เลขที่นั่งสอบ....................

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

การสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557

วิชา INC 212 Signals and Systems

วศ.ระบบควบคุมและเครื่องมือวัด ปีที่2 (ปกติ, สหกิจศึกษา)

วศ.ระบบควบคุมและเครื่องมือวัด ปีที่1 (สหกิจศึกษา ปวส.)

สอบวันจันทร์ที่ 23 กุมภาพันธ์ 2558

เวลา 13.00 – 16.00 น.

คำเตือน

1. ข้อสอบวิชานี้มี 4 ข้อ 12 หน้า 35 คะแนน (รวมใบปะหน้า) ทำทุกข้อ มีตารางสูตรอยู่ด้านหลังข้อสอบ
2. เขียนคำตอบลงในข้อสอบ ถ้าเขียนไม่พอให้ใช้ด้านหลังของข้อสอบข้อนั้น ๆ
3. **อนุญาต**ให้ใช้เครื่องคำนวณได้
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกสารเข้าได้

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ

เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ

ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ

นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

(ผศ.ดร. ปรัญชลีย์ สมานพิบูรณ์)

ผู้ออกข้อสอบ

โทร 02- 470-9102

ข้อสอบนี้ได้ผ่านการประเมินจากภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมและเครื่องมือวัดแล้ว

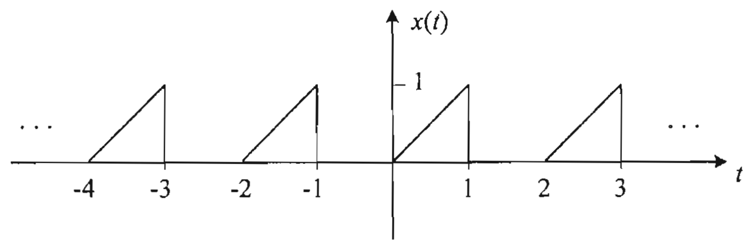
(ผศ.ดร. เดี่ยว กุลพิรักษ์)

หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมและเครื่องมือวัด

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

1. Fourier Series

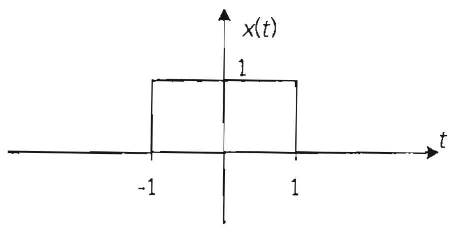
จงหา Fourier series ของ สัญญาณ $x(t)$ ที่กำหนดให้ในรูปด้านล่าง **(5 คะแนน)**

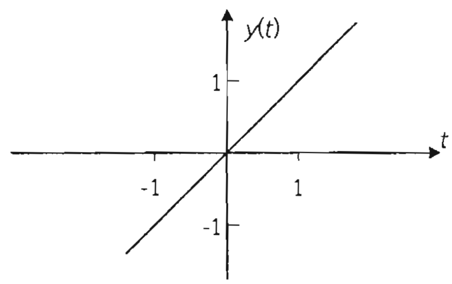


ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ.............

2. Fourier Transform

จงหา Fourier Transform ของสัญญาณ $z(t)$ เมื่อสัญญาณ $z(t)$ คือผลคูณของสัญญาณ $x(t)$ และ $y(t)$ ที่มีรูปของสัญญาณตามภาพที่กำหนดให้ด้านล่าง **(5 คะแนน)**

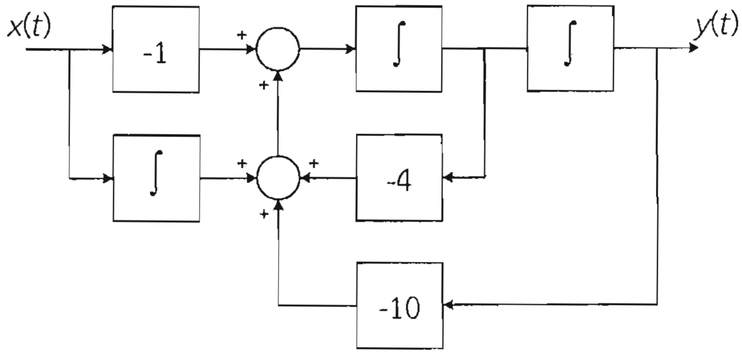




ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา...เลขที่นั่งสอบ............

3. Transfer Function

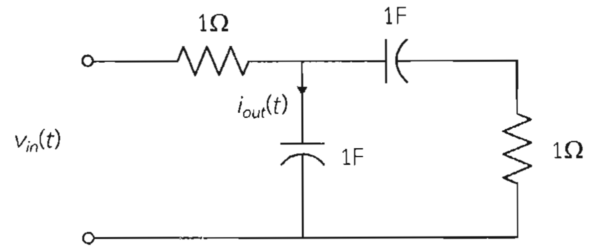
จงหา Transfer function ของระบบในรูปด้านล่าง พร้อมทั้งระบุตำแหน่งของ pole ของระบบ **(5 คะแนน)**



ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา...เลขที่นั่งสอบ.............

4. Analysis of LTI Continuous-Time Systems

4.1 จากวงจรที่กำหนดให้ จงหา transfer function, $H(s)$ ของระบบ เมื่ออินพุตของระบบคือ $v_{in}(t)$ และเอาท์พุตของระบบคือ $i_{out}(t)$ พร้อมระบุว่าแต่ละระบบมีเสถียรภาพแบบใด (stable, marginally stable หรือ unstable) **(7 คะแนน)**



ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

4.2 จาก transfer function, *H*(*s*) ของวงจรในข้อที่ 4.1 จงหาค่า step response ของวงจร **(7 คะแนน)**

พร้อมระบุ steady-state value

*** สำหรับนักศึกษาที่ไม่สามารถหา transfer function ในข้อ 4.1 ได้ ให้ใช้ $H(s) = \frac{s^2+s}{s^2+3s+1}$

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

4.3 จงหาการตอบสนองของวงจรในข้อ 4.2 เมื่ออินพุตคือ $x(t) = \cos(t) + \cos(50t)$ **(7 คะแนน)**

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

สูตรที่จำเป็น

Exponential function :

- $re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
- $H = a + jb;\quad |H| = \sqrt{a^2+b^2};\quad \angle H = \tan^{-1}(b/a);\quad H = \dfrac{1}{a+jb};\quad |H| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \angle H = -\tan^{-1}(b/a)$

The *Sinc* function : $\mathrm{sinc}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$

Fourier Series

- Complex exponential Fourier series :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},\quad -\infty < t < \infty \quad c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,\ c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\quad k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

- Trigonometric Fourier Series :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)],\quad -\infty < t < \infty \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt,\quad k = 0,1,2,\ldots \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt,\quad k = 0,1,2,\ldots$$

- Cosine-with-phase form : $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\omega_0 t + \theta_k),\quad -\infty < t < \infty$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},\quad k = 1,2,\ldots \qquad \theta_k = \begin{cases}\tan^{-1}(-b_k/a_k) & ;k = 1,2,\ldots,\text{ when } a_k \ge 0\\ \pi + \tan^{-1}(-b_k/a_k) & ;k = 1,2,\ldots,\text{ when} a_k < 0\end{cases}$$

- Coefficient of Fourier Series : $|c_k| = \frac{1}{2}A_k;\quad \angle c_k = \theta_k$

Fourier Transform

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt,\quad -\infty < \omega < \infty \qquad x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Response of LTI System

- to sinusoidal inputs : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \Rightarrow y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0))$
- to periodic inputs :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\omega_0 t + \theta_k) \Rightarrow y(t) = a_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k|H(k\omega_0)|\cos(k\omega_0 t + \theta_k + \angle H(k\omega_0))$$

Laplace Transform

- $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt,\quad s = \sigma + j\omega \qquad x(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{c-\infty}^{c+\infty} X(s)e^{st}ds$
- Rational Laplace Transform : $X(s) = \dfrac{c_1}{s-p_1} + \dfrac{c_2}{s-p_2} + \ldots + \dfrac{c_N}{s-p_N}$
- Distinct poles : $c_i = [(s-p_i)X(s)]_{s=p_i}$
- Complex poles : $c_i = [(s-p_i)X(s)]_{s=p_i};\quad c_i e^{p_i t} + \overline{c_i}e^{\overline{p_i}t} = 2|c_i|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \angle c_i);\ p_i = \sigma + j\omega$
- Repeated poles : $c_r = [(s-p_1)^r X(s)]_{s=p_1};\quad c_{r-i} = \dfrac{1}{i!}\left[\dfrac{d^i[(s-p_1)^r X(s)]}{ds^i}\right]_{s=p_1};\quad i = 1,2,\ldots,r-1$

Transfer function

- 1^{st} order systems : $H(s) = \dfrac{k}{s-p}$
- 2^{nd} order systems : $H(s) = \dfrac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

Common Fourier Transform Pairs

$$1, \quad -\infty < t < \infty \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

$$-0.5 + u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}$$

$$u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

$$\delta(t-c) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega c}, \quad c \text{ any real number}$$

$$e^{-bt}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega + b}, \quad b > 0$$

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 \text{ any real number}$$

$$p_\tau(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \tau \operatorname{sinc} \frac{\tau\omega}{2\pi}$$

$$\tau \operatorname{sinc} \frac{\tau t}{2\pi} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, p_\tau(\omega)$$

$$\left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right) p_\tau(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau\omega}{4\pi}\right)$$

$$\frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau t}{4\pi}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\left(1 - \frac{2|\omega|}{\tau}\right) p_\tau(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\cos(\omega_0 t + \theta) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\left[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)\right]$$

$$\sin \omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t + \theta) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\pi\left[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) - e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)\right]$$

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega)$
Right or left shift in time	$x(t-c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c}$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a > 0$
Time reversal	$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$
Multiplication by a power of t	$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \quad n = 1, 2, \ldots$
Multiplication by a complex exponential	$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad \omega_0$ real
Multiplication by $\sin \omega_0 t$	$x(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)]$
Multiplication by $\cos \omega_0 t$	$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$
Differentiation in the time domain	$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad n = 1, 2, \ldots$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Convolution in the time domain	$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(\omega)V(\omega)$
Multiplication in the time domain	$x(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * V(\omega)$
Parseval's theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}V(\omega)\, d\omega$
Special case of Parseval's theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\, d\omega$
Duality	$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา...เลขที่นั่งสอบ............

TABLE 6.2 Common Laplace Transform Pairs

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

$u(t) - u(t-c) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-cs}}{s}, c > 0$

$t^N u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{s^{N+1}}, N = 1, 2, 3, \ldots$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}, c > 0$

$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}$, b real or complex

$t^N e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{(s+b)^{N+1}}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$

$(\cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$(\sin \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$(\cos^2 \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

$(\sin^2 \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

$(e^{-bt} \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+b}{(s+b)^2 + \omega^2}$

$(e^{-bt} \sin \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$

$(t \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

$(t \sin \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

$(te^{-bt} \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{(s+b)^2 - \omega^2}{[(s+b)^2 + \omega^2]^2}$

$(te^{-bt} \sin \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega(s+b)}{[(s+b)^2 + \omega^2]^2}$

TABLE 6.1 Properties of the Laplace Transform

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s)$
Right shift in time	$x(t-c)u(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s), c > 0$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
Multiplication by a power of t	$t^N x(t) \leftrightarrow (-1)^N \frac{d^N}{ds^N}X(s), N = 1, 2, \ldots$
Multiplication by an exponential	$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a)$, a real or complex
Multiplication by $\sin \omega t$	$x(t) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s+j\omega) - X(s-j\omega)]$
Multiplication by $\cos \omega t$	$x(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s+j\omega) + X(s-j\omega)]$
Differentiation in the time domain	$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0)$
Second derivative	$\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$
Nth derivative	$x^{(N)}(t) \leftrightarrow s^N X(s) - s^{N-1}x(0) - s^{N-2}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-2)}(0) - x^{(N-1)}(0)$
Integration	$\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$
Convolution	$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$
Initial-value theorem	$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
	$\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty}[s^2X(s) - sx(0)]$
	$x^{(N)}(0) = \lim_{s\to\infty}[s^{N+1}X(s) - s^N x(0) - s^{N-1}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-1)}(0)]$
Final-value theorem	If $\lim_{t\to\infty} x(t)$ exists, then $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

Table of Derivatives and Integrals

Table of Derivatives

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, c is a constant
2. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, $v \neq 0$
7. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u\frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $-1 < u < 1$
14. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $-1 < u < 1$
15. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u| > 1$
18. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u| > 1$
19. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Table of Integrals

1. $\int du = u + C$
2. $\int a\,du = au + C$, a is a constant
3. $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)du$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
5. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (by parts)
6. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$
9. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
10. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
11. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
14. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
16. $\int \sin^2 u\,du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u + C$
17. $\int \cos^2 u\,du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u + C$
18. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$
19. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
20. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
21. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$
22. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
23. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
24. $\int \frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
25. $\int \frac{1}{a^2-u^2}du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
26. $\int \frac{1}{u^2-a^2}du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

ชื่อ-สกุล ....รหัสนักศึกษา..เลขที่นั่งสอบ............

Table of Derivatives (cont.)

21. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$, $a > 0,\ a \neq 1$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

26. $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u\dfrac{du}{dx}$

27. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u\dfrac{du}{dx}$

28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u\dfrac{du}{dx}$

Table of Integrals (cont.)

27 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C$

30. $\displaystyle\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C$

31. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

32. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

Pythagorenu Identities

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Addition and Subtraction Formulas

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

Sum-to-Product Formulas

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$, $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

Product-to-Sum Formulas

$\sin A \sin B = \dfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$\sin A \cos B = \dfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

Hyperbolic Functions

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$