

Particule chargée dans un champ électromagnétique

Coppex Aurélie Hélène, Ventura Vincent

aurelie.coppex@epfl.ch, vincent.ventura@epfl.ch

28 octobre 2020

Table des matières

1	Introduction	2
2	Calculs analytiques	2
2.1	Équations du mouvement	2
2.2	Énergie mécanique et sa conservation	3
2.3	Solution analytique	3
3	Simulations et Analyses	4
3.1	Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique	4
3.1.1	Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse	4
3.1.2	Non-conservation de l'énergie mécanique	5
3.2	Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$	6
3.2.1	Étude de convergence en Δt	6
3.2.2	Conservation de l'énergie	6
3.2.3	Trajectoire de la particule dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse $v_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$	7
3.3	Cas d'un champ magnétique non uniforme : dérive $\vec{B} \times \nabla B$	7
3.3.1	Cas d'un proton ($q = e$) et d'un antiproton ($q = -e$)	8
3.3.2	La quantité $\mu = \frac{mv^2}{2B}$	8
4	Conclusions	8

1 Introduction

Dans le domaine de la physique, il est possible de décrire de nombreux phénomènes du monde. Pour cela, il est souvent nécessaire de recourir au calcul numérique pour résoudre des équations qui ne peuvent pas être calculées analytiquement. Il existe plusieurs méthodes pour les résoudre, dont les intégrateurs. Il faut cependant savoir les choisir en fonction du problèmes traités et pour cela, il faut les connaître.

Dans cet exercice, il est question d'une particule chargée dans un champ électromagnétique subissant une force de Lorentz.

Le but est d'en étudier la trajectoire afin de pouvoir analyser les propriétés de stabilité et de convergence des cinq schémas suivants : Euler explicite, Euler implicite, Euler-Cromer, Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris Buneman [1].

2 Calculs analytiques

Dans cette partie, tous les calculs sont faits avec les valeurs suivantes [2] :

la masse de la particule : $m = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg,

charge de la particule : $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C ,

sa position initiale : $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$.

La particule est plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{y}$.

2.1 Équations du mouvement

On cherche tout d'abord à établir les équations différentielles du mouvement sous la forme $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} = (x, z, v_x, v_z)$. Pour cela, on applique la 2^{ème} loi de Newton ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) et on la projette sur les axes x, y et z.

Il en résulte :

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L = m\mathbf{a} \quad (1)$$

Avec \mathbf{F}_p , la force de pesanteur et \mathbf{F}_L , la force de Lorentz.

La force de pesanteur est négligeable pour une particule élémentaire. Il ne reste donc que la force de Lorentz qui est donnée par : $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Les projections sur les axes donnent :

$$(\mathbf{Ox}) : -qB_0\dot{z} = m\ddot{x} \iff \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \quad (2)$$

$$(\mathbf{Oy}) : 0 = m\ddot{y} \iff \ddot{y} = 0 \quad (3)$$

$$(\mathbf{Oz}) : q(E_0 + B_0\dot{x}) = m\ddot{z} \iff \ddot{z} = \frac{q}{m}(E_0 + B_0\dot{x}) \quad (4)$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \\ \frac{q}{m}(E_0 + B_0\dot{x}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.2 Énergie mécanique et sa conservation

L'énergie mécanique est définie comme : $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$. Or, l'énergie cinétique est connue et vaut $E_{cin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Il ne reste donc plus qu'à calculer l'énergie potentielle. Pour cela, on utilise la formule $E_{pot} = \int_P^O \vec{F} d\vec{l}$ [3]. Ce qui donne :

$$E_{pot} = qE_0(z_0 - z) \quad (6)$$

Ainsi, avec (6) l'équation suivante est obtenue :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + qE_0(z_0 - z) \quad (7)$$

Pour montrer que cette énergie est conservée, il faut en calculer la dérivée :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{z}\ddot{z}) - qE_0\dot{z} \quad (8)$$

En appliquant les équations (2) et (4) à (8), on trouve :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -qB_0\dot{z}\dot{x} + qE_0\dot{z} + qB_0\dot{x}\dot{z} - qE_0\dot{z} = 0 \quad (9)$$

Ce qui prouve que l'énergie mécanique est conservée.

2.3 Solution analytique

Les conditions initiales sont les suivantes : $\vec{x}(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$ [2].

En intégrant les équations (2) et (4), il est possible de trouver \dot{x} et \dot{z} :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{qB_0}{m}z + C_1 \\ \dot{z} &= \frac{q}{m}(E_0t + B_0x) + C_2 \end{cases} \quad (10)$$

En utilisant la condition initiale $\vec{v}(0) = v_0\hat{z}$ à (10), on obtient $C_1 = \frac{qB_0}{m}z_0$ et $C_2 = v_0 - \frac{q}{m}B_0x_0$. En les appliquant dans les équations de la vitesse (10), il en ressort :

$$\begin{cases} v_x(t) &= \frac{qB_0}{m}(z_0 - z) \\ v_z(t) &= v_0 + \frac{qB_0}{m}(x - x_0) + \frac{qE_0}{m}t \end{cases} \quad (11)$$

À partir de (11), que l'on remplace dans (2) et (4), il est possible de trouver les équations de l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x &= \frac{q^2B_0E_0}{m^2}t - \frac{qB_0}{m}v_0 - \frac{q^2B_0^2}{m^2}x_0 \\ \ddot{z} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z &= \frac{qE_0}{m} - \frac{q^2B_0E_0}{m^2}z_0 \end{cases} \quad (12)$$

En résolvant les équations différentielles du 2ème ordre (12), on trouve la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{qB_0 v_0}{m} \cos\left(\frac{m}{qB_0}t\right) + \frac{E_0 m}{qB_0^2} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - \frac{E_0}{B_0}t - \frac{mv_0}{qB_0} \\ v_x(t) = -v_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - \frac{E_0}{B_0} \\ z(t) = -\frac{mE_0}{qB_0^2} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{mv_0}{qB_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{mE_0}{qB_0^2} \\ v_z(t) = \frac{E_0}{B_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + v_0 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \end{cases} \quad (13)$$

3 Simulations et Analyses

3.1 Cas sans champ électrique mais avec un champ magnétique

Dans cette partie, les simulations se font avec les valeurs suivantes [2] :

L'intensité du champ électrique $E_0 = 0$,

l'intensité du champ magnétique $B_0 = 5\text{T}$,

les conditions initiales $\vec{x}(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_z$,

la vitesse initiale $v_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ et

le temps final $t_{fin} = \frac{10\pi}{\omega} = 6.5593 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, le temps nécessaire pour que le proton effectue 5 périodes de rotation.

3.1.1 Convergence numérique de l'erreur sur la position et la vitesse

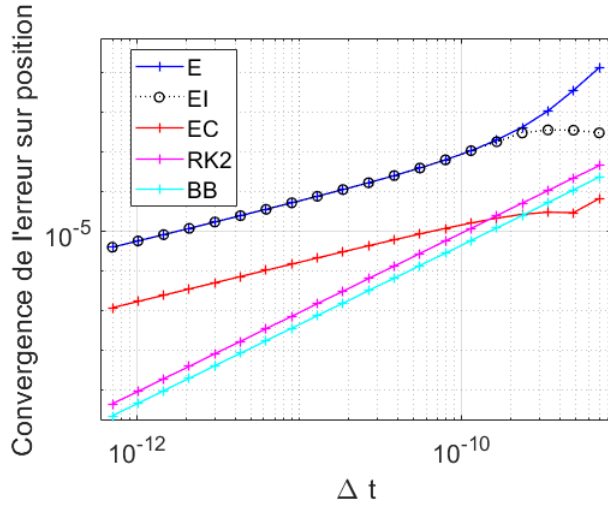


FIGURE 1 – Convergence de l'erreur sur la position en Δt

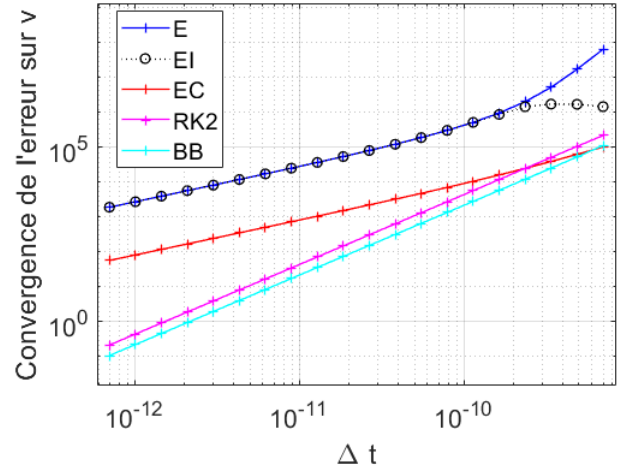


FIGURE 2 – Convergence de l'erreur sur la vitesse en Δt

Dans la figure 1, une simulation de l'erreur maximale locale sur la position a été faite. C'est donc l'erreur numérique qui est observée. On représente les convergences selon les 5 intégrateurs : Euler explicite (E), Euler implicite (EI), Euler-Cromer (EC), Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et Boris-Buneman (BB). On s'intéresse maintenant à leur ordre de convergence. Ce dernier est défini ici comme étant la pente de la courbe formée par l'erreur lorsque Δt est

petit. Une fonction a été créée dans le fichier ParameterScan.m pour calculer ces pentes. Les résultats sont les suivants.

Pour Euler implicite, les ordres de convergence de la position et de la vitesse sont les mêmes et valent 1. Il en va de même pour Euler implicite.

Euler-Cromer est également d'ordre 1 pour la position et la vitesse, ce qui se confirme par la figure 1 car on voit que les trois droites des premiers intégrateurs sont parallèles.

Runge-Kutta et Boris-Buneman sont d'ordre 2, ce qui est confirmé par les deux droites parallèles sur la figure 2.

3.1.2 Non-conservation de l'énergie mécanique

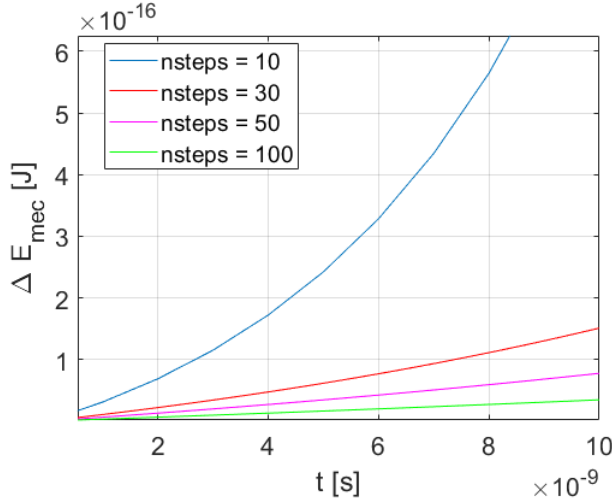


FIGURE 3 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler explicite en Δt

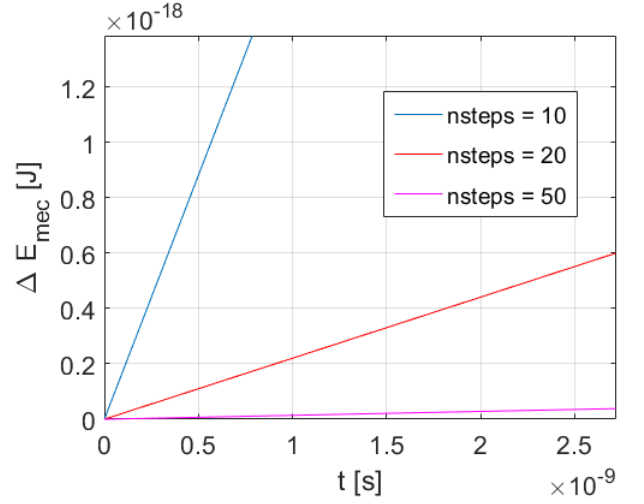


FIGURE 4 – Variation de l'énergie mécanique selon Runge-Kutta 2 en Δt

La figure 3 montre que l'intégrateur d'Euler explicite est instable car, pour des petits pas de temps, on voit clairement que ΔE_{mec} croît exponentiellement. En ce qui concerne Runge-Kutta, on voit sur la figure 4 que la variation de l'énergie mécanique croît fortement pour des petits pas de temps, elle est donc également instable.

Dans la figure 5, qui concerne l'intégrateur d'Euler-Cromer, il est observable qu'avec un pas de temps de 3 l'énergie est conservée, alors que si il est plus petit que 3, l'énergie mécanique n'est pas conservée. Cela est dû au fait qu'Euler-Cromer n'est stable que si $w_c \delta t < 2$. Avec $w_c = \frac{qB_0}{m}$, la vitesse de rotation du proton. Ce qui donne le nombre de pas limite $n > 2.3948$, ce qui est bien visible dans la figure 5.

Dans le graphique 6, on voit que plus le pas de temps est grand, plus l'énergie est bien conservée, la courbe oscille autour de 0 et montre donc que c'est un schéma stable quand le pas de temps minimum est respecté.

La figure 7 montre que l'intégrateur de Boris-Buneman conserve exactement l'énergie mécanique, aux arrondis près, pour tous les pas de temps et, par conséquent, pour toute valeur de Δt .

Et la figure 8 est faite afin de pouvoir comparer les deux intégrateurs d'Euler explicite et implicite. On voit nettement que le schéma implicite est bien plus stable que l'explicite, cependant il décroît contrairement à celui explicite. Cela est dû au fait qu'il dissipe de l'énergie,

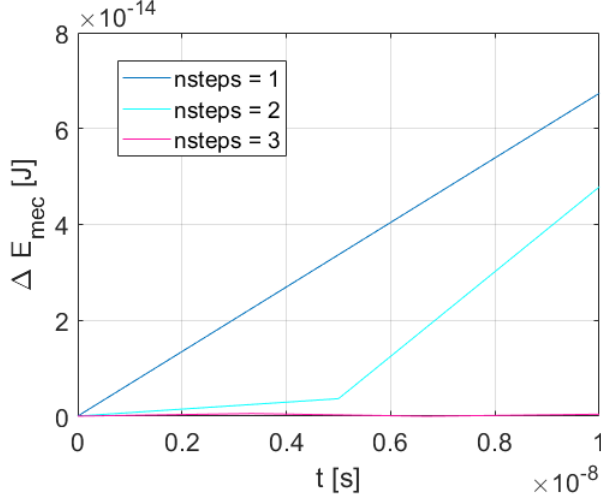


FIGURE 5 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en Δt pour des petits nombres de pas

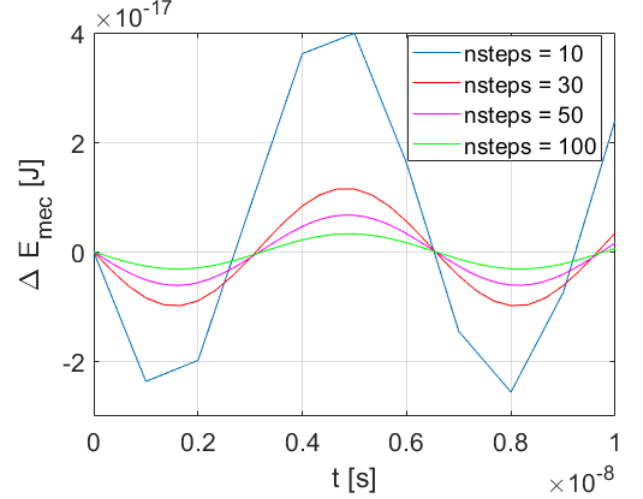


FIGURE 6 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler-Cromer en Δt pour des plus grands nombres de pas

ce qui est ce à quoi on s'attend, comme dit dans le polycopié ([1], p.34). Cette dissipation est d'origine numérique et non pas physique.

3.2 Cas avec un champ électrique et un champ magnétique : dérive $\vec{E} \times \vec{B}$

Dans cette partie il est considéré que la valeur $E_0 \neq 0$, mais que $E_0 = 10^5 \text{Vm}^{-1}$ [2]. Les autres valeurs restent comme dans l'exercice précédent. Les schémas utilisés sont Runge-Kutta d'ordre 2 et Boris-Buneman.

3.2.1 Étude de convergence en Δt

En implémentant les solutions analytiques dans le fichier ParameterScan.m de Matlab, la figure représentant le maximum de l'erreur de la position en fonction de Δt est obtenue. Nous obtenons des droites pour Runge-Kutta d'ordre 2 et pour Boris-Buneman, que l'on peut observer sur la figure 9, ce qu'implique une convergence linéaire en fonction de Δt . En utilisant un fit linéaire on peut déterminer l'ordre de convergence des deux schémas, qui est de 2 ($y = 2x + 32$ et $y = 2x + 32.5$), ce qui est facilement vérifiable sur la figure 10.

3.2.2 Conservation de l'énergie

En prenant en compte le champ électrique, nous avons une nouvelle force à considérer. La charge q de la particule étant positive, on a $\vec{F}_E = qE_0\vec{e}_z$, et donc la force est orientée dans la même direction que le champ électrique, ce qui implique que l'énergie potentielle est négative selon l'axe \vec{e}_z d'après la formule $\vec{E} = -\int \vec{F}d\vec{z}$ [3]. On peut donc exprimer l'énergie mécanique comme :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 - qEz \quad (14)$$

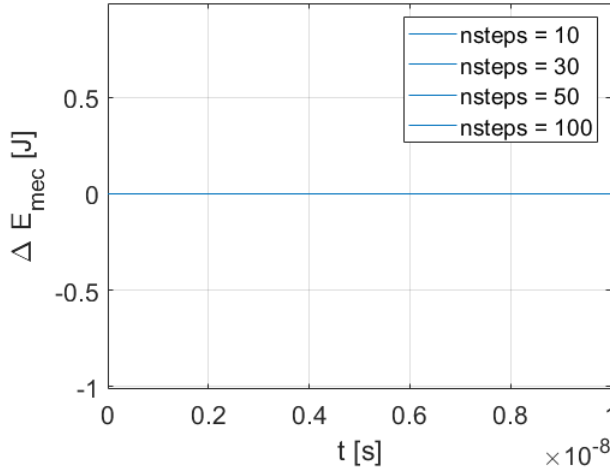


FIGURE 7 – Variation de l'énergie mécanique selon Boris Buneman en Δt

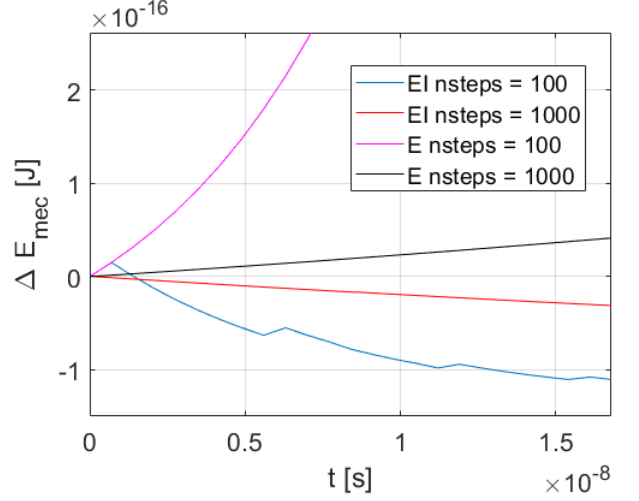


FIGURE 8 – Variation de l'énergie mécanique selon Euler implicite et Euler explicite en Δt

En définissant $\Delta E(t)$ comme $E(t) - E(0)$, on fait une étude de convergence de $\Delta E(t)$ en fonction de nombre de pas (n_{steps}). Ceci est représenté sur la fig 11.

On n'arrive pratiquement pas à différencier les droites pour les valeurs : $n_{steps} = 4642$, $n_{steps} = 6952$ et $n_{steps} = 10000$, mais on arrive bien à voir que la valeur de $\Delta E(t)$ semble bien converger lorsque n_{steps} devient grand, on peut donc en déduire que :

$$\lim_{n_{steps} \rightarrow +\infty} \Delta E(t) = 0 \forall t \in [0; t_{fin}] \quad (15)$$

3.2.3 Trajectoire de la particule dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse $v_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$

La formule de v_E étant donnée, on peut calculer sa valeur :

$$\vec{v}_E = \frac{1}{B_0^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{B_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

On peut soustraire la valeur dans l'équation de $v_x(t)$ de l'équation 11, ce qui donne :

$$v_x(t) = -v_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad (17)$$

On voit sur la figure de Runge-Kutta (12) et sur la figure de Boris-Buneman (13) que les trajectoires forment une ellipse, ce qui est attendu, car la translation implique que le référentiel "suit" la particule le long de l'axe \hat{x} .

3.3 Cas d'un champ magnétique non uniforme : dérive $\vec{B} \times \nabla B$

Dans cette section nous considérons un champ magnétique d'intensité variable $\vec{B} = B(x)\hat{y}$, où $B(x) = B_0(1 + \kappa x)$, $\kappa = 100\text{m}^{-1}$, $B_0 = 5\text{T}$, $E = 0$, $v_{x_0} = 0$, $v_{z_0} = 4 \cdot 10^5\text{ms}^{-1}$, $x_0 = \frac{mv_{z_0}}{qB_0}$,

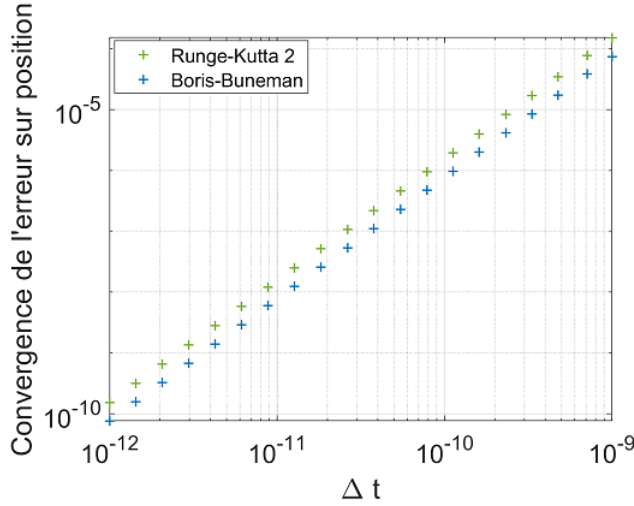


FIGURE 9 – *Etude de la convergence de l'erreur maximale sur la position selon Δt*

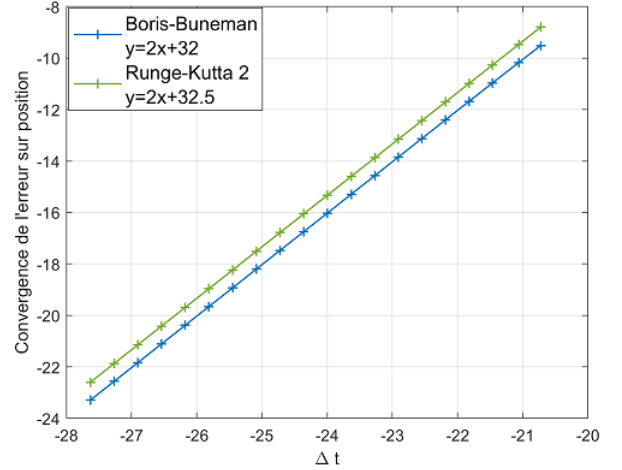


FIGURE 10 – *Fit linéaire de l'erreur sur la position en Δt*

$z_0 = 0$ et $t_{fin} = 6.5593 \cdot 10^{-7}$ s [2]. Le schéma utilisé est celui de Boris-Buneman.

3.3.1 Cas d'un proton ($q = e$) et d'un antiproton ($q = -e$)

Dans les cas d'un proton et d'un antiproton, les trajectoires sont des cycloïdes. On peut observer que lorsque n_{steps} devient très grand, leurs orbites deviennent de plus en plus des colonnes droites. On peut voir leurs limites sur les figures 14 et 15. On voit que la colonne du proton est orientée vers le bas, alors que celle de l'antiproton est orientée vers le haut. La trajectoire est parcourue dans le sens anti-horaire par le proton, et dans le sens horaire par l'antiproton.

3.3.2 La quantité $\mu = \frac{mv^2}{2B}$

La quantité μ s'appelle le moment magnétique d'une particule, dans notre cas soit du proton, soit de l'antiproton. Il caractérise l'intensité de la source magnétique. L'énoncé [2] nous dit que $B(x) = B_0(1 + \kappa x) = B_0 + B_0 \kappa x$. Il est évident que cette fonction dépend entièrement de la valeur de x , et a donc des extrema en fonction des extrema de la fonction $f(x) = x$. Sur les figures 16, 17, 18 et 19, où les positions des particules et les valeurs des moments magnétiques des particules sont représentées sur un intervalle de temps $\Delta t = 1 \times 10^{-7}$ s, pour qu'on puisse voir avec plus de précision ce qui se passe, on voit que μ est inversement proportionnel à la position de la particule.

4 Conclusions

Après avoir fait cet exercice, on connaît mieux les intégrateurs et leurs spécificités propres.

On remarque que la convergence de l'erreur sur la position et sur la vitesse sont du même ordre pour tous les intégrateurs étudiés. On peut voir que plus l'intégrateur est compliqué, plus son erreur est basse et que tous ne convergent pas de la même manière lorsque Δt devient plus grand.

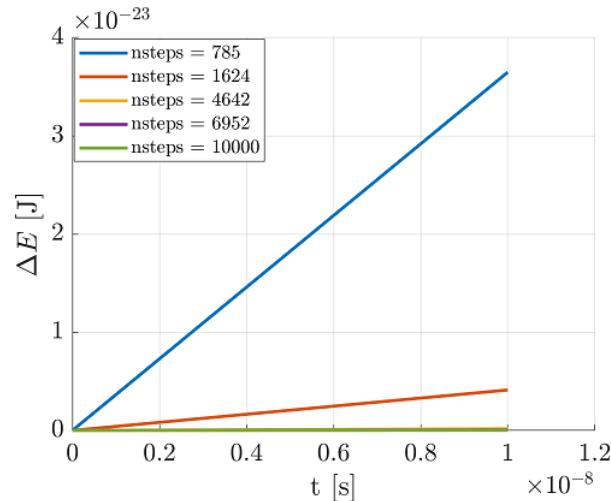


FIGURE 11 – $\Delta E(t)$ en fonction du nombre de pas de temps.

Quant à la conservation de l'énergie mécanique, il est visible que les schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 2 sont les moins précis. Ensuite, Euler-Cromer converge vers la bonne valeur dès que le pas de temps minimum est respecté. De plus, Euler implicite est stable, mais il dissipe un peu d'énergie à cause des erreurs numériques. On remarque aussi que l'intégrateur le plus efficace est celui de Boris-Buneman car il conserve exactement l'énergie mécanique, aux arrondis près.

L'application à un cas où le champ magnétique est variable, introduit le moment magnétique, qui caractérise l'intensité du champ magnétique, et met en évidence le fait que celui-ci est inversement proportionnel à la position de la particule.

Ainsi, on a appris à connaître plusieurs intégrateurs et on voit que pour des composantes différentes, les intégrateurs n'agissent pas forcément de la même manière. On va pouvoir être plus à même de choisir celui qui convient le mieux lors de futurs exercices. Il faut cependant savoir trouver l'équilibre entre l'erreur que l'on est prêt à avoir et la place et que l'on a pour calculer.

Références

- [1] L. Villard avec la contribution de A. Läuchli *Notes de cours Physique numérique I-II, version 20.1* (2020)
- [2] L. Villard, Dr C. Sommariva *Énoncé de l'exercice 2* (2020) https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/2839539/mod_resource/content/1/Exercice2_2020.pdf
- [3] VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRER et al. *Formulaires et tables : mathématiques, physique, chimie* Editions G d'Encre, 2015. ISBN 978-2-940501-41-0

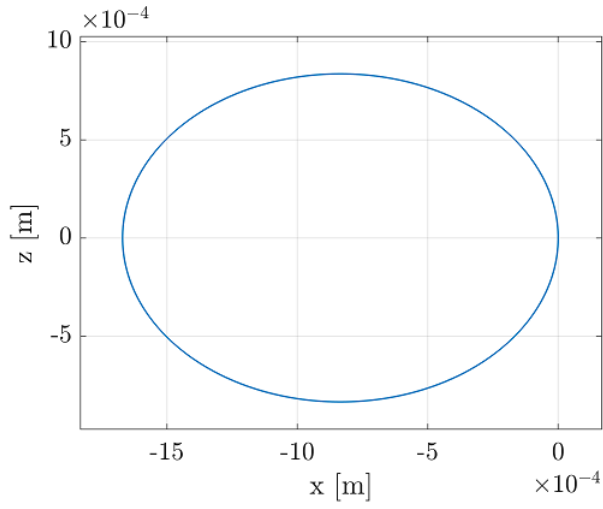


FIGURE 12 – *La trajectoire de la particule dans le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.*

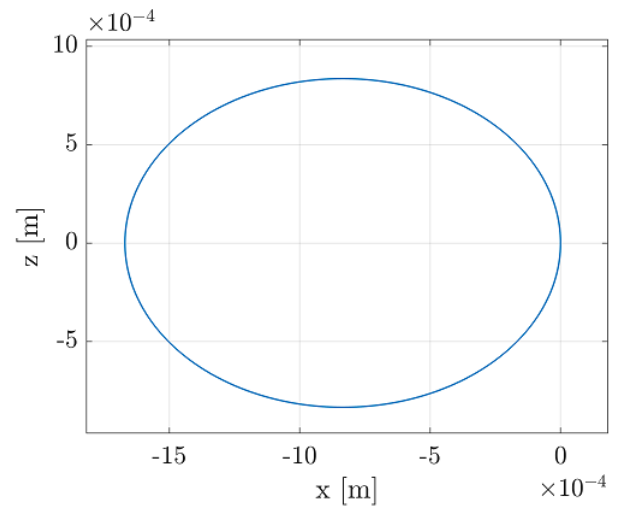


FIGURE 13 – *La trajectoire de la particule dans le schéma de Boris-Buneman.*

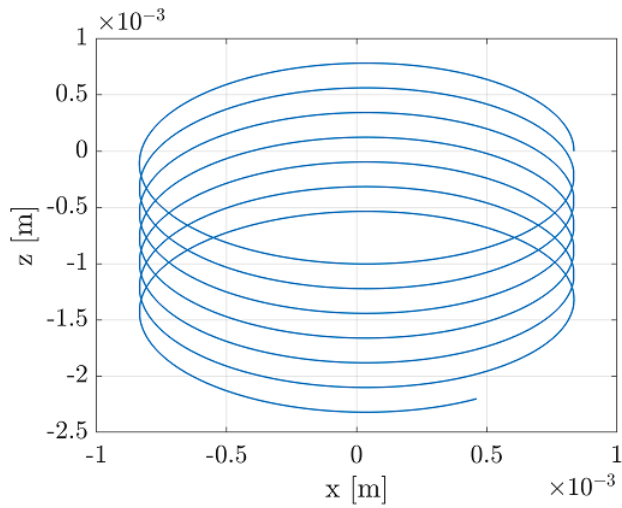


FIGURE 14 – *Trajectoire d'un proton.*

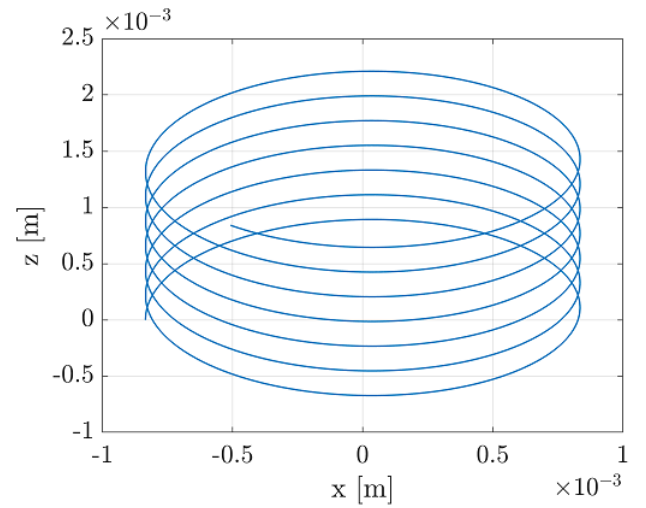


FIGURE 15 – *Trajectoire d'un antiproton.*

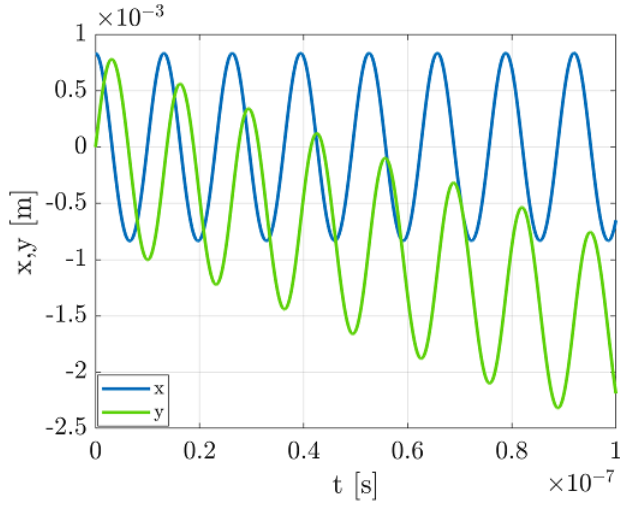


FIGURE 16 – *Position du proton.*

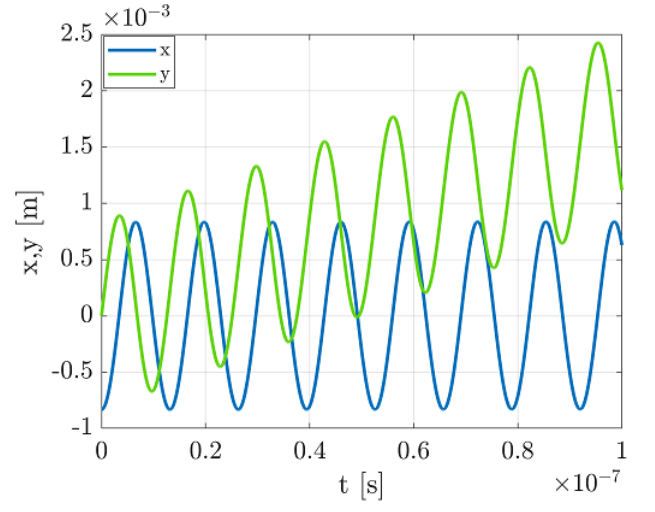


FIGURE 17 – *Position du antiproton.*

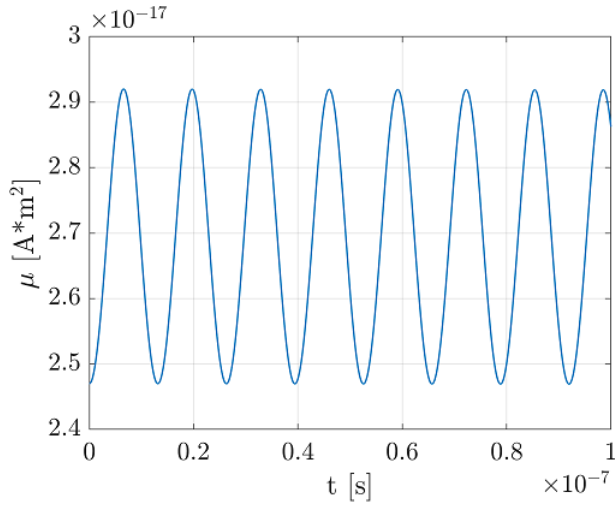


FIGURE 18 – *Moment magnétique du proton.*

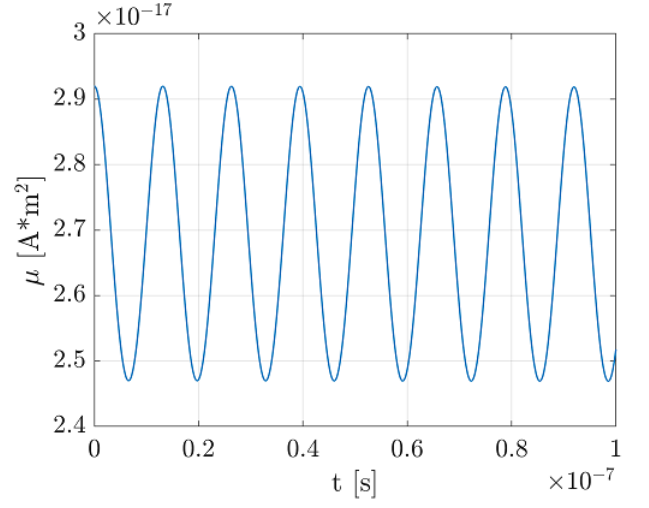


FIGURE 19 – *Moment magnétique du antiproton.*