette équation en* r, $F(r) = 0$, *ne peut point avoir de racines imaginaires.*

Supposons, s'il est possible, que l'équation $F(r) = 0$ soit vérifiée par une valeur imaginaire de r de cette forme, $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, λ et μ étant des quantités réelles. Si l'on substitue cette racine $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ à la place de r dans V qui est une fonction de x et de r, V deviendra de la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles de x, λ et μ. Les trois équations (6), (7), (8) devront donc être identiquement satisfaites, si l'on y met $P + Q\sqrt{-1}$, à la place de V et $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ à la place de r. En faisant cette substitution, puis égalant séparément à zéro la somme des termes réels et celle des termes qui renferment $\sqrt{-1}$ comme facteur, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(k\frac{dP}{dx}\right)}{dx} + (g\lambda - l)\,P - g\mu\,Q = 0 \\ &\frac{d.\left(k\frac{dQ}{dx}\right)}{dx} + (g\lambda - l)\,Q + g\mu\,P = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et $$k\frac{dP}{dx} - hP = 0, \quad k\frac{dQ}{dx} - hQ = 0, \text{ pour } x = x \quad (10)$$

$$k\frac{dP}{dx} + HP = 0, \quad k\frac{dQ}{dx} + HQ = 0, \text{ pour } x = X. \quad (11).$$

En multipliant la première des équations (9) par Q, la seconde par P, puis retranchant, il vient

$$Q.d.\left(k\frac{dP}{dx}\right) - P.d.\left(k\frac{dQ}{dx}\right) = \mu.g\,(P^2 + Q^2)\,dx \quad (12).$$

Intégrons les deux membres de cette équation depuis $x = x$ jusqu'à

$x = \mathrm{X}$. En intégrant par parties le terme $\mathrm{Q}.d.k\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)$ sans fixer d'abord les limites de l'intégration, on trouve

$$\int \mathrm{Q}.d.\left(k\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) = \mathrm{Q}.\ k\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \int k\frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\,dx$$
$$= \mathrm{Q}.\ k\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}.k\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \int \mathrm{P}.d.\left(k\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right);$$

d'où $$\int \mathrm{Q}.d.\left(k\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) - \int \mathrm{P}.d.\left(k\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right) = k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right).$$

L'intégrale du premier membre de l'équation (12) prise entre les limites x et X est donc égale à la valeur que prend l'expression $k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)$ pour $x = \mathrm{X}$, moins celle qu'elle prend pour $x = \mathrm{x}$. Or, en vertu des équations (10) et (11), $k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)$ se trouve nulle, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$. Ainsi l'intégrale du premier membre de l'équation (12) prise entre les limites x et X se réduit à zéro, et par conséquent celle du second membre est aussi nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\mu.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\,(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\,dx = 0. \qquad (13)$$

Mais comme la fonction g est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, l'intégrale $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\,(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\,dx$ ne peut pas être nulle; car elle est la somme des valeurs de la différentielle $g\,(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\,dx$ qui est positive, quand P et Q ne sont pas nulles. Or, P et Q ne peuvent pas être nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X; en effet leurs valeurs pour $x = \mathrm{x}$ sont arbitraires, puisqu'on peut se donner à volonté la valeur de V pour $x = \mathrm{x}$ (si toutefois on ne doit pas avoir $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$); et l'on voit de plus d'après la forme des équations (10) et (9) qu'elles doivent donner pour P et Q des valeurs réelles différentes de zéro, quand x croît à partir de x. Si l'on avait $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on observerait que pour les valeurs de x un peu plus grandes que x on n'aurait pas $\mathrm{V} = 0$, puisque $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ ne doit pas être nulle en même temps que V pour $x = \mathrm{x}$. L'équation (13) à laquelle on vient d'arriver est donc absurde, à moins que μ ne soit nulle. Ainsi l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne

peut point avoir de racines imaginaires de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$. On remarquera que cette proposition a lieu, lors même que la fonction l ne serait pas constamment positive entre les limites x et X, et que les constantes h et H ne seraient pas aussi toutes deux positives, comme on l'a supposé, n° 1; il faut seulement que g et k soient positives.

IV.

C'est à M. Poisson qu'est due la première démonstration générale et rigoureuse de la réalité des racines de ces équations transcendantes auxquelles on est conduit dans la résolution des problèmes de physique mathématique. Il l'a donnée d'abord dans le *Bulletin de la Société philomathique* pour l'année 1828, et l'a reproduite dans d'autres mémoires et dans sa *Théorie de la Chaleur*, page 178.

Je crois devoir appliquer cette démonstration de M. Poisson à l'équation $F(r) = 0$ dont il est ici question. On verra que celle du numéro précédent est au fond la même, et n'en diffère que par la forme. Je ferai voir en outre que la même équation $F(r)=0$ n'a pas de racines égales. Mais auparavant il faut établir les formules qui servent de base à ces démonstrations, et qui ont d'ailleurs un autre usage.

Considérons r comme variable, en supposant que la fonction $V(x, r)$ soit assujettie à vérifier seulement les deux équations (6) et (7),

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0, \qquad (6)$$

et

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = x. \qquad (7)$$

On n'a point égard ici à l'autre condition (8) qui doit servir à déterminer les valeurs de r. Attribuons à r une autre valeur r', et désignons par V' ce que devient la fonction V par le changement de r en r', nous aurons aussi

$$\frac{d.\left(k\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + (gr' - l)V' = 0, \qquad (6')$$

et

$$k\frac{dV'}{dx} - hV' = 0 \text{ pour } x = x. \qquad (7')$$

En multipliant l'équation (6) par V', l'équation (6') par V, et re-

tranchant, on a la suivante

$$V.d\left(k\frac{dV'}{dx}\right) - V'.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) = (r-r')gVV'dx$$

Son premier membre est la différentielle de l'expression..... $k\left(V\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV}{dx}\right)$, qui est nulle pour $x = \mathrm{x}$ en vertu des équations (7) et 7'). Donc en intégrant les deux membres de cette équation depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, on aura

$$(r-r')\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVV'dx = k\left(V\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV}{dx}\right) \text{ pour } x = \mathrm{X}. \qquad (14)$$

Si l'on différentie cette équation (14) par rapport à l'indéterminée r qui entre dans V et non dans V', on aura

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVV'dx + (r-r')\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gV'\frac{dV}{dr}dx = k\left(\frac{dV}{dr}\frac{dV'}{dx} - V'\frac{ddV}{dxdr}\right) \text{pour } x = \mathrm{X}.$$

En faisant dans cette dernière équation $r' = r$, V' se change en V, et l'on obtient cette formule

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gV^2dx = k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right) \text{ pour } x = \mathrm{X}. \qquad (15)$$

On peut encore y arriver de la manière suivante, sans faire usage des équations (6') et (7').

En différentiant l'équation (6)

$$\frac{\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0, \qquad (6)$$

par rapport à r, on a

$$\frac{d\left(k\frac{ddV}{dxdr}\right)}{dx} + (gr - l)\frac{dV}{dr} + gV = 0$$

En multipliant cette équation par V et l'autre (6) par $\frac{dV}{dr}$, puis retranchant, on obtient

$$gV^2dx = \frac{dV}{dr}.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(k\frac{ddV}{dxdr}\right).$$

Le second membre de cette équation est la différentielle de $k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right)$, et cette expression se réduit à zéro pour $x = \mathrm{x}$; car on a

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

d'où l'on tire en différentiant, par rapport à r,

$$k\frac{ddV}{dxdr} - h\frac{dV}{dr} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

et de là résulte

$$k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right) = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$

En intégrant donc l'équation qui précède entre les limites x et X, on retrouvera la formule (15).

On en déduit encore, H étant une constante,

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gV^2dx = \left(k\frac{dV}{dx} + \mathrm{H}V\right)\frac{dV}{dr} - V.\frac{d}{dr}\left(k\frac{dV}{dx} + \mathrm{H}V\right) \text{pour } \mathrm{x}=\mathrm{X}. \quad (16)$$

Au surplus, les formules (14) et (15) sont comprises dans les formules (9) et (4) de notre premier Mémoire (*), nos IV et V, dont elles se déduisent en y remplaçant l'indéterminée m par r, et prenant X pour la seconde limite de l'intégration.

Supposons maintenant qu'on prenne pour r et r' deux racines différentes de l'équation $F(r) = 0$, c'est-à-dire deux valeurs telles qu'on ait

$$k\frac{dV}{dx} + \mathrm{H}V = 0, \quad \text{et } k\frac{dV'}{dx} + \mathrm{H}V' = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}.$$

Alors le second membre de l'équation (14) sera nul, et cette équation deviendra

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVV'dx = 0; \quad (17)$$

Mais si l'on prend pour r et r' une seule et même racine de l'équation $F(r) = 0$, l'intégrale définie $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVV'dx$ n'est plus nulle, car elle devient $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gV^2dx$, quantité essentiellement positive. D'après la formule (16) on a alors

(*) *Mémoire sur les Equations différentielles linéaires du second ordre.*

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2 dx = -\mathrm{V}.\frac{d.}{dr}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}\right) \text{ pour } x = \mathrm{X}, \qquad (18)$$

puisqu'on suppose que la valeur actuelle de r annulle $k\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}$ pour $x = \mathrm{X}$.

D'après M. Poisson, la réalité des racines de l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ résulte très simplement de la formule (17). Supposons que cette équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ait une racine imaginaire $\lambda + \mu\sqrt{-1}$. Si l'on prend $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$, la fonction V qui vérifie les trois équations (6), (7) et (8), deviendra $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles dépendantes de x, λ et μ, qui ne seront pas nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. En effet, leurs valeurs pour l'une de ces limites, par exemple pour $x = \mathrm{x}$, sont arbitraires (si toutefois on ne doit pas avoir $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$); et d'ailleurs quand on fait $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$ dans les équations (6) et (7), elles se partagent en d'autres (qui sont les équations (9) et (10) du n° III), qui doivent visiblement donner des valeurs de P et de Q différentes de zéro pour des valeurs de x croissantes à partir de x. Cela serait encore vrai, lors même qu'on supposerait $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, attendu qu'on ne peut pas avoir en même temps $\frac{d\mathrm{V}}{dx} = 0$. Ces remarques ont déjà été faites au n° III.

L'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ayant pour racine $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, il est aisé de voir, en changeant dans les formules $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, qu'elle aura aussi pour racine $\lambda - \mu\sqrt{-1}$, et en faisant $r' = \lambda - \mu\sqrt{-1}$ dans l'équation (6') du n° précédent, on aura $\mathrm{V}' = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1}$.

En mettant ces expressions de V et de V' dans la formule (17), on trouvera

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)dx = 0,$$

ce qui est impossible, puisque g est une fonction positive de x, et que P et Q ne peuvent être nulles que pour des valeurs e dx particulières.

L'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut donc pas avoir des racines imaginaires de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$.

J'ajouterai qu'elle n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'une même valeur de r ne peut pas réduire à zéro en même temps la fonction $k\frac{dV}{dx}+HV$ et sa dérivée $\frac{d.}{dr}\left(k\frac{dV}{dx}+HV\right)$, où l'on fait $x=X$; c'est ce qui résulte immédiatement de la formule (16). D'ailleurs cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle qui est énoncée à la fin du n° XX du premier Mémoire.

V.

On peut encore s'assurer que l'équation $F(r)=0$ n'a point de racines imaginaires ni égales par une démonstration analogue à celle dont Laplace a fait usage dans le 6e chapitre du 2e livre de la *Mécanique céleste* pour prouver la réalité des racines d'une équation algébrique provenant de l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires.

Soient p et q deux variables fonctions de x et de t qui vérifient les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} g\frac{dp}{dt} &= \frac{d.\left(k\frac{dq}{dx}\right)}{dx} - lq \\ g\frac{dq}{dt} &= \frac{d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)}{dx} + lp \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} k\frac{dp}{dx} - hp = 0, \quad k\frac{dq}{dx} - hq = 0, \text{ pour } x = x \\ k\frac{dp}{dx} + Hp = 0, \quad k\frac{dq}{dx} + Hq = 0, \text{ pour } x = X \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

On satisfait à ces équations en supposant

$$\left.\begin{aligned} p &= V.\cos.rt \\ q &= V.\sin.rt \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

les quantités V et r étant les mêmes que précédemment.

En effet en substituant ces valeurs de p et de q dans les équations (19) et (20) on obtient les équations (6), (7) et (8) d'où résulte l'équation en r, $F(r)=0$.

Supposons que cette équation puisse avoir une racine imaginaire $\lambda+u\sqrt{-1}$. Pour cette valeur de r, V se changera en

$P + Q\sqrt{-1}$, et pour que les valeurs de p et de q ne cessent pas d'être réelles, on les modifiera de la manière suivante.

On a d'après les formules (21):

$$p + q\sqrt{-1} = V.(\cos. rt + \sqrt{-1}\sin. rt) = V.e^{rt\sqrt{-1}}$$
$$=(P+Q\sqrt{-1})e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})t\sqrt{-1}} = (P+Q\sqrt{-1})(\cos.\lambda t + \sqrt{-1}\sin.\lambda t).e^{-\mu t}$$

d'où l'on tire en séparant les parties réelles d'avec les imaginaires,

$$\begin{aligned} p &= (P\cos.\lambda t - Q\sin.\lambda t).e^{-\mu t}, \\ q &= (P\sin.\lambda t + Q\cos.\lambda t).e^{-\mu t}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Cette nouvelle expression de p est la demi-somme des deux valeurs de $V.\cos. rt$ qui répondent à $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et à $r = \lambda - \mu\sqrt{-1}$, il en est de même pour q. On peut au surplus s'assurer par une vérification directe que ces valeurs (22) satisfont aux équations (19) et (20). Car leur substitution dans ces équations reproduit les équations (9), (10) et (11) dans lesquelles se transforment les équations (6), (7) et (8) quand on fait $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$.

Maintenant je multiplie les équations (19), la première par $2\,pdx$ la seconde par $2qdx$, et je trouve en ajoutant

$$g\left(\frac{2pdp + 2qdq}{dt}\right)dx = 2p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - 2q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right).$$

Intégrant les deux membres de cette équation par rapport à x depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, j'obtiens

$$\frac{d}{dt}.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g(p^2 + q^2)dx = 2.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}}\left[p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)\right] \qquad (23)$$

Mais l'intégrale de $p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)$ est $k\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)$ expression qui est nulle, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$, à cause des équations (20). L'équation (23) se réduit donc à celle-ci

$$\frac{d}{dt}.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g(p^2 + q^2)\,dx = 0.$$

qui donne en intégrant par rapport à t

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g(p^2 + q^2)\,dx = \text{constante}.$$

Je substitue maintenant dans cette équation les valeurs (22) de p et de q, et je trouve

$$e^{-2\mu t}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\,(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,dx = \text{constante},$$

résultat absurde, puisque l'intégrale définie qui multiplie ici l'exponentielle $e^{-2\mu t}$ ne dépend pas de t et qu'elle ne peut pas être nulle, attendu que g est une quantité positive, et que d'ailleurs P et Q ne peuvent pas être nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. On prouverait d'une manière semblable que l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut pas avoir de racines multiples.

VI.

Je vais maintenant faire voir que l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut pas être vérifiée par une valeur de r négative ou nulle, si les fonctions k, g, l, et les constantes h, H, sont positives, comme on l'a supposé n° I.

En intégrant l'équation (6) par rapport à x depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on a

$$k\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \mathrm{C} + \int_{\mathrm{x}}^{x}(-gr+l)\mathrm{V}dx. \qquad (24)$$

La constante C est égale à la valeur de $k\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$. Si V ne doit pas être nulle pour $x = \mathrm{x}$, on peut lui attribuer une valeur arbitraire, et supposer cette valeur positive; d'après l'équation (7) celle de $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ sera aussi positive ou nulle; et si V était nulle pour $x = \mathrm{x}$, on prendrait toujours la valeur de $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ positive. Ainsi C est positive ou nulle dans l'équation (24). Il résulte de cette équation que si l'on donne à r une valeur négative ou nulle $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ doit être positive pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X. En effet, supposons, s'il est possible, qu'en faisant croître x à partir de x, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ vienne à changer de signe en s'évanouissant une première fois pour $x = \xi$. L'équation (24) donnera

$$0 = C + \int_{x}^{\xi} (-gr+l)V dx. \qquad (25)$$

Or ici C est positive ou nulle, et comme $\frac{dV}{dx}$ est positive pour toutes les valeurs de x moindres que ξ, V qui est positive ou nulle pour $x = x$, prendra des valeurs croissantes et par conséquent positives, tandis que x croîtra depuis x jusqu'à ξ. Donc, si l'on suppose r négative ou nulle, les fonctions g et l étant positives, l'intégrale $\int_{x}^{\xi} (-gr+l)V dx$ sera une quantité positive, et l'équation (25) sera impossible.

Ainsi, quand on attribue à r une valeur négative ou nulle, $\frac{dV}{dx}$ doit demeurer positive dans tout l'intervalle compris entre x et X. Conséquemment V est positive et croissante dans cet intervalle, et il s'ensuit, d'après l'équation (24), que la fonction positive $k\frac{dV}{dx}$ est aussi croissante. La fonction $k\frac{dV}{dx} + HV$ est donc encore positive et croissante, et ne peut pas être nulle, lorsque x atteint la limite X, c'est-à-dire que l'équation $F(r) = 0$ ne peut pas être vérifiée par une valeur de r négative, ni par $r = 0$.

On peut encore le démontrer de la manière suivante.

On a, en multipliant l'équation (16) par $V dx$, puis intégrant depuis $x = x$,

$$\int_{x}^{x} V.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) + \int_{x}^{x} (gr-l)V^2 dx = 0.$$

L'intégration par parties donne

$$\int V.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) = V.k\frac{dV}{dx} - \int k\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dx;$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$kV\frac{dV}{dx} = C + \int_{x}^{x} k\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \int_{x}^{x} (-gr+l)V^2 dx. \qquad (26)$$

La constante C étant égale à la valeur de $kV\frac{dV}{dx}$ pour $x = x$, est positive ou nulle, d'après l'équation (7).

Si l'on fait r négative ou nulle, on voit que le second membre de cette équation aura une valeur positive et croissante avec x, de sorte qu'il ne pourra pas devenir nul; donc $kV\frac{dV}{dx}$, et conséquemment ni V, ni $\frac{dV}{dx}$ ne peut s'évanouir quand on attribue à r une valeur négative ou nulle; V et $\frac{dV}{dx}$ restent donc positives, et l'on ne peut pas avoir $k\frac{dV}{dx}+HV=0$ pour $x=X$, H étant positive.

Si la fonction l n'était pas constamment positive entre les limites x et X, mais que les fonctions k, g et les constantes h, H fussent toujours positives, il serait possible que l'équation $F(r)=0$ fût satisfaite par des valeurs de r négatives ou par $r=0$. Mais alors les racines négatives de cette équation seraient en nombre limité, et toutes comprises entre 0 et la plus grande valeur négative de $\frac{l}{g}$ (c'est-à-dire la plus éloignée de zéro). En effet, si l'on attribue à r une valeur négative qui surpasse numériquement $\frac{l}{g}$, la quantité $-gr+l$ sera constamment positive, et l'on reconnaîtra, en reprenant les démonstrations précédentes, que les fonctions $\frac{dV}{dx}$ et V ne pourront point passer du positif au négatif pour aucune valeur de x.

La plus petite racine de l'équation $F(r)=0$ serait $r=0$, si l était nulle, et si l'on supposait $k\frac{dV}{dx}=0$ pour $x=x$ et pour $x=X$; alors V serait égale à une constante.

On peut encore démontrer les propositions de ce numéro à l'aide de la théorie exposée dans notre premier Mémoire.

VII.

L'équation $F(r)=0$ *a une infinité de racines positives.*

Cette proposition peut se déduire du n° XL du premier Mémoire. Mais nous préférons la démontrer directement de la manière suivante.

Soient k' et n des constantes positives telles qu'on ait pour chaque valeur de x comprise entre x et X

$$k < k' \quad \text{et} \quad gr - l > k'n^2.$$

Posons l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(k'\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + k'n^2.V' = 0,$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + n^2V' = 0.$$

Elle a pour intégrale $V' = C\sin.(nx + c)$.
On peut prendre la constante arbitraire c telle qu'on ait

$$\frac{k'\frac{dV'}{dx}}{V'} = \frac{k\frac{dV}{dx}}{V} \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

ou bien $V' = 0$, si V est nulle pour $x = \mathrm{x}$.

Cela posé, il résulte du théorème du n° XII du premier Mémoire que la fonction V doit s'évanouir et changer de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que V', et en outre d'après le n° XVI deux valeurs de x consécutives qui annullent V' doivent toujours comprendre au moins une valeur de x qui annulle V. Mais V' s'annulle pour une suite de valeurs de x équidifférentes dont la différence constante est $\frac{\pi}{n}$. Donc V doit s'évanouir entre x et X au moins autant de fois que l'intervalle $\mathrm{X} - \mathrm{x}$ contient $\frac{\pi}{n}$ ou autant de fois qu'il y a d'unités entières dans $\frac{n(\mathrm{X} - \mathrm{x})}{\pi}$. Or on peut rendre ce nombre plus grand que tout nombre donné, en faisant croître r indéfiniment; car on peut prendre n aussi grand qu'on voudra, et remplir toujours la condition $gr - l > k'n^2$, en attribuant à r des valeurs positives suffisamment grandes.

Concevons maintenant que r croisse par degrés insensibles depuis 0 jusqu'à une valeur R; la fonction $gr - l$ croîtra en même temps que r. Si l'on suppose toujours que, quelle que soit r, on ait

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

$\left(\text{ce qui revient à } \frac{k\frac{dV}{dx}}{V} = h\right)$ et si l'on observe que, quand $r=0$, V ne s'évanouit pas entre les limites x et X, on conclura de la deuxième partie du théorème du n° XII, en y remplaçant le paramètre m par r, que le nombre des valeurs de r comprises entre o et R qui annullent la fonction $V(X, r)$ est égal au nombre i des valeurs de x qui annullent $V(x, R)$ entre les limites x et X. Il résulte ensuite du n° XX du même mémoire que le nombre des valeurs de r comprises entre o et R qui satisfont à l'équation $F(r)=0$, c'est-à-dire qui annullent la fonction $k\frac{dV}{dx}+HV$ où l'on fait $x=X$ est égal à i ou à $i+1$, selon que la fonction $\frac{k\frac{dV}{dx}+HV}{V}$ est positive ou négative pour $x=X$ et $r=R$, sa valeur pour $x=X$ et $r=0$ étant positive, comme on l'a vu plus haut n° V.

L'équation $F(r)=0$ a donc une infinité de racines positives, puisque i augmente jusqu'à l'infini, quand on prend la quantité R de plus en plus grande.

VIII.

Nous désignerons par ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc. les différentes racines de l'équation $F(r)=0$ rangées par ordre de grandeur en commençant par les plus petites. Pour chacune de ces valeurs de r, les trois équations (6), (7), (8) sont vérifiées en même temps. Nous représenterons généralement par V_i la fonction V correspondante à la racine ρ_i : elle renferme implicitement comme facteur une constante arbitraire.

On a supposé n° II, $u=Ve^{-rt}$ pour satisfaire aux trois équations (1), (2), (3). On a donc maintenant une infinité de solutions particulières de cette forme; savoir

$$u=V_1e^{-\rho_1 t},\quad u=V_2e^{-\rho_2 t},\quad u=V_3e^{-\rho_3 t},\quad \text{etc.},$$

et en général,

$$u=V_ie^{-\rho_i t}. \tag{27}$$

Cette valeur (27) de u qui vérifie les équations (1), (2), (3) satisfera en outre à l'équation (4) si les températures initiales des différents points de la barre sont exprimées par la fonction V_i. Alors la formule

(27) remplit toutes les conditions du problème : les températures variables de tous les points de la barre sont à chaque instant proportionnelles à leurs valeurs initiales ; et si l'on conçoit que le temps croisse par intervalles égaux, les valeurs numériques de ces températures décroissent comme les puissances successives d'une même fraction dont le logarithme pris positivement est proportionnel à ρ_i; de sorte qu'elles s'approchent de zéro d'autant plus rapidement que la racine ρ_i est plus grande. Nous allons faire connaître les principales propriétés qui distinguent ces différents *états simples* représentés par les formules (27) où les températures variables sont exprimées par un seul terme. Ces propriétés ne sont autres que celles des fonctions $V_1, V_2, \ldots V_i, \ldots$ et se déduisent de la théorie exposée dans notre premier mémoire.

IX.

En considérant r comme variable, nous supposerons toujours, comme dans les n°s VI et VII, que la fonction $V(x, r)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0$$

remplit la condition

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = X.$$

Cela posé, la quantité $\frac{k\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ étant positive pour $x = X$ et $r = 0$, comme on l'a vu n° VI, on conclut du théorème du n° XX du premier Mémoire, que les deux fonctions V et $k\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$ doivent s'évanouir et changer de signe alternativement pour des valeurs croissantes de r, et que c'est $k\frac{dV}{dx} + HV$ qui s'évanouit la première.

Ainsi, $V(X, r)$ qui est positive quand $r = 0$, demeure positive tandis que r croît depuis 0 jusqu'à ρ_1; elle change de signe une fois et devient négative pour une valeur de r comprise entre ρ_1 et ρ_2; elle

s'évanouit une seconde fois pour redevenir positive quand x croît depuis ρ_2 jusqu'à ρ_3, et ainsi de suite.

De là et du n° XII du premier Mémoire on conclut encore les propriétés suivantes : V_1 ne change pas de signe ou demeure positive entre les limites x et X (comme $V(x, r)$ quand $r=0$). V_2 change de signe une fois pour une valeur de x comprise entre ces limites. V_3 change de signe deux fois entre les mêmes limites, et en général V_i change de signe $i-1$ fois entre x et X.

Si l'on devait avoir $V=0$ pour $x=X$ au lieu de $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ (ce qui revient à supposer H infinie dans l'équation (8), V_i s'évanouirait toujours pour $i-1$ valeurs de x plus grandes que x, en comptant X parmi ces valeurs. Et si l'on avait $V=0$ pour $x=x$, au lieu de $k\frac{dV}{dx}-hV=0$, V_i s'évanouirait encore pour $i-1$ valeurs de x plus grandes que x; X pouvant être encore la plus grande de ces valeurs.

X.

D'après les n°s XVI et XVII du premier Mémoire, la valeur de x unique qui annulle V_2 est comprise entre les deux valeurs de x qui annullent V_3; chaque valeur de x qui annulle V_3 tombe seule entre deux des trois valeurs qui annullent V_4; en général, les deux fonctions V_i et V_{i+1} correspondantes à deux racines consécutives ρ_i, ρ_{i+1} de l'équation $F(r)=0$, s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X, et c'est V_{i+1} qui s'annulle la première. Il en sera de même si l'on a $V=0$ pour $x=x$, pourvu qu'on ne compte pas x parmi les valeurs de x qui annullent V_i et V_{i+1}.

Si l'on compare les deux fonctions correspondantes à deux racines de rangs quelconques ρ_i et $\rho_{i+\Delta}$, la $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle V_i est plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$, et plus petite que la valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$ dont le rang à partir de x est marqué par $n+\Delta$.

D'après les n°s XVI et XVIII du premier Mémoire, deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$. Si l'on considère deux valeurs de

x quelconques a et b entre x et X (a pouvant être égale à x et b à X), $V_{i+\Delta}$ ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que V_i; $V_{i+\Delta}$ s'évanouit entre a et b au plus Δ fois de plus que V_i, et entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i il ne peut exister plus de Δ valeurs de x qui annullent $V_{i+\Delta}$.

A ces propositions il faut ajouter les remarques énoncées à la fin du n° XVIII, en y remplaçant V' par V_i et V'' par $V_{i+\Delta}$.

D'après une observation générale que nous avons faite n° XLIII de notre premier mémoire, on peut encore à l'aide des théorèmes des n°s XII, XVI, XVII et XVIII, comparer les changements de signe qu'éprouve la fonction V_i dans l'intervalle compris entre a et b, avec ceux qu'éprouve la même fonction V_i, ou une autre V_n correspondante à une autre racine ρ_n, dans un second intervalle égal au premier $b-a$, et compris entre deux autres valeurs de x, a' et b'.

Par exemple, si a et b sont deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i, et si en superposant les deux intervalles égaux $b-a$ et $b'-a'$ on trouve que les valeurs de la fonction $g\rho_i - l$ dans le premier intervalle sont plus petites que les valeurs correspondantes de $g\rho_i - l$ ou de $g\rho_n - l$ dans le second, et que celles de k sont au contraire plus grandes dans le premier que dans le second, on sera certain que V_i ou V_n change de signe au moins une fois dans ce second intervalle, V_i ou V_n pouvant d'ailleurs être nulle pour $x=a'$ ou $x=b'$.

XI.

Soit p une quantité constante ou une fonction de x telle qu'on ait pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X

$$(g\rho_i - l)\,k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

On aura aussi *à fortiori*

$$(g\rho_{i+\Delta} - l)\,k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0.$$

Nous allons comparer les valeurs de x qui annullent les deux fonctions

$k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ et $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ qu'on obtient en faisant $r=\rho_i$ et $r=\rho_{i+\Delta}$ dans l'expression $k\frac{dV}{dx}+pV$.

Quelle que soit la racine de l'équation $F(r)=0$ qu'on substitue à la place de r dans $\frac{k\frac{dV}{dx}+pV}{V}$, cette quantité a toujours une valeur constante $h+p$ pour $x=x$, et une autre valeur constante $-H+p$ pour $x=X$, en vertu des équations (7) et (8). Si l'on fait croître r d'une manière continue depuis ρ_i jusqu'à $\rho_{i+\Delta}$ en supposant toujours $\frac{\frac{dV}{dx}}{V}=h$ pour $x=x$, la fonction $\frac{k\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ où l'on fait $x=X$ variera, et comme elle a pour $r=\rho_i$ et pour $r=\rho_{i+\Delta}$ une seule et même valeur $-H+p$, et conséquemment le même signe, on en conclut d'après le théorème du n° XX du premier mémoire, que r croissant depuis ρ_i jusqu'à $\rho_{i+\Delta}$, la fonction $k\frac{dV}{dx}+pV$ où l'on fait $x=X$ doit s'évanouir et change de signe le même nombre de fois que $V(X,r)$, c'est-à-dire Δ fois. Il s'ensuit, d'après le n° XXVI, que la fonction $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ s'évanouit entre les limites x et X, Δ fois de plus que $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$: d'ailleurs chacune change toujours de signe en s'évanouissant.

XII.

Cela posé, on peut appliquer à ces deux fonctions les propositions énoncées dans le n° XXIX du premier Mémoire, en remplaçant dans ce numéro

$$K'\frac{dV'}{dx}+pV' \text{ par } k\frac{dV_i}{dx}+pV_i, \quad K''\frac{dV''}{dx''}+pV'' \text{ par } k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$$

et le nombre ε par Δ.

Ainsi deux valeurs de x consécutives qui annullent $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$

et deux valeurs de x consécutives qui annullent $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle $K\frac{dV_i}{dx}+pV_i$.

La $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ est plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ et plus petite qu'une autre valeur de x qui annulle $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ d'un rang marqué par $n+\Delta$ (à partir de x). En faisant en particulier $\Delta=1$, on voit que les deux fonctions $k\frac{dV_{i+1}}{dx}+pV_{i+1}$ et $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X_i.

Si l'on prend entre x et X des valeurs a et b, $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ ne peut s'évanouir qu'une fois de moins que $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ entre ces limites a et b et s'évanouit au plus Δ fois de plus que $K\frac{dV_i}{dx}+pV_i$. Conséquemment entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$, il ne peut exister plus de Δ valeurs de x qui annullent $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$. Il faut joindre à ces propositions tirées du n° XXIX les remarques qui terminent ce numéro.

D'après le n° XXXII, la fonction $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ doit changer de signe une fois ou un nombre impair de fois dans l'intervalle compris entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i, elle ne peut pas s'évanouir sans changer de signe si la condition (28) est toujours remplie.

De plus si la quantité $\frac{k\frac{dV_i}{dx}+pV_i}{V_i}$ est positive pour une certaine valeur de x, $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ changera de signe une fois ou un nombre

impair de fois dans l'intervalle compris entre cette valeur de x et celle immédiatement supérieure qui annulle V_i; et $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois dans l'intervalle compris entre la même valeur de x et celle immédiatement inférieure qui annulle V_i. L'inverse aura lieu, si $\frac{k\frac{dV_i}{dx}+pV_i}{V_i}$ est négative pour la valeur de x que l'on considère.

XIII.

Supposons actuellement que p soit une quantité constante ou une fonction de x qui décroisse continuellement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X et qui remplisse toujours la condition

$$(g\rho_1 - l)k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

Il peut se faire que quelques-unes des fonctions $g\rho_1 - l$, $g\rho_2 - l, \ldots$ $g\rho_i - l$, etc., changent de signe entre les limites x et X. Mais pour toutes les valeurs de r supérieures à la plus grande valeur de $\frac{l}{g}$, $gr - l$ sera constamment positive entre ces limites. Soit $\rho_{i+\Delta}$ l'une de ces valeurs de r. Alors la fonction $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ jouira des propriétés énoncées dans le n° XXXI du premier Mémoire. Ainsi elle s'évanouira entre les limites x et X, autant de fois que $V_{i+\Delta}$ ou une fois de plus, ou une fois de moins, c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $i+\Delta-1$ ou $i+\Delta$ ou $i+\Delta-2$, selon que les valeurs $h+p$ et $-H+p$ de $\frac{k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}}{V_{i+\Delta}}$ pour $x=x$ et pour $x=X$ seront toutes deux de même signe, ou la première positive et la seconde négative; ou enfin la première négative et la seconde positive. En outre, d'après le même n° XXXI ces deux fonctions doivent s'évanouir l'une après l'autre alternativement quand x croît depuis x jusqu'à X, et suivant l'ordre indiqué dans ce numéro.

Considérons maintenant la fonction $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$. Elle s'évanouit toujours Δ fois de moins que $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx} + pV_{i+\Delta}$ entre x et X, pourvu que la condition (28). soit toujours vérifiée. Donc les valeurs de $\frac{\frac{dV_i}{dx} + pV_i}{V_i}$ pour $x = x$ et pour $x = X$ étant les mêmes que celles de $\frac{\frac{dV_{i+\Delta}}{dx} + pV_{i+\Delta}}{V_{i+\Delta}}$ savoir $h + p$ et $-H + p$, on voit que cette fonction $K\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit s'évanouir un nombre de fois marqué par $i - 1$ ou i ou $i - 2$, selon que ces valeurs $h + p$ et $-H + p$ de $\frac{k\frac{dV_i}{dx} + pV_i}{V_i}$ pour $x = x$ et $x = X$ seront toutes deux de même signe ou la première positive et la seconde négative, ou enfin la première négative et la seconde positive.

Dans le premier cas, où les deux fonctions V_i et $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ s'évanouissent le même nombre de fois $i - 1$ entre x et X, je dis qu'elles doivent s'évanouir l'une après l'autre alternativement pour des valeurs de x croissantes, et que c'est $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ ou V_i qui s'annulle la première selon que les valeurs $h + p$ et $-H + p$ pour $x = x$ et $x = X$ sont toutes deux positives ou toutes deux négatives.

Car d'après le n° XXXII, $K\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit changer de signe au moins une fois dans l'intervalle compris entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i et de plus $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit changer de signe au moins une fois entre x et la plus petite valeur de x qui annulle V_i, si $h + p$ est positive pour $x = x$, ou bien une fois au moins entre X et la plus grande valeur de x qui annulle V_i si $-H + p$ est négative pour $x = X$. Donc ces deux fonctions devant s'évanouir le même nombre de fois $i - 1$ ne peuvent s'annuller que l'une après l'autre alternativement.

On voit de même que si $h+p$ est positive pour $x=\mathrm{x}$ et $-\mathrm{H}+p$ négative pour $x=\mathrm{X}$, les deux fonctions V_i et $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ s'évanouiront encore l'une après l'autre alternativement, et que $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ qui doit s'évanouir une fois de plus que V_i, deviendra nulle la première. Enfin si $h+p$ pour $x=\mathrm{x}$ est négative et $-\mathrm{H}+p$ pour $x=\mathrm{X}$ positive, les deux mêmes fonctions s'évanouiront encore l'une après l'autre tour à tour, V_i deviendra nulle la première et le sera une fois de plus que $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$.

Ces propriétés ont lieu pourvu qu'on ait constamment depuis x jusqu'à X,

$$(g\rho_i - l)\,k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0 \qquad (28)$$

et que p ne croisse pas, tandis que x augmente.

Cette condition (28) sera remplie, si la fonction $g\rho_i - l$ reste positive entre les limites x et X; alors on peut ajouter à ce qui précède que $\frac{k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i}{\mathrm{V}_i}$ décroîtra continuellement tandis que x croîtra depuis une valeur quelconque jusqu'à celle immédiatement supérieure qui annulle V_i. Enfin d'après le n° XXXIII, $g\rho_i - l$ étant toujours positive, si l'on prend successivement pour p des valeurs constantes croissantes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ ou des fonctions de x de plus en plus grandes qui décroissent tandis que x croît depuis x jusqu'à X, chaque valeur de x qui annulle $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ augmentera en même temps que p, sans cesser d'être seule comprise entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i; celles-ci répondent à $p=\pm\infty$.

XIV.

Les valeurs de x qui annullent $\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}$ répondent à $p=0$. Quand on fait $p=0$, la condition (28) se réduit à $g\rho_i - l > 0$. Alors, d'après le n° XXV et aussi d'après le n° XXX du 1er mémoire, pour chaque

annulle $\frac{dV_i}{dx}$, $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ passe toujours du positif au négatif, et V_i devient *maximum*, abstraction faite de son signe. V_i n'a pas de *minimum*. En outre, comme $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ a une valeur positive $+h$ pour $x=\mathrm{x}$ et une valeur négative $-\mathrm{H}$ pour $x=\mathrm{X}$ (aucune des constantes h, H n'étant nulle ou infinie) on conclut du n° XXXI que lorsque x croît depuis x jusqu'à X, les deux fonctions V_i et $\frac{dV_i}{dx}$ doivent s'évanouir en changeant de signe l'une après l'autre alternativement; $\frac{dV_i}{dx}$ devient nulle la première et s'évanouit i fois, c'est-à-dire, une fois de plus que V_i, ainsi V_i passe tour à tour d'un *maximum* à zéro, puis de zéro à un autre *maximum* de signe contraire au précédent, puis change de signe de nouveau, et ainsi de suite, sans avoir de *minimum*. De plus, $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ décroît toujours, quand x croît.

La fonction $V_{i+\Delta}$ jouit de ces propriétés en même temps que V_i. On peut d'ailleurs, d'après le n° XXIX où l'on fera $p=0$, comparer les valeurs de x qui annullent $\frac{dV_i}{dx}$ et $\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}$ et pour lesquelles V_i et $V_{i+\Delta}$ deviennent des *maxima*. On voit ainsi qu'entre deux *maxima* consécutifs de V_i il y a toujours au moins un *maximum* de $V_{i+\Delta}$ et entre deux *maxima* consécutifs de $V_{i+\Delta}$ il ne peut exister plus d'un *maximum* de V_i. Le $n^{ième}$ *maximum* de V_i tombe toujours entre les deux *maxima* de $V_{i+\Delta}$ dont les rangs sont n et $n+\Delta$ à partir de x; de sorte que si $\Delta=1$, les deux fonctions V_i et $V_{i+\Delta}$ atteignent leurs *maxima* l'une après l'autre tour à tour. Entre deux limites a et b, $V_{i+\Delta}$ ne peut avoir qu'un *maximum* de moins que V_i et au plus Δ *maxima* de plus que V_i: et conséquemment entre deux *maxima* consécutifs de V_i il ne peut exister plus de Δ *maxima* de $V_{i+\Delta}$. *Voyez* la fin du n° XXIX.

On peut, dans ce qui précède, supposer en particulier $i=1, 2, 3, \ldots$ On en conclut que si la fonction $g\rho_1-l$ est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, V_1 qui ne s'évanouit pas entre ces limites a un *maximum* unique dans leur intervalle.

Si $g\rho_2 - l$ est constamment positive entre x et X, V_2 a deux valeurs *maxima* entre lesquelles elle s'annulle. Et si $g\rho_1 - l$ est aussi positive en même temps que $g\rho_2 - l$, le *maximum* unique de V_1 se trouvera entre les deux *maxima* de V_2.

Si $g\rho_3 - l$ est positive entre x et X, V_3 qui change deux fois de signe entre ces limites aura trois valeurs *maxima* tour à tour positives et négatives.

Si $g\rho_2 - l$ est aussi positive entre x et X, chaque *maximum* de V_2 se trouve placé entre deux *maxima* consécutifs de V_3, et si $g\rho_1 - l$ est aussi positive, le *maximum* unique de V_1 tombera entre le premier et le troisième *maximum* de V_3.

Il en sera de même des fonctions V_4, V_5, etc.

Ce qui précède fait connaître à peu près la forme des courbes qui représentent ces différentes fonctions V_1, V_2, V_3... dans l'intervalle de x à X.

Nous pourrions encore considérer les points d'inflexion de ces courbes qui sont donnés par l'équation $\frac{d^2V_i}{dx^2} = 0$ laquelle à cause de l'équation (8) est la même que la suivante

$$k\frac{dV_i}{dx} + \frac{k(g\rho_i - l)}{\left(\frac{dk}{dx}\right)} V_i = 0.$$

En supposant, dans tout ce qui précède, $p = \frac{k(g\rho_i - l)}{\left(\frac{dk}{dx}\right)}$, si la condition (28) était satisfaite, on pourrait connaître le nombre de ces points d'inflexion sur chaque courbe et les comparer sous le rapport de leurs positions respectives sur la même courbe ou sur des courbes différentes, soit entre eux, soit avec les points d'intersection de ces courbes avec l'axe des x et les points *maxima*. Mais ces détails deviendraient trop longs et auraient peu d'intérêt. Il vaudra mieux ne s'occuper des points d'inflexion que dans chaque problème particulier où les fonctions g, k, l auront des expressions connues.

XV.

Les valeurs des racines de l'équation $F(r) = 0$ dépendent de celle des constantes h et H et des fonctions g, l et k et varient en même temps que ces diverses quantités.

En supposant constante la valeur h de $\frac{k\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = X$, si l'on attribue successivement à H des valeurs positives de plus en plus grandes depuis zéro jusqu'à l'infini, les racines de l'équation $F(r) = 0$, c'est-à-dire les valeurs de r qui annullent la fonction $k\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$, augmenteront toutes à la fois en convergeant vers celles qui annullent $V(X, r)$, d'après le n° XXI du premier mémoire. En même temps la fonction $g\rho_i - l$ devenant plus grande, les valeurs de x qui annullent chaque fonction V_i deviendront plus petites, de sorte que les points de la barre pour lesquels cette fonction V_i est nulle, s'éloignent tous de l'extrémité de la barre correspondante à l'abscisse X, où le pouvoir émissif devient plus grand.

D'après le n° XXVI les valeurs de x qui annullent la fonction $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doivent aussi diminuer, si l'on a

$$(g\rho_i - l)k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

On en conclut en faisant $p = 0$ que, si l'on a $g\rho_i - l > 0$, les valeurs de x qui rendent V_i maximum deviendront aussi plus petites, de sorte que les maxima de V_i s'éloigneront de l'extrémité de l'abscisse X.

Si l'on donne à l'autre constante h des valeurs positives de plus en plus grandes, sans faire varier H, les racines de l'équation $F(r) = 0$ comme aussi celles de l'équation $V(X, r) = 0$ augmenteront toutes à la fois, d'après le n° XXII du premier mémoire, et en même temps d'après le n° XXVIII, les valeurs de x qui annullent chaque fonction V_i deviendront plus grandes, de même que

celles qui annullent $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$, si la condition (28) est remplie. En particulier si l'on a $g\rho_i - l > 0$, les maxima de V_i s'éloigneront de l'extrémité de l'abscisse x.

Au surplus, le cas où h augmente ne diffère pas réellement de celui où H augmente, puisque h et H mesurent la grandeur du rayonnement aux deux extrémités de la barre; ainsi ce qu'on a dit pour l'un de ces cas peut s'appliquer à l'autre, par une simple inversion.

Si H et h prennent ensemble des valeurs plus grandes, les racines ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ augmenteront plus que si une seule de ces quantités H, h augmentait; mais alors on ne peut pas décider en général si une valeur de x qui annulle V_i doit devenir plus grande ou plus petite, car elle deviendrait plus petite, si H seule augmentait, et plus grande si h seule augmentait.

Si h augmente et si H diminue, on ne peut pas dire en général si une racine ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ doit devenir plus grande ou plus petite, car ρ_i deviendrait plus grande si h seule augmentait et plus petite si H seule diminuait. Mais ces deux causes réunies feront croître les valeurs de x qui annullent V_i, comme aussi celles qui annullent $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ si la condition (28) est remplie, et celles qui rendent V_i *maximum* si l'on a $g\rho_i - l > 0$.

Ces valeurs de x deviendront au contraire plus petites, si h diminue et si H augmente, sans qu'on puisse décider dans quel sens variera la racine ρ_i.

XVI.

En donnant à h et à H des valeurs constantes, supposons qu'on remplace la fonction que k représente par une autre fonction k' qui pour chaque valeur de x soit plus petite que la première k ou au moins égale à k, et les fonctions g, l par d'autres g', l' telles que $g'r - l'$ soit plus grande que $gr - l$, ou au moins égale, pour chaque valeur de r comprise entre certaines limites.

Supposons qu'après ces changements de fonctions la racine ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ dont le rang est i devienne ρ'_i et que la fonction correspondante V_i soit changée en V'_i.

Il résulte du n° XXIII du premier mémoire que les nouvelles racines ρ'_i seront plus petites que les premières ρ_i, pourvu qu'elles satisfassent comme les premières à la condition $g'r - l' >$ ou $= gr - l$; mais on ne saura pas si la nouvelle fonction V'_i s'annullera pour des valeurs de x plus petites ou plus grandes que celles qui annullent V_i; car d'après le théorème du n° XII, V'_i s'annullerait pour des valeurs plus petites, si la racine ρ'_i n'était pas plus petite que ρ_i, puisqu'on aurait $g'\rho'_i - l' > g\rho_i - l$ et $k' < k$; mais d'un autre côté, les valeurs de x qui annullent V'_i deviennent d'autant plus grandes, que ρ'_i est plus petite.

Si l'on prend de nouvelles fonctions g', l' et k' telles qu'on ait $g'r - l' \geqq gr - l$ et $k' > k$ on ne peut plus dire si la racine ρ'_i qui remplacera ρ_i sera plus petite ou plus grande que ρ_i; car ρ'_i serait $< \rho_i$, si l'on avait seulement $g'r - l \geqq gr - l$ et $k' = k$, et ρ'_i serait $> \rho_i$ si k seule était changée en $k' > k$ et que g' et l' fussent les mêmes que g et l.

Si pour chaque valeur de x on a $g'\rho'_i - l \geqq g\rho_i - l$ et $k' \leqq k$, les valeurs de x qui annulleront V'_i seront plus petites que celles de même rang à partir de x qui annullent V_i; elles seront au contraire plus grandes si l'on a $g'\rho'_i - l' \leqq g\rho_i - l$ et $k' \geqq k$.

Pareillement si les deux fonctions $g\rho_i - l$ et $g'\rho'_i - l'$ sont positives, selon qu'on aura pour chaque valeur de x,

$$g'\rho'_i - l' \geqq g\rho_i - l \text{ et } k' \leqq k$$

on bien

$$g'\rho'_i - l' \leqq g\rho_i - l \text{ et } k' \geqq k,$$

les valeurs de x correspondantes aux maxima de V'_i seront plus petites ou plus grandes que celles de même rang à partir de x qui répondent aux maxima de V_i.

XVII.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les valeurs particulières de la fonction u données par la formule $u = V_i e^{-\rho_i t}$ (27) qui sa-

tisfait à toutes les équations du problème (1), (2), (3) et (4), lorsque la fonction $f(x)$ qui représente les températures initiales des points de la barre est la même que V_i; V_i contenant implicitement comme facteur une constante arbitraire. Si $f(x)$ n'est égale à aucune des fonctions V_1, V_2, V_3,... on formera l'expression générale de u en faisant la somme de toutes les valeurs particulières (27) après les avoir multipliées par des constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_i, etc., de sorte qu'on aura

$$u = C_1 V_1 e^{-\rho_1 t} + C_2 V_2 e^{-\rho_2 t} + \ldots + C_i V_i e^{-\rho_i t} + \text{etc.} \qquad (29)$$

Cette expression de u satisfait aux trois équations (1), (2), (3) puisque chacun de ses termes y satisfait séparément. Il reste à remplir la condition

$$u = f(x) \text{ pour } t = 0. \qquad (4)$$

Il faut donc qu'en faisant $t = 0$ dans l'équation (29) on ait pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X

$$f(x) = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots + C_i V_i + \text{etc.} \qquad (30)$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'exprimer dans l'intervalle de x à X la fonction arbitraire $f(x)$ par une série de fonctions assujetties à vérifier les trois équations (6), (7), (8) et qui diffèrent les unes des autres par les valeurs ρ_1 $\rho_2 \ldots \rho_i \ldots$ du paramètre r tirées de l'équation transcendante $F(r) = 0$. En admettant la possibilité de ce développement, on détermine chaque coefficient C_i par le procédé connu que nous allons rappeler.

Multiplions les deux membres de l'équation (30) par $gV_i dx$, puis intégrons-les entre les limites x et X; nous aurons

$$\int_x^X gV_i f(x)\,dx = C_1 \int_x^X gV_1 V_i\,dx + C_2 \int_x^X gV_2 V_i\,dx + \ldots$$
$$+ C_i \int_x^X gV_i^2\,dx + \text{etc.} \qquad (31)$$

Or, d'après la formule (17) toutes les intégrales qui dans le second membre de cette équation sont multipliées par les coefficients C_1 $C_2 \ldots$ autres que C_i sont nulles. Celle qui est multipliée par C_i est évidemment une quantité positive. Si l'on suppose connue l'ex-

pression de V en fonction de x et de r qui satisfait aux deux équations (1) et (2), en considérant r comme indéterminée, cette intégrale $\int_x^X gV_i^2 dx$ sera d'après la formule (18) égale à la valeur de l'expression $-V\frac{d}{dr}\left(k\frac{dV}{dx}+HV\right)$ où l'on fera $x=X$ et $r=\rho_i$. En désignant pour abréger, cette quantité par R_i, on tirera donc de l'équation (31)

$$C_i = \frac{\int_x^X gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \qquad (32)$$

et en mettant cette valeur de C_i dans les formules (29) et (30) qu'on peut écrire ainsi :

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i V_i e^{-p_i t} \qquad f(x) = \Sigma . C_i V_i$$

elles deviendront

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} . V_i e^{-p_i t} \int_x^X \frac{gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \qquad (33)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} V_i . \int_x^X \frac{gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \qquad (34)$$

On arrive aux mêmes résultats par la méthode générale dont M. Poisson a fait usage depuis long-temps dans un grand nombre de problèmes et en particulier dans celui qui nous occupe. (*Théorie de la chaleur*, pages 261 — 264.)

On n'a point encore démontré, lorsque les fonctions positives g, k, l, sont quelconques, la possibilité d'exprimer une fonction arbitraire $f(x)$ par une série *convergente* de la forme $C_1V_1+C_2V_2+$ etc. (30). Fourier et d'autres géomètres semblent avoir méconnu l'importance et la difficulté de ce problème qu'ils ont confondu avec celui de déterminer les coefficients C_i. M. Liouville a résolu une partie de la question en démontrant par une méthode très ingénieuse (n° de juillet de son journal), que la somme de la série (34), si cette série est convergente, ne peut qu'être égale à $f(x)$, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X. Dans le numéro suivant, nous admettrons provisoirement l'intégrale (33) qui est fondée sur la formule (34), pour en déduire quelques conséquences.

XVIII.

On voit qu'à mesure que le temps t augmente, tous les termes de la série (33) tendent vers zéro, avec des vitesses inégales, de sorte qu'après un certain temps, la température variable u de chaque point de la barre finit par se réduire sensiblement à zéro, c'est-à-dire à la température fixe du milieu où la barre est placée. Mais avant que la valeur de u soit nulle, il y aura une époque où la série (33) se réduira à très peu près à son premier terme correspondant à la plus petite racine ρ_1 de l'équation $F(r) = 0$, en sorte qu'on aura sensiblement

$$u = C_1 V_1 e^{-\rho_1 t},$$

C_1 désignant la quantité

$$\frac{\int_x^X g V_1 f(x) dx}{\int_x^X g V_1^2 dx}.$$

En faisant abstraction du coefficient constant C_1, on voit que cet *état final* des températures ne dépend point de leur distribution initiale représentée par $f(x)$ qui n'influe que sur la valeur de la constante C_1 : il se confond avec le premier des états simples que nous avons considérés précédemment. Par conséquent, après un certain temps plus ou moins long, les températures de tous les points de la barre, quel que soit leur état initial, seront supérieures à la température fixe du milieu, si la valeur de C_1 est positive, ou lui seront inférieures, si C_1 est négative. En outre, si la fonction $g\rho_1 - l$ est positive pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X, ces températures finales, abstraction faite de leur signe quand elles seront négatives, ne présenteront qu'un seul *maximum*, c'est-à-dire qu'elles seront croissantes depuis une extrémité de la barre jusqu'à un certain point, puis décroissantes depuis ce point jusqu'à l'autre extrémité; et si l'une des équations (2), (3) se réduit à $\frac{du}{dx} = 0$ pour l'une des extrémités, ces températures finales iront en croissant ou décroissant depuis cette extrémité jusqu'à l'autre. Ces propriétés n'ont pas lieu dans l'état initial, puisque la fonction $f(x)$ est arbitraire.

Elles supposent toutefois que la valeur de la constante C_1 qui dépend

de cette fonction $f(x)$ n'est pas nulle. Or C_1 devient nulle, dans le cas où $f(x)$ remplit la condition $\int_x^X gV_1 f(x)dx = 0$. Alors si l'on n'a pas en même temps $\int_x^X gV_2 f(x)dx = 0$, les températures finales seront exprimées par le second terme $C_2V_2e^{-p_2t}$ de la série (33), la valeur de C_2 étant $\frac{\int_x^X gV_2 f(x)dx}{\int_x^X gV_2^2 dx}$. Dans cet état final, les températures seront positives dans une partie de la barre et négatives dans la partie restante. De plus, si $gp_2 - l$ est positive pour toute la barre, il y aura une valeur *maximum* de u sur chacune de ces parties et il n'y en aura qu'une.

Si l'on avait à la fois

$$\int_x^X gV_1 f(x)dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_x^X gV_2 f(x)\,dx = 0,$$

l'état final serait exprimé par le troisième terme de la série (33). Si l'on avait en outre $\int_x^X gV_3 f(x)\,dx = 0$, l'état final serait donné par le quatrième terme et ainsi de suite.

XIX.

On vient de voir qu'après un temps plus ou moins considérable, la fonction u finit par avoir le même signe dans toute l'étendue de la barre, si la valeur de C_1 n'est pas nulle, ou bien par n'avoir qu'un nombre de changements de signe égal au nombre des coefficients successifs C_1, C_2, C_3... qui se trouvent nuls à la fois. Donc, si à une époque déterminée, u s'évanouit une ou plusieurs fois entre les limites x et X, il faut que par l'accroissement du temps, le nombre des valeurs nulles de u diminue, jusqu'à se réduire enfin à zéro ou au nombre des coefficients C_1, C_2... qui seront nuls à la fois. Nous allons examiner comment s'opère cette disparition des valeurs nulles de u. Cette recherche a des applications importantes.

Supposons d'abord que u soit nulle pour $t = \tau$ et $x = \xi$, et que $\frac{du}{dx}$ ne soit pas nulle en même temps. On peut donner à x une valeur

a plus petite que ξ et une autre valeur b plus grande que ξ telles que $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ qui n'est pas nulle pour $x=\xi$ ne s'annulle ni pour $x=a$, ni pour $x=b$, ni pour aucune valeur de x comprise entre a et b.

Alors $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ ayant constamment le même signe dans cet intervalle, selon que ce signe est $+$ ou $-$, la fonction $u(x, \tau)$ doit croître ou décroître continuellement, tandis que x croît depuis a jusqu'à b, elle ne s'évanouit donc que pour $x=\xi$ dans cet intervalle, et les valeurs de $u(a, \tau)$ et $u(b, \tau)$ sont différentes de zéro et de signes contraires.

Faisons maintenant $t=\tau+t'$, t' étant une quantité positive qu'on prendra aussi petite qu'on voudra. Comme $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ n'est nulle pour aucune valeur de x comprise entre a et b, $\frac{du}{dx}(x, \tau+t')$ aura, pour chaque valeur de x entre a et b une valeur différente de zéro et de même signe que $\frac{du}{dx}(x, \tau)$, pourvu que t' soit suffisamment petite.

Donc $\frac{du}{dx}(x, \tau+t')$ aura dans tout l'intervalle de a à b le signe de $\frac{du}{dx}(\xi, \tau)$: donc, selon que ce signe sera $+$ ou $-$, la fonction $u(x, \tau+t')$ ira en croissant ou en décroissant dans cet intervalle.

Or, aux deux limites a et b cette fonction a des valeurs de signes contraires. Car $u(a, \tau)$ n'étant pas nulle, $u(a, \tau+t')$ aura le même signe que $u(a, \tau)$ si l'on prend t' suffisamment petite, puisqu'on peut rendre la différence entre $u(a, \tau)$ et $u(a, \tau+t')$ plus petite que $u(a, \tau)$ en diminuant t' : donc $u(a, \tau+t')$ a un signe contraire à celui de $\frac{du}{dx}(\xi, \tau)$. De même $u(b, \tau+t')$ aura le même signe que $u(b, \tau)$ et conséquemment le même signe que $\frac{du}{d\tau}(\xi, \tau)$.

Donc $u(x, \tau+t')$ a deux valeurs de signes contraires pour $x=a$ et pour $x=b$; et comme cette fonction croît ou décroît continuellement dans l'intervalle de a à b, on voit qu'elle s'annulle une seule fois et qu'elle change de signe pour une valeur de x comprise entre a et b.

En faisant $x = \tau - t'$, on verra de même que la fonction... $u(x, \tau - t')$ doit aussi s'évanouir une seule fois en changeant de signe pour une valeur de x entre a et b.

XX.

Supposons à présent que u et $\frac{du}{dx}$ soient nulles à la fois pour $t = \tau$ et $x = \xi$, mais que $\frac{d^2u}{dx^2}$ ne le soit pas, et admettons pour fixer les idées que $\frac{d^2u}{dx^2}$ soit positive.

On peut donner à x une valeur a plus petite que ξ et une valeur b plus grande que ξ telles que $\frac{d^2u}{dx^2}$ ait dans tout l'intervalle de a à b le même signe qu'elle a pour $x = \xi$, c'est-à-dire le signe $+$. Alors x croissant depuis a jusqu'à b, $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ ira en croissant, et comme cette fonction est nulle pour $x = \xi$, elle sera négative dans l'intervalle de a à ξ puis positive dans l'intervalle de ξ à b.

Donc x croissant depuis a jusqu'à ξ, la fonction $u(x, \tau)$ décroîtra et sera par conséquent positive, puisqu'elle est nulle pour $x = \xi$; ensuite x croissant depuis ξ jusqu'à b, $u(x, \tau)$ croîtra et par conséquent sera encore positive.

Faisons maintenant $t = \tau + t'$: $\frac{du}{dx}(x, \tau + t')$ aura pour chaque valeur de x entre a et b une valeur différente de zéro et de même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(x, \tau)$ c'est-à-dire positive, pourvu qu'on prenne t' suffisamment petite, puisqu'alors ces deux fonctions diffèrent l'une de l'autre aussi peu qu'on veut. Donc $\frac{du}{dx}(x, \tau + t')$ croîtra continuellemment dans l'intervalle de a à b; mais cette fonction a une valeur négative pour $x = a$ et positive pour $x = b$, puisque ces valeurs diffèrent aussi peu qu'on veut de celles de $\frac{du}{dx}(a, \tau)$ et $\frac{du}{dx}(b, \tau)$ qui ne sont pas nulles. Donc $\frac{du}{dx}(x, \tau + t')$ s'annulle entre les limites a et b une seule fois et passe en s'évanouissant du négatif ou positif.

Pour discuter $u(x, \tau + t')$, il faut considérer la fonction $\frac{du}{dt}(x, \tau)$.

Pour $x=\xi$ et $t=\tau$ on a par l'équation (1) $g\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$, puisque u et $\frac{du}{dx}$ sont alors nulles. Donc $\frac{du}{dt}(\xi, \tau)$ n'est pas nulle et a le même signe que $\frac{d^2u}{x^2}(\xi, \tau)$, c'est-à-dire le signe $+$. Or, on peut prendre a et b assez près de ξ pour que $\frac{du}{dt}(x, \tau)$ reste positive entre ces limites a et b. Mais en prenant t' suffisamment petite, la différence $u(x, \tau+t')-u(x, \tau)$ a le même signe que $\frac{du}{dt}(x, \tau)$. Donc pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, la fonction.... $u(x, \tau+t')$ est plus grande que $u(x, \tau)$ et par conséquent positive.

Si l'on fait $x=\tau-t'$, on prouvera, comme tout à l'heure, que $\frac{du}{dx}(x, \tau-t')$ s'annulle entre les limites a et b une seule fois et passe du négatif au positif.

Pour chaque valeur de x comprise entre a et b, la fonction $u(x, \tau-t')$ est plus petite que $u(x, \tau)$, puisque la différence $u(x, \tau-t')-u(x, \tau)$ a un signe contraire à celui de $\frac{du}{dt}(x, \tau)$, t' étant suffisamment petite : donc $u(x, \tau-t')$ est négative pour $x=\xi$. Mais elle est positive pour $x=a$ et $x=b$, comme $u(x, \tau)$, car en prenant t' suffisamment petite, $u(a, \tau-t')$ et $u(b, \tau-t')$ diffèrent aussi peu qu'on veut de $u(a, \tau)$ et $u(b, \tau)$ qui ont le signe $+$. Il suit de là que $u(x, \tau-t')$ change de signe au moins deux fois, d'abord pour une valeur de x comprise entre a et ξ, puis pour une autre entre ξ et b. Je dis de plus que cette fonction ne peut pas s'évanouir plus de deux fois entre les limites a et b : car si elle s'évanouissait une troisième fois, en changeant ou ne changeant pas de signe, $\frac{du}{dx}(x, \tau-t')$ devrait s'annuller au moins deux fois entre les mêmes limites a et b, ce qui n'arrive pas.

Nous avons supposé $\frac{d^2u}{ax^2}(\xi, \tau)$ positive. Si cette quantité est négative on reconnaîtra de la même manière que $u(x, \tau+t')$ doit être négative et ne pas s'évanouir entre les limites a et b, et que... $u(x, \tau-t')$ doit changer de signe et s'évanouir deux fois seulement, d'abord entre a et ξ, puis entre ξ et b. D'ailleurs, ce cas se ramène au précédent, en changeant u en $-u$.

En supposant que u ne soit pas constamment nulle pour $x=$ x

quelle que soit t, il peut arriver que u s'évanouisse pour $x = \mathrm{x}$ quand t atteint une valeur τ. Alors $\frac{du}{dx}$ sera nulle en même temps, à cause de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$. (2). Si $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas nulle aussi, on verra par le raisonnement précédent qu'en faisant croître x depuis x jusqu'à une valeur b un peu plus grande que x, $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas et aura le même signe que $\frac{du}{dx^2}(\mathrm{x}, \tau)$, et que $u(x, \tau - t')$ changera de signe et s'évanouira une seule fois entre x et b.

De même, si u est nulle pour $x = \mathrm{X}$ et $t = \tau$, $\frac{du}{dx}$ sera nulle en même temps; à cause de l'équation (3). Alors $u(x, \tau + t')$ aura pour les valeurs x un peu plus petites que X et pour $x = \mathrm{X}$, le même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(\mathrm{X}, \tau)$: et $u(x, \tau - t')$ changera de signe et s'évanouira une fois près de la limite X.

XXI.

Je suppose actuellement que la fonction u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ deviennent nulles à la fois pour $x = \xi$ et $t = \tau$, et je vais examiner ce que u deviendra pour des valeurs de x et de t très peu différents de ξ et de τ. Pour traiter ce cas général qui comprend ceux dont je me suis occupé dans les deux numéros précédents, j'emploierai une autre méthode fondée sur le développement de u suivant les puissances de x' et de t', en faisant $x = \xi + x'$ et $t = \tau + t'$

L'équation (1) devient

$$g\frac{du}{dt'} = \frac{d\left(k\frac{du}{dx'}\right)}{dx'} - lu'. \qquad (1)$$

On a, d'après la formule de Taylor,

$$u(\xi + x', \tau + t') = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_1 t' + \mathrm{Y}_2 \frac{t'^2}{1.2} + \ldots + \mathrm{Y}_n \frac{t'^n}{1.2.3.n} + \theta t'^{n+1} (*) \quad (35)$$

(*) On arrive immédiatement à cette formule en intégrant $n+1$ fois de suite $\frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}}.dt'^{n+1}$ depuis $t' = 0$ jusqu'à $t = t'$ et introduisant successivement comme constantes arbitraires les valeurs de $\frac{d^nu}{dt'^n}$ $\frac{d^{n-1}u}{dt'^{n-1}}$, etc. pour $t' = 0$, qu'on suppose données.

en désignant par Y, Y_1, $Y_2 \ldots Y_n$, ce que deviennent les fonctions u, $\frac{du}{dt'}$, $\frac{d^2u}{dt'^2} \ldots \frac{d^nu}{dt'^n}$, quand on fait $t'=0$ ou $t=\tau$, de sorte que Y, $Y_1 \ldots Y_n$ ne dépendent que de la seule variable x'. Le terme $\theta t'^{n+1}$ remplace l'intégrale multiple $\int\int\int_0^{t'} \ldots \frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}} dt'^{n+1}$, d'où il suit que θ est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la fonction $\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}}$, tandis que t' varie depuis o jusqu'à sa plus grande valeur.

On a supposé que pour $x=\xi$ et $t=\tau$, les fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ sont toutes nulles et que $\frac{d^mu}{dx^m}$ a une valeur A différente de zéro. Quand on fait $t=\tau$ ou $t'=0$, ces fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$,... sont les mêmes que Y, $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{d^2Y}{dx'^2}$, etc. Donc, pour $x'=0$, Y, $\frac{dY}{dx'}$, etc. jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}}$ sont nulles et $\frac{d^mY}{dx'^m}$ est égale à A.

Pour des valeurs de x' suffisamment petites, soit positives, soit négatives, $\frac{d^mY}{dx'^m}$ différera de A aussi peu qu'on voudra. On en conclut (en intégrant m fois), que pour ces mêmes valeurs, on aura

$$Y=(A+\alpha)\frac{x'^m}{1.2.3\ldots m}.$$

α étant une quantité positive ou négative, fonction de x', qui s'évanouira avec x', et qu'on pourra rendre plus petite que toute quantité donnée en prenant x' suffisamment petite.

Pour avoir les expressions de Y_1, $Y_2 \ldots$, il faut dans l'équation (1) et dans celles qu'on en déduit en la différentiant plusieurs fois par rapport à t', faire $t'=0$. On obtient alors en remplaçant u, $\frac{du}{dt'}$, $\frac{d^2u}{dt'^2} \ldots$, par Y, Y_1, $Y_2 \ldots$ les équations suivantes :

$$gY_1 = \frac{d.\left(k\frac{dY}{dx'}\right)}{dx'} - lY,$$

$$gY_2 = \frac{d.\left(k\frac{dY_1}{dx'}\right)}{dx'} - lY_1,$$

$$gY_3 = \frac{d.\left(k\frac{dY_2}{dx'}\right)}{dx'} - lY_2.$$

etc.

La première $gY_1 = \frac{d.\left(k\frac{dY}{dx'}\right)}{dx'} - lY$ différentiée p fois par rapport à x', donne

$$g\frac{d^pY_1}{dx'^p} + p\frac{dg}{dx'}\frac{d^{p-1}Y}{dx'^{p-1}} + \ldots + \frac{d^pg}{dx'^p}Y_1$$
$$= k\frac{d^{p+2}Y}{dx'^{p+2}} + (p+1)\frac{dk}{dx'}\frac{d^{p+1}Y}{dx'^{p+1}} + \frac{(p+1)p}{1.2}\frac{d^2k}{dx'^2}\frac{d^pY}{dx'^p} + \ldots + \frac{d^{p+1}k}{dx'^{p+1}}\frac{dY}{dx'}$$
$$- l\frac{d^pY}{dx'^p} - \ldots - \frac{d^pl}{dx'^p}Y.$$

Comme Y, $\frac{dY}{dx'}, \ldots \frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}}$ sont nulles pour $x' = 0$ et que $\frac{d^mY}{dx'^m} = A$ on voit par les deux dernières équations que Y_1 $\frac{dY_1}{dx'}$, etc., jusqu'à $\frac{d^{m-3}Y_1}{dx'^{m-3}}$ sont nulles aussi pour $x' = 0$ et qu'on a

$$\frac{d^{m-2}Y_1}{dx'^{m-2}} = \left(\frac{k}{g}\right)\frac{d^mY}{dx'^m} = \left(\frac{k}{g}\right)A, \text{ pour } x' = 0.$$

Par conséquent, pour des valeurs de x' suffisamment petites, on aura

$$Y_1 = \left(\frac{k}{g}\right)(A + \alpha_1)\frac{x'^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}.$$

α étant une fonction de x' qui doit être très petite et nulle en même temps que x', et $\left(\frac{k}{g}\right)$ désignant ici la valeur de $\frac{k}{g}$ qui répond à... $x' = 0$.

En différentiant p fois par rapport à x' l'équation

$$gY_2 = \frac{d.\left(k\,\frac{dY_1}{dx'}\right)}{dx'} - lY_1,$$

on verra de la même manière que Y_2, $\frac{dY_2}{dx'}\ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-5}Y_2}{dx'^{m-5}}$ sont nulles pour $x' = 0$ et que

$$\frac{d^{m-4}Y_2}{dx'^{m-4}} = \left(\frac{k}{g}\right)\frac{d^{m-2}Y_1}{dx'^{m-2}} = \left(\frac{k}{g}\right)^2.A, \text{ pour } x' = 0,$$

d'où l'on conclura

$$Y_2 = \left(\frac{k}{g}\right)^2.(A + \alpha_2)\frac{x'^{m-4}}{1.2.3\ldots(m-4)}.$$

On trouvera de même

$$Y_3 = \left(\frac{k}{g}\right)^3 (A + \alpha_3)\,\frac{x'^{-6}}{1.2.3\ldots(m-6)},$$

et en général,

$$Y_n = \left(\frac{k}{g}\right)^n.(A + \alpha_n)\,\frac{x^{m-2n}}{1.2.3\ldots(m-2n)}.$$

Toutes les quantités α, α_1, $\alpha_2\ldots\alpha$, fonctions de x' pourront devenir plus petites que toute grandeur donnée, pourvu qu'on attribue à x' des valeurs suffisamment petites soit positives, soit négatives.

Supposons maintenant le nombre m pair et $= 2n$. Nous aurons en mettant dans la formule (35) les valeurs précédentes de Y, Y_1, $Y_2\ldots$

$$\begin{aligned}
u(\xi+x',\ \tau+t') = {} & (A+\alpha)\frac{x'^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + (A+\alpha_1)\,\frac{x'^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\left(\frac{kt'}{g}\right) \\
& + (A+\alpha_2)\frac{x'^{2n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^2}{1.2} + (A+\alpha_3)\,\frac{x'^{2n-6}}{1.2\ldots(2n-6)}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^3}{1.2.3} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (A+\alpha_{n-1})\,\frac{x'^2}{1.2}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + (A+\alpha_n)\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^n}{1.2.3\ldots n} \\
& + \beta t'^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)},$$

et si l'on représente par Q le polynome

$$\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \frac{z^{2n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)\times 1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{z^{2n-6}}{1.2.3\ldots(2n-6)\times 1.2.3} + \frac{z^2}{1.2\times 1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

la somme des termes affectés du coefficient A dans le développement précédent sera $A.\left(\frac{kt'}{g}\right)^n.Q$; la somme des termes qui renferment $\alpha, \alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_n$ aura une valeur absolue plus petite que $\left(\frac{kt'}{g}\right)^n.\mathcal{E}Q$, $\mathcal{E}$ étant un nombre qui surpasse toutes les quantités $\alpha, \alpha_1\ldots\alpha_n$ prises positivement, et qu'on pourra prendre aussi petit qu'on voudra, en donnant à x' des valeurs assez petites, pour que $\alpha, \alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_n$ soient encore moindres que $\mathcal{E}$.

En joignant à ces termes la partie $\theta t'^{n+1}$, on voit que la valeur précédente de u pourra se mettre sous cette forme

$$u(\xi + x', \quad \tau + t') = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n.A(Q + \varepsilon).$$

ε est une quantité positive ou négative, fonction de z et de t', qu'on rendra aussi petite qu'on voudra, en prenant t' suffisamment petite et donnant d'ailleurs à z des valeurs finies, positives et négatives, qui ne soient pas tellement grandes que les valeurs correspondantes de x' ou de $z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$ sortent des limites que nous avons assignées à cette variable x'. On pourra donc donner à z des valeurs d'autant plus grandes que t' sera plus petite. Nous désignerons par $-a$ et $+b$ les limites entre lesquelles x' devra rester comprise pour que la quantité ε soit moindre qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.

Cela posé, pour toutes les valeurs de z, le polynome Q est constamment positif et plus grand que son dernier terme $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$, qui est lui même plus grand que ε, qu'on peut diminuer à volonté. Donc pour toutes les valeurs de x' comprises entre $-a$ et $+b$, la fonction $u(\xi+x', \tau+t')$

sera différente de zéro et de même signe que A, la quantité positive t' étant très petite.

Supposons maintenant m impair et $= 2n + 1$. En substituant dans la série de Taylor (35) les valeurs de $Y, Y_1, Y_2 \ldots Y_n$, on aura

$$u(\xi + x', \tau + t') = (A + \alpha)\frac{x'^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + (A + \alpha')\frac{x'^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\left(\frac{kt'}{g}\right)$$
$$+ (A + \alpha_2)\frac{x'^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)}\cdot\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (A + \alpha_n)\frac{x'}{1}\cdot\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^n}{1.2.3\ldots n} + \theta t'^{n+1}.$$

Si l'on fait encore

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$$

et
$$Q = \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \frac{z^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)\times 1} + \frac{z^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)\times 1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{z^3}{1.2.3\times 1.2\ldots(n-1)} + \frac{z}{1\times 1.2.3\ldots n}$$

on aura

$$u(\xi + x', \tau + t') = \sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{2n+1}}\cdot A(Q + \varepsilon),$$

la quantité ε sera comme précédemment aussi petite qu'on voudra, pourvu que x' reste comprise entre des limites $-a$ et $+b$ suffisamment petites.

Cela posé, le polynome Q est nul pour $z = 0$, positif quand z est positive, et négatif quand z est négative. On voit d'ailleurs que la fonction $u(\xi + x', \tau + t')$ a le même signe que AQ pour toute valeur finie de z qui n'est pas très petite, puisque alors Q surpasse ε. Donc, Q changeant de signe pour $z = 0$, la fonction $u(\xi + x', \tau + t')$ doit aussi changer de signe au moins une fois, tandis que x' varie entre les limites $-a$ et $+b$. Je dis de plus qu'elle ne peut s'évanouir qu'une seule fois dans cet intervalle, parce que sa dérivée $\frac{du}{dx'}$ ne s'évanouit pas et conserve constamment le signe de A dans ce même intervalle. En effet, on a, d'après la formule (35),

$$\frac{du}{dx'} = \frac{dY}{dx'} + \frac{dY_1}{dx'} t' + \frac{dY_2}{dx'} \frac{t'^2}{1.2} + \ldots + \frac{dY_n}{dx'} \frac{t'}{1.2.3\ldots n} + \frac{d\theta}{dx'} t'^{n+1}, \quad (36)$$

On trouve d'ailleurs

$$\frac{dY}{dx'} = (A+\alpha')\frac{x'^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}, \quad \frac{dY_1}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)(A+\alpha_1')\frac{x'^{m-3}}{1.2.3\ldots(m-3)}, \text{ etc.,}$$

α', α_1'... étant très petites et nulles en même temps que x'.

Substituant ces valeurs de $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{dY_1}{dx'}$ ... dans la formule précédente, remplaçant m par $2n+1$, et faisant ensuite

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$$

on trouvera

$$\frac{du}{dx'} = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n . A\left[\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \varepsilon'\right],$$

ε' étant comme ε une quantité qu'on rendra aussi petite qu'on voudra en prenant t' et x' suffisamment petites.

On voit par cette expression de $\frac{du}{dx'}$ que cette dérivée conserve constamment le signe de A quand x' varie entre les limites très petites $-a$ et $+b$, et qu'ainsi la fonction $u(\xi+x', \tau+t')$ croît ou décroît continuellement dans cet intervalle; de sorte qu'elle s'y évanouit une seule fois en changeant de signe.

On peut encore démontrer ces propositions sans employer les développements précédents. Lorsque m est pair et $=2n$, on a $Y_n = \left(\frac{k}{g}\right).A$ pour $x'=0$, et les autres fonctions Y, Y_1, Y_2,... Y_{n-1} sont nulles pour $x'=0$. D'après les relations qui existent entre Y, Y_1,... Y_n, et leurs différentielles, il est aisé de voir que toutes ces fonctions Y, Y_1,... Y_n sont différentes de zéro et de même signe que A pour des valeurs de x' suffisamment petites, soit positives, soit négatives; donc alors tous les termes de la formule de Taylor (35) qui renferment ces fonctions sont de même signe que A et comme le dernier $Y_n \frac{t'^n}{1.2.3\ldots n}$ surpasse $\theta t'^{n+1}$, on voit que $u(\xi+x', \tau+t')$ ne s'annulle pas et conserve le signe de A dans l'intervalle suffisamment petit où l'on fait varier x'.

Lorsque $m = 2n + 1$, Y, $Y_1 \ldots Y_n$ ont toutes le signe de A, quand x' est positive, et le signe contraire, quand x' est négative; d'où l'on conclut d'abord que la fonction $u(\xi + x', \tau + t')$ change de signe dans le petit intervalle où l'on fait varier x'. Mais elle ne peut s'évanouir qu'une seule fois dans cet intervalle, parce que $\frac{du}{dx'}$ ne s'y annulle pas. En effet, $\frac{du}{dx'}$ étant exprimée par la formule (36), on trouve que $\frac{dY}{dx'}, \frac{dY_1}{dx'}, \ldots\ldots \frac{dY_n}{dx'}$ ont constamment le signe de A et que $\frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n . A$ pour $x' = 0$.

XXII.

Considérons maintenant la fonction $u(\xi + x', \tau - t')$. En changeant dans les formules qui précèdent t' en $-t'$ et faisant encore

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)},$$

on trouvera, si m est pair et $= 2n$,

$$u(\xi + x', \quad \tau - t') = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n . A . (P + \epsilon), \qquad (37)$$

P désignant le polynome (38)

$$\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} - \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \frac{z^{n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)\times 1.2}$$
$$\ldots\ldots \mp \frac{z^2}{1.2 \times 1.2\ldots(n-1)} \pm \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

Si m est pair et $= 2n + 1$, on obtiendra

$$u(\xi + x', \quad \tau - t') = \sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{2n+1}} . A (P + \epsilon) \qquad (39)$$

en posant (40)

$$P = \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} - \frac{z^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)\times 1} + \frac{z^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)\times 1.2}$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{z}{1 \times 1.2.3\ldots n}$$

la quantité ϵ remplit les mêmes conditions que dans le numéro précédent.

Nous allons montrer que le polynome P (39) ou (40) s'évanouit en

changeant de signe pour autant de valeurs de z qu'il y a d'unités dans son degré m qui est $2n$ ou $2n+1$.

Il est à remarquer d'abord que quel que soit le degré m pair ou impair de ce polynome, ses fonctions dérivées $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, etc., peuvent se déduire de P en y remplaçant successivement m par $m-1$, $m-2$, etc.

Si l'on divise P par $\frac{dP}{dz}$, on trouve la partie entière du quotient égale à $\frac{1}{m}z$ et le reste égal à $-\frac{2}{m}\cdot\frac{d^2P}{dz^2}$, de sorte qu'on a identiquement

$$mP = z\frac{dP}{dz} - 2\frac{d^2P}{dz^2}. \qquad (41)$$

En différentiant cette équation par rapport à z, on en conclura

$$\left.\begin{array}{l}(m-1)\frac{dP}{dz} = z\frac{d^2P}{dz^2} - 2\frac{d^3P}{dz^3}\\ (m-2)\frac{d^2P}{dz^2} = z\frac{d^3P}{dz^3} - 2\frac{d^4P}{dz^4}\\ \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (41).$$

Enfin l'on a

$$\frac{d^mP}{dz^m} = +1.$$

On peut aussi déduire ces équations de la première

$$mP = z\frac{dP}{dz} - 2\frac{d^2P}{dz^2}$$

sans la différentier, puisque cette équation a lieu, quel que soit le degré m, et que si dans l'expression de P on change successivement m en $m-1$, $m-2$, etc., P se change en $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}\ldots$, comme on l'a observé tout à l'heure.

Les fonctions P, $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, $\frac{d^3P}{dz^3}$, ... $\frac{d^mP}{dz^m}$ étant liées entre elles par les équations (41), deux fonctions consécutives de cette suite ne peuvent pas s'évanouir pour une même valeur de z; car ces équations (41) font voir qu'une valeur de z qui annullerait deux fonctions consécutives réduirait aussi à zéro toutes les autres jusqu'à $\frac{d^mP}{dz^m}$ inclusive-

ment, ce qui ne peut être, puisque $\frac{d^m P}{dz^m}$ est égale à $+1$. Il suit de là que l'équation $P = 0$ n'a pas de racines égales.

De plus, les équations (41) montrent que pour toute valeur de z qui annulle l'une quelconque des fonctions dérivées $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, etc., les deux fonctions adjacentes ont des valeurs de signes centraires : on en conclut d'après un théorème connu que l'équation $P = 0$ a ses m racines à la fois réelles et inégales. On peut tirer la même conclusion du théorème de Fourier et aussi de celui que j'ai donné pour la résolution des équations numériques, en ayant égard, dans leur application, aux relations (41).

Le polynome P s'évanouit donc et change de signe pour des valeurs finies de z en nombre égal à son degré m; l'une de ces racines est zéro quand m est impair, les autres racines sont deux à deux égales et de signes contraires, quel que soit m. Toutes ces racines sont comprises entre $-m$ et $+m$, car en faisant $z = m$ ou $> m$, on voit que chaque terme positif de P surpasse le terme négatif qui le suit immédiatement.

Puisque P change de signe m fois, on peut donner à z, $m+1$ valeurs (entre $-m$ et $+m$), pour lesquelles P aura des valeurs alternativement positives et négatives, qui d'ailleurs surpasseront les valeurs correspondantes de ε, attendu qu'on peut rendre ε moindre que toute quantité donnée, en prenant t' et x' suffisamment petites.

Il résulte de là que la fonction $u(\xi + x', \tau - t')$ exprimée par l'une des formules (37), (39) change de signe au moins autant de fois que P, c'est-à-dire m fois, tandis que x' croît depuis $-a$ jusqu'à $+b$.

Je dis de plus que cette fonction ne peut s'évanouir plus de m fois dans cet intervalle. En effet, si elle s'évanouissait $m+1$ fois, sa dérivée première $\frac{du}{dx'}(\xi + x', \tau - t')$ changerait de signe au moins m fois dans cet intervalle, donc sa dérivée seconde $\frac{d^2u}{dx'^2}$ changerait de signe au moins $m-1$ fois, puis $\frac{d^3u}{dx'^3}$ en changerait au moins $m-2$ fois, et ainsi de suite; de sorte qu'enfin $\frac{d^mu}{dx'^m}(\xi + x', \tau - t')$ changerait de signe au

moins une fois dans le même intervalle. Or c'est ce qui ne peut arriver, si l'on prend cet intervalle suffisamment petit, aussi bien que t'; car en diminuant t', $\frac{d^m u}{dx'^m}(\xi + x', \tau - t')$ diffère aussi peu qu'on veut de $\frac{d^m u}{dx'^m}(\xi + x', \tau)$ pour une même valeur de x', et cette dernière fonction ne s'annulle pas et conserve le signe de A dans l'intervalle dont il s'agit, si on le prend suffisamment petit.

Les m valeurs consécutives de z ou de x' qui annulent..... $u(\xi + x', t - t')$, en comprennent d'autres qui annulent $\frac{du}{dx'}$, ainsi $\frac{du}{dx'}$ doit s'évanouir $m - 1$ fois, ni plus ni moins, tandis que x' croit depuis $-a$ jusqu'à $+b$, on en conclut que $\frac{du}{dx'}$ ne peut pas être nulle en même temps que u, et que u n'a point de valeurs *minima* dans cet intervalle.

En résumé, si la fonction u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ sont nulles pour $t = \tau$ et $x = \xi$, en prenant la quantité positive t' assez petite et faisant varier x dans un intervalle suffisamment petit renfermant la valeur ξ, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas dans ce petit intervalle, si m est pair, et s'y évanouira une seule fois en changeant de signe si m est impair; mais la fonction $u(x, \tau - t')$ s'évanouira et changera de signe précisément m fois dans le même intervalle, quel que soit m, la dérivée $\frac{du}{dx'}$ ne s'évanouira pas en même temps que u.

Il en sera de même pour chacune des valeurs de x, telles que ξ comprises entre x et X, qui annulleront la fonction $u(x, \tau)$.

Les petits intervalles qui renfermeront ces différentes valeurs de x et qui jouiront des propriétés précédentes seront séparés les uns des autres, ou de l'une des extrémités de la barre par d'autres intervalles plus ou moins grands, dans lesquels la fonction $u(x, \tau)$ ne s'annullera pas; dans ces derniers, les fonctions $u(x, \tau - t')$ et $u(x, \tau + t')$ ne s'annulleront pas non plus, si t' est suffisamment petite, puisqu'alors elles diffèrent aussi peu qu'on veut de $u(x, \tau)$, qui n'est pas nulle.

XXIII.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction $u(x, \tau)$ n'était nulle ni pour $x = \mathrm{x}$ ni pour $x = \mathrm{X}$. Examinons maintenant le cas où elle serait nulle à l'une de ces limites.

Si $u(x; \tau)$ est nulle pour $x = \mathrm{x}$, $\frac{du}{dx}(\mathrm{x}, \tau)$ est nulle en même temps, à cause de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t. Si $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas nulle aussi, on a déjà vu au n° XX, qu'en faisant croître x depuis x jusqu'à une valeur un peu plus grande que x, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouit pas et a le même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(\mathrm{x}, \tau)$ et que $u(x, \tau - t')$ s'évanouit en changeant de signe une seule fois dans ce petit intervalle, sa dérivée $\frac{du}{dx}(x, \tau - t')$ ne pouvant pas y être nulle.

Mais il peut arriver que plusieurs dérivées consécutives $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ soient nulles en même temps que u pour $x = \mathrm{x}$ et $t = \tau$. On va voir qu'alors la première dérivée $\frac{d^m u}{dx^m}$ qui n'est pas nulle est d'un ordre pair.

Faisons $t = \tau + t'$ et $x = \mathrm{x} + x'$, et désignons, comme précédemment par Y_n ce que devient la fonction $\frac{d^n u}{dt^n}$ ou $\frac{d^n u}{dt'^n}$ quand on fait $t = \tau$ ou $t' = 0$. On a vu n° XXI que cette fonction Y_n est nulle pour $x' = 0$, si $2n$ est $< m$. En outre, on a en général, quel que soit n, pourvu que $m - 2n$ soit positif,

$$\frac{d^{m-2n}\mathrm{Y}_n}{dx'^{m-2n}} = \left(\frac{k}{g}\right)^n . \mathrm{A} \quad \text{pour } x' = 0,$$

A étant la valeur de $\frac{d^m u}{dx^m}$ pour $x' = 0$, qui est par hypothèse différente de zéro

Donc, si l'on suppose le nombre m impair et $= 2n + 1$, on aura

$$Y_n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n . A \quad \text{pour } x' = 0.$$

Ainsi $Y_n = 0$ sera nulle pour $x' = 0$ et $\frac{dY_n}{dx'}$ ne le sera pas. Or, au contraire, il résulte de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t, que Y_n ne peut pas être nulle sans que $\frac{d}{dx'}$ le soit en même temps. En effet, cette équation revient à la suivante

$$k\frac{du}{dx'} - hu = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0,$$

qui différentiée n fois, par rapport à t', donne

$$k\frac{d\left(\frac{d^n u}{dt'^n}\right)}{dx'} - h\frac{dt'^n}{d^n u} = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0.$$

t' étant quelconque.

En faisant dans cette dernière $t' = 0$, on aura donc

$$k\frac{dY_n}{dx'} - hY_n = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0.$$

On ne peut donc pas avoir en même temps $Y_n = 0$ et $\frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n A$, ce qui résulterait de l'hypothèse de $m = 2n + 1$.

Ainsi m ne peut être qu'un nombre pair $2n$; alors Y_n est égale à $\left(\frac{k}{g}\right)^n A$ pour $x' = 0$.

Cela posé, on conclut de ce qui a été démontré dans les nos XXI et XXII, qu'en prenant la quantité positive t' suffisamment petite et faisant croître x depuis la limite x jusqu'à une valeur un peu plus grande que x, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas et que $u(x, \tau - t')$ s'évanouira n fois en changeant de signe. Au-delà de ce petit intervalle, ces deux fonctions ne s'évanouiront pas, jusqu'à ce que x en croissant atteigne un autre petit intervalle comprenant la valeur ξ la plus voisine de x qui annulle $u(x, \tau)$.

On arriverait à une conclusion semblable, si u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$.... étaient nulles à la fois pour $t=\tau$ et $x=\mathrm{X}$.

XXIV.

De tout ce qui précède, résulte l'énoncé suivant :

Concevons que t croisse par degrés insensibles, à partir d'une valeur quelconque. Aussi long-temps que pour des valeurs croissantes de t, la fonction $u(x, t)$ et sa dérivée $\frac{du}{dx}$ ne s'évanouiront pas simultanément pour quelque valeur de x comprise entre les limites x et X, et que $u(x, t)$ ne deviendra pas nulle à l'une de ces limites, cette fonction $u(x, t)$ s'évanouira toujours le même nombre de fois entre ces limites, en changeant de signe chaque fois. Quand t dépassera une valeur τ telle que $u(x, \tau)$ et quelques-unes de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$,... jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ deviendront nulles à la fois pour une valeur ξ de x comprise entre x et X, la fonction $u(x, t)$ perdra, si m est pair, un nombre m de changements de signe ou de valeurs nulles qu'elle possédait avant que t atteignît cette valeur τ et qui répondaient à des valeurs de x très voisines de ξ; mais si m est impair, elle en perdra $m-1$, de sorte qu'elle ne s'évanouira plus qu'une seule fois en changeant de signe près de la valeur ξ, et $\frac{du}{dx}$ ne sera pas nulle en même temps. Il en sera de même pour toute autre valeur de x comprise entre x et X qui annullera à la fois $u(x, \tau)$ et quelques-unes de ses dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$. ...

Quand u deviendra nulle pour $t=\tau$ à l'une des limites x, X, $\frac{du}{dx}$ s'évanouira en même temps, et s'il arrive que d'autres dérivées successives $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$,... s'annullent aussi, la première qui ne s'évanouira pas sera d'un ordre pair $2n$. Alors un peu avant que t atteigne la valeur τ, u s'évanouit en changeant de signe n fois près de la limite pour laquelle $u(x, \tau)$ est nulle, et quand t croît au-delà de τ, u cesse de s'évanouir en cet endroit.

Si t continue à croître, le nombre des valeurs nulles ou des changements de signe de $u(x, t)$ diminuera toujours de la même manière, chaque fois que u deviendra nulle à l'une des limites x, X, ou que u et quelques-unes de ses dérivées consécutives s'évanouiront simultanément entre ces limites.

Il est aisé de voir, en modifiant légèrement l'analyse précédente, que la fonction $u(x, t)$ jouirait encore des mêmes propriétés, lors même que g, k, l dans l'équation (1) seraient des fonctions des deux variables x et t, et que h et H dans les équations (2) et (3) seraient aussi des fonctions de t, toutes ces fonctions étant assujetties à la condition d'être constamment positives.

Si l'équation (2) se réduisait à $u = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on aurait encore les mêmes propositions, en ne tenant compte que des autres valeurs de x plus grandes que x qui annulleraient la fonction u.

De même, on n'aura pas égard dans l'énoncé à la valeur X, si l'équation (3) se réduit à $u = 0$ pour $x = \mathrm{X}$.

Dans tout ce qui précède, la variable t peut être négative aussi bien que positive, en supposant u égale à une fonction arbitraire de x pour $t = 0$, ou pour une valeur donnée de t.

Ces propositions pourraient ne plus subsister, si quelques-unes des quantités que nous avons considérées dans notre analyse pouvaient devenir infinies pour certaines valeurs de x qui annulleraient la fonction $u(x, t)$.

XXV.

On satisfait aux trois équations (1), (2) et (3), en posant

$$u = \mathrm{C}_i \mathrm{V}_i e^{-p_i t} + \mathrm{C}_{i+1} \mathrm{V}_{i+1} e^{-p_{i+1} t} + \ldots + \mathrm{C}_p \mathrm{V}_p e^{-p_p t}. \qquad (42)$$

C_i, $\mathrm{C}_{i+1}, \ldots \mathrm{C}_p$ étant des constantes arbitraires.

Cette fonction u (42) jouit donc des propriétés qui viennent d'être énoncées. Il est aisé de voir combien de fois elle s'évanouit, quand on donne à t de très grandes valeurs positives ou négatives. Si l'on donne à t une valeur positive très grande, u devient sensiblement proportionnelle à son premier terme $\mathrm{C}_i \mathrm{V}_i e^{-p_i t}$, quand V_i n'est pas nulle, car les rapports des autres termes à celui-ci sont d'autant plus petits que la valeur de t est plus grande, comme on le voit en écrivant cette

fonction de la manière suivante :

$$u = e^{-p_i t}[C_i V_i + C_{i+1} V_{i+1} e^{-(p_{i+1}-p_i)t} + \ldots C_p V_p e^{-(p_p-p_i)t}].$$

Or, la fonction V_i s'évanouit et change de signe $i-1$ fois entre les limites x et X sans que la dérivée $\frac{dV_i}{dx}$ s'annulle en même temps. Donc, t ayant une valeur positive très grande ou infinie, u doit aussi s'évanouir et changer de signe $i-1$ fois entre x et X pour des valeurs de x très peu différentes de celles qui annullent V_i et $\frac{du}{dx}$ ne s'annullera pas en même temps que u. Cette proposition peut être établie plus rigoureusement comme il suit:

Soit ξ l'une des valeurs de x entre x et X pour lesquelles V_i s'annulle. Comme $\frac{dV_i}{dx}$ n'est jamais nulle en même temps que V_i, on peut donner à x une valeur a plus petite que ξ et une valeur b plus grande que ξ telles que pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, $\frac{dV_i}{dx}$ ait constamment le même signe qu'elle a pour $x=\xi$. Alors V_i croîtra ou décroîtra continuellement dans cet intervalle et n'y deviendra nulle que pour $x=\xi$. Or, on a

$$\frac{du}{dx} = e^{-p_i t}\left(C_i \frac{dV_i}{dx} + C_{i+1} \frac{dV_{i+1}}{dx} e^{-(p_{i+1}-p_i)t} + \text{etc.}\right),$$

et le terme $C_i \frac{dV_i}{dx}$ qui n'est pas nul dans l'intervalle de a à b surpasse la somme de tous les termes suivants qui deviennent plus petits que toute quantité donnée, quand on donne à t une valeur positive suffisamment grande.

Donc, $\frac{du}{dx}$ a dans le même intervalle le signe constant de $C_i \frac{dV_i}{dx}$.

Mais pour $x=a$ comme pour $x=b$, u a le même signe que le terme $C_i V_i$ qui n'est pas nul et qui surpasse la somme de tous les termes suivants, quand la valeur de t est suffisamment grande. Donc u a comme V_i deux valeurs de signes contraires pour $x=a$ et pour $x=b$, et puisque $\frac{du}{dx}$ ne change pas de signe entre a et b, on voit que u s'évanouit et change de signe une seule fois dans cet intervalle.

De même u s'évanouit une seule fois dans chacun des petits intervalles semblables qui comprennent les autres valeurs de x pour lesquelles V_i est nulle. Hors de ces intervalles, V_i n'étant pas nulle, u ne le sera pas et aura le même signe que C_iV_i, pourvu que la valeur de t soit assez grande pour que ce terme qui n'est pas nul surpasse la somme de tous les autres.

On verra de même qu'en donnant à t une valeur négative très grande, u s'évanouira et changera de signe $p-1$ fois pour des valeurs de x comprises entre x et X très peu différentes de celles qui annullent la fonction V_p, $\frac{du}{dx}$ ne s'annullera pas en même temps que u.

Si l'on fait $t=0$, u devient

$$Y = C_iV_i + C_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_pV_p.$$

Cette fonction Y *doit changer de signe entre les limites* x *et* X *au moins* $i-1$ *fois*. En effet, d'après les numéros précédents, lorsque t croît depuis 0 jusqu'à $+\infty$, le nombre des changements de signe de la fonction $u(x, t)$ entre les limites x et X ne peut que diminuer ou rester le même; donc ce nombre, étant $i-1$ quand $t=+\infty$, doit être supérieur ou au moins égal à $i-1$ quand $t=0$. Ainsi Y change de signe au moins $i-1$ fois pour $i-1$ valeurs de x différentes comprises entre x et X; il peut arriver d'ailleurs que quelqu'une de ces $i-1$ valeurs annulle un nombre pair de dérivées consécutives $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$, ... en même temps que Y. En outre Y peut encore s'évanouir sans changer de signe pour d'autres valeurs de x comprises entre x et X et aussi être nulle à ces deux limites ou à l'une d'elles. Nous supposons ici qu'aucune des équations (2), (3) ne se réduit à $V=0$ pour $x=x$ ou $x=X$.

On voit de même que le nombre des valeurs de x, depuis x jusqu'à X, qui annullent la fonction Y, ne peut surpasser $p-1$, en comptant x ou X parmi ces valeurs, si Y est nulle à l'une de ces limites. En effet, quand $t=-\infty$, u s'évanouit et change de signe $p-1$ fois pour $p-1$ valeurs de x comprises entre x et X infiniment peu différentes de celles qui annullent V_p: et quand t croît depuis $-\infty$ jus-

qu'à o, le nombre des valeurs nulles de $u(x, t)$ correspondantes à des valeurs de x comprises entre x et X, ou même égales à ces limites, ne peut que diminuer ou rester le même. Donc ce nombre est au plus $p - 1$ pour $u(x, 0)$ ou Y.

On peut même prouver que le nombre des valeurs différentes de x qui annullent Y doit être plus petit que $p - 1$, si x ou X est l'une de ces valeurs ou si parmi celles qui sont comprises entre x et X il s'en trouve qui annullent à la fois Y et $\frac{dY}{dx}$ ou Y et plusieurs dérivées consécutives $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}\cdots$

En effet, supposons que la valeur ξ comprise entre x et X annulle à la fois Y et les dérivées $\frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}\cdots$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ inclusivement. Si l'on donne à t une valeur négative très petite $-t'$, on vient de voir que la fonction $u(x, -t')$ s'évanouira pour un nombre de valeurs de x au plus égal à $p - 1$, en comprenant parmi ces valeurs x ou X, si elle est nulle à l'une de ces limites. Or à la valeur ξ qui annulle Y ou $u(x, 0)$ et ses dérivées, jusqu'à celle de l'ordre $m - 1$, correspondent m valeurs de x très peu différentes de ξ qui annullent $u(x, -t')$, comme on l'a prouvé dans les numéros précédents. Ainsi quand t passe de $-t'$ à o, m valeurs qui annullent $u(x, -t')$ deviennent toutes à la fois égales à la valeur ξ qui annulle Y. D'ailleurs à chacune des autres valeurs de x qui annullent Y correspond toujours au moins une valeur qui annulle $u(x, -t')$ différente des m valeurs très voisines de ξ, dont il vient d'être question. Donc le nombre total des racines x de l'équation $u(x, -t') = 0$ depuis x jusqu'à X, étant au plus $p - 1$, on voit que *le nombre des racines x de l'équation* $Y = 0$, *depuis* x *jusqu'à* X, *est aussi au plus* $p - 1$, *en comptant chaque valeur de x telle que ξ comprise entre* x *et* X *qui annulle à la fois* Y *et quelques-unes de ses dérivées consécutives* $\frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ *pour autant de racines égales entre elles qu'il y a d'unités dans l'ordre de la première dérivée que cette valeur ξ n'annulle pas.* Quand aux autres valeurs de x qui annullent Y sans annuller en même temps $\frac{dY}{dx}$, ce sont les ra-

cines simples de l'équation $Y = 0$; chacune d'elles ne doit être comptée qu'une seule fois.

Le degré de multiplicité d'une racine de l'équation $Y = 0$, tel que nous venons de le définir, a, comme on voit, la même expression que dans les équations algébriques ordinaires, puisqu'il est égal au nombre des fonctions consécutives $Y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ que cette racine annulle à la fois.

Cette définition des racines égales de l'équation $Y = 0$ ne convient toutefois qu'aux valeurs de $x > x$ et $< X$. En supposant que l'équation (2) ne se réduise pas à $V = 0$ pour $x = x$, si l'on a $Y = 0$ pour $x = x$, on a vu que cette valeur de x doit annuller en même temps $\frac{dY}{dx}$ ou un nombre impair de dérivées $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ La première de ces dérivées, qui n'est pas nulle pour $x = x$ étant alors d'un ordre pair $2n$, je dis *que le nombre des racines x de l'équation $Y = 0$ sera encore au plus égal à $p - 1$, en comptant la racine x pour n racines égales entre elles;* de sorte que le degré de multiplicité de cette racine x n'est que la moitié de l'ordre $2n$ de la première dérivée qui n'est pas nulle pour $x = x$. La raison en est qu'à cette valeur x qui annulle Y ou $u(x, 0)$ correspondent n valeurs un peu plus grandes que x qui annullent $u(x, -t')$; et comme le nombre total des valeurs de x qui annullent $u(x, -t')$ est au plus $p - 1$, il s'ensuit que le nombre des racines x de l'équation $Y = 0$ sera toujours au plus égal à $p - 1$, en comptant la valeur x pour n racines égales entre elles.

En supposant que l'équation (3) ne se réduise pas à $V = 0$ pour $x = X$, si l'on a $Y = 0$ pour $x = X$, on estimera de la même manière le degré de multiplicité de la racine X.

En admettant ces conventions, le nombre des racines x de l'équation $Y = 0$, x variant depuis x jusqu'à X, ne surpassera jamais $p - 1$.

Si l'équation (2) $k\frac{dV}{dx} - hV = 0$ pour $x = x$ se réduisait à $V = 0$ pour $x = x$, on aurait aussi $Y = 0$ pour $x = x$ et en général

$u(x, t) = 0$ pour $x = \mathrm{x}$. Il est aisé de voir que, dans ce cas, notre théorème subsisterait toujours en ne comptant pas la valeur x parmi les racines de l'équation $Y = 0$, mais en comptant X pour une racine simple ou pour plusieurs racines égales, comme on l'a expliqué plus haut, si l'on a $Y = 0$ pour $x = X$, et si l'équation (3) ne se réduit pas à $V = 0$ pour $x = X$.

De même, si l'équation (3) est $V = 0$ pour $x = X$, et que l'équation (2) ne soit pas $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème aura lieu en ne comptant pas la racine X, mais en comptant x quand on aura $Y = 0$ pour $x = \mathrm{x}$.

Enfin, si les deux équations (2) et (3) se réduisent à la fois à $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = X$, auquel cas on a aussi $Y = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = X$, le même théorème aura lieu en faisant abstraction des deux racines x et X; parce que V_p s'annulle encore $p - 1$ fois entre ces limites.

XXVI.

M. Liouville a démontré directement le théorème du numéro précédent (dans le cahier d'août de son journal) sans employer la considération de la variable auxiliaire t qui entre dans la fonction u(42) dont j'ai fait usage. Il n'a pas tenu compte toutefois de la racine x ou X lorsqu'elle existe. Je vais donner ici une autre démonstration directe du même théorème, indépendante de celui du n° XXIV.

Soit

$$Y = C_i V_i + C_{i+1} V_{i+1} + \ldots + C_p V_p. \qquad (43)$$

On a

$$\frac{d.\left(k\frac{dV_i}{dx}\right)}{dx} + (g\rho_i - l)V_i = 0,$$

$$\frac{d\left(k\frac{dV_{i+1}}{dx}\right)}{dx} + (g\rho_{i+1} - l)V_{i+1} = 0,$$

etc.

En multipliant ces équations par C_i, $C_{i+1} \ldots C_p$, ajoutant et posant

$$Y_1 = -(C_i\rho_i V_i + C_{i+1}\rho_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_p\rho_p V_p),$$

on aura

$$gY_1 = \frac{d\left(k\frac{dY}{dx}\right)}{dx} - lY,$$

ou

$$gY_1 = k\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dk}{dx}\cdot\frac{dY}{dx} - lY. \qquad (44)$$

On voit par l'expression même de la fonction Y(43) qu'elle satisfait aux deux équations

$$k\frac{dY}{dx} - hY = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x},$$
$$k\frac{dY}{dx} + HY = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

puisque chacun de ses termes satisfait séparément aux deux équations (2) et (3).

Je vais prouver que si l'équation $Y = 0$ a un certain nombre μ de racines x tant égales qu'inégales, plus grandes que x et plus petites que X, les racines égales étant définies comme dans le numéro précédent, l'équation $Y_1 = 0$ aura au moins μ racines tant égales qu'inégales, comprises entre les mêmes limites x et X.

Soit ξ une valeur de $x > \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$ pour laquelle Y s'annulle et change de signe. Supposons que cette valeur ξ ne soit ni la plus petite ni la plus grande de celles qui annullent Y. Il y aura entre ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ qui annulle Y au moins une valeur a qui rendra Y *maximum*, et pour laquelle $\frac{dY}{dx}$ sera nulle, et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ aura une signe contraire à celui de Y ou sera nulle. L'équation (44) fait voir que pour $x = a$, et pour les valeurs de x un peu plus grandes que a, la fonction Y_1 sera différente de zéro et aura le même signe que $\frac{d^2Y}{dx^2}$ ou un signe contraire à celui de la valeur *maximum* de Y dont il s'agit (quand même la fonction l serait nulle pour $x = a$ ou nulle identiquement). De même entre ξ et la valeur de x immédiatement supérieure à ξ qui annulle Y, il y aura au moins une valeur b qui rendra Y *maximum* et pour laquelle

$\frac{dY}{dx}$ sera nulle et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ aura un signe contraire à celui de Y ou sera nulle. D'après l'équation (44) Y_1 aura encore pour $x=b$ un signe contraire à celui de cette valeur *maximum* de Y. Mais les deux valeurs *maxima* de Y pour $x=a$ et $x=b$, sont de signes contraires, puique par hypothèse Y change de signe en s'évanouissant pour $x=\xi$. Donc Y_1 a deux valeurs de signes contraires pour $x=a$ et $x=b$, et par conséquent Y_1 change de signe au moins une fois, tandis que x croît depuis a jusqu'à b.

Cette conclusion subsiste, quand la valeur de x immédiatement inférieure ou supérieure à ξ qui annulle Y est x ou X.

Si ξ est la plus petite racine de l'équation $Y=0$, Y n'étant pas alors nulle pour $x=x$, il existe entre x et ξ au moins une valeur de x qui rend Y *maximum*. Car à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx}-hY=0$ qui a lieu pour $x=x$, Y et $\frac{dY}{dx}$ ont d'abord le même signe pour $x=x$ et pour les valeurs de x un peu plus grandes que x; donc, x croissant à partir de x, la fonction Y ne peut pas s'évanouir avant que $\frac{dY}{dx}$ change de signe et prenne un signe contraire à celui de Y. Donc Y doit atteindre une valeur *maximum* avant de s'annuller la première fois pour $x=\xi$. Ce *maximum* pourrait avoir lieu pour $x=x$, si la constante h était nulle. Entre la valeur de x correspondante à ce *maximum* et celle immédiatement supérieure à ξ qui répond à un autre *maximum* de Y, il y aura au moins une valeur de x pour laquelle Y_1 s'évanouira et changera de signe, puisque d'après l'équation (44), Y_1 a toujours un signe contraire à celui de Y, chaque fois que Y devient *maximum*, et que les deux *maxima* dont il vient d'être question sont de signes contraires.

On verra de même que si ξ est la plus grande valeur de x qui annulle Y, il y a, à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx}+HY=0$ pour $x=X$, au moins une valeur de x comprise entre ξ et X qui rend Y maximum; elle peut être égale à X, si H est nulle. Pour cette valeur et pour celle immédiatement inférieure à ξ, qui donne un autre maximum de Y, Y_1 a deux valeurs de signes contraires, de sorte que Y_1 change de signe au moins une fois dans cet intervalle.

Si ξ est la seule valeur de x qui annulle Y, cette fonction a encore au moins un maximum dans l'intervalle de x à ξ et un autre dans l'intervalle de ξ à X, d'où il suit que Y_1 change de signe dans l'intervalle compris entre ces deux maxima.

On peut déjà conclure de ce qui précède que Y_1 doit changer de signe au moins autant de fois que Y entre les limites x et X, Y étant ou n'étant pas nulle à chacune de ces limites.

Supposons maintenant que la valeur ξ toujours comprise entre x et X soit une racine multiple de l'ordre m de l'équation $Y = 0$, c'est-à-dire qu'elle annulle à la fois les m fonctions consécutives Y, $\frac{dY}{dx}$... jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$. En désignant par A la valeur de $\frac{d^mY}{dx^m}$ pour $x = \xi$ et faisant $x = \xi + x'$, on aura $\frac{d^mY}{dx^m}$ ou $\frac{d^mY}{dx'^m} = A + \alpha_m$, α_m étant une fonction de x' qui deviendra très petite et nulle en même temps que x'. Puis par une suite d'intégrations, il viendra

$$\frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}} \text{ ou } \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} = (A + \alpha_{m-1})x', \quad \frac{d^{m-2}Y}{dx^{m-2}} = (A + \alpha_{m-2})\frac{x'^2}{1.2}, \ldots$$

$$\ldots \frac{dY}{dx} = (A + \alpha_1)\frac{x'^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}, \quad Y = (A + \alpha)\frac{x'^m}{1.2.3\ldots m},$$

les quantités $\alpha_{m-1}\ldots\alpha_1$, α étant comme α_m très petites et nulles en même temps que x'.

En mettant les valeurs de Y, $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ dans l'équation (44), on voit que Y_1 est égale au produit de $\frac{Ax'^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}$ par une fonction de x' qui approche d'autant plus d'être égale à $\frac{k}{g}$ que x' est plus petite.

Par conséquent, si ξ est une racine double de $Y = 0$, ξ n'est pas racine de $Y_1 = 0$, ce qu'on voit d'ailleurs immédiatement à l'inspection de l'équation (44). Si m est > 2, ξ est racine de l'équation $Y_1 = 0$, et s'y trouve $m-2$ fois; car en supposant qu'elle s'y trouve un nombre s de fois, c'est-à-dire qu'elle annulle les s fonctions Y_1, $\frac{dY_1}{dx}\ldots\frac{d^{s-1}Y_1}{dx^{s-1}}$; Y_1 est égale au produit de $\frac{x'^s}{1.2.3\ldots s}$ par une fonction de x' qui

ne devient pas très petite et nulle en même temps que x'; s est donc $= m - 2$.

L'expression de Y_1 en fonction de x' fait voir aussi que pour une valeur $\xi + x'$ un peu plus grande que ξ, Y_1 doit avoir le même signe que $\frac{d^2Y}{dx^2}$ et par conséquent le même signe que Y attendu que pour $x = \xi + x'$ toutes les fonctions $Y, \frac{dY}{dx}, \ldots \frac{d^mY}{dx^m}$ ont le signe de A, x' étant positive et suffisamment petite. Or x croissant au-delà de ξ doit toujours atteindre une valeur (plus petite que X ou égale à X), pour laquelle Y est maximum et Y_1 a un signe contraire à celui de Y, qui n'a pas changé de signe en passant de zéro à ce maximum. Donc Y_1 change de signe au moins une fois dans le même intervalle. On verra de même que Y_1 doit changer de signe au moins une fois dans l'intervalle compris entre la racine ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ (supérieure ou égale à x) qui rend Y maximum.

Il est donc prouvé que si l'équation $Y = 0$ a m racines égales à ξ, ξ étant comprise entre x et X, l'équation $Y_1 = 0$ aura $m - 2$ racines égales à ξ, et en outre deux autres racines pour lesquelles Y_1 changera de signe, l'une comprise entre ξ et la valeur de x immédiatement supérieure à ξ qui rend Y maximum, l'autre entre ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ qui rend Y maximum.

On conclut de ce qui précède, que si l'équation $Y = 0$ a μ racines tant égales qu'inégales comprises entre x et X, l'équation $Y_1 = 0$ aura aussi au moins μ racines tant égales qu'inégales entre les mêmes limites, et renfermées entre les valeurs de x qui répondent à des valeurs maxima de Y_1 alternativement positives et négatives. Ce théorème a lieu, comme on voit, en faisant abstraction de la racine x ou X que chacune des équations $Y = 0$, $Y_1 = 0$ pourrait avoir.

On peut aussi comprendre dans l'énoncé de ce théorème, la racine x ou X que peut avoir $Y = 0$, en la comptant pour autant de racines égales entre elles qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des fonctions consécutives $Y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2} \ldots \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ qu'elle annulle, ce nombre m étant nécessairement pair.

En effet, si l'on a $Y = 0$ pour $x = x$, on aura en même temps

$\frac{dY}{dx} = 0$ à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx} - hY = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$. Si $\frac{d^2Y}{dx^2}$ n'est pas nulle en même temps, $Y_{,}$ d'après l'équation (44) ne sera pas nulle pour $x = \mathrm{x}$ et aura le signe de $\frac{d^2Y}{dx^2}$. Entre x et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui rend Y maximum il y en aura au moins une pour laquelle $Y_{,}$ changera de signe, comme on l'a vu plus haut. Ainsi en comptant x pour une racine simple de $Y = 0$, l'équation $Y_{,} = 0$ a au moins une racine correspondante plus grande que x.

Si la valeur x annulle les m fonctions consécutives Y, $\frac{dY}{dx}$.... $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$, le nombre m est pair. En effet, si l'on fait $x = \mathrm{x} + \xi'$, la fonction $Y_{,}$ ou $-(C_i\rho_iV_i + C_{i+1}\rho_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_p\rho_pV_p)$ sera, d'après ce qu'on a vu plus haut, divisible par x'^{m-2}, c'est-à-dire égale au produit de x'^{m-2} multiplié par une fonction de x' qui ne sera ni nulle ni infinie pour $x' = 0$. Pareillement, si l'on multiplie les différents termes de $Y_{,}$ par ρ_i, ρ_{i+1}, etc., la nouvelle fonction..... $C_i\rho_i^2V_i + \ldots + C_p\rho^2_pV_p$ sera divisible par x'^{m-4}, et en continuant ainsi on trouvera que la fonction $C_i\rho_i^nV_i + \ldots + C_p\rho_p^nV_p$ est divisible par x'^{m-2n}.

Donc, si le nombre m est pair et $= 2n$, cette dernière fonction Y_n ne s'évanouira pas pour $x' = 0$. Si l'on suppose m impair et $= 2n + 1$, Y_n sera divisible par x'. Or on a l'équation $k\frac{dY_n}{dx'} - hY_n = 0$ pour $x' = 0$. Donc $\frac{dY_n}{dx'}$ serait nulle pour $x' = 0$ en même temps que Y_n, et il s'ensuivrait que Y_n serait divisible par une puissance de x' supérieure à la première; ce qui est contraire à ce que nous venons de trouver. Il est donc impossible que m soit un nombre impair $2n + 1$.

En supposant $m = 2n$, $Y_{,}$ est divisible par x'^{2n-2} et par conséquent la racine x annulle à la fois les $2n - 2$ fonctions consécutives $Y_{,}$ $\frac{dY_{,}}{dx}$... $\frac{d^{2n-3}Y_{,}}{dx^{2n-3}}$, et d'ailleurs entre x et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui rend Y maximum, il y a au moins une racine de $Y_{,} = 0$.

Donc si l'on convient de compter la valeur x qui annulle les $2n$ fonctions $Y \frac{dY}{dx} \ldots \frac{d^{2n-1}Y}{dx^{2n-1}}$ pour n racines égales entre elles de l'équation $Y = 0$, l'équation $Y_1 = 0$ aura, selon la même convention, $n - 1$ racines égales à x, et de plus une racine comprise entre x et la valeur de x immédiatement supérieure qui rend Y maximum.

Les mêmes observations s'appliquent à l'autre limite X.

Nous avons donc démontré que si l'équation $Y = 0$ ou $C_i V_i + \ldots + C_p V_p = 0$ a un certain nombre μ de racines x tant égales qu'inégales depuis x jusqu'à X, sans exclure ces limites mêmes, l'équation $Y_1 = 0$ ou $C_i \rho_i V_i + \ldots + C_p \rho_p V_p = 0$ aura aussi au moins μ racines tant égales qu'inégales, depuis x jusqu'à X, les racines égales étant définies comme nous l'avons dit précédemment.

En conséquence, il y aura aussi *à fortiori* au moins μ racines, soit inégales, soit égales, dans chacune des équations suivantes qui dérivent les unes des autres comme Y_1 dérive de Y.

$$\begin{aligned} C_i \rho_i^2 V_i + \ldots + C_p \rho_p^2 V_p &= 0, \\ C_i \rho_i^3 V_i + \ldots + C_p \rho_p^3 V_p &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_i \rho_i^n V_i + \ldots + C_p \rho_p^n V_p &= 0. \end{aligned}$$

On peut même ajouter, d'après ce qu'on a vu plus haut, que chacune de ces fonctions change de signe entre les limites x et X, au moins autant de fois que la première $C_i V_i + \ldots + C_p V_p$, en faisant abstraction de la multiplicité des racines et de celles qui sont égales à x ou à X.

La dernière équation pouvant s'écrire ainsi

$$\left(\frac{C_i}{C_p}\right)\left(\frac{\rho_i}{\rho_p}\right)^n V_i + \left(\frac{C_{i+1}}{C_p}\right)\left(\frac{\rho^{i+1}}{\rho_p}\right)^n V_{i+1} + \ldots + V_p = 0$$

se réduit à très peu près à $V_p = 0$ quand on suppose le nombre n très grand ou infini, et alors elle a $p - 1$ racines inégales, comprises entre x et X; ce qu'on peut au surplus établir plus rigoureusement par le raisonnement déjà employé au commencement du n° XXIV.

Donc on a $\mu < p - 1$ ou au plus égal à $p - 1$; ce qu'il fallait démontrer.

On peut prouver par la même méthode que *l'équation*... $C_iV_i + \ldots + C_pV_p = 0$ *a au moins* $i - 1$ *racines différentes comprises entre* x *et* X *et pour lesquelles la fonction* $C_iV_i +$ etc... $+ C_pV_p$ *change de signe.*

En effet, on a vu tout-à-l'heure que la fonction

$$C_i\rho_i^n V_i + \ldots + C_p\rho_p^n V_p$$

a au moins autant de changements de signe entre x et X que

$$C_iV_i + \ldots + C_pV_p.$$

On en conclut, en remplaçant C_i par $\frac{C_i}{\rho_i^n}$, C_{i+1} par $\frac{C_{i+1}}{\rho_{i+1}^n}$, etc. que

$$C_iV + \ldots + C_pV_p$$

a au moins entre x et X autant de changements de signe que la fonction

$$\frac{C_i}{\rho_i^n} V_i + \ldots + \frac{C_p}{\rho_p^n} V_p$$

qui en a $i - 1$ lorsqu'on fait n infini, puisqu'alors elle est proportionnelle à V_i (*).

Les fonctions $Y, Y_1 \ldots Y_n$, dont je viens de m'occuper ne sont autre chose que la fonction u (42) et ses dérivées $\frac{du}{dt} \ldots \frac{d^nu}{dt^n}$ où l'on fait $t = 0$. Au lieu de Y et Y_1, j'aurais pu aussi bien considérer la fonction $u(x, t)$ et sa dérivée $\frac{du}{dt}$ définies par les équations (1), (2), (3), et prouver à l'aide de ces équations, que l'équation $\frac{du}{dt} = 0$, a au moins autant de racines x tant égales qu'inégales depuis x jus-

(*) J'ai admis dans ces derniers nos qu'une fonction Y de la forme $C_i V_i + C_{i+1} V_{i+1} + \ldots + C_pV_p$ ne peut pas être identiquement nulle pour toute valeur de x comprise entre x et X, quand les coefficients $C_iC_{i+1} \ldots C_p$ ne sont pas tous nuls. On reconnaît aisément cette propriété en observant qu'on a

$$\int_x^X gV_i\, Y dx = C_i \int_x^X gV_i^2 dx + C_{i+1} \int_x^X gV_i\, V_{i+1} dx + \ldots + C_p \int_x^X gV_i\, V_p dx,$$

ou simplement

$$\int_x^X gV_i\, Y dx = C_i \int_x^X gV_i^2 dx,$$

d'où il résulte que Y ne peut pas être identiquement nulle.

qu'à X que l'équation $u(x, t) = 0$, d'où j'aurais conclu le théorème relatif à $C_1V_1 + \ldots + C_pV_p = 0$.

Ce théorème a lieu, comme on l'a déjà vu dans la démonstration du n° XXIV, quand même la fonction l ne serait pas constamment positive entre les limites x et X. Il est aisé d'étendre à ce cas où l est quelconque, la démonstration que je viens de donner dans ce dernier numéro, en la modifiant de la manière suivante.

Ayant désigné par Y la fonction $C_iV_i + C_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_pV_p$, je prends

$$Y_1 = -[C_iV_i(\rho_i + c) + C_{i+1}V_{i+1}(\rho_{i+1} + c) + \ldots + C_pV_p(\rho_p + c)],$$

c étant une constante arbitraire. J'ai alors au lieu de l'équation (44), la suivante $gY_1 = k\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dk}{dx}\frac{dY}{dx} - (gc + l)\,Y$.

Au moyen de cette équation, en prenant la constante c positive et assez grande pour que la fonction $gc + l$ reste positive entre les limites x et X, je prouve comme précédemment, que si l'équation $Y = 0$ a μ racines x tant égales qu'inégales depuis x jusqu'à X, sans exclure ces limites mêmes, l'équation $Y_1 = 0$ doit avoir aussi au moins μ racines égales ou inégales depuis x jusqu'à X, ce qui suffit pour établir le théorème en question.

Il faut ajouter ici les remarques qui terminent le n° XXIV (*).

L'équation (44) fait voir d'ailleurs que si Y était constamment nulle, entre les limites x et X, la fonction

$$Y_1 \text{ ou } -(C_i\varrho_i V_i + \ldots + C_p\varrho_p V_p)$$

serait nulle aussi, et par conséquent la fonction

$$C_i\varrho_i^n V_i + \ldots + C_p\varrho_p^n V_p,$$

ou celle-ci

$$\left(\frac{C_i}{C_p}\right)\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_p}\right)^n V_i + \ldots + V_p$$

le serait encore, tandis qu'au contraire cette dernière fonction se réduit à V_p quand on fait n infini.

(*) Le défaut d'espace m'oblige à supprimer quelques détails relatifs à la sphère et au cylindre que j'ai annoncés dans l'introduction et auxquels le lecteur peut suppléer aisément.

MÉMOIRE

Sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de mécanique céleste;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie le 11 juillet 1836.)

1. Pour résoudre le problème difficile des perturbations planétaires, les géomètres ont successivement imaginé diverses méthodes. La plus remarquable est sans doute celle où l'on regarde les constantes arbitraires du mouvement elliptique comme devenues variables sous l'influence des forces perturbatrices, en conservant d'ailleurs entre la longitude, la latitude, le rayon vecteur de la planète troublée et le temps t, toutes les relations algébriques propres au cas où l'on tient compte de la seule action du soleil. On peut trouver à la rigueur dans les ouvrages de Newton l'idée première de cette méthode dont Lagrange est le principal inventeur et que M. Poisson a simplifiée en quelques points. La détermination des inégalités périodiques du mouvement des planètes se trouve ainsi ramenée au développement en série et à l'intégration d'une certaine quantité, nommée R dans la *Mécanique céleste*, ou plutôt des différentielles partielles de cette quantité, prises par rapport aux éléments de la planète troublée.

Dans la théorie des principales planètes, les excentricités e, e',.... de ces planètes, et leurs inclinaisons Λ, Λ',... sur l'écliptique ont des valeurs très petites. Il est naturel de développer alors la fonction R en série ordonnée suivant les puissances croissantes de e, e', Λ, Λ', etc., ce qui conduit à une série rapidement convergente. Mais les divers termes de R, dans ce développement, contiennent en dénominateur

les puissances successives de la distance moyenne Δ de la planète troublée à la planète perturbatrice, ce qui rend l'intégration impossible sous forme finie. On est donc contraint de développer de nouveau les puissances négatives de Δ en séries de cosinus d'arcs proportionnels au temps t. L'intégration par rapport à cette variable t, s'effectue ensuite immédiatement. La série que l'on obtient en développant ainsi chaque terme de R est peu convergente en elle-même. Euler a observé qu'elle le devient davantage par l'intégration; et, au jugement de d'Alembert, cette simple remarque doit être comptée parmi les plus belles découvertes de ce grand analyste. Toutefois j'ai pensé qu'il serait utile d'éviter ce développement nouveau des divers termes de R, ou du moins de donner une méthode pour calculer avec beaucoup d'approximation le reste qu'on néglige lorsque après l'intégration on prend seulement un certain nombre des termes de la série, les dix premiers par exemple, en omettant tous les autres. J'espère y être parvenu à l'aide des fonctions elliptiques dont mon mémoire va présenter une application curieuse au problème des perturbations. Déjà, dans la solution de ce problème, Legendre avait introduit les fonctions elliptiques définies, c'est-à-dire les fonctions elliptiques dont l'amplitude est égale à une constante. Je montrerai qu'on peut se servir aussi avec avantage des fonctions elliptiques indéfinies dont l'amplitude dépend de la variable t. Mes formules devront surtout être employées, lorsque les moyennes distances de la planète troublée et de la planète perturbatrice au soleil différeront peu l'une de l'autre.

2. Pour faire comprendre en peu de mots le but que je me suis proposé, j'observe qu'en développant R en série ordonnée suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons, on ramène le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes à la détermination numérique, pour une valeur quelconque du temps t, d'intégrales de cette forme,

$$\int Q \cos gt dt, \quad \int Q \sin gt dt, \quad \int dt \int Q \cos gt dt, \quad \int dt \int Q \sin gt dt,$$

Q désignant une fonction périodique de t, et g une constante. L'expression de Q est comprise dans la formule

$$Q = \frac{1}{[A + A' \cos(g't + g_1)]^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un nombre entier impair, et A, A′, g', g_1, des constantes : $g't$ représente la différence des moyens mouvements de la planète troublée m et de la planète perturbatrice m'. Si a et a' sont les demi-grands axes des ellipses décrites par m et m', on aura $A = a^2 + a'^2$, $A' = -2aa'$, ou mieux $A' = -2aa'(1-\lambda^2)$, en représentant par λ le sinus de la moitié de l'angle compris entre les plans des deux orbites, et en évitant de développer le terme très petit $2aa'\lambda^2 \cos(g't + g_1)$. On simplifiera un peu l'expression de la fonction Q en prenant une unité de temps convenable et telle que l'on ait $g' = 1$; en fixant ensuite l'origine du temps à une époque convenable, on peut rendre la constante g_1 égale à zéro. Cela revient au fond à remplacer le binome $g't + g_1$ par une seule lettre t. On a ainsi

$$Q = \frac{1}{(A + A' \cos t)^{\frac{\mu}{2}}},$$

valeur que nous adopterons désormais. Désignons maintenant par q la partie entière de g et par l le reste positif ou négatif $g - q$, dont la valeur est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$: nous aurons $g = q + l$; il en résultera

$$\cos gt = \cos qt \cos lt - \sin qt \sin lt,$$
$$\sin gt = \cos qt \sin lt + \sin qt \cos lt;$$

la détermination des intégrales simples ou doubles de

$$Q \cos gt, \quad Q \sin gt,$$

dépend donc des intégrales des quatre quantités suivantes :

$$Q \cos qt \cos lt, \quad Q \cos qt \sin lt, \quad Q \sin qt \sin lt, \quad Q \sin qt \cos lt.$$

Considérons, par exemple, la première de ces quatre quantités, savoir $Q \cos qt \cos lt$; nous la mettrons sous la forme $P \cos lt$, en posant $P = Q \cos qt$. La fonction P se développe en une série de cosinus d'arcs multiples de t, et les coefficients numériques des divers termes de cette série s'expriment en fonctions elliptiques. Nommons P′ l'en-

semble des premiers termes de P, des $(i-1)$ premiers, si l'on veut, et P″ la différence P — P′ ; on aura

$$\int P \cos ltdt = \int P' \cos ltdt + \int P'' \cos ltdt,$$
$$\int dt \int P \cos ltdt = \int dt \int P' \cos ltdt + \int dt \int P'' \cos ltdt.$$

On calcule immédiatement les termes $\int P' \cos ltdt$, $\int dt \int P' \cos ltdt$ qui donnent déjà une valeur approchée des intégrales demandées. Cela posé, lorsque l'on prend le nombre i assez grand, je prouve que les valeurs des restes $\int P'' \cos ltdt$, $\int dt \int P'' \cos ltdt$ s'expriment très simplement en quantités finies et en fonctions elliptiques, et cela avec tel degré d'approximation qu'on veut. Les théorèmes auxquels je suis arrivé à ce sujet rendront, ce me semble, à la fois plus exact et plus simple le calcul des intégrales $\int P \cos ltdt$, $\int dt \int P \cos ltdt$, dans lesquelles $P = Q \cos qt$. Ce que je viens de dire des intégrales.... $\int Q \cos qt \cos ltdt$, $\int dt \int Q \cos qt \cos ltdt$ peut se dire aussi des intégrales

$$\int Q \cos qt \sin ltdt, \quad \int dt \int Q \cos qt \sin ltdt, \text{ etc.}$$

à la détermination desquelles se réduit, comme on l'a vu, le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes. Dans tous les cas possibles, la marche à suivre est la même. Au reste, on doit s'attendre à trouver ici l'exposé rapide des principes sur lesquels ma méthode repose, et non l'exposition détaillée de ces principes à la théorie des planètes. Le lecteur suppléera sans peine aux détails que j'ai cru devoir supprimer.

5. Soit $P = Q \cos qt$; et considérons les deux intégrales

$$(1) \qquad \varphi(t) = \int P \cos ltdt,$$
$$(2) \qquad \psi(t) = \int P \sin ltdt,$$

dont il s'agit de déterminer les valeurs numériques. En adoptant cette valeur de P, les intégrales $\int P \sin tdt$, $\int P \sin 2tdt, \ldots$ que nous nommerons $P_1, P_2, \ldots$ s'expriment immédiatement sous forme finie, tandis que les intégrales $\int P_1 dt$, $\int P_2 dt, \ldots$ $\int P dt$, $\int P \cos tdt, \ldots$ s'expriment en fonctions elliptiques et se calculent à l'aide des tables de Le-

gendre On peut développer P en une série de cosinus d'arcs multiples de t : les coefficients numériques de ce développement se transformeront en fonctions elliptiques et seront aisés à calculer comme Legendre l'a fait voir dans son ouvrage. Le développement de P étant opéré, on effectue immédiatement les intégrations indiquées dans les formules (1) et (2), et l'on obtient ainsi les valeurs de $\varphi(t)$, $\psi(t)$ développées en séries. Quand les séries qui expriment $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont très convergentes, on peut s'arrêter là et regarder notre problème comme résolu. Mais nous supposerons ici que cela n'a pas lieu ; et nous chercherons à tenir compte approximativement du reste que l'on néglige en prenant pour valeurs exactes de $\varphi(t)$, $\psi(t)$ les $(i-1)$ premiers termes des séries en question. On pourra, si l'on veut, pour fixer les idées, prendre $i-1=9$ ou $i=10$; mais notre analyse sera exacte pour un nombre i quelconque, pourvu qu'il soit suffisamment grand.

Désignons par P'' la valeur de P dans laquelle on a supprimé les $(i-1)$ premiers termes, et par $P'+P''$ la valeur complète de P : il s'agit, comme on voit, d'estimer approximativement les quantités d'abord négligées

$$X = \int P'' \cos ltdt, \quad Y = \int P'' \sin ltdt.$$

Soit p un nombre entier qui prenne successivement toutes les valeurs comprises depuis $p=i$ jusqu'à $p=\infty$: la fonction P'' aura, d'après ce qui précède, un développement de la forme

$$P'' = \Sigma H \cos pt :$$

cela donne

$$X = \cos lt \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - l^2} - \sin lt \, \Sigma \frac{lH \cos pt}{p^2 - l^2},$$

$$Y = \sin lt \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - l^2} + \cos lt \, \Sigma \frac{lH \cos pt}{p^2 - l^2},$$

ou bien

$$X = U \cos lt - V \sin lt,$$
$$Y = U \sin lt + V \cos lt,$$

U et V ayant les valeurs suivantes

$$U = \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - l^2}, \quad V = \Sigma \frac{lH \cos pt}{p^2 - l^2}.$$

La lettre p désigne successivement tous les nombres entiers i, $i+1$, $i+2, \ldots$. Si donc i était un très grand nombre, l^2 étant $< \frac{1}{4}$, on pourrait poser à peu près

$$\frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{l}{p^2 - l^2} = 0 :$$

il en résulterait

$$U = \Sigma \frac{H \sin pt}{p} = \int_0^t P'' dt, \quad V = 0,$$

et par suite

$$X = \cos lt \int_0^t P'' dt, \qquad Y = \sin lt \int_0^t P'' dt.$$

Les restes négligés dépendraient donc alors de la seule intégrale $\int_0^t P'' dt$, et celle-ci se réduit aux fonctions elliptiques, en remplaçant P'' par $P - P'$.

Les valeurs que nous venons de trouver pour U et V ou pour X et Y ne sont pas en général suffisamment exactes quand on donne à i une valeur peu considérable, telle que $i = 10$. Mais par l'analyse même dont nous venons de faire usage, on en obtiendra de plus approchées. En effet, au lieu de négliger tout-à-fait la quantité $\frac{l}{p^2 - l^2}$ dont le développement, suivant les puissances de p^2, est $\frac{l}{p^2} + \frac{l^3}{p^4} + \ldots$, remplaçons-là par cette autre quantité $\frac{l}{p^2 - 1}$, dont le développement... $\frac{l}{p^2} + \frac{l}{p^4} + \ldots$ a une valeur numérique peu différente lorsque p est

grand, puisque le premier terme $\frac{l}{p^2}$ est le même de part et d'autre. L'erreur que l'on commet en posant ainsi

$$\frac{l}{p^2 - l^2} = \frac{l}{p^2 - 1},$$

ne porte que sur des termes divisés par p^4 : aux termes près divisés par p^5, on peut poser de même

$$\frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{1 - l^2}{p} + \frac{pl^2}{p^2 - 1} :$$

on conclura de là pour U et V les valeurs que voici :

$$U = (1 - l^2)\,\Sigma\,\frac{H \sin pt}{p} + l^2\,\Sigma\,\frac{pH \sin pt}{p^2 - 1},$$
$$V = l\Sigma\,\frac{H \cos pt}{p^2 - 1}.$$

Nous avons déjà observé ci-dessus que la quantité

$$\Sigma\,\frac{H \sin pt}{p} \quad \text{ou} \quad \int_0^t P'' dt$$

peut s'exprimer par des fonctions elliptiques : on peut réduire de même aux fonctions elliptiques les deux séries

$$\Sigma\,\frac{pH \sin pt}{p^2 - 1}, \quad \Sigma\,\frac{H \cos pt}{p^2 - 1},$$

et par suite les valeurs de U, V et de X, Y : c'est ce que nous allons démontrer.

Pour plus de généralité, considérons les deux séries

$$\Sigma\,\frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma\,\frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2},$$

dans lesquelles p_1 représente un nombre entier déterminé et $< i$. Quand on a $p_1 = 1$, ces nouvelles séries coïncident avec celles dont nous avons à nous occuper.

On a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\int_0^t P'' \cos p_1 t dt = \cos p_1 t \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2} - p_1 \sin p_1 t \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2},$$
$$\int_0^t P'' \sin p_1 t dt = C + \sin p_1 t \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2} + p_1 \cos p_1 t \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2},$$

C désignant une constante choisie convenablement et que nous déterminerons tout à l'heure. En résolvant ces équations par rapport aux quantités

$$\Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2},$$

il vient

$$\Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2} = \cos p_1 t \int_0^t P'' \cos p_1 t dt - \sin p_1 t \left(C - \int_0^t P'' \sin p_1 t dt \right),$$
$$\Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2} = - \frac{\sin p_1 t}{p_1} \int_0^t P'' \cos p_1 t dt - \frac{\cos p_1 t}{p_1} \left(C - \int_0^t P'' \sin p_1 t dt \right).$$

Mais les intégrales $\int_0^t P'' \sin p_1 t dt$, $\int_0^t P'' \cos p_1 t dt$ ou $\int_0^t (P - P') \sin p_1 t dt$, $\int_0^t (P - P') \cos p_1 t dt$ s'expriment en termes finis ou se ramenent aux fonctions elliptiques : donc il en est de même des deux séries

$$\Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2},$$

et par suite des valeurs approchées de X et Y.

Reste à déterminer la constante C. Pour cela nommons P', l'intégrale $\int_0^t P'' \sin p_1 t dt$ qui s'obtient toujours sous forme finie, et observons que l'intégrale $\int_0^t P'_1 dt$ se ramène aux fonctions elliptiques. Cela posé, multiplions par dt et intégrons entre les limites $t = 0$, $t = \pi$, les deux membres de l'équation

$$P''_1 = C + \sin p_1 t \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2} + p_1 \cos p_1 t \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2} :$$

puisque p et p_1 sont des nombres entiers inégaux, on a

$$\int_0^\pi \sin p_1 t \sin pt dt = 0, \quad \int_0^\pi \cos p_1 t \cos pt dt = 0.$$

Le second membre de l'équation qu'on intègre se réduira donc à $C\pi$, et l'on obtiendra sur-lec-hamp

$$\int_0^\pi P''_1 dt = C . \pi \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P''_1 dt,$$

ce qui détermine la constante C.

Les formules auxquelles on arriverait en poussant jusqu'au bout le calcul que nous avons seulement indiqué sont, je crois, celles dont on fera le plus souvent usage dans les applications pour réduire en nombres X et Y. Mais en continuant à raisonner, comme nous venons de le faire, on en obtiendra d'autres plus exactes encore.

En effet, puisque p_1 étant un nombre entier quelconque $< i$, les deux séries

$$\Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2}$$

s'expriment par des fonctions elliptiques, tout se réduit à ramener à des séries de ce genre-là les valeurs de U et de V : on y parviendra, au moins par approximation, si l'on met les quantités $\frac{p}{p^2 - l^2}$, $\frac{l}{p^2 - l^2}$ sous la forme

$$(\alpha) \begin{cases} \frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2 - 1} + \frac{G_2 p}{p^2 - 4} + \text{etc.} \\ \frac{l}{p^2 - l^2} = \frac{G' l}{p^2 - 1} + \frac{G'' l}{p^2 - 4} + \text{etc.} ; \end{cases}$$

et c'est ce qu'on peut toujours faire aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^{2n+1}}$, pour la première équation, et aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^{2n+2}}$, pour la seconde, en désignant par n le nombre des constantes indéterminées

$G, G_1, \ldots$ ou $G', G'', \ldots$ qui entrent dans les seconds membres des équations (α) : il suffira, en effet, de développer, dans chacune de ces équations, les deux membres en séries ordonnées suivant les puissances descendantes de p, puis d'égaler de part et d'autre les coefficients des n premières puissances de p. Toutefois, pour que cette méthode réussisse, il faut que le nombre i, limite inférieure de la variable p qui s'étend depuis $p = i$ jusqu'à $p = \infty$, soit pris suffisamment grand par rapport à n.

Dans ce numéro, nous avons toujours regardé le nombre l comme compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ et comme différent de zéro. Si par hasard ce nombre l est nul, ce qui peut arriver, on aura $\int P \sin ltdt = 0$ et $\int P \cos ltdt = \int Pdt =$ *une fonction elliptique.*

4. Les méthodes que nous venons d'appliquer à la détermination numérique des intégrales simples

$$(1) \qquad \varphi(t) = \int P \cos ltdt,$$
$$(2) \qquad \psi(t) = \int P \sin ltdt,$$

s'étendent d'elles-mêmes aux intégrales doubles

$$(3) \qquad \varphi_1(t) = \int dt \int P \cos ltdt,$$
$$(4) \qquad \psi_1(t) = \int dt \int P \sin ltdt,$$

dans lesquelles on a, comme ci-dessus, $P = Q \cos qt$. En effet conservons aux deux lettres P', P'' la signification que nous leur avons attribuée dans le numéro précédent, et nous aurons

$$\varphi_1(t) = \int dt \int P' \cos ltdt + \int dt \int P'' \cos ltdt,$$
$$\psi_1(t) = \int dt \int P' \sin ltdt + \int dt \int P'' \sin ltdt:$$

les deux quantités $\int dt \int P' \cos ltdt$, $\int dt \int P' \sin ltdt$, dont la détermination n'offre aucune difficulté, fournissent déjà des valeurs approchées de $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$: tout se réduit donc à calculer approximativement les deux restes

$$X_1 = \int dt \int P'' \cos ltdt, \quad Y_1 = \int dt \int P'' \sin ltdt.$$

Soit $\Sigma H \cos pt$ le développement de P'' : il viendra, en effectuant les

intégrations indiquées,

$$X_1 = -\cos lt\,\Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2} - 2\sin lt\,\Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2},$$
$$Y_1 = -\sin lt\,\Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2} + 2\cos lt\,\Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2},$$

ce qui donne

$$X_1 = -U_1\cos lt - 2V_1\sin lt,$$
$$Y_1 = -U_1\sin lt + 2V_1\cos lt,$$

si l'on pose

$$U_1 = \Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2},$$
$$V_1 = \Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2}.$$

Rappelons-nous maintenant que si p_1 désigne un nombre entier quelconque $< i$, les deux séries

$$\Sigma\,\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},\quad \Sigma\,\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2},$$

s'exprimeront en quantités finies et en fonctions elliptiques : ce théorème a été démontré n° 3. Cela étant, on ramènera aussi les restes U_1, V_1 aux fonctions elliptiques, si l'on parvient à mettre les deux fractions

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2},\quad \frac{lp}{(p^2-l^2)^2},$$

sous la forme

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2} = \frac{G'}{p^2-1} + \frac{G''}{p^2-4} + \text{etc.}$$
$$\frac{lp}{(p^2-l^2)^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2-1} + \frac{G_2 p}{p^2-4} + \text{etc.};$$

et c'est ce qu'on peut toujours faire, au moins par approximation, en disposant convenablement des constantes G', G'', ... G, G_1, G_2, ..., et en supposant la plus petite valeur de p, savoir i, suffisamment grande.

Lorsque la valeur adoptée pour i est très grande, on peut se con-

tenter de poser

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2}=\frac{1}{p^2-1},\quad \frac{lp}{(p^2-l^2)^2}=0:$$

les termes négligées sont alors respectivement de l'ordre $\frac{1}{p^4}$ et de l'ordre $\frac{1}{p^3}$. Et si l'on ne trouve pas ces expressions assez approchées, on en forme sans peine d'autres plus exactes. La marche à suivre ici est la même que celle indiquée n° 3 pour une recherche toute semblable.

Le cas particulier où l'on a $l=0$ mérite d'être traité à part. Il vient alors

$$X_1=-\Sigma\frac{H\cos pt}{p^2},\quad Y_1=0:$$

tout se réduit donc à mettre $\frac{1}{p^2}$ sous la forme

$$\frac{1}{p^2}=\frac{G'}{p^2-1}+\frac{G''}{p^2-4}+\text{etc.}:$$

or, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^6}$, on a

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2-1},$$

aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^6}$, on a

$$\frac{1}{p^2}=\frac{4}{3(p^2-1)}-\frac{1}{3(p^2-4)},$$

et ainsi de suite.

5. Occupons-nous maintenant des deux intégrales simples

$$(5)\qquad \varphi(t)=\int P\cos ltdt,$$
$$(6)\qquad \psi(t)=\int P\sin ltdt,$$

dans lesquelles nous supposerons $P=Q\sin qt$. En adoptant cette valeur de P, les intégrales $\int Pdt$, $\int P\cos tdt$, $\int P\cos 2tdt$, ... que nous désignerons par P_1, P_2, P_3, ... s'exprimeront sous forme finie tandis que les intégrales $\int P_1dt$, $\int P_2dt$, $\int P_3dt$, ... $\int P\sin tdt$, $\int P\sin 2tdt$, ... se réduiront à des fonctions elliptiques. La fonction P

peut se développer en une série de sinus d'arcs multiples de t : désignons par P' l'ensemble des $(i-1)$ premiers termes de ce développement, et par P'' la différence $P-P'$: nous aurons

$$\varphi(t) = \int P' \cos ltdt + \int P'' \cos ltdt,$$
$$\psi(t) = \int P' \sin ltdt + \int P'' \sin ltdt :$$

les intégrales $\int P' \cos ltdt$, $\int P' \sin ltdt$, que l'on réduit aisément en nombres, fournissent des valeurs approchées de $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Pour estimer approximativement les restes

$$X = \int P'' \cos ltdt, \quad Y = \int P'' \sin ltdt,$$

représentons par $\Sigma H \sin pt$ le développement de P'' : il viendra

$$X = -\sin lt\, \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2-l^2} - \cos lt\, \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2-l^2},$$
$$Y = \cos lt\, \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2-l^2} - \sin lt\, \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2-l^2},$$

ce qui donne

$$X = -U \sin lt - V \cos lt,$$
$$Y = U \cos lt - V \sin lt,$$

si l'on pose

$$U = \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2-l^2}, \quad V = \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2-l^2}.$$

Lorsque i est un très grand nombre, on a, à très peu près,

$$\frac{l}{p^2-l^2} = 0, \quad \frac{p}{p^2-l^2} = \frac{1}{p},$$

et il en résulte

$$U = 0, \quad V = \Sigma \frac{H \cos pt}{p} = C - \int_0^t P''dt,$$

C étant une constante que l'on déterminera de la manière suivante. L'intégrale $\int_0^t P''dt$, où l'on peut remplacer P'' par $P-P'$, s'exprime en quantités finies. Nous la représenterons par P''_1, et il est aisé de voir que l'intégrale nouvelle $\int P''_1 dt$ se réduira aux fonctions elliptiques. Or en multipliant par dt et intégrant, entre les limites $t=0$, $t=\pi$, les deux membres de l'équation

$$\Sigma \frac{H \cos pt}{p} = C - P''_1,$$

le premier membre se réduit à zéro, et l'on en conclut

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P''_1 dt :$$

la constante C est donc déterminée.

On aura des valeurs de U et V plus approchées en suivant une marche analogue à celle du n° 3, c'est-à-dire en mettant les fractions $\frac{l}{p^2-l^2}$, $\frac{p}{p^2-l^2}$ sous la forme

$$\frac{l}{p^2-l^2} = \frac{G'}{p^2-1} + \frac{G''}{p^2-4} + \text{etc.},$$
$$\frac{p}{p^2-l^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2-1} + \frac{G_2 p}{p^2-4} + \text{etc.},$$

et en observant que si p_1 désigne un nombre entier $< i$, les séries

$$\Sigma \frac{H \sin pt}{p^2-p_1^2}, \quad \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2-p_1^2},$$

peuvent toujours être sommées à l'aide de fonctions elliptiques, comme le lecteur s'en convaincra sans peine. Lorsque $l = 0$, on a $\psi(t) = 0$, et $\varphi(t)$ s'exprime sous forme finie.

Enfin il n'est pas moins facile d'appliquer des raisonnements semblables aux intégrales doubles

$$\varphi_1(t) = \int dt \int P \cos lt dt,$$
$$\psi_1(t) = \int dt \int P \sin lt dt,$$

P ayant toujours pour valeur $Q \sin qt$: ce qui complète notre travail. Lorsque $l = 0$, la seconde de ces intégrales se réduit à zéro, et la première se ramène aux fonctions elliptiques. Ce cas particulier se présente dans les applications, et il est remarquable par sa simplicité.

La méthode, qui m'a conduit aux résultats consignés dans ce Mémoire, me paraît assez élégante, et l'on peut en tirer parti pour certaines recherches d'analyse pure.

ERRATA.

Page 15, ligne 2, *au lieu de* $\sin amx$, $\cos amx$, *lisez* $\sin \frac{mx}{a}$, $\cos \frac{mx}{a}$

15, 6, *au lieu de* $\sin aml = 0$, *lisez* $\sin \frac{ml}{a} = 0$

ib 7, *au lieu de* $\frac{\pi}{al}$, $\frac{2\pi}{al}$, *lisez* $\frac{a\pi}{l}$, $\frac{2a\pi}{l}$

ib. 10, *au lieu de* $e^{-\frac{i^2 t}{a^2 l^2}}$, *lisez* $e^{-\frac{a^2 i^2 t}{l^2}}$

63, 18, *au lieu de* $\frac{2}{l} \cdot \frac{\cos \frac{\pi\mu}{2l} \sin \frac{\pi\alpha}{2l}}{\cos \frac{\pi\mu}{2l} - \cos \frac{\pi\alpha}{2l}} = -\frac{8\alpha}{\pi^2(\mu^2 - \alpha^2)}$,

lisez $\frac{2}{l} \cdot \frac{\cos \frac{\pi\mu}{2l} \sin \frac{\pi\alpha}{2l}}{\cos \frac{\pi\mu}{l} - \cos \frac{\pi\alpha}{l}} = -\frac{2\alpha}{\pi(\mu^2 - \alpha^2)}$

ib., dernière, *au lieu de* $\frac{8}{\pi}$, *lisez* $\frac{2}{\pi}$

148, 5, *au lieu de* des valeurs très grandes, *lisez* des valeurs négatives très grandes

156, 6, *au lieu de* V'', *lisez* $K'' \frac{dV''}{dx} + pV''$

185, 5, *au lieu de* $x = a + x''$, *lisez* $x = c + x''$

186, 13, *au lieu de* $L \frac{d^2V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NU$, *lisez* $L \frac{d^2U}{dx^2} + M \frac{dU}{dx} + NU$

264, 8, *au lieu de* $(n-1)$ fois, *lisez* n fois

ib., 11, *au lieu de* m étant $< n$, *lisez* m étant $\leqq n$

ib., 21, *au lieu de* m étant $< n$, *lisez* m étant $\leqq n$

265, 5, *au lieu de* la quantité ρ_n s'annulle au moins $(n-1)$ fois, *lisez* la quantité ρ_n change de signe et s'annulle au moins n fois

285, 17 *au lieu de* $n\phi + \alpha_n \frac{(8n-3)\pi}{4}$, *lisez* $n\phi + \alpha_n = \frac{(8n-1)\pi}{4}$

312, 23, après instantané, *ajoutez* appliquées en sens contraire

ib., 24...27, *au lieu de* donc la somme, etc., *lisez* donc par rapport à chacun des axes ox, oy, oz la somme des moments des forces effectives, plus la somme des moments des forces centrifuges, est égale à la somme des moments des forces motrices

314, 2...8, *au lieu de* $\mp \frac{p}{\omega}$, etc., *lisez* $-\frac{p}{\omega}$, $-\frac{q}{\omega}$, $-\frac{r}{\omega}$. Les projections de cette force sur les axes ox, oy, oz seront donc $-m\omega ph$, $-m\omega qh$, $-m\omega rh$;

par conséquent les moments de la force $m\omega^2 h$, par rapport aux axes ox, oy, oz seront $-m\omega h(ry-qz)$, $-m\omega h(pz-qx)$, $-m\omega h(qx-py)$

Page 314, 14...20, *au lieu de* U, V, W, *lisez* $-$U, $-$V, $-$W

319, 13, *au lieu de* positif, *lisez* négatif

ib., *ib.*, négatif, positif

ib., 21, *au lieu de* $\lambda = \infty$, *lisez* $\lambda = -\infty$

ib., *ib.*, $\lambda = -\infty$, *lisez* $\lambda = \infty$

ib., 28 et 29, *au lieu de* la surface donnée, etc., *lisez* d'ailleurs en imaginant la surface donnée rapportée à l'un de ces plans, il sera facile de voir par les equations (7) qu'il existe toujours trois plans principaux perpendiculaires entre eux

321, 13, *au lieu de* $Gx + Hy + Kz$ *lisez* $G'x + H'y + K'z$ où G', H', K' sont les valeurs de $Ga + Hb + Kc$ correspondantes aux trois valeurs de λ qui ont servi à déterminer les axes

ib., 15 et 20, *au lieu de* G, *lisez* G'

323, 4, 5, 6, 11 de la note, *au lieu de* diamètres, *lisez* demi-diamètres

398, 11, *au lieu de* en comptant X parmi ces valeurs, *lisez* et plus petites que X

ib., 13, *au lieu de* X pouvant être encore la plus grande de ces valeurs, *lisez* et plus petites que X.

FIN DU PREMIER VOLUME.