Algorithmes et complexité (2022-2023)

Florian Bridoux, François Doré, Dorian Mazauric

Exercices inspirés de Monsieur Bond, Johny Bond

Travaux Dirigés 3

Nom : **Somme de Sous-Ensembles**
Instance : un ensemble fini E, une taille s(e) ∈ N pour chaque e ∈ E et une capacité C ∈ N.
Question : existe-t-il un sous-ensemble $E^{'} \subseteq E$ tel que la somme des éléments de E' = C ?

<u>Exercice 1 :</u>

Montrer que Somme de Sous-Ensembles est dans NP en décrivant une machine de Turing non-déterministe.

Soient les problèmes suivants.

Nom : **Chaîneham**
Instance : Un graphe fini G = (V, E) représenté sous forme de listes d'adjacence.
Question : Le graphe admet-il une chaîne Hamiltonienne (c'est-à-dire qui passe une et une seule fois par tous les sommets) ?

Nom : **Cycleham**
Instance : Un graphe fini G = (V, E) représenté sous forme de listes d'adjacence.
Question : Le graphe admet-il un cycle Hamiltonien (c'est-à-dire qui passe une et une seule fois par tous les sommets) ?

Nom : **Cheminham**
Instance : Un graphe orienté fini G = (V, E) représenté sous forme de listes d'adjacence.
Question : Le graphe admet-il un chemin Hamiltonienne (c'est-à-dire qui passe une et une seule fois par tous les sommets) ?

Nom : **Circuitham**
Instance : Un graphe orienté fini G = (V, E) représenté sous forme de listes d'adjacence.
Question : Le graphe admet-il un circuit Hamiltonien (c'est-à-dire qui passe une et une seule fois par tous les sommets) ?

<u>Exercice 2 :</u>

1. Cheminham $\propto$ Circuitham
2. Cycleham $\propto$ Circuitham
3. Chaîneham $\propto$ Cheminham
4. Cycleham $\propto$ Chaîneham

5. Circuitham $\propto$ Cheminham
6. Circuitham $\propto$ Cycleham
7. Cheminham $\propto$ Chaîneham

Pour la suite, nous pourrons utiliser la NP-difficulté des problèmes suivants : Cheminham, Circuitham, Cycleham, Chaîneham, Clique, Partition, 3-Dimensional Matching, X3-SAT.

Nom : **Clique**
Instance : un graphe fini G(V,E), et un entier positif $C \leq |V|$
Question : le graphe admet-il une clique (sous-graphe complet) de cardinalité au moins C ?

Nom : **Partition**
Instance : un ensemble fini d'entiers non-négatifs A.
Question : existe-t-il une partition de A en deux ensembles A' et A", telle que la somme des éléments de A' soit égale à la somme des
éléments de A" ?

Nom : **3-Dimensional Matching**
Instance : un ensemble M de triplets (w,x,y), avec w, x et y des éléments de trois ensembles W, X, Y de même cardinalité q.
Question : M contient-il un couplage (un sous-ensemble de triplets contenant tous les éléments une fois et une seule) ?

Nom : **X3-SAT**
Instance : une formule logique sous forme normale conjonctive, composée de clauses de degré exactement 3.
Question : est-ce que la formule est satisfiable ?

Exercice 3 :

Définition (Sous-graphe) : Le sous-graphe de G = (V,E) engendré par un sous-ensemble des sommets S de V est le graphe G_S dont les sommets sont les sommets de S et les arêtes sont celles de G dont les deux extrémités sont dans S.

Définition (Graphe partiel) : Le graphe partiel de G = (V,E) engendré par un sous-ensemble A de l'ensemble des arêtes de G est le graphe obtenu de G en retirant les arêtes de E \ A.

Définition (Sous-graphe partiel) : Le sous-graphe partiel de G est le sous-graphe d'un graphe partiel de G.

Montrer que le problème Isomorphisme de sous-graphes est NP-difficile.

Nom : **Isomorphisme de sous-graphes**
Instance : deux graphes finis G_1 et G_2
Question : G_1 contient-il un sous-graphe isomorphe à G_2 ?

Exercice 4 :

Montrer que le problème Isomorphisme de sous-graphes partiels est NP-difficile.

Nom : **Isomorphisme de sous-graphes partiels**
Instance : deux graphes finis G_1 et G_2
Question : G_1 contient-il un sous-graphe partiel isomorphe à G_2 ?

Exercice 5 :

Montrer que le problème Arbre couvrant de degré borné est NP-difficile.

Nom : **Arbre couvrant de degré borné**
Instance : G et un entier k
Question : Existe-t-il un arbre couvrant de degré au plus k ?

Exercice 6 :

Montrer que le problème Ordonnancement de tâches est NP-difficile.

Nom : **Ordonnancement de tâches**
Instance : Soient k tâches de durées respectives $t_1, \ldots, t_k$ (durées entières), T le temps total d'exécution autorisé et n le nombre de processeurs.
Question : Est-il possible d'exécuter les k tâches sur une machine à n processeurs en moins de T unités de temps ?

Exercice 7 :

Montrer que le problème Plus petit ensemble de tests est NP-difficile.

Nom : **Plus petit ensemble de tests**
Instance : P un ensemble de pannes possibles, C une famille de sous-ensembles de P représentant des tests, J un entier
Question : Existe-t-il un sous-famille de tests C' de cardinalité au plus J telle que pour toute paire p_i, p_j de pannes, il existe $c \in C'$ un test tel que $|\{ p_i, p_j \} \cap c| = 1$. En d'autres termes, existe-t-il un test qui permette de distinguer la panne p_i de la panne p_j (pour tout i et j).

Exercice 8 :

Montrer que le problème Score est NP-difficile.

Nom : **Score**
Instance : G = (V,E) un graphe arête-pondéré non orienté dont les poids des arêtes sont des entiers non négatifs, u et v deux sommets et S un entier.
Question : Existe-t-il une chaîne simple de u à v de poids supérieur ou égal à S ?

Exercice 9 :

Montrer que le problème 3-Partition est NP-difficile.

Nom : **3-Partition**
Instance : A un ensemble fini d'entiers non-négatifs
Question : Existe-t-il une partition de A en A_1, A_2 et A_3 en trois ensembles de somme égale ?

Exercice 10 :

Montrer que le problème Somme de sous-ensembles est NP-difficile (en utilisant X3-SAT dans la réduction).

Nom : **Somme de sous-ensembles**
Instance : Un ensemble A d'entiers non négatifs et un entier C
Question : Existe-t-il un sous-ensemble de A qui somme à C ?