เลขที่นั่งสอบ...............

**มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี**
**การสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557**

| | | |
|---|---|---|
| ข้อสอบวิชา | STA221 Statistical Theory I | นักศึกษาสาขาสถิติ ชั้นปีที่ 2 |
| วันสอบ | พุธที่ 20 พฤษภาคม พ.ศ. 2558 | เวลา 13.00 - 16.00 น. |

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 8 ข้อ 4 หน้า 80 คะแนน (รวมใบปะหน้าและทฤษฎีบท)
2. ให้ทำลงในข้อสอบทุกข้อ
3. ไม่อนุญาตให้นำเอกสาร และตำราเรียน ทุกชนิดเข้าห้องสอบ
4. อนุญาตให้นำเครื่องคำนวณตามระเบียบที่มหาวิทยาลัยกำหนดเข้าห้องสอบได้
5. ข้อสอบไม่มีข้อผิดพลาด หากสงสัยให้นักศึกษาพิจารณาและตัดสินใจด้วยตนเอง

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ
เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ
ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและสมุดคำตอบออกนอกห้องสอบ
นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

ชื่อ-นามสกุล.................................................................................................รหัสนักศึกษา.......................................................

อาจารย์ธเนศ จิตต์สุภาพรรณ
ผู้ออกข้อสอบ

ข้อสอบได้ผ่านการพิจารณาจากภาควิชาคณิตศาสตร์แล้ว

(ผศ.ดร.ธีระเดช เจียรสุขสกุล)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

**ทฤษฎีบทสถิติอันดับ (Order Statistics)**

ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด $n$ จากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (pdf) เป็น $f(x)$ แล้ว

1) ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม (joint pdf) ของสถิติอันดับ $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ หรือ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ คือ

$$g_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i) \ ; \ a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < b$$

2) ฟังก์ชันการแจกแจงส่วนริม (marginal pdf) ของ $Y_i$ แทนด้วย $g_i(y_i)$ โดยที่ $1 < i < n$ คือ

$$g_i(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}[F(y_i)]^{i-1}[1 - F(y_i)]^{n-i} f(y_i) \ ; \ a < y_i < b$$

3) ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม (joint pdf) ของ $Y_i$ และ $Y_j$ โดยที่ $Y_i < Y_j$ แทนด้วย $g_{i,j}(y_i, y_j)$ คือ

$$g_{i,j}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}[F(y_i)]^{i-1}[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}[1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_i) f(y_j)$$

โดยที่ $a < y_i < y_j < b$

**ทฤษฎีบทขีดจำกัด (Limit Theorems)**

**อสมการเชบบี้เชบ (Chebyshev's Inequality)**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $\mu$ และความแปรปรวนเป็น $\sigma^2$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริงบวก $k > 0$ ใดๆ

$$P\{|X - \mu| > k\sigma\} \le \frac{1}{k^2}$$

**กฎของเลขจำนวนมาก (Law of Large Number)**

ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงอย่างเดียวกัน และเป็นอิสระต่อกัน (independent identically distributed: iid) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $\mu$ ความแปรปรวนเป็น $\sigma^2$ และ $\overline{X}_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่กำหนดโดย

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , n = 1, 2, 3, \dots$$

นั่นคือ $\overline{X}_1 = X_1, \overline{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), \overline{X}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \dots, \overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

แล้ว จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใดๆ

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\} = 0$$

Generating Random Numbers

Multiplicative Congruential Method $\quad X_i = aX_{i-1} (\text{mod } m), \ R_i = \frac{X_i}{m} \ , \ i = 1, 2, 3, \dots$

**ทฤษฎีการจำลองตัวแปรสุ่ม**

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ที่มี F เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม แทนด้วย $y = F(x)$ ซึ่งมีฟังก์ชันผกผัน $F^{-1}$ นิยามดังนี้

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \ge y\}$$

และให้ตัวแปรสุ่ม R มีการแจงแจงแบบเอกรูป $U(0,1)$ ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม X ซึ่ง $R = F(X)$ หรือ $X = F^{-1}(R)$ มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F หรือเรียก $X = F^{-1}(R)$ เป็น **ตัวแบบผลิต (Generator)**

**สถิติที่มีความพอเพียง (Sufficiency Statistic)**

ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น เป็น $f(x;\theta)$ จะกล่าวว่า

**นิยาม**

ตัวสถิติ $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ เป็น**สถิติที่มีความพอเพียง (Sufficiency Statistic) ของ** $\theta$ ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional distribution) ของ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เมื่อกำหนด $T(X_1, X_2, \dots, X_n) = t$ คือ

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n | t) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{g(t)}$$

เป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับ $\theta$

**หลักเกณฑ์ของฟิชเชอร์และเนย์แมน** (Fisher and Neyman Criterion)
ตัวสถิติ $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ เป็น**สถิติที่มีความพอเพียง** (Sufficiency Statistic) **ของ** $\theta$ ก็ต่อเมื่อ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = g(t(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta)H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

โดยที่ $g(t(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta)$ เป็นฟังก์ชันของ $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $\theta$ สำหรับ $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันของ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เท่านั้น ไม่ขึ้นกับ $\theta$

**ทฤษฎีการแยกตัวประกอบ** (Factorization Theorem)
ตัวสถิติ $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **เป็นสถิติที่มีความพอเพียง (Sufficiency Statistic) ของ** $\theta$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบสองฟังก์ชัน $g(t(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta)$ และ $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ที่ทำให้

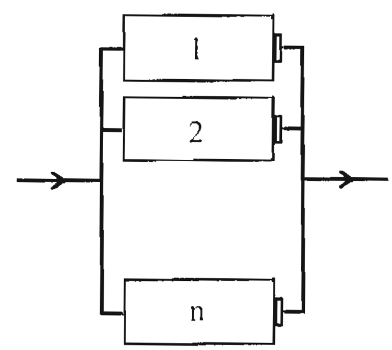
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = g(t(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta)H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

โดยที่ $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ไม่ขึ้นกับ $\theta$

------------------------------------------------------------ Good Luck ^_^

ข้อ 1. ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นอายุการใช้งาน (หน่วย: ชั่วโมง) ของแบตเตอรี่ $n$ ตัว ถ้าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential distribution) โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น $\beta$ ชั่วโมง และถ้าระบบการใช้งานหนึ่งมีการต่อแบตเตอรี่ $n$ ตัวแบบขนานกันตามรูป

ระบบการใช้งานดังกล่าวไม่สามารถที่จะดำเนินการได้หากแบตเตอรี่ $n$ ตัวเสีย จงหาความน่าจะเป็นที่อายุการใช้งานของระบบจะใช้งานได้ไม่ต่ำกว่า 1000 ชั่วโมง หากกำหนดให้ $n = 4, \beta = 800$ (11 คะแนน)




ข้อ 2. จงหาความน่าจะเป็นที่พิสัย (Range) ของตัวอย่างสุ่มขนาด 4 จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเอกรูป (Uniform distribution) โดยที่ $1 < x < 2$ จะมีค่าน้อยกว่า $\frac{1}{2}$ (14 คะแนน)

ข้อ 3. จงหาเปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 และค่ามัธยฐาน ของตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นดังข้อ 6 (7 คะแนน)

ข้อ 4. กำหนดตัวแปรสุ่ม $X$ มีฟังก์ชันมวลของความน่าจะเป็น (Probability mass function: pmf) ดังนี้

$$p(x; n) = \frac{2x}{n(n+1)} \quad , \quad x = 1, 2, \dots, n$$

จงหา**ตัวแบบผลิต (Generator)** เพื่อสร้างตัวแปรสุ่ม $X$ เมื่อกำหนดให้ $n = 5$ (10 คะแนน)

ข้อ 5. จงสร้างตัวอย่างสุ่มขนาด 5 ที่มีฟังก์ชันหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบพาเรโต (Pareto distribution) โดยที่

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \quad , \qquad x \geq \alpha$$

ให้ใช้คำสั่งสร้าง Random Number จากเครื่องคิดเลขเพื่อกำหนดค่า $R \sim U(0,1)$ และกำหนดให้ $\alpha = \beta = 2$
(10 คะแนน)

ข้อ 6. สุ่มตัวอย่างขนาด 15 จากประชากรที่มีฟังก์ชันหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f(x) = 3(1-x)^2 \ , \ 0 \leq x \leq 1$$

กำหนดให้ $\overline{X} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i$ (12 คะแนน)

ก. จงใช้อสมการเชบบี้เชบประมาณค่า $P(\frac{1}{8} \leq \overline{X} \leq \frac{3}{8})$

ข. จงใช้ทฤษฎีลิมิตกลางประมาณค่า $P(\frac{1}{8} \leq \overline{X} \leq \frac{3}{8})$

ข้อ 7. ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli distribution) โดยมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (pmf) ดังนี้

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x = 0,1$$

จงแสดงว่า $\bar{X}$ เป็นตัวสถิติที่มีความพอเพียง (Sufficiency Statistic) ของ $\theta$ โดยใช้นิยาม (8 คะแนน)

$$[Y \sim \text{Binomial distribution } \rightarrow f(y;n,\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1-\theta)^{n-y}, y = 0,1,\ldots,n]$$

ข้อ 8. ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson distribution) โดยที่

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

จงหาสถิติที่มีความพอเพียง (Sufficiency Statistic) ของ $\theta$ โดยใช้ทฤษฎีแยกตัวประกอบ (Factorization Theorem) (8 คะแนน)