

# Particule chargée dans un champ électromagnétique

Coppex Aurélie Hélène, Ventura Vincent

[aurelie.coppex@epfl.ch](mailto:aurelie.coppex@epfl.ch), [vincent.ventura@epfl.ch](mailto:vincent.ventura@epfl.ch)

28 octobre 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Calculs analytiques</b>	<b>3</b>
2.1	Équations du mouvement . . . . .	3
2.2	Énergie mécanique et sa conservation . . . . .	3
2.3	Solution analytique . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Simulations et Analyses</b>	<b>4</b>
3.1	Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique . . . . .	4
3.1.1	Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse . . . . .	5
3.1.2	Non-conservation de l'Energie mécanique . . . . .	5
3.2	Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$ . . .	6
3.2.1	Étude de convergence en $\Delta t$ . . . . .	6
3.2.2	Conservation de l'énergie . . . . .	7
3.2.3	Trajectoire de la particule dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse $v_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . . . . .	7
3.3	Cas d'un champ magnétique non uniforme : dérive $\vec{B} \times \nabla B$ . . . . .	8
3.3.1	Cas d'un proton ( $q = e$ ) et d'un antiproton ( $q = -e$ ) . . . . .	8
3.3.2	La quantité $\mu = \frac{mv^2}{2B}$ . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>8</b>

## 1 Introduction

Dans le domaine de la physique, il est possible de décrire de nombreux phénomènes du monde. Pour cela, il est souvent nécessaire de recourir au calcul numérique pour résoudre des équations qui ne peuvent pas être calculées analytiquement. Il existe plusieurs méthodes pour les résoudre, dont les intégrateurs. Il faut cependant savoir les choisir en fonction du problèmes traités et pour cela, il faut les connaître.

Dans cet exercice, il est question d'une particule chargée dans un champ électromagnétique subissant une force de Lorentz.

Le but est d'en étudier la trajectoire afin de pouvoir analyser les propriétés de stabilité et de convergence des cinq schémas suivants : Euler explicite, Euler implicite, Euler-Cromer, Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris Buneman [1].

## 2 Calculs analytiques

Dans cette partie, tous les calculs sont faits avec les valeurs suivantes :

la masse de la particule :  $m = 1.6726 \cdot 10^{-27}$  kg,

la charge de la particule :  $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$  C ,

sa position initiale :  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ .

La particule est plongée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ .

### 2.1 Équations du mouvement

On cherche tout d'abord à établir les équations différentielles du mouvement sous la forme  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  avec  $\mathbf{y} = (x, z, v_x, v_z)$ . Pour cela, on applique la 2<sup>eme</sup> loi de Newton ( $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) et on la projette sur les axes x, y et z.

Il en résulte :

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L = m\mathbf{a} \quad (1)$$

Avec  $\mathbf{F}_p$ , la force de pesanteur et  $\mathbf{F}_L$ , la force de Lorentz.

La force de pesanteur est négligeable pour une particule élémentaire. Il ne reste donc que la force de Lorentz qui est donnée par :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Les projections sur les axes donnent :

$$(\mathbf{Ox}) : -qB_0 \dot{z} = m\ddot{x} \iff \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m} \dot{z} \quad (2)$$

$$(\mathbf{Oy}) : 0 = m\ddot{y} \iff \ddot{y} = 0 \quad (3)$$

$$(\mathbf{Oz}) : q(E_0 + B_0 \dot{x}) = m\ddot{z} \iff \ddot{z} = \frac{q}{m}(E_0 + B_0 \dot{x}) \quad (4)$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{qB_0}{m} \dot{z} \\ \frac{q}{m}(E_0 + B_0 \dot{x}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 2.2 Énergie mécanique et sa conservation

L'énergie mécanique est définie comme :  $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$ . Or, l'énergie cinétique est connue et vaut  $E_{cin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ . Il ne reste donc plus qu'à calculer l'énergie potentielle. Pour cela, la formule  $E_{pot} = \int_P^O \vec{F} d\vec{l}$  [3]. Ce qui donne :

$$E_{pot} = qE_0(z_0 - z) \quad (6)$$

Ainsi, l'équation suivante est obtenue :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + qE_0(z_0 - z) \quad (7)$$

Pour montrer que cette énergie est conservée, il faut en calculer la dérivée :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{z}\ddot{z}) - qE_0\dot{z} \quad (8)$$

En appliquant les équations (2) et (4), on trouve :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -qB_0\dot{z}\dot{x} + qE_0\dot{z} + qB_0\dot{x}\dot{z} - qE_0\dot{z} = 0 \quad (9)$$

Ce qui prouve que l'énergie mécanique est conservée.

### 2.3 Solution analytique

Les conditions initiales sont les suivantes :  $\vec{x}(0) = 0$  et  $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$ .

En intégrant les équations (2) et (4), il est possible de trouver  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{qB_0}{m}z + C_1 \\ \dot{z} &= \frac{q}{m}(E_0t + B_0x) + C_2 \end{cases} \quad (10)$$

En appliquant la condition initiale  $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$  à (10), on obtient  $C_1 = \frac{qB_0}{m}z_0$  et  $C_2 = v_0 - \frac{q}{m}B_0x_0$ .

En les appliquant dans les équations de la vitesse, il en ressort :

$$\begin{cases} v_x(t) &= \frac{qB_0}{m}(z_0 - z) \\ v_z(t) &= v_0 + \frac{qB_0}{m}(x - x_0) + \frac{qE_0}{m}t \end{cases} \quad (11)$$

À partir desquelles (11) il est possible de trouver les équations de l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x &= \frac{q^2B_0E_0}{m^2}t - \frac{qB_0}{m}v_0 - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x_0 \\ \ddot{z} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z &= \frac{qE_0}{m} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z_0 \end{cases} \quad (12)$$

En résolvant les équations différentielles du 2ème ordre (12), on trouve la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{qB_0v_0}{m} \cos(\frac{m}{qB_0}t) + \frac{E_0m}{qB_0^2} \sin(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0}t - \frac{mv_0}{qB_0} \\ v_x(t) &= -v_0 \sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{E_0}{B_0} \cos(\frac{qB_0}{m}t) - \frac{E_0}{B_0} \\ z(t) &= -\frac{mE_0}{qB_0^2} \cos(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mv_0}{qB_0} \sin(\frac{qB_0}{m}t) + \frac{mE_0}{qB_0^2} \\ v_z(t) &= \frac{E_0}{B_0} \sin(\frac{qB_0}{m}t) + v_0 \cos(\frac{qB_0}{m}t) \end{cases} \quad (13)$$

## 3 Simulations et Analyses

### 3.1 Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique

Dans cette partie, les simulations se font avec les valeurs suivantes :

L'intensité du champ électrique  $E_0 = 0$ ,

l'intensité du champ magnétique  $B_0 = 5\text{T}$ ,

les conditions initiales  $\vec{x}(0) = 0$  et  $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_z$ ,

la vitesse initiale  $v_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$  et

le temps final  $t_{fin} = \frac{10\pi}{\omega} = 6.5593 \cdot 10^{-8}$  s, le temps nécessaire pour que le proton effectue 5 périodes de rotation.

### 3.1.1 Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse

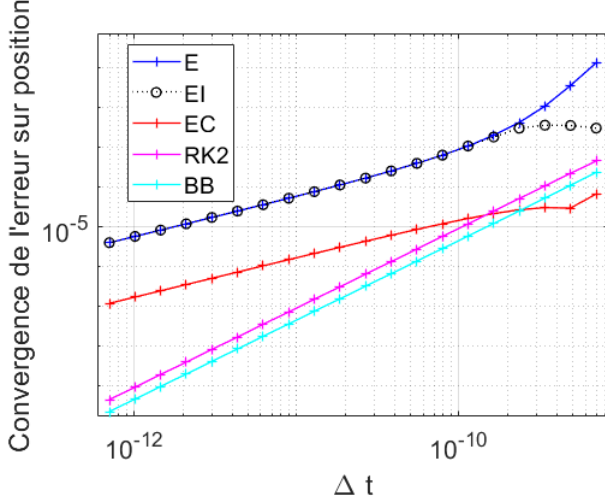


FIGURE 1 – Convergence de l'erreur sur la position en  $\Delta t$

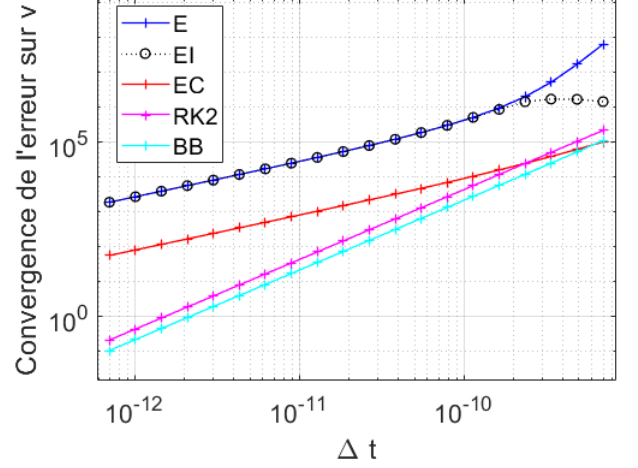


FIGURE 2 – Convergence de l'erreur sur la vitesse en  $\Delta t$

Dans la figure 1 une simulation de l'erreur maximale locale sur la position a été faite. C'est donc l'erreur numérique qui est observée. On représente les convergences selon les 5 intégrateurs : Euler explicite (E), Euler implicite (EI), Euler-Cromer (EC), Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et Boris-Buneman (BB). On s'intéresse maintenant à leur ordre de convergence, ce dernier est défini ici comme étant la pente de la courbe formée par l'erreur lorsque  $\Delta t$  est petit. Une fonction a été créée dans le fichier Parameterscan pour calculer ces pentes. Les résultats sont les suivants.

Pour Euler implicite, les ordres de convergence de la position et de la vitesse sont les mêmes et valent 1. Il en va de même pour Euler explicite.

Euler-Cromer est également d'ordre 1 pour la position et la vitesse, ce qui se confirme par la figure 1 car on voit que les trois droites des premiers intégrateurs sont parallèles.

Runge-Kutta et Boris-Buneman sont d'ordre 2, ce qui est confirmé par les deux droites parallèles sur la figure 2.

### 3.1.2 Non-conservation de l'Energie mécanique

La figure 3 montre que l'intégrateur d'Euler explicite est instable car, pour des petits pas de temps, on voit clairement que  $\Delta E_{mec}$  croît exponentiellement. En ce qui concerne Runge-Kutta, on voit sur la figure 4 que la variation de l'énergie mécanique croît fortement pour des petits pas de temps, elle est donc également instable.

Dans la figure 5, qui concerne l'intégrateur d'Euler-Cromer, il est observable qu'avec un pas de temps de 3 l'énergie est conservée, alors que si il est plus petit que 3, l'énergie mécanique n'est pas conservée. Cela est dû au fait qu'Euler-Cromer n'est stable que si  $w_c \delta t <$

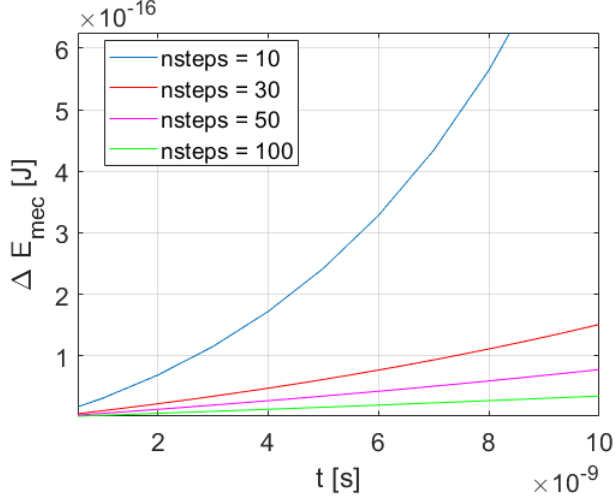


FIGURE 3 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler explicite en  $\Delta t$

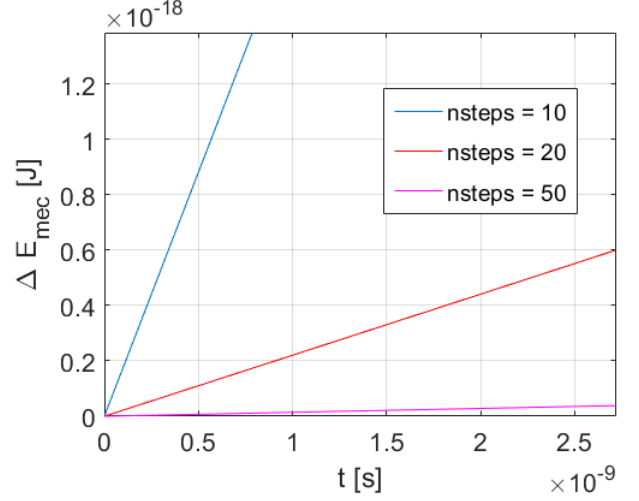


FIGURE 4 – Variation de l'énergie mécanique selon Runge-Kutta 2 en  $\Delta t$

2. Avec  $w_c = \frac{qB_0}{m}$ , la vitesse de rotation du proton. Ce qui donne le nombre de pas limite  $n > 2.3948$ , ce qui est bien visible dans la figure 5.

Dans le graphique 6, on voit que plus le pas de temps est grand, plus l'énergie est bien conservée, la courbe oscille autour de 0 et montre donc que c'est un schéma stable quand le pas de temps minimum est respecté.

La figure 7 montre que l'intégrateur de Boris-Buneman conserve exactement l'énergie mécanique, aux arrondis près, pour tous les pas de temps et, par conséquent, pour toute valeur de  $\Delta t$ .

Et la figure 8 est faite afin de pouvoir comparer les deux intégrateurs d'Euler explicite et implicite. On voit nettement que le schéma implicite est bien plus stable que l'explicite, cependant il décroît contrairement à l'autre. Cela est dû au fait qu'il dissipe de l'énergie, ce qui est ce à quoi on s'attend, comme dit dans le polycopié ([1], p.34). Cette dissipation est d'origine numérique et non pas physique.

## 3.2 Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$

Dans cette partie il est considéré que la valeur  $E_0 \neq 0$ , mais que  $E_0 = 10^5 \text{Vm}^{-1}$ . Les autres valeurs restent comme dans l'exercice précédent. Les schémas utilisés sont Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris-Buneman.

### 3.2.1 Étude de convergence en $\Delta t$

En implémentant les solutions analytiques dans le fichier ParameterScan.m de Matlab, la figure obtenue pour le maximum de l'erreur de la position en fonction de  $\Delta t$ . Nous obtenons des droites pour Runge-Kutta d'ordre 2 et pour Boris-Buneman, que l'on peut observer sur la figure 9, ce qu'implique une convergence linéaire en fonction de  $\Delta t$ . En utilisant un fit linéaire on peut déterminer l'ordre de convergence des deux schémas, qui est 2 ( $y = 2x + 32$  et  $y = 2x + 32.5$ ), facilement vérifiable sur la figure 10.

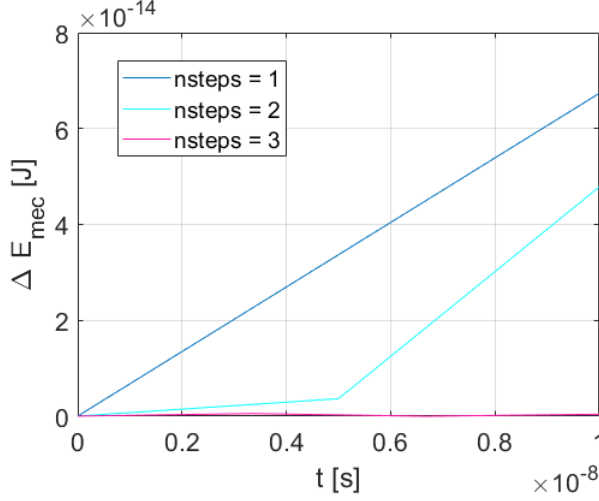


FIGURE 5 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en  $\Delta t$  pour des petits nombres de pas

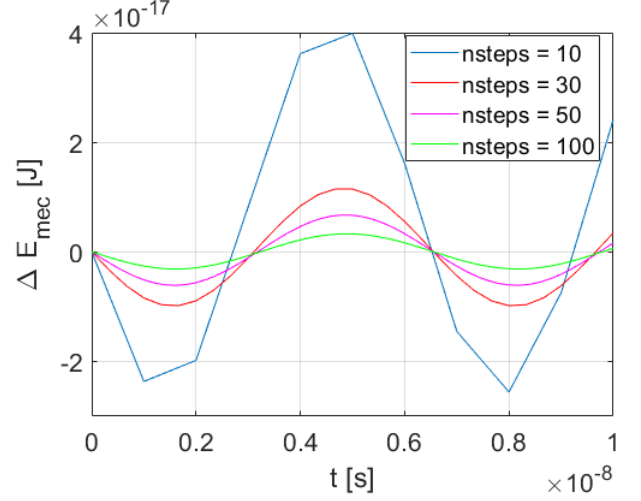


FIGURE 6 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en  $\Delta t$  pour des plus grands nombres de pas

### 3.2.2 Conservation de l'énergie

En prenons en compte le champ électrique, nous avons une nouvelle force à considérer. La charge  $q$  de la particule étant positive, on a  $\vec{F}_E = qE_0\vec{e}_z$ , et donc la force est orienté comme le champ électrique, ce qu'implique que l'énergie potentielle est négative selon l'axe  $\vec{e}_z$  d'après la formule  $\vec{E} = -\int \vec{F}d\vec{z}$ . On peut donc exprimer l'énergie mécanique comme :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 - qEz \quad (14)$$

En définissant  $\Delta E(t)$  comme  $E(t)$  et  $E(0)$ , on fait une étude de convergence de  $\Delta E(t)$  en fonction de nombre de pas (nsteps). Ceci est représentée sur la fig ??.

On n'arrive pratiquement pas à différencier les droites pour les valeurs :  $n_{steps} = 4642$ ,  $n_{steps} = 6952$  et  $n_{steps} = 10000$ , mais on arrive bien à voir que la valeur de  $\Delta E(t)$  semble bien converger lorsque  $n_{steps}$  devient grand :

$$\lim_{n_{steps} \rightarrow +\infty} \Delta E(t) = 0 \forall t \in [0; t_{fin}] \quad (15)$$

### 3.2.3 Trajectoire de la particule dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse $v_E = \vec{E} \times \vec{B}/B^2$

La formule de  $v_E$  étant donné, on peut calculer sa valeur, qui est donné par :

$$\vec{v}_E = \frac{1}{B_0^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{B_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

On peut soustraire la valeur dans l'équation de  $v_x(t)$  de l'équation ??, ce qui donne :

$$v_x(t) = -v_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad (17)$$

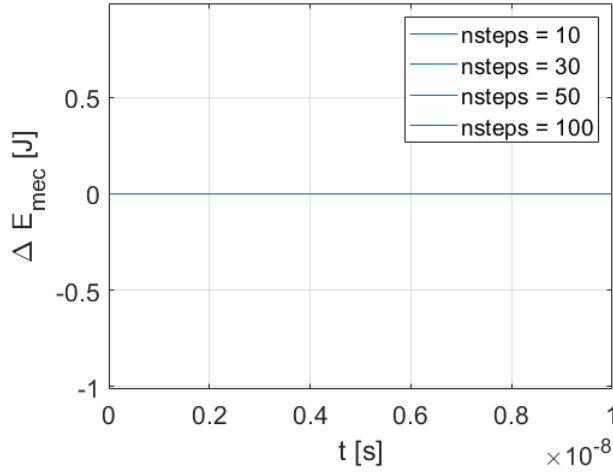


FIGURE 7 – Variation de l'énergie mécanique selon Boris Buneman en  $\Delta t$

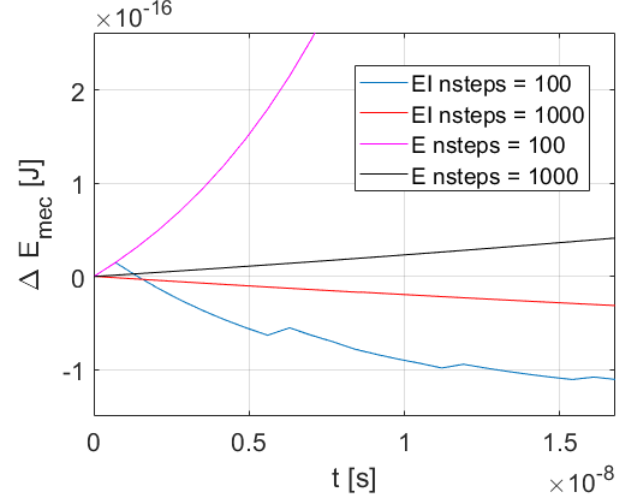


FIGURE 8 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler implicite et Euler explicite en  $\Delta t$

### 3.3 Cas d'un champ magnétique non uniforme : dérive $\vec{B} \times \nabla B$

Dans cette section nous considérons un champ magnétique d'intensité variable  $\vec{B} = B(x)\hat{y}$ , où  $B(x) = B_0(1 + \kappa x)$ ,  $\kappa = 100\text{m}^{-1}$ ,  $B_0 = 5\text{T}$ ,  $E = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{z0} = 4 \cdot 10^5\text{m.s}^{-1}$ ,  $x_0 = \frac{mv_{z0}}{qB_0}$ ,  $z_0 = 0$  et  $t_{fin} = 6.5593 \cdot 10^{-7}\text{s}$ . Le schéma utilisé est Boris-Buneman.

#### 3.3.1 Cas d'un proton ( $q = e$ ) et d'un antiproton ( $q = -e$ )

Dans les cas de proton et antiproton les trajectoires sont des cycloïdes, et on peut observer que lorsque  $n_{steps}$  devient très grand, leurs orbites deviennent de plus en plus des colonnes droites. On peut voir leurs limites sur les figures 12 et 13. On voit que la colonne du proton est orienté vers le bas, alors que celui de l'antiproton est orienté vers le haut. La trajectoire est parcourue dans un sens anti-horaire par le proton, et dans un sens horaire par l'antiproton.

#### 3.3.2 La quantité $\mu = \frac{mv^2}{2B}$

La quantité  $\mu$  s'appelle le moment magnétique d'une particule, dans notre cas soit du proton, soit de l'antiproton. Il caractérise l'intensité de la source magnétique. L'énoncé [2] nous dit que  $B(x) = B_0(1 + \kappa x) = B_0 + B_0 x \kappa$ . Il est évident que cette fonction dépend en entier de la valeur de  $x$ , et a donc des extremas en fonction des extremas de la fonction  $f(x) = x$ . Sur les figures suivantes, où les positions des particules et les valeurs des moments magnétiques des particules sont représentées sur un intervalle de temps de  $\Delta t = 1 \times 10^{-7}$ , pour qu'on puisse voir avec plus de précision ce que se passe, on voit que  $\mu$  est inversement proportionnel à la position de la particule.

## 4 Conclusions

Après avoir fait cet exercice, on connaît mieux les intégrateurs et leurs spécificités propres.



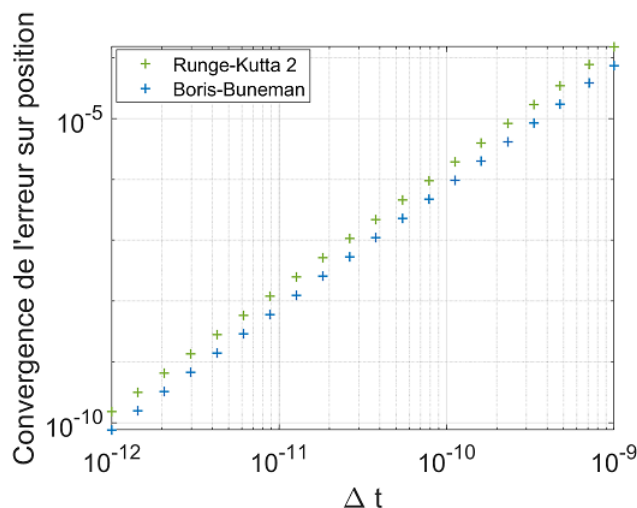


FIGURE 9 – *Etude de la convergence de l'erreur maximale sur la position selon  $\Delta t$*

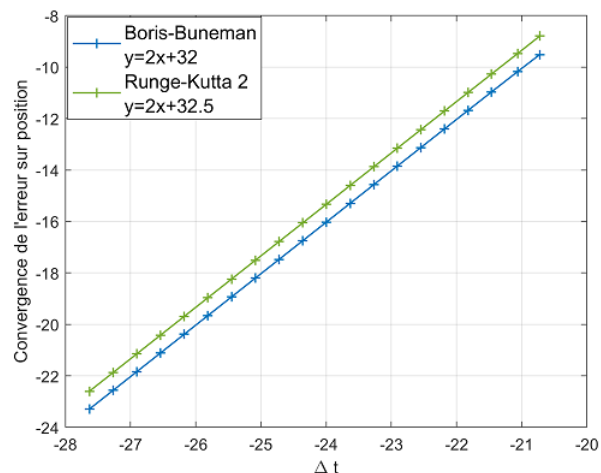


FIGURE 10 – *Fit linéaire de l'erreur sur la position en  $\Delta t$*

On remarque que la convergence de l'erreur sur la position et sur la vitesse sont du même ordre pour tous les intégrateurs étudiés. On peut voir que plus l'intégrateur est compliqué, plus son erreur est basse et que tous ne convergent pas de la même manière lorsque  $\Delta t$  devient plus grand.

Quant à la conservation de l'énergie mécanique, il est visible que les schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 2 sont les moins précis. Ensuite, Euler-Cromer converge vers la bonne valeur dès que le pas de temps minimum est respecté. De plus, Euler implicite est stable, mais il dissipe un peu d'énergie à cause des erreurs numériques. On remarque aussi que l'intégrateur le plus efficace est celui de Boris-Buneman car il conserve exactement l'énergie mécanique, aux arrondis près.

Ainsi, on a appris à connaître plusieurs intégrateurs et on voit que pour des composantes différentes, les intégrateurs n'agissent pas forcément de la même manière. On va pouvoir être plus à même de choisir celui qui convient le mieux lors de futurs exercices. Il faut cependant savoir trouver l'équilibre entre l'erreur que l'on est prêt à avoir et la place et que l'on a pour calculer.

## Références

- [1] L. Villard avec la contribution de A. Läuchli *Notes de cours Physique numérique I-II, version 20.1* (2020)
- [2] L. Villard, Dr C. Sommariva *Énoncé de l'exercice 2* (2020) [https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod\\_resource/content/1/Exercice2\\_2020.pdf](https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod_resource/content/1/Exercice2_2020.pdf)
- [3] VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRER et al. *Formulaires et tables : mathématiques, physique, chimie* Editions G d'Encre, 2015. ISBN 978-2-940501-41-0

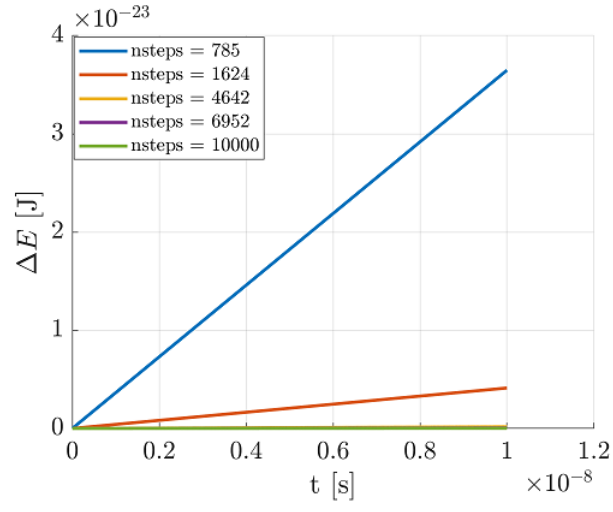


FIGURE 11 –  $\Delta E(t)$  en fonction du nombre de pas de temps.

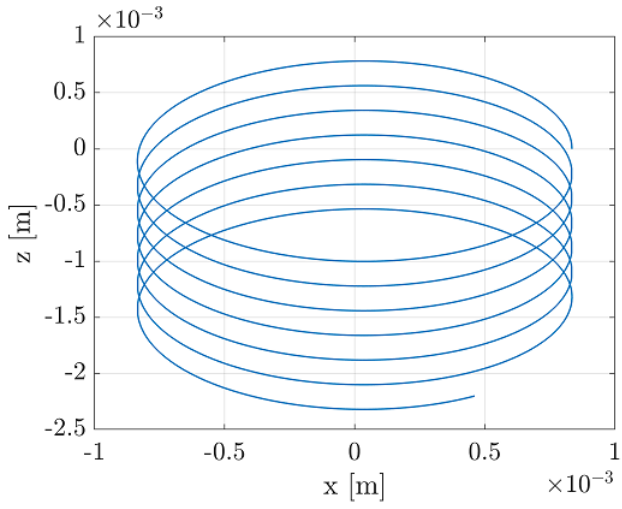


FIGURE 12 – Trajectoire d'un proton.

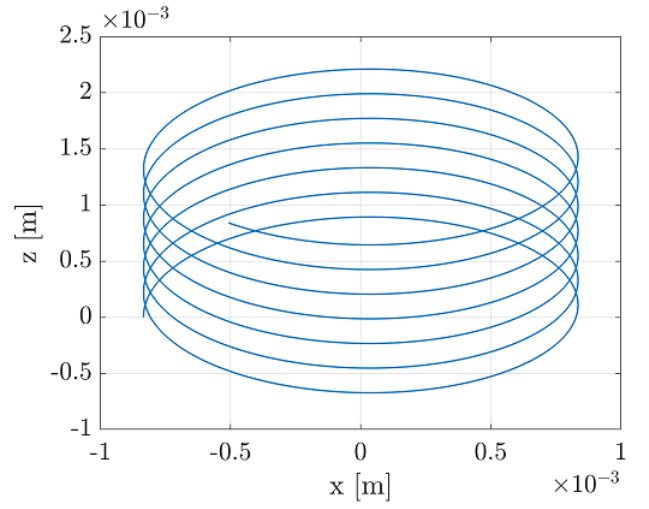


FIGURE 13 – Trajectoire d'un antiproton.

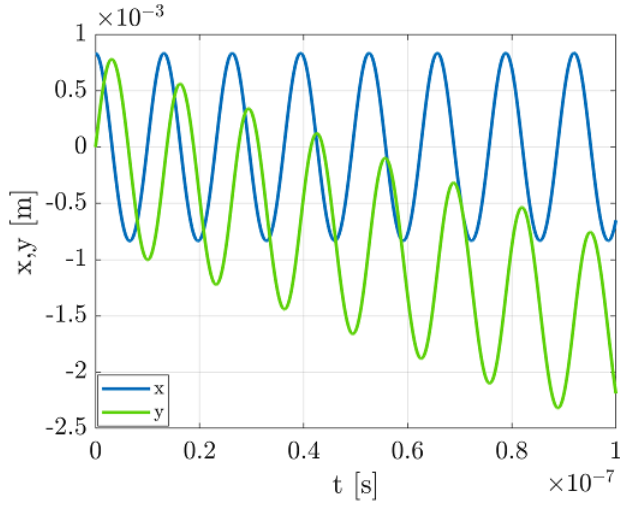


FIGURE 14 – *Position du proton.*

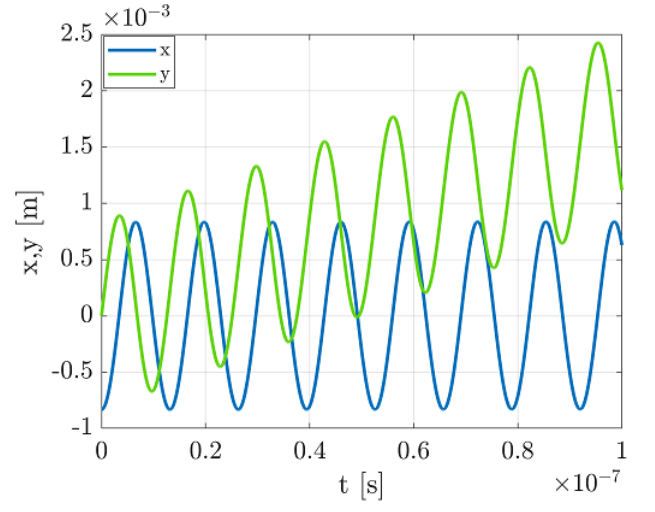


FIGURE 15 – *Position du antiproton.*

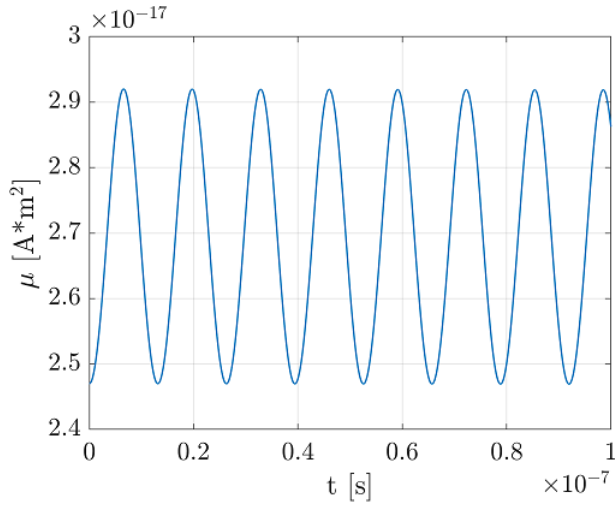


FIGURE 16 – *Moment magnétique du proton.*

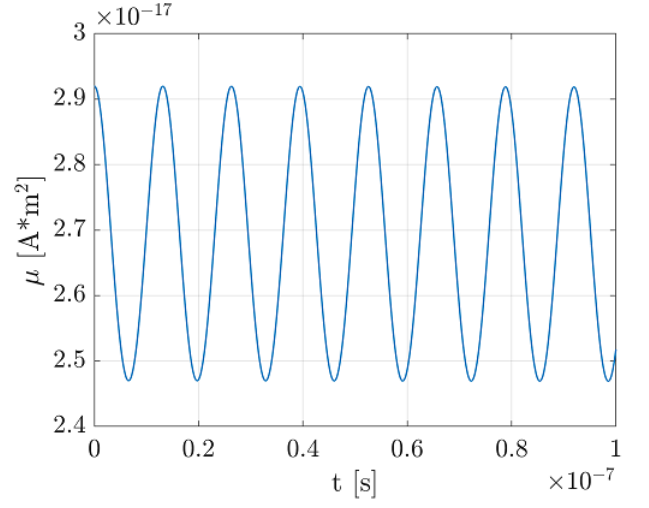


FIGURE 17 – *Moment magnétique du antiproton.*