

Compte-rendu en *Méthodes numériques de base* Résultats sur l'identification de conductivité

Aurélien PEPIN, Antonin KLOPP-TOSSER

2 mai 2017

1 Méthode des différences finies

QUESTION 1. L'écriture sous forme matricielle du θ -schéma (10) exprime l'itération $k + 1$ du vecteur U en fonction de l'itération k . On isole donc, dans le θ -schéma, les termes en $u_i^{(k+1)}$.

$$\begin{aligned} & u_i^{(k+1)} - \mu\theta \left(C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k+1)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k+1)} + C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k+1)} \right) \\ &= \mu(1 - \theta) \left(C_{i+1/2} u_{i+1}^k - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^k + C_{i-1/2} u_{i-1}^k \right) + u_i^k \\ \\ &\iff (1 + \theta\mu(C_{i+1/2} + C_{i-1/2})) u_i^{(k+1)} - \theta\mu(C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k+1)} - C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k+1)}) \\ &= (1 + (\theta - 1)\mu(C_{i+1/2} + C_{i-1/2})) u_i^k - (\theta - 1)\mu C_{i+1/2} u_{i+1}^k - (\theta - 1)\mu C_{i-1/2} u_{i-1}^k \end{aligned}$$

Sachant que $U^{(k)}$ est la matrice-colonne des $u_i^{(k)} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on identifie les termes un à un dans le membre de gauche puis dans le membre de droite :

$$\left(I + \theta\mu \begin{bmatrix} C_{1+1/2} + C_{1-1/2} & -C_{1+1/2} & & & 0 \\ & -C_{2-1/2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -C_{(n-1)+1/2} \\ 0 & & & -C_{n-1/2} & C_{n+1/2} + C_{n-1/2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1^{(k+1)} \\ u_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \qquad U^{(k+1)} \qquad U^{(k)} \qquad B^{(k)}$

$$\left(I + (\theta - 1)\mu \begin{bmatrix} C_{1+1/2} + C_{1-1/2} & -C_{1+1/2} & & & 0 \\ & -C_{2-1/2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -C_{(n-1)+1/2} \\ 0 & & & -C_{n-1/2} & C_{n+1/2} + C_{n-1/2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \qquad U^{(k)} \qquad B^{(k)}$

$B_1^{(k)}$ exprime les conditions aux limites. Pour $i = 1$, le terme $(A)_{i,i-1} = (A)_{1,0}$ n'est pas défini et vaut 0 par convention. Pour conserver l'égalité, on ajoute dans B un coefficient simulé :

$$B_1^{(k)} = C_{1/2} (\theta u_0(t_k) + (1 - \theta) u_0(t_k + 1))$$

QUESTION 2. Une matrice M est dite définie positive si, pour toute matrice-colonne non nulle x à coefficients réels, ${}^t x M x > 0$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ non nul :

$${}^t x A x = \sum_{i=1}^n (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} x_i x_{i+1}$$


On pose $j = i - 1$ en développant le premier terme :

$$\begin{aligned} {}^t x A x &= \sum_{i=1}^n C_{i+1/2} x_i^2 + \sum_{j=0}^{n-1} C_{j+1/2} x_{j+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} x_i x_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} (x_i - x_{i+1})^2 + C_{1/2} x_{1/2}^2 + C_{n+1/2} x_n^2 \end{aligned} \quad (1)$$

La fonction $C(x)$ est strictement positive par définition donc ${}^t x A x > 0 \forall x$ non nul.
La matrice A est bien définie positive.

2 Factorisation de Cholesky dans le cas tridiagonal

QUESTION 3. Phase de factorisation de Cholesky.

 Se référer à : `Q3_Factorisation_Cholesky.sce`

La décomposition de Cholesky permet ensuite de résoudre des systèmes linéaires en une phase de descente puis une phase de remontée.

QUESTION 4. Première phase de descente.

 Se référer à : `Q4_Descente_Cholesky.sce`

QUESTION 5. Seconde phase de remontée.

 Se référer à : `Q5_Remontee_Cholesky.sce`

On peut appliquer dans l'ordre ces trois fonctions pour résoudre l'exemple ci-dessous, noté $MX = B$. Le TD 5 a montré que la matrice M était aussi symétrique définie positive donc elle admet une unique factorisation de Cholesky.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ où la solution est } X = \begin{pmatrix} 350 \\ 340 \\ 310 \\ 250 \\ 210 \end{pmatrix}$$

 Pour calculer et vérifier cet exemple, cf. `Q5_Exemple_Cholesky.sce`

3 Problème stationnaire

QUESTION 6. L'équation (9) de l'énoncé fournit une approximation du système (13) :

$$\frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] (x_i, t_k) \approx \frac{C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k)} + C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k)}}{\delta_x^2}$$

En écrivant ce système sous forme matricielle pour tout $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] = \frac{1}{\delta_x^2} (-Au + B) = 0 \iff Au = B$$

où, par identification :

- A est la matrice tridiagonale, symétrique et définie positive de la **question 1** ;
- u est la matrice-colonne des $u_i^{(k)}$ à l'itération k ;
- B est la matrice-colonne des conditions aux limites déterminée de la façon suivante :

Pour $i = 1$.

$$\begin{aligned} (Au)_1 &= -C_{3/2} u_2^{(k)} + (C_{3/2} + C_{1/2}) u_1^{(k)} \\ \iff (B)_1 &= C_{1/2} u_0 \end{aligned}$$

Pour $i > 1$.


$$\begin{aligned} (Au)_i &= -C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k)} + (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k)} - C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k)} \\ &= \frac{\delta_x^2}{\delta_x^2} (-C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k)} + (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k)} - C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k)}) \\ &\simeq \delta_x^2 \cdot 0 \\ \iff (B)_i &= 0 \quad \forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket \end{aligned}$$

La matrice-colonne B est celle de la **question 1** avec la fonction u_0 constante.

Puisque A est définie positive, elle n'admet pas 0 comme valeur propre.

Elle est donc inversible et le système $Au = B$ possède par conséquent une unique solution.

QUESTION 7. Solution exacte du problème stationnaire et convergence.

 Se référer à : `Q7_Probleme_stationnaire.sce`

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] &= 0 \iff -\frac{1}{l} \exp(-\frac{x}{l}) \frac{\partial u}{\partial x} + \exp(-\frac{x}{l}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ &\iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

donc $u(x)$ est de la forme :

$$u(x) = \alpha + \beta \exp(\frac{x}{l})$$

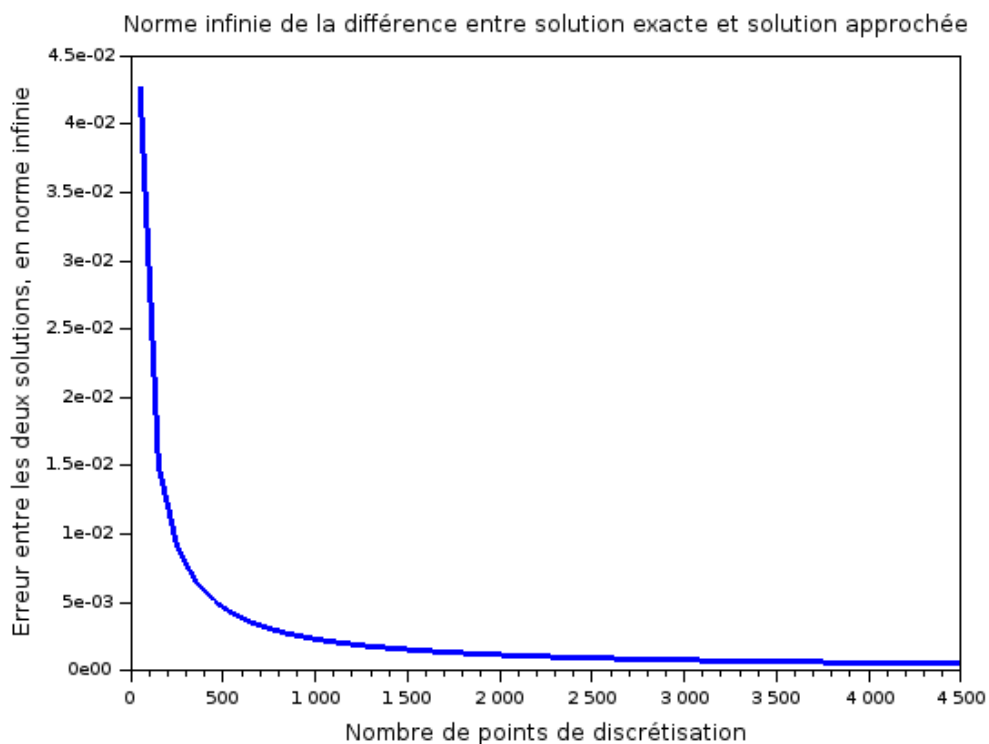
Détermination des constantes α et β . À partir des conditions initiales, on résout :

$$\begin{cases} u(-l) = \alpha + \beta e^{-1} = u_0 = 1 \\ u(l) = \alpha + \beta e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{e^{-1}-e} \\ \alpha = -\frac{e}{e^{-1}-e} \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte de l'équation différentielle (13) est :

$$u(x) = -\frac{e}{e^{-1}-e} + \frac{1}{e^{-1}-e} \exp\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{e(e - e^{\frac{x}{l}})}{e^2 - 1}$$

Il est possible de mesurer la précision de la méthode des différences finies en comparant cette solution exacte avec la solution approchée pour différents pas $\delta_x \rightarrow 0$.



Plus le nombre de points de discrétisation x_i augmente, plus le pas δ_x tend vers 0. La solution numérique converge vers la solution exacte quand $\delta_x \rightarrow 0$.

4 Évolution d'une donnée initiale

QUESTION 8. On cherche à montrer que $\rho(M^{-1}N)$ est strictement inférieur à 1. On applique pour cela à M^{-1} et à N le résultat suivant, démontré plus bas.

Proposition. Soit P un polynôme d'endomorphisme (ou de matrice), soit S une matrice. Si v est vecteur propre de S pour la valeur propre λ , alors il est vecteur propre de $P(S)$ pour la valeur $P(\lambda)$.

Soient P et Q deux polynômes de matrice. Dire en effet que v est vecteur propre de S associé à la valeur propre λ revient à écrire :

$$\begin{aligned}
Sv = \lambda v &\iff S^p v = S^{p-1} \cdot Sv = S^{p-1} \cdot \lambda v = \lambda^p v \quad \forall p \in \mathbb{N} \\
&\iff P(S)v = \sum_{k=0}^p a_k S^k(v) = \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k v = P(\lambda)v \\
&\iff P^{-1}(S)v = \frac{1}{P(\lambda)}v \\
&\iff P^{-1}(S) Q(S)v = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}v
\end{aligned}$$

Soit x_A un vecteur propre de A et λ_A sa valeur propre associée.

M^{-1} et N peuvent être exprimés comme des polynômes de matrice :

$$\begin{aligned}
M^{-1} = \theta\mu A + I &\iff M^{-1}(A) = \theta\mu A^1 + A^0 \\
N = (\theta - 1)\mu A + I &\iff N(A) = (\theta - 1)\mu A^1 + A^0
\end{aligned}$$

On en déduit donc la forme des valeurs propres de M et de N en fonction de celles de A :

$$\lambda_M = 1 + \theta\mu\lambda_A \quad \text{et} \quad \lambda_N = 1 + (\theta - 1)\mu\lambda_A$$

Les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont donc de la forme :

$$\frac{\lambda_N}{\lambda_M} = \frac{1 + (\theta - 1)\mu\lambda_A}{1 + \theta\mu\lambda_A} = \frac{1 + \theta\mu\lambda_A - \mu\lambda_A}{1 + \theta\mu\lambda_A}$$

Or, $\mu > 0$ et A est définie positive donc $\lambda_A > 0$, d'où $\mu\lambda_A > 0$.

Le quotient est donc strictement inférieur à 1.

De plus, $\theta \in [0; 1]$ donc le quotient est toujours strictement supérieur à 1.

Toutes les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont comprises dans l'intervalle $] -1; 1[$ donc :

$$\rho(M^{-1}N) = \max_i |\lambda_i| < 1$$


QUESTION 9. D'après le chapitre 3 du cours, la méthode de Crank-Nicolson converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$. La **question 8** a montré que c'était le cas.

Soit X la limite des $U^{(k)}$. Pour $k \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
MX = NX + \mu B &\iff (M - N)X = \mu B \\
&\iff (I + \theta\mu A - I - (\theta - 1)\mu A)X = \mu B \\
&\iff \mu AX = \mu B \\
&\iff AX = B
\end{aligned}$$

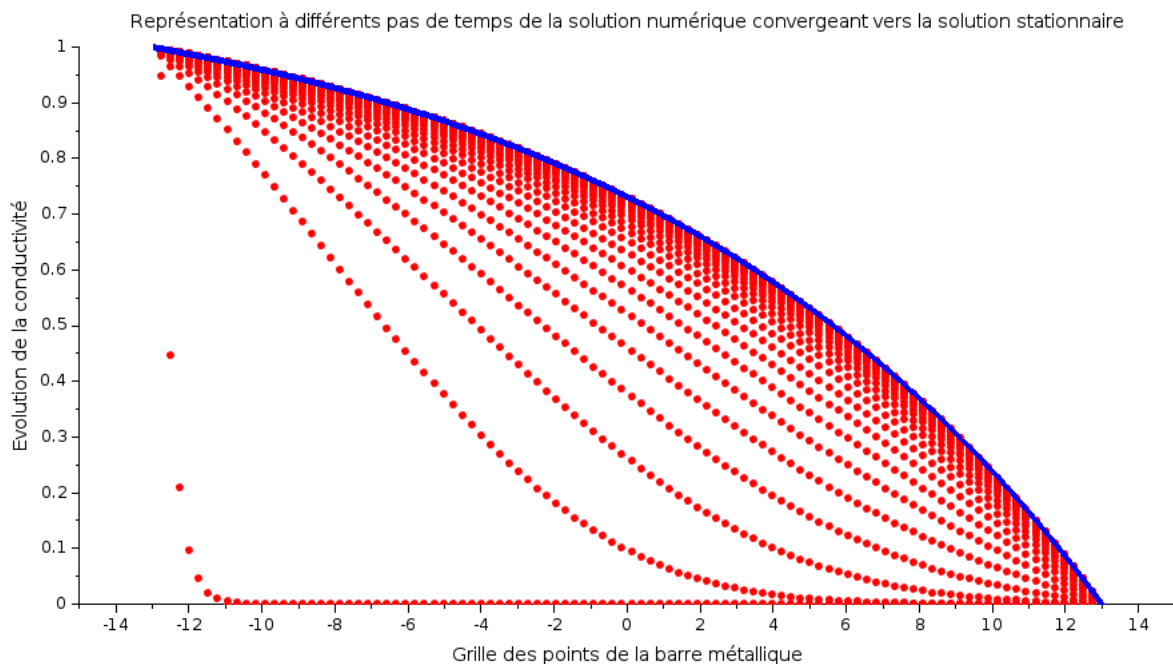
A et B sont les matrices de la **question 6** donc la solution discrétisée converge bien vers la solution stationnaire.

QUESTION 10. Dans le graphique ci-dessous, on trace en bleu la solution stationnaire trouvée dans la **question 6**. Puis on trace en rouge la solution approchée à différents pas t_k .

 Se référer à : Q10_CrankNicolson.sce

On choisit les paramètres suivants :


- $n = 100$, nombre de points de discrétisation de la grille ;
- $n_t = 6000$, nombre d'itérations assez grand pour approcher de près la solution exacte ;
- $T = 500$, ce qui donne un pas de temps $\delta_t \simeq 0.083$.



Quand $k \rightarrow +\infty$, $U^{(k)}$ tend effectivement vers la solution stationnaire. La convergence de la méthode de Crank-Nicolson est rapide : sur le graphique, la deuxième mesure, déjà éloignée de $U^{(0)}$, a été relevée à $k = 200$. Chaque courbe rouge correspond à 200 itérations supplémentaires.

5 Étude du problème inverse


QUESTION 11. Mesure du flux à $t_{inter} = \frac{2}{3}T$ et $t_{fin} = T$.

 Se référer à : Q11_Flux.sce

La fonction `flux(x_d)` est gourmande en temps. Sa complexité temporelle est en $O(n_t \cdot n)$ mais elle cache trois étapes en $O(n)$: le calcul du second membre, la descente et la remontée.

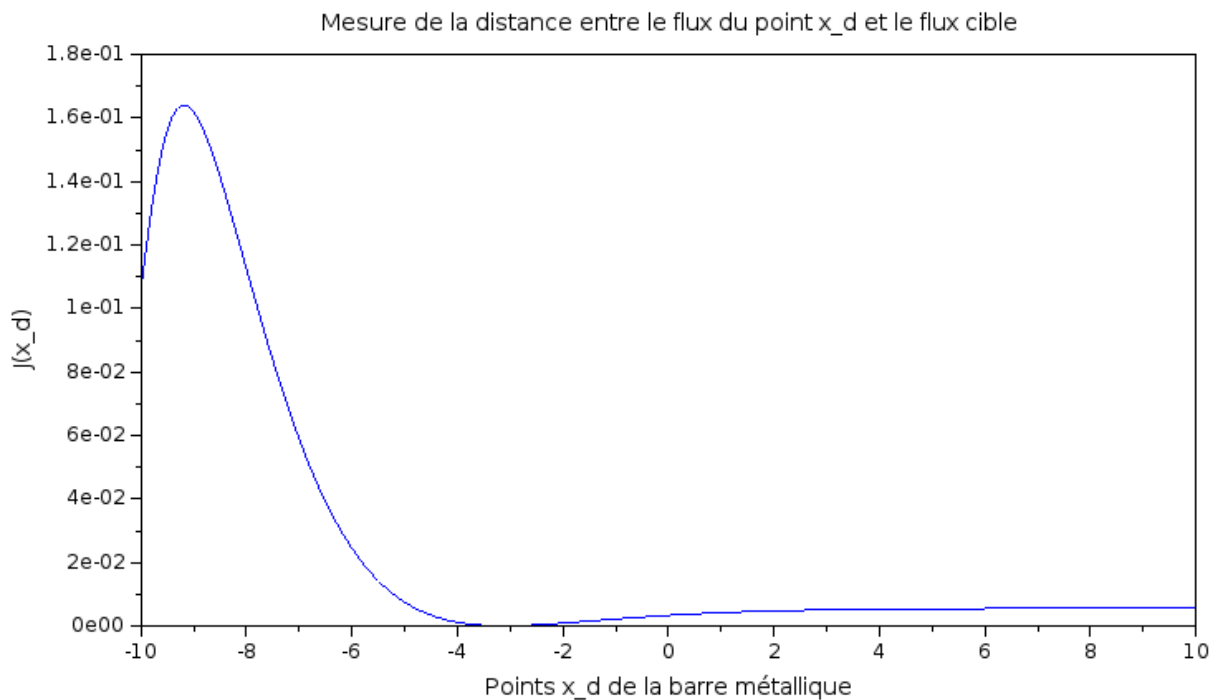
On en optimise pour cela quelques parties comme le calcul du vecteur $B^{(k)}$ ramené au calcul de sa seule composante non nulle $B_1^{(k)}$. On économise ainsi de l'espace mémoire et n itérations pour l'affectation.

QUESTION 12. Recherche de x_d^* avec la fonction J .

 Se référer à : Q12_Fonction_J.sce


La fonction $J(x_d)$ mesure l'écart (en norme euclidienne) entre le flux \mathcal{F} mesuré à différents points x_d et le flux cible $\mathcal{F}_{cible} = (-0.1, -0.18)$.

Le graphique ci-dessous représente la fonction J sur la barre métallique $]-10; 10[$ à raison de 200 points x_d d'échantillonnage.



La fonction J admet un unique minimum. C'est le flux égal au flux cible pour $x_d \simeq -3.5$. On implémente désormais deux méthodes pour trouver par le calcul cette valeur x_d^* : la méthode de la dichotomie et la méthode de Gauss-Newton.

QUESTION 13. Méthode de la dichotomie.

 Se référer à : Q13_J_Dichotomie.sce

$J(x_d)$ est une mesure de la distance entre le flux en x_d et le flux cible. On en déduit :

Données : $J(x_1), J(x_2), J(x_3)$

Sorties : I , intervalle décidé

si $J(x_1) = \min(J(x_1), J(x_2), J(x_3))$ **alors**

$I = [a; x_2]$

sinon si $J(x_2) = \min(J(x_1), J(x_2), J(x_3))$ **alors**

$I = [x_1; x_3]$

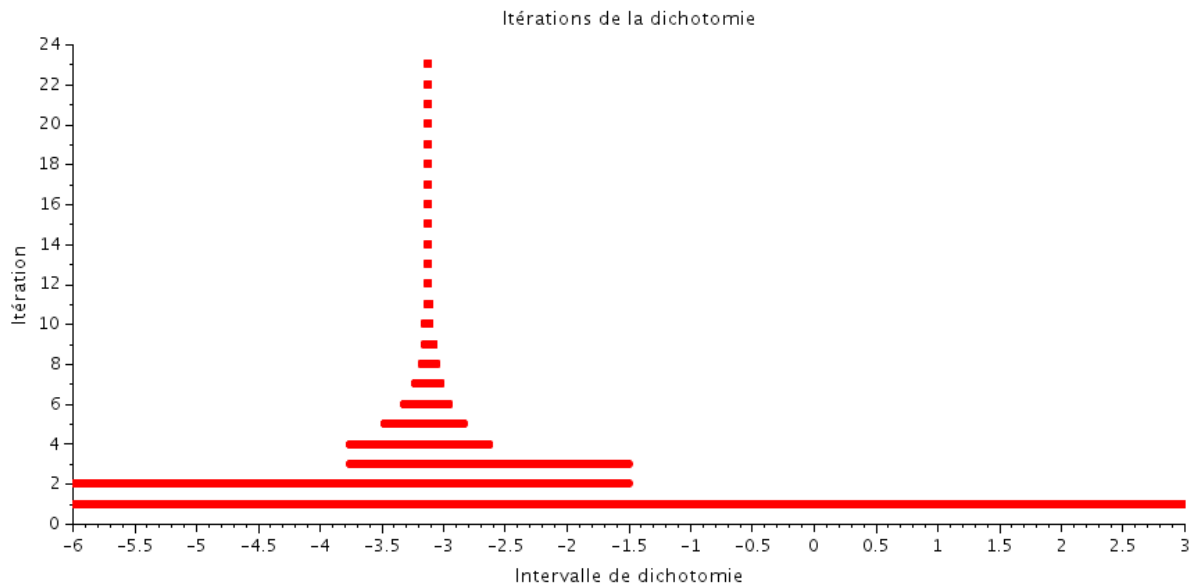
sinon

$I = [x_2; b]$

fin

En effet, avoir $J(x_1)$ pour minimum signifie que, parmi les bornes x_i dont on dispose, c'est x_1 qui est le plus près de x_d^* . Cela nous assure que x_d^* est entouré des mêmes bornes que x_1 , ici a et x_2 . Le raisonnement est analogue pour les deux autres cas.

On affiche ici pour quelques itérations l'effet de la dichotomie sur l'intervalle de décision de départ et on constate qu'il se resserre autour de $x_d^* : [-6; 3]$.



Le résultat attendu avec les données de l'énoncé est : **CHIFFRE**.

QUESTION 14. Méthode de Gauss-Newton.

Annexes

6 RESTE

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} x^T A x &= \sum_{i=1}^n (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} x_i x_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n C_{i+1/2} x_i^2 + \sum_{j=0}^{n-1} C_{j+1/2} x_{j+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} x_i x_{i+1} \quad \text{On pose } j = i-1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1/2} (x_i - x_{i+1})^2 + C_{1/2} x_1^2 + C_{n+1/2} x_n^2 > 0 \end{aligned}$$

Comme $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ alors la matrice A est symétrique définie positive.

D'après (9) : $\frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] (x_i, t_k) = \frac{C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k)} + C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k)}}{\delta_x^2}$ Pour résoudre (13), on résout 9 pour chaque coefficient u_i^k

$$\begin{pmatrix} B \\ u_0 C_{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 6.

D'après l'équation (9),

$$\frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] (x_i, t_k) \approx \frac{C_{i+1/2} u_{i+1}^{(k)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}) u_i^{(k)} + C_{i-1/2} u_{i-1}^{(k)}}{\delta_x^2}$$

Si on écrit ce système, $\forall i$ sous forme matricielle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} [C(x) \frac{\partial u}{\partial x}] = \frac{1}{\delta^2} (-A u + \begin{pmatrix} B \\ u_0 C_{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad \text{car } u(-l) = u_0 \text{ avec } u = (u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}) \text{ et } A \text{ la matrice}$$

trouvée à la question 1.

Donc $A u = B$, avec $B = (b_0, \dots, b_n)$ où, $b_0 = C_{1/2} u_0$ et $b_i = 0 \forall i \in [2, n]$

Ce système admet une solution unique car A est définie et donc inversible.

Question 7.

On résout l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}[C(x)\frac{\partial u}{\partial x}] = 0 \\ u(-l) = u_0 \\ u(l) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[C(x)\frac{\partial u}{\partial x}] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{l}e^{-\frac{x}{l}}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{-\frac{x}{l}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x) = \alpha + \beta e^{\frac{x}{l}}$$

Calcul des constantes :

$$\begin{cases} u(-l) = \alpha + \beta e^{-1} = u_0 = 1 \\ u(l) = \alpha + \beta e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{e^{-1}-e} \\ \alpha = -\frac{e}{e^{-1}-e} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } u(x) = -\frac{e}{e^{-1}-e} + \frac{1}{e^{-1}-e}e^{\frac{x}{l}}$$

Question 8.

$$M = I + \theta\mu A \text{ et } N = I + (\theta - 1)\mu A$$

M et N sont donc des polynomes de matrices.

Donc, soit x_A un vecteur propre de A et λ_A une valeur propre de A, alors x_A est aussi un vecteur propre de M avec comme valeur propre $M\lambda_A$

Les valeurs propres de M sont $\lambda_M = 1 + \theta\mu\lambda_A$.

Les valeurs propres de N sont $\lambda_N = 1 + (\theta - 1)\mu\lambda_A$

Les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont $\frac{\lambda_N}{\lambda_M} = \frac{1+(\theta-1)\mu\lambda_A}{1+\theta\mu\lambda_A} \forall \lambda_A$. $1 + (\theta - 1)\mu\lambda_A < 1 + \theta\mu\lambda_A$

Donc $\rho(M^{-1}N) = \max(\frac{\lambda_N}{\lambda_M}) < 1$

Question 9.

$MU^{(k+1)} = NU^{(k)} + \mu B$ Cette méthode de décomposition converge uniquement si $\rho(M^{-1}N) < 1$, ce qui est le cas ici (question 8).

Cette décomposition converge vers $Ax = b$, avec $A = M - N$.

$$M - N = I + \theta\mu A - I - (\theta - 1)\mu A = \mu A$$

$\mu Ax = \mu B$ $Ax = B$ On retrouve ici les matrices A et B de la question (6).