Modèle d'estimation de la biomasse herbacée à partir de données présence forêt/précipitation/fréquence feu en contexte forêt-savane

12 juillet 2024

Sur les figures 1 3 4, sont tracées en rose le "cône" de données relevées dans *Écosystèmes pâturés tropicaux : un rapport sur l'état des connaissances* [1]. Y sont superposées les fonctions de modélisation de la biomasse herbacée, S la croissance et η un coefficient multiplicatif représentant l'effet de la forêt (> 1 pour la facilitation et < 1 pour la compétition).

$$S\colon ([0, 3500], \mathbb{R}_+, [0, 3500]) \to [0, 1] \tag{1}$$

$$(W, \lambda, W_{\text{inflexion}}) \mapsto \frac{1}{1 + e^{-\lambda(W - W_{\text{inflexion}})}} \tag{2}$$

- W précipitation annuelle moyenne $\in [0, 3500]$ mm.yr-1
- λ un paramètre lié à la pente de la sigmoïde au point d'inflexion de la courbe, en yr.mm-1, qu'on a borné par un cône de valeurs possibles légèrement plus large que le cône rose des données UNESCO
- $W_{\text{inflexion}} \in [0, 3500]$ la précipitation en laquelle il y a le point d'inflexion, en mm.yr-1

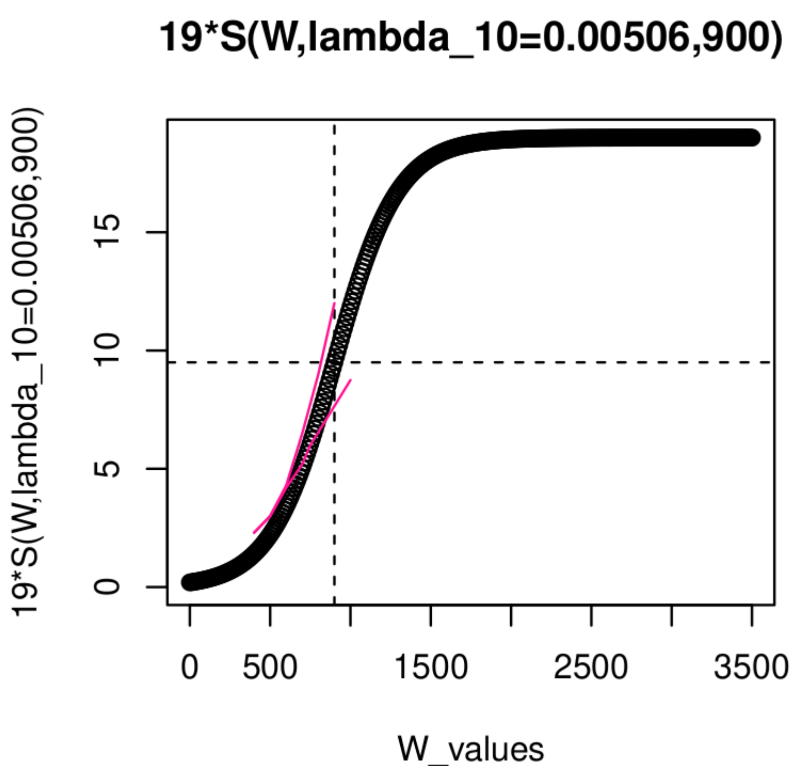

Figure 1 – $19S(W, \lambda = 0.000506, W_{\text{inflexion}} = 900mm/yr)$

L'idée du modèle est de contrebalancer cette courbe théorique par la présence de feu et de forêt. On a utilisé pour cela les données de *canopy cover* et de *fréquence de feu*. La pluie et la présence de forêt interviennent en amont de l'estimation de biomasse et la fréquence de feu est l'élement qui sert effectivement à estimer les paramètres du modèle avec l'estimation Monte-Carlo Markov Chain.

La fonction centrale est donc celle qui relie l'estimation de biomasse herbacée $\hat{G}$ à la fréquence de feu. Nous avions d'abord considéré une fonction de type :

$$\omega_{old} \colon ([0,30],[0,30]) \to [0,1] \tag{3}$$

$$(\hat{G},\alpha) \mapsto \frac{\hat{G}^2}{\hat{G}^2+\alpha^2} \tag{4}$$

Nous avons finalement utilisé une fonction en reprenant Wilgen (2000) (figure 14)[2]. Le point d'inflexion est plus haut et donc la courbe est globalement "moins concave"

$$\omega \colon ([0,30],[0,30]) \to [0,1] \tag{5}$$

$$(\hat{G},b,offset) \mapsto \frac{1}{1+\exp(-b\hat{G}+offset)} \tag{6}$$

Pour relier $\omega(\hat{G},b,offset)$ aux observations réelles de feu, nous utilisons une loi normale d'écart-type σ_ξ :

$$p_{feu} \sim \mathcal{N}(\omega(\hat{G},b,offset),\sigma_\xi) \tag{7}$$

Pour donner une idée de l'influence de σ_ξ sur le lien entre la valeur de feu prédite $\omega(\hat{G},b,offset)$ et la valeur de feu observée p_{feu}, sur une courbe théorique :

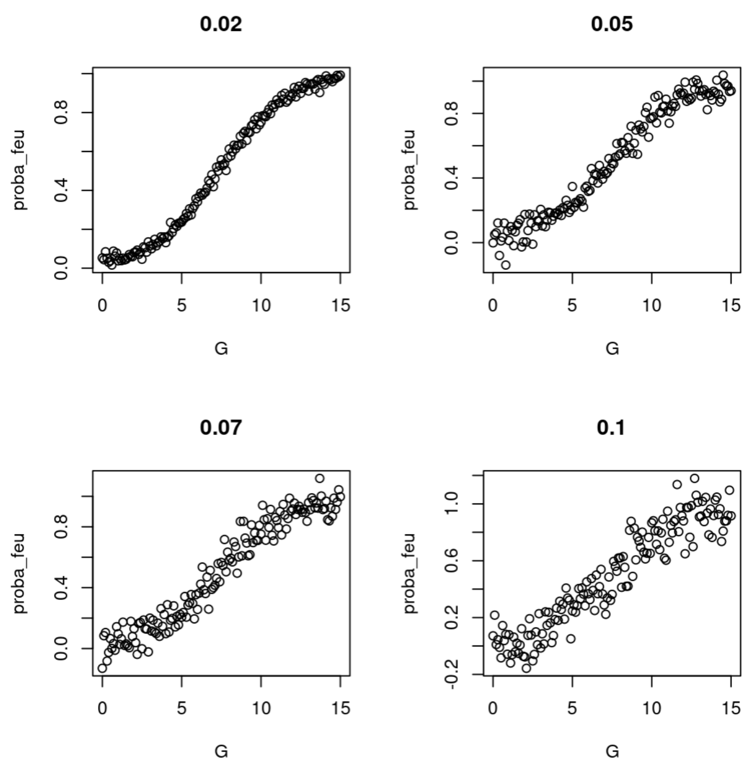

FIGURE 2 – $\omega(\hat{G},b,offset)+\mathcal{N}(0,\sigma_\xi)$ pour différentes valeurs de σ_ξ

J'en ai tiré arbitrairement l'idée que [0.02,0.07] était un bon intervalle de valeurs pour σ_ξ.

Et pour inclure dans la figure 1 l'effet de la forêt, on la multiplie par la courbe S par la courbe η ci-dessous, fonction de la présence de forêt *canopy cover*.

$$\eta\colon ([0,3500], \mathbb{R}_+, [0,3500]) \to [0,2] \tag{8}$$

$$(W, \delta, W_{\text{inflexion}}) \mapsto \frac{2}{1+e^{\delta(W-W_{\text{inflexion}})}} \tag{9}$$

où δ un paramètre lié à la pente de la sigmoïde au point d'inflexion de la courbe, en yr.mm-1.

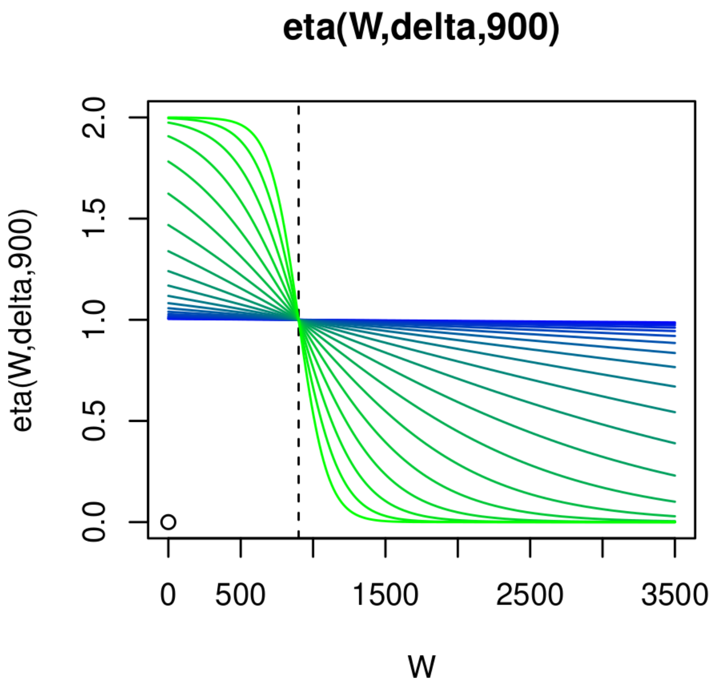

FIGURE 3 – $\eta(W, \delta, W_{\text{inflexion}} = 900mm/yr)$ pour $\delta \in [\delta_{min}, \delta_{max}]$

Fixons $W_{\text{inflexion}}$, λ et δ. Pour tout W dans $[0, W_{\text{inflexion}}]$, on a $S(W) \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\eta(W) \in [1,2]$, de sorte que : $\forall W \in [0, W_{\text{inflexion}}]$, $S(W)\eta(W) \in [0,1]$. De même pour tout W dans $[W_{\text{inflexion}}, 3500]$, on a $S(W) \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $\eta(W) \in [0,1]$, de sorte que : $\forall W \in [0, W_{\text{inflexion}}]$, $S(W)\eta(W) \in [0,1]$. Ainsi :

$$\forall W \in [0,3500], S(W)\eta(W) \in [0,1] \tag{10}$$

Ceci est permis grâce au fait que $W_{\text{inflexion}}$ est le même pour S (figure 1) et η (figure 3).

Nous avons conçu δ non comme un paramètre général à estimer mais comme une fonction des données locales de couvert de canopée allant de δ_{min} à δ_{max}.

$$f\colon [0,1] \to [\delta_{min}, \delta_{max}] \tag{11}$$

$$cc \mapsto \delta_{mi,} + (1-cc)(\delta_{max} - \delta_{min}) \tag{12}$$

Ainsi plus le couvert de canopée augmente (figure 3 : 0=bleu, 1=vert clair), plus l'influence de la compétition/facilitation sur la couche herbacée est forte. On note aussi que si on veut une influence nulle de cc lorsque cc est nulle, il nous faut un δ_{min} suffisamment faible pour que la fonction $\eta(\delta_{min})$ soit quasi-plate. Comme on le voit figure 4, $\delta_{min} = 10^{-5}$ garantit de multiplier par η constante égale à 1.

Il nous faut garder à l'esprit que nos couverts de canopée retenus par GEDI correspondent aux savanes, et nous avons donc principalement retenu les couverts faibles. $f(cc)$ sera ainsi plus proche de δ_{min} que de δ_{max} pour la plupart de nos données.

Ainsi nous estimons la biomasse herbacée $\hat{G}$ (t.ha-1) par :

$$\hat{G}(K_G, W, \lambda, cc, W_{\text{inflexion}}) = S(W, \lambda, W_{\text{inflexion}})\eta(W, f(cc), W_{\text{inflexion}})K_G$$

où K_G en t.ha-1 est la capacité de charge en herbacée maximale qu'on observerait même à W maximale et cc nulle.

Il découle de l'équation 10 que :

$$\forall W, \forall \lambda, \forall cc, \forall W_{\text{inflexion}}, \hat{G}(K_G, W, \lambda, cc, W_{\text{inflexion}}) \in [0, K_G]$$

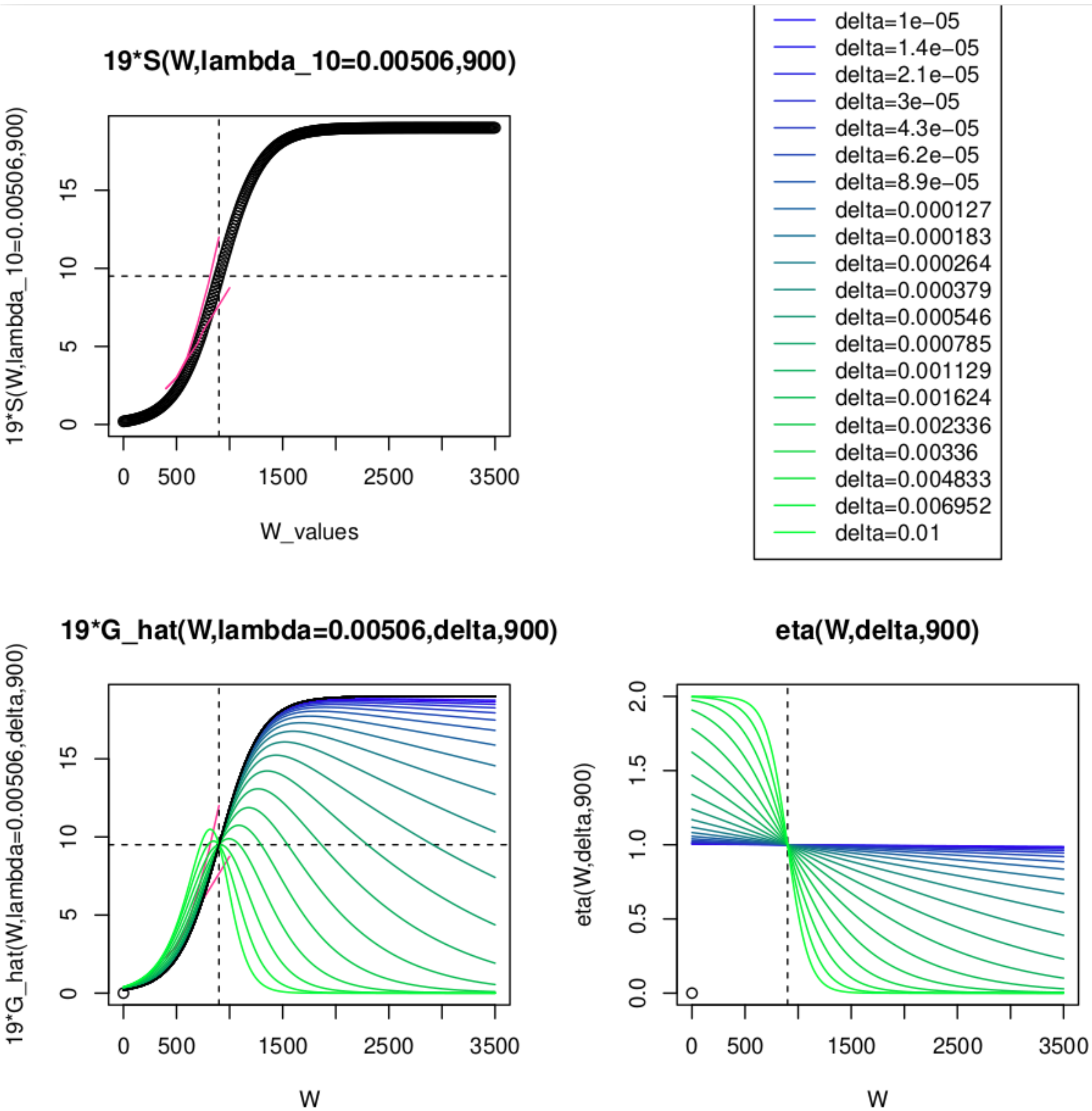

FIGURE 4 – Un exemple créé ex nihilo de $\hat{G}(K_G = 19, W, \lambda, cc, W_{\text{inflexion}})$ pour $\delta \in [10^{-5}, 10^{-2}]$

Model

```
model {

    for (i in 1:N){

      sigmo_pluie[i] = (1/ ( 1+ exp(-lambda*(prec_data[i]-pt_inflexion_grass)) ) )

      canopy_influence[i] = delta_min + cc_data[i]*(delta_max-delta_min)

      sigmo_forest_effect[i] = (2/(1+ exp(canopy_influence[i]*(prec_data[i]-pt_inflexion_grass)) ))

      grassB[i] = K_G_t_f_pluie_max*sigmo_pluie[i]*sigmo_forest_effect[i]
  }

  for (i in 1:N){
  fire_data[i] ~ dnorm( 1/( 1 + exp( -grassB[i]*b + offset ) ) , 1/sigma_xi**2)T(0,1)
  }

 }
```

Parameters' ranges

Au final sur les valeurs qu'on autorise pour les paramètres (ranges), et accessoirement les priors :

parameter	range	prior	justification
K_G	on aimerait [18,25]t.ha^{-1}	uniforme	Pierre
$W_{inflexion}$	[200,1400]mm.yr^{-1}	$\mathcal{N}(600, \sigma = 600)$	Pierre
δ_{min}	**fixé à** 10^{-5}		permet $\eta \simeq 1$
δ_{max}	[10^{-5},10^{-2}] (voire 10^{-1} ou 0)	uniforme sur le log	arbitraire
λ	[0.0003,0.009] yr.mm^{-1}	uniforme	cône rose UNESCO[1]
σ_ξ	[0.02,0.07]	uniforme	arbitraire
b	[0.47,0.51] tonne^{-1}	uniforme	Wilgen[2]
offset	[2.47,3.47]	uniforme	Wilgen[2]

Pour l'instant K_G tape systématiquement sur sa borne inférieure, quelqu'elle soit, et si on le borne seulement par 0, on obtient une estimation qui n'a pas de sens de type $K_G \simeq 5$ t.ha^{-1}.

Références

[1] UNESCO, éd. *Écosystèmes pâturés tropicaux : un rapport sur l'état des connaissances*. fr. Recherches sur les ressources naturelles 16. Paris : Unesco, 1981. ISBN : 978-92-3-201611-9.

[2] B W van Wilgena. "A fire history of the savanna ecosystems in the Kruger National Park, South Africa, between 1941 and 1996". en. In : *South African Journal of Science* (2000).

Complete model

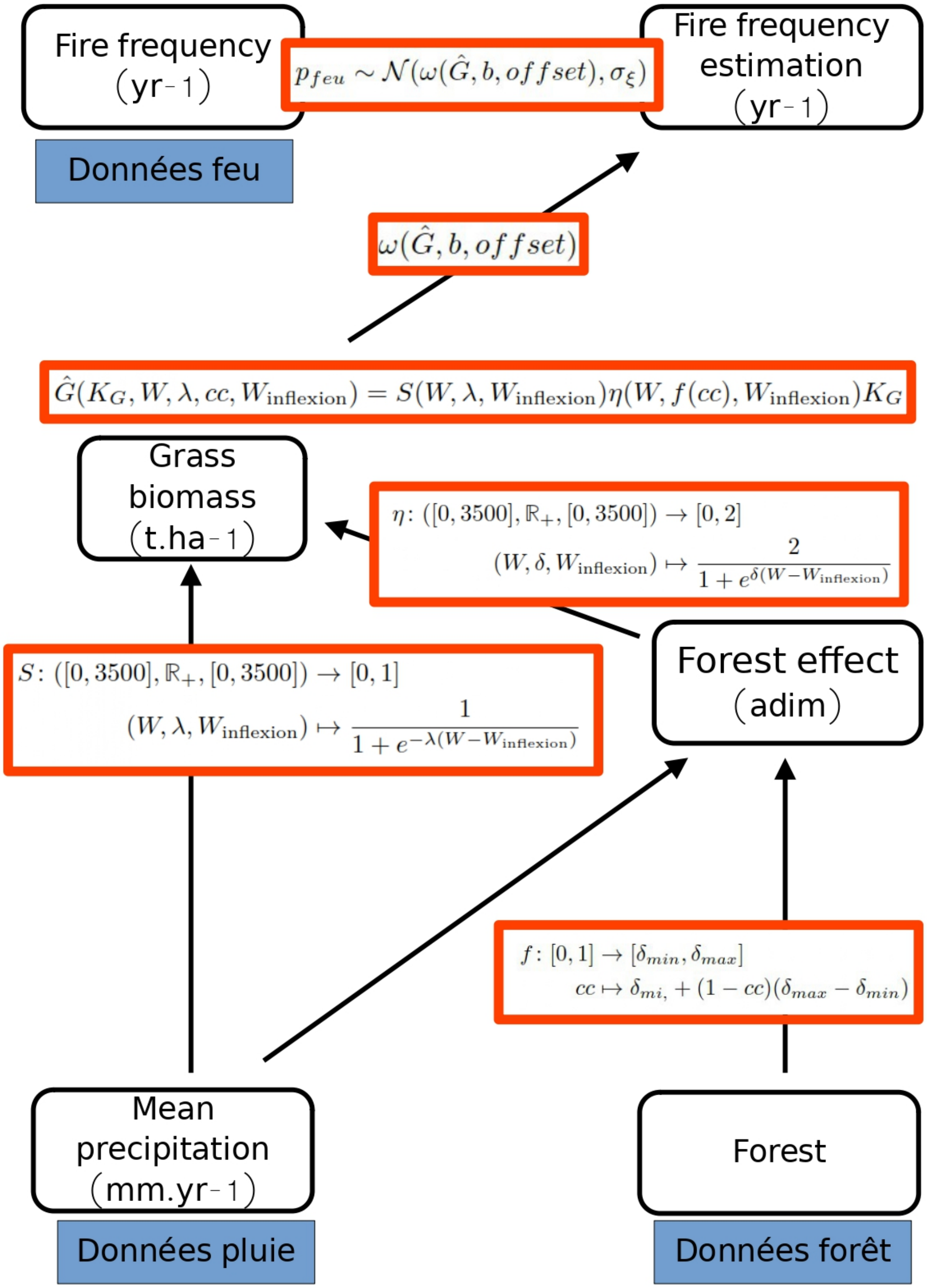

FIGURE 5 – Schéma du modèle complet

A hierarchical Model

```
model{

for (i in 1:N){

  sigmo_pluie[i] = (1/ (1+ exp(-lambda[num_big_cell[i]]*(prec_data[i]-
  pt_inflexion_grass[num_big_cell[i]])) ) )

  canopy_influence[i] = delta_min + cc_data[i]*(delta_max[num_big_cell[i]]-delta_min)

  sigmo_forest_effect[i] = (2/(1+ exp(canopy_influence[i]*(prec_data[i]-
  pt_inflexion_grass[num_big_cell[i]])) ) )

  grassB[i] = K_G_t_f_pluie_max[num_big_cell[i]]*sigmo_pluie[i]*sigmo_forest_effect[i]
}

for (i in 1:N){ fire_data[i] ~ dnorm( 1/( 1 + exp( -grassB[i]*b + offset[num_big_cell[i]] ) ) ,
1/sigma_xi[num_big_cell[i]]**2)T(0,1) }
```

Notes annexes

Cette modélisation-ci oblige le point de bascule entre la facilitation et la compétition (le point d'inflexion de η) à coincïder avec le point d'inflexion de S. Cela me paraît mieux de d'abord tester ce cas simple avant d'éventuellement envisager de décorréler les deux points d'inflexion, ce qui rajouterait des paramètres à inférer et poserait peut-être des difficultés d'interprétation. J'avais choisi cette facilité car cela permettait de garantir aisément que pour tout W, $S(W)\eta(W) \in [0, 1]$.

On a renoncé à ajouter un facteur a dans les sigmoïdes :

$$\frac{1}{1 + e^{-a\lambda(W - W_{\text{inflexion}})}}$$

parce que ça change tout et les interprétations n'ont plus rien à voir.

---

b a assez peu d'importance au final dans l'équation 5, on pourrait le fixer :

```
lines(G,1/( 1 + exp(-0.47*G+3.47)), col= "skyblue") # année 1995 (Wilgen 2000)
lines(G,1/(1 + exp(-0.51*G+2.47)), col = "red")# année 1996 (Wilgen 2000), severe fire weather conditions
# si on élargit un peu
lines(G,1/( 1 + exp(-0.47*G+4.00)), col= "cyan")
lines(G,1/(1 + exp(-0.51*G+2.00)), col = "darkred")
```