Particule chargée dans un champ électromagnétique

Coppex Aurélie Hélène, Ventura Vincent
aurelie.coppex@epfl.ch, vincent.ventura@epfl.ch

October 22, 2020

Contents

1 Introduction

Dans cet exercice, il est question d'une particule chargée dans un champ électromagnétique subissant une force de Lorentz.

Le but est d'en étudier la trajectoire afin de pouvoir analyser les propriétés de stabilité et de convergence des cinq schémas suivants : Euler explicite, Euler implicite, Euler-Cromer, Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris Buneman [1].

2 Calculs analytiques

Dans cette partie, tous les calculs sont faits avec les valeurs suivantes :
la masse de la particule : $m = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg,
la charge de la particule : $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C ,
sa position initiale : $\vec{v_0} = (v_{x0}, v_{y0})$.
La particule est plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\hat{z}$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\hat{y}$.

2.1 Équations du mouvement

On cherche tout d'abord à établir les équations différencielles du mouvement sous la forme $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} = (x, z, v_x, v_z)$. Pour cela, on applique la 2^{eme} loi de Newton ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) et on la projette sur les axes x, y et z.
Il en résulte :

$$\mathbf{F_p} + \mathbf{F_L} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

La force de pesanteur est négligeable pour une particule élémentaire. Il ne reste donc que la force de Lorentz qui est donnée par : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
Les projections sur les axes donnent:

$$(\mathbf{Ox}) : -qB_0\dot{z} = m\ddot{x} \iff \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \tag{2}$$

$$(\mathbf{Oy}) : 0 = m\ddot{y} \iff \ddot{y} = 0 \tag{3}$$

$$(\mathbf{Oz}) : q(E_0 + B_0\dot{x}) = m\ddot{z} \iff \ddot{z} = \frac{q}{m}(E_0 + B_0\dot{x}) \tag{4}$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \\ \frac{q}{m}(E_0 + B_0\dot{x}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.2 Énergie mécanique et sa conservation

L'énergie mécanique est définie comme : $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$. Or, l'énergie cinétique est connue et vaut $E_{cin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Il ne reste donc plus qu'à calculer l'énergie potentielle. Pour cela, la formule $E_{pot} = \int_P^O \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{l}$ [3]. Ce qui donne :

$$E_{pot} = qE_0(z_0 - z) \tag{6}$$

Ainsi, l'équation suivante est obtenue :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + qE_0(z - z_o) \tag{7}$$

Pour montrer que cette énergie est conservée, il faut en calculer la dérivée:

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{z}\ddot{z}) - qE_0\dot{z} \tag{8}$$

En appliquant les équations (2) et (4), on trouve:

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -qB_0\dot{z}\dot{x} + qE_0\dot{z} + qB_0\dot{x}\dot{z} - qE_0\dot{z} = 0 \tag{9}$$

Ce qui prouve que l'énergie mécanique est conservée.

2.3 Solution analytique

Les conditions initiales sont les suivantes : $\vec{x}(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$.

En intégrant les équations (2) et (4), il est possible de trouver $\dot{x}$ et $\dot{z}$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{qB_0}{m}z + C_1 \\ \dot{z} &= \frac{q}{m}(E_0 t + B_0 x) + C_2 \end{cases} \tag{10}$$

En appliquant la condition initiale $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$ à (10), on obtient $C_1 = \frac{qB_0}{m}z_0$ et $C_2 = v_0 - \frac{q}{m}B_0 x_0$.

En les appliqant dans les équations de la vitesse, il en ressort :

$$\begin{cases} v_x(t) &= \frac{qB_0}{m}(z_0 - z) \\ v_z(t) &= v_0 + \frac{qB_0}{m}(x - x_0) + \frac{qE_0}{m}t \end{cases} \tag{11}$$

À partir desquelles (11) il est possible de trouver les équations de l'accéleration:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x &= \frac{q^2B_0E_0}{m^2}t - \frac{qB_0}{m}v_0 - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x_0 \\ \ddot{z} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z &= \frac{qE_0}{m} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z_0 \end{cases} \tag{12}$$

En résolvant les équations différentielles du 2ème ordre (12), on trouve la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{qB_0v_0}{m}\cos(\frac{m}{qB_0}t) + \frac{E_0m}{qB_0^2}\sin(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0}t - \frac{mv_0}{qB_0} \\ v_x(t) &= -\sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{E_0}{B_0}\cos(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0} \\ z(t) &= -\frac{mE_0}{qB_0^2}\cos(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mv_0}{qB_0}\sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mE_0}{qB_0^2} \\ v_z(t) &= \frac{E_0}{B_0}\sin(\frac{qB_0}{m}t) + v_0\cos(\frac{qB_0}{m}t) \end{cases} \tag{13}$$

3 Simulations et Analyses

4 Conclusions

References

[1] L. Villard avec la contribution de A. Läuchli *Notes de cours Physique numérique I-II, version 20.1* (2020)

[2] L. Villard, Dr C. Sommariva *Énoncé de l'exercice 2* (2020) https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod_resource/content/1/Exercice2_2020.pdf

[3] VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRER et al. *Formulaires et tables : mathématiques, physique, chimie* Editions G d'Encre, 2015. ISBN 978-2-940501-41-0