

# Particule chargée dans un champ électromagnétique

Coppex Aurélie Hélène, Ventura Vincent

[aurelie.coppex@epfl.ch](mailto:aurelie.coppex@epfl.ch), [vincent.ventura@epfl.ch](mailto:vincent.ventura@epfl.ch)

26 octobre 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Calculs analytiques</b>	<b>2</b>
2.1	Équations du mouvement . . . . .	2
2.2	Énergie mécanique et sa conservation . . . . .	2
2.3	Solution analytique . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Simulations et Analyses</b>	<b>3</b>
3.1	Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique . . . . .	3
3.1.1	Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse . . . . .	4
3.1.2	Non-conservation de l'Energie mécanique . . . . .	5
3.2	Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$ . . . . .	6
3.2.1	Etude de convergence en $\Delta t$ . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>7</b>

## 1 Introduction

Dans le domaine de la physique, il est possible de décrire de nombreux phénomènes du monde. Pour cela, il est souvent nécessaire de recourir au calcul numérique pour résoudre des équations qui ne peuvent pas être calculées analytiquement. Il existe plusieurs méthodes pour les résoudre, dont les intégrateurs. Il faut cependant savoir les choisir en fonction du problèmes traités et pour cela, il faut les connaître.

Dans cet exercice, il est question d'une particule chargée dans un champ électromagnétique subissant une force de Lorentz.

Le but est d'en étudier la trajectoire afin de pouvoir analyser les propriétés de stabilité et de convergence des cinq schémas suivants : Euler explicite, Euler implicite, Euler-Cromer, Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris Buneman [1].

## 2 Calculs analytiques

Dans cette partie, tous les calculs sont faits avec les valeurs suivantes :

la masse de la particule :  $m = 1.6726 \cdot 10^{-27}$  kg,

la charge de la particule :  $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$  C ,

sa position initiale :  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ .

La particule est plongée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ .

### 2.1 Équations du mouvement

On cherche tout d'abord à établir les équations différentielles du mouvement sous la forme  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  avec  $\mathbf{y} = (x, z, v_x, v_z)$ . Pour cela, on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton ( $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) et on la projette sur les axes x, y et z.

Il en résulte :

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L = m\mathbf{a} \quad (1)$$

Avec  $\mathbf{F}_p$ , la force de pesanteur et  $\mathbf{F}_L$ , la force de Lorentz.

La force de pesanteur est négligeable pour une particule élémentaire. Il ne reste donc que la force de Lorentz qui est donnée par :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Les projections sur les axes donnent :

$$(\mathbf{Ox}) : -qB_0 \dot{z} = m\ddot{x} \iff \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m} \dot{z} \quad (2)$$

$$(\mathbf{Oy}) : 0 = m\ddot{y} \iff \ddot{y} = 0 \quad (3)$$

$$(\mathbf{Oz}) : q(E_0 + B_0 \dot{x}) = m\ddot{z} \iff \ddot{z} = \frac{q}{m}(E_0 + B_0 \dot{x}) \quad (4)$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{qB_0}{m} \dot{z} \\ \frac{q}{m}(E_0 + B_0 \dot{x}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 2.2 Énergie mécanique et sa conservation

L'énergie mécanique est définie comme :  $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$ . Or, l'énergie cinétique est connue et vaut  $E_{cin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ . Il ne reste donc plus qu'à calculer l'énergie potentielle. Pour cela, la formule  $E_{pot} = \int_P^O \vec{F} d\vec{l}$  [3]. Ce qui donne :

$$E_{pot} = qE_0(z_0 - z) \quad (6)$$

Ainsi, l'équation suivante est obtenue :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + qE_0(z_0 - z) \quad (7)$$

Pour montrer que cette énergie est conservée, il faut en calculer la dérivée :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{z}\ddot{z}) - qE_0\dot{z} \quad (8)$$

En appliquant les équations (2) et (4), on trouve :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -qB_0\dot{z}\dot{x} + qE_0\dot{z} + qB_0\dot{x}\dot{z} - qE_0\dot{z} = 0 \quad (9)$$

Ce qui prouve que l'énergie mécanique est conservée.

## 2.3 Solution analytique

Les conditions initiales sont les suivantes :  $\vec{x}(0) = 0$  et  $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$ .

En intégrant les équations (2) et (4), il est possible de trouver  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{qB_0}{m}z + C_1 \\ \dot{z} &= \frac{q}{m}(E_0t + B_0x) + C_2 \end{cases} \quad (10)$$

En appliquant la condition initiale  $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$  à (10), on obtient  $C_1 = \frac{qB_0}{m}z_0$  et  $C_2 = v_0 - \frac{q}{m}B_0x_0$ .

En les appliquant dans les équations de la vitesse, il en ressort :

$$\begin{cases} v_x(t) &= \frac{qB_0}{m}(z_0 - z) \\ v_z(t) &= v_0 + \frac{qB_0}{m}(x - x_0) + \frac{qE_0}{m}t \end{cases} \quad (11)$$

À partir desquelles (11) il est possible de trouver les équations de l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x &= \frac{q^2B_0E_0}{m^2}t - \frac{qB_0}{m}v_0 - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x_0 \\ \ddot{z} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z &= \frac{qE_0}{m} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z_0 \end{cases} \quad (12)$$

En résolvant les équations différentielles du 2ème ordre (12), on trouve la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{qB_0v_0}{m} \cos(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{E_0m}{qB_0^2} \sin(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0}t - \frac{mv_0}{qB_0} \\ v_x(t) &= -v_0 \sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{E_0}{B_0} \cos(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0} \\ z(t) &= -\frac{mE_0}{qB_0^2} \cos(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mv_0}{qB_0} \sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mE_0}{qB_0^2} \\ v_z(t) &= \frac{E_0}{B_0} \sin(\frac{qB_0}{m}t) + v_0 \cos(\frac{qB_0}{m}t) \end{cases} \quad (13)$$

## 3 Simulations et Analyses

### 3.1 Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique

Dans cette partie, les simulations se font avec les valeurs suivantes :

L'intensité du champ électrique  $E_0 = 0$ ,

l'intensité du champ magnétique  $B_0 = 5\text{T}$ ,

les conditions initiales  $\vec{x}(0) = 0$  et  $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_z$ ,

la vitesse initiale  $v_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$  et

le temps final  $t_{fin} = \frac{10\pi}{\omega} = 6.5593 \cdot 10^{-8}$  s, le temps nécessaire pour que le proton effectue 5 périodes de rotation.

### 3.1.1 Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse

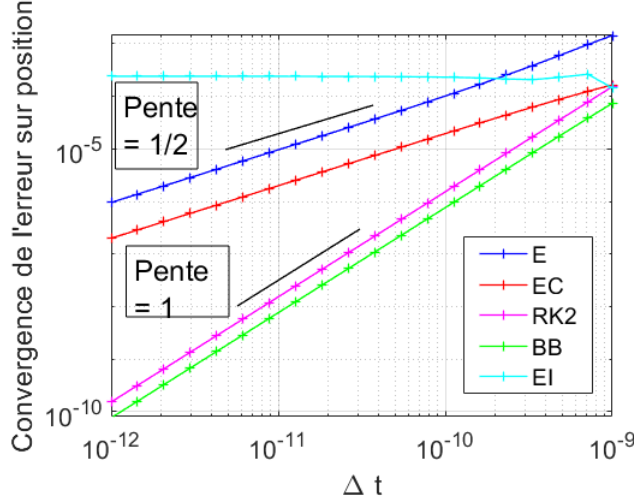


FIGURE 1 – Convergence de l'erreur sur la position en  $\Delta t$

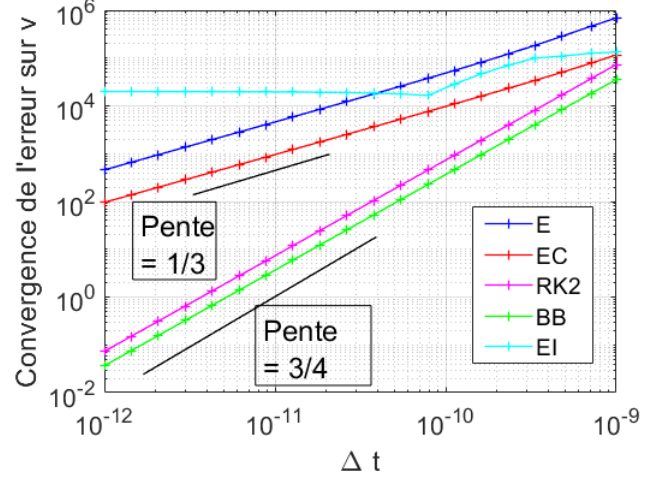


FIGURE 2 – Convergence de l'erreur sur la vitesse en  $\Delta t$

Dans la figure 1 une simulation de l'erreur maximale locale sur la position a été faite. C'est donc l'erreur numérique qui est observée. On s'intéresse maintenant à leur ordre de convergence, ce dernier est défini ici comme étant la pente de la courbe formée par l'erreur. Pour mieux les mesurer, des droites de même pente ont été placées à côté des courbes trouvées grâce aux différents intégrateurs.

Euler implicite est clairement d'ordre 0, car sa pente est constante en se rapprochant des petits  $\Delta t$ .

En ce qui concerne Euler et Euler-Cromer, ils constituent deux droites parallèles en se rapprochant des petits  $\Delta t$ , comme le montre la droite de pente  $\frac{1}{2}$  à leur côté, leur ordre de convergence est de  $\frac{1}{2}$ .

Et pour les intégrateurs de Boris-Buneman et de Runge-Kutta d'ordre 2, ils forment aussi deux droites parallèles lorsque  $\Delta t$  est petit et ont la même pente que la droite à côté d'eux. Ils sont donc tous les deux d'ordre 1.

Dans la seconde figure (2), c'est l'erreur numérique sur la vitesse qui est observée. Les ordres de convergence des différents intégrateurs sont les suivants.

Euler implicite, comme pour la position est à nouveau d'ordre nul, puisque que son erreur numérique forme une droite constante pour les petits  $\Delta t$ .

Cette fois encore, Euler et Euler-Cromer forment des droites parallèles entre elles de pente  $\frac{1}{3}$ , l'ordre de convergence des ces deux intégrateurs est donc de  $\frac{1}{3}$ .

Et de même, Boris-Buneman et Runge-Kutta forment deux droites parallèles entre elles de pente  $\frac{3}{4}$ . Leur ordre de convergence est par conséquent  $\frac{3}{4}$ .

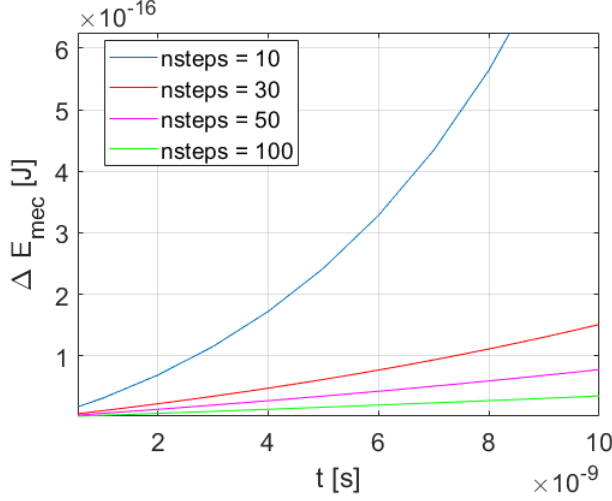


FIGURE 3 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler explicite en  $\Delta t$

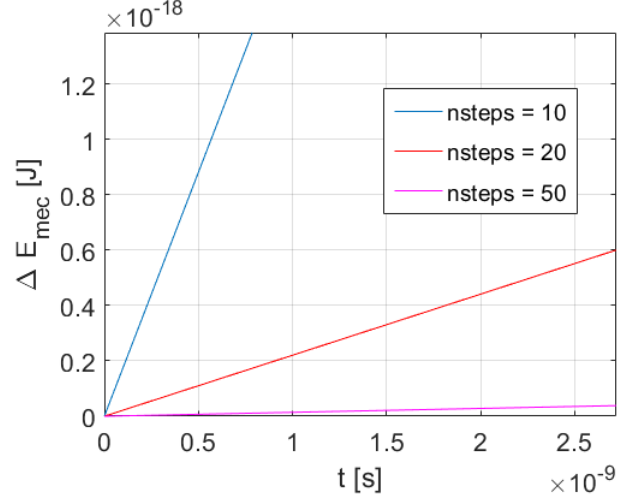


FIGURE 4 – Variation de l'énergie mécanique selon Runge-Kutta 2 en  $\Delta t$

### 3.1.2 Non-conservation de l'Energie mécanique

Les figures 3 et 4 montrent que l'intégrateur d'Euler explicite et celui de Runge-Kutta d'ordre 2 sont instables car, pour des petits pas de temps, on voit clairement que  $\Delta E_{mec}$  croît exponentiellement.

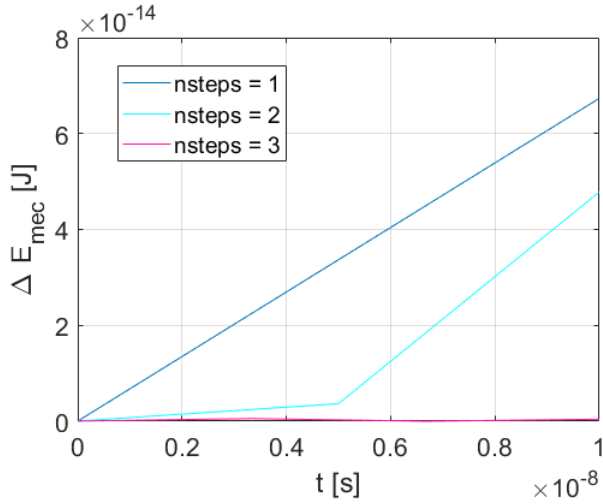


FIGURE 5 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en  $\Delta t$  pour des petits nombres de pas

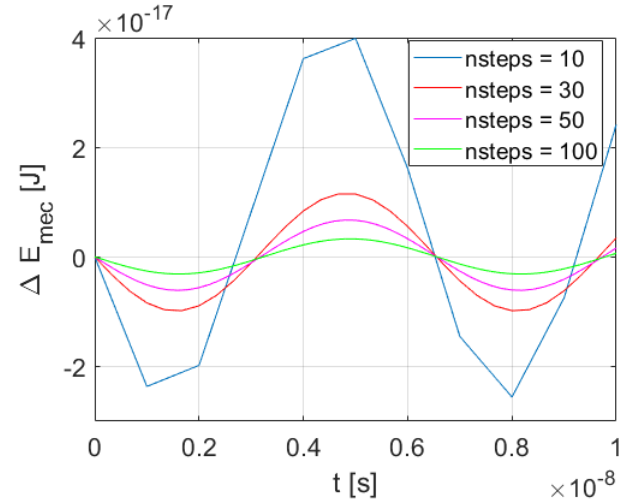


FIGURE 6 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en  $\Delta t$  pour des plus grands nombres de pas

Dans la figure 5, qui concerne l'intégrateur d'Euler-Cromer, il est observable qu'avec un pas de temps de 3 l'énergie est conservée, alors que si il est plus petit que 3, l'énergie mécanique n'est pas conservée. Cela est dû au fait qu'Euler-Cromer n'est stable que si  $w_c \delta t < 2$ . Avec  $w_c = \frac{qB_0}{m}$ , la vitesse de rotation du proton. Ce qui donne le nombre de pas limite  $n > 2.3948$ , ce qui est bien visible dans la figure 5.

Dans le graphique 6, on voit que plus le pas de temps est grand, plus l'énergie est bien conservée, la courbe oscille autour de 0 et montre donc que c'est un schéma stable quand le pas de temps minimum est respecté.

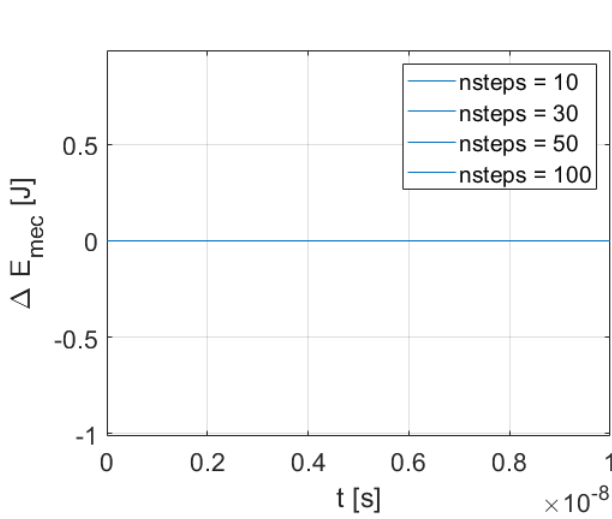


FIGURE 7 – Variation de l'énergie mécanique selon Boris Buneman en  $\Delta t$

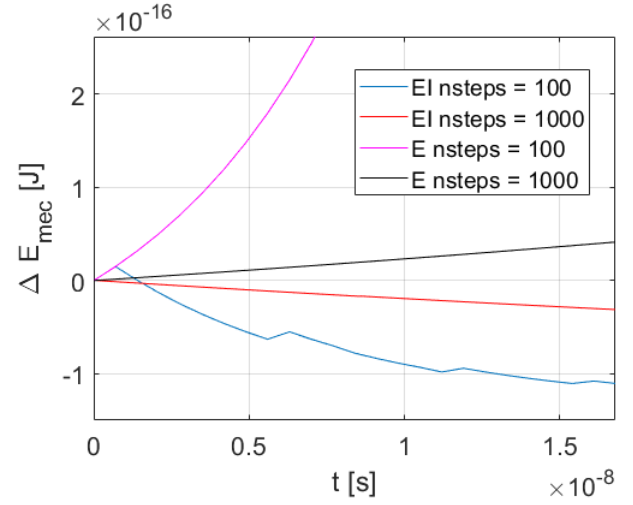


FIGURE 8 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler implicite et Euler explicite en  $\Delta t$

La figure 7 montre que l'intégrateur de Boris-Buneman conserve exactement l'énergie mécanique, aux arrondis près, pour tous les pas de temps et, par conséquent, pour toute valeur de  $\Delta t$ .

Et la figure 8 est faite afin de pouvoir comparer les deux intégrateurs d'Euler explicite et implicite. On voit nettement que le schéma implicite est bien plus stable que l'explicite, cependant il décroît contrairement à l'autre. Cela est dû au fait qu'il dissipe de l'énergie, ce qui est ce à quoi on s'attend, comme dit dans le polycopié ([1], p.34). Cette dissipation est d'origine numérique et non pas physique.

### 3.2 Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$

Dans cette section nous regardons le cas où  $E_0 \neq 0$ , et comme dans l'exemple d'avant,  $B_0 \neq 0$ . Les schémas qui seront utilisés sont le Runge-Kutta d'ordre 2 et le Boris-Buneman.

#### 3.2.1 Etude de convergence en $\Delta t$

Pour notre étude nous trouvons les schémas de convergence selon  $\Delta t$  sur la figure 9, où les droites se superposent pour Boris-Buneman et Runge-Kutta d'ordre 2. Pour le cas de la vitesse, comme on peut voir sur la figure 10, l'erreur converge pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, comme pour Boris-Buneman, avec des valeurs légèrement différentes, mais la même pente.

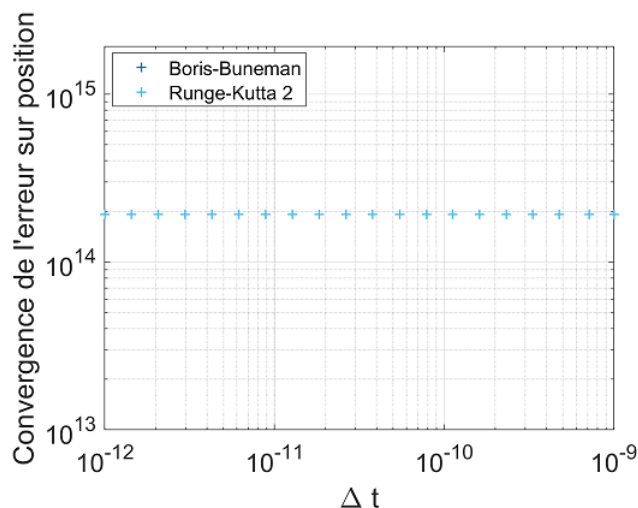


FIGURE 9 – *Etude de la convergence de l'erreur sur la position selon  $\Delta t$*

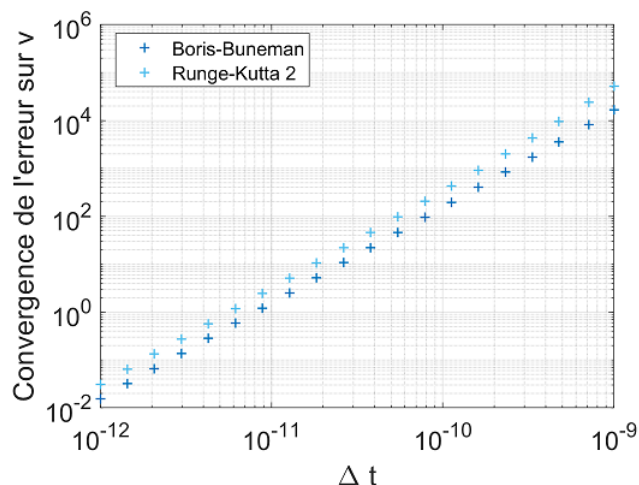


FIGURE 10 – *Etude de la convergence de l'erreur sur la vitesse selon  $\Delta t$*

## 4 Conclusions

## Références

- [1] L. Villard avec la contribution de A. Läuchli *Notes de cours Physique numérique I-II, version 20.1* (2020)
- [2] L. Villard, Dr C. Sommariva *Énoncé de l'exercice 2* (2020) [https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod\\_resource/content/1/Exercice2\\_2020.pdf](https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod_resource/content/1/Exercice2_2020.pdf)
- [3] VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRER et al. *Formulaires et tables : mathématiques, physique, chimie* Editions G d'Encre, 2015. ISBN 978-2-940501-41-0