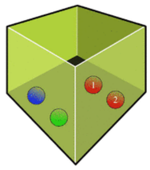
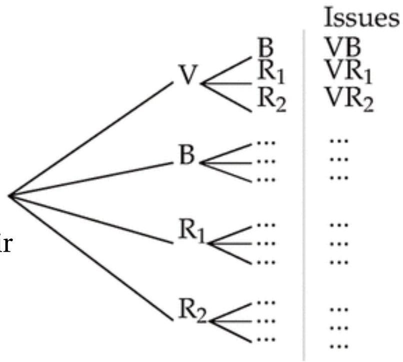
Chapitre 10 Les variables aléatoires

1 Activité



Une urne comprend une boule verte (V), une boule bleue (B) et deux boules rouges (R_1 et R_2).
On tire au hasard une boule, puis une deuxième sans avoir remis la première.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre afin de déterminer toutes les issues possibles.



2. Quelle est la probabilité de chaque issue ?

3. Une boule bleue ne rapporte rien et ne fait rien perdre, une boule verte rapporte 2 points et chaque boule rouge fait perdre 1 point.

On s'intéresse au gain algébrique X (positif ou négatif) que peut obtenir un joueur à ce jeu.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour le gain ?

b. Recopier et compléter le tableau.

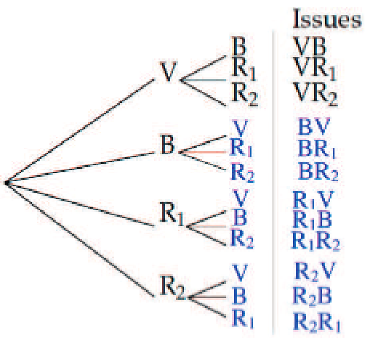
Événement	$(X=-2)$	$(X=-1)$	$(X=1)$	$(X=2)$
Issues favorables				

c. Calculer la probabilité, notée $P(X=-2)$, que le joueur perde 2 euros.

d. Calculer de même $P(X=-1)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

Correction

1) Arbre



2) Il y a 12 issues équiprobables. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{12}$.

3) a) X peut prendre les valeurs : -2 ; -1 ; 1 et 2.

b)

Événement	$(X=-2)$	$(X=-1)$	$(X=1)$	$(X=2)$
Issues favorables	R_1R_2 ; R_2R_1	BR_1 ; BR_2 ; R_1B ; R_2B	VR_1 ; VR_2 ; R_1V ; R_2V	VB BV

c) $P(X=-2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

d) De même, $P(X=-1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; $P(X=1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; $P(X=2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

COMMENTAIRES :
X s'appelle une variable aléatoire : "variable" car elle prend des valeurs numériques qui varient et "aléatoire" car ces valeurs prises dépendent du hasard.

Dans une expérience aléatoire, on cherche d'abord à l'aide de l'énoncé TOUTES les valeurs possibles que peut prendre X.
On veut ensuite trouver avec quelle probabilité chacune de ces valeurs peut être obtenue : on appelle cela le tableau de loi de la variable aléatoire X.
Une fois connu le tableau de loi on peut répondre à n'importe quelle question sur cette expérience et pourquoi pas, parier en toute connaissance de cause.
Dans ce cours, on va formaliser tout ceci :

2 Notion de variable aléatoire réelle

Variable aléatoire discrète

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_m\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Remarque

x est un réel, l'événement "X prend la valeur x" est noté $(X = x)$, il est formé de toutes les issues de Ω ayant pour image x.

Application et méthode :

Enoncé : On lance un dé à 6 faces.
Si on obtient un multiple de 3, on gagne 2 euros.
Sinon, on perd 1 euro.
X est la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le gain obtenu (ce gain peut éventuellement être négatif)

Méthode

On cherche toutes valeurs possibles prises par la variable aléatoire X.
On écrit : X désigne ....
puis : X prend les valeurs ....

Solution
X désigne le gain obtenu à un lancer
X prend les valeurs 1 ou 2
L'évènement $(X = 2)$ est réalisé lorsque l'on obtient un multiple de 3
L'évènement $(X \leq 0)$ est réalisé lorsque le gain est négatif

3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit **la loi de probabilité** de X.

Remarque
La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente à l'aide d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$.

METHODE A TRAVAILLER ⚠

Étudier une variable aléatoire :

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

1. on détermine les valeurs x_i que peut prendre X ;
2. on calcule les probabilités $P(X = x_i)$;
3. on résume les résultats dans un tableau.

Exercice 1 :
Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.
Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.

- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au "gain algébrique".
Déterminer la loi de probabilité de X.

CORRECTION :
L'univers est l'ensemble des 5 jetons.
Les cinq issues sont équiprobables.
Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ;
le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;
le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.
X peut prendre les valeurs -2 ; 2 et 6.
L'événement $(X = -2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X = -2) = \frac{3}{5}$.
L'événement $(X = 2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X = 2) = \frac{1}{5}$.
L'événement $(X = 6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X = 6) = \frac{1}{5}$.
On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau.

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

4 Espérance, variance et écart-type

Dans cette partie, X est une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_r avec les probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_r.

4.1 Espérance d'une variable aléatoire

L'espérance de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par $E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + + p_r x_r$

Remarque :
$E(X)$ peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple :
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée ci-dessous :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

On a $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

Sur un très grand nombre d'expériences, en moyenne, la valeur de X est $\frac{3}{2}$.

Remarque :

Dans un jeu de hasard, l'espérance sera liée au gain potentiel du joueur (ou de lorganisateur).

- Un jeu est équitable si l'espérance du gain est nulle.
- Un jeu est favorable au joueur si l'espérance est positive
- Un jeu est défavorable au joueur si l'espérance est négative

Propriété

Soit X une variable aléatoire et soient a et b des réels. Alors : $E(aX + b) = a \times E(X) + b$.

Démonstration à faire plus tard

METHODE
EXERCICE 2 :

Soit X une variable aléatoire dont on donne la loi de probabilité dans le tableau suivant. Calculer et interpréter $E(X)$.

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Méthode

1. On applique la formule du cours en remplaçant les x_i par les valeurs prises par la variable aléatoire X et les p_i par les probabilités correspondantes.
2. On interprète le résultat à l'aide d'une moyenne en se rappelant que cela est valable uniquement pour un très grand nombre d'expériences identiques réalisées.

Correction :
$E(X) = 2 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,3 = 1,3$
Sur un très grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire, la valeur moyenne de X est $1,3$.

4.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

La **variance de** X est le réel positif, noté $Var(X)$, défini par $Var(X) = \sum p_i(x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + + p_r(x_r - E(X))^2$.

L'**écart-type de** X est le nombre positif, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = Var(X)$.

Remarque :
L'écart-type de X est la moyenne quadratique des écarts des valeurs avec lespérance.

Exemple :
On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent.
On a :
$Var(X) = \frac{1}{6} \times (-2-\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} \times (1-\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{3} \times (4-\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{6} \times (-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3} \times (2\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{6} \times \frac{49}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} = \frac{17}{4}$
et
$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$
Exemple :
EXERCICE 3 :

Soit X une variable aléatoire dont on donne la loi de probabilité dans le tableau suivant. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Méthode :

- On applique la formule du cours en remplaçant les x_i par les valeurs prises par la variable aléatoire X et les p_i par les probabilités correspondantes.
- L'écart-type s'obtient simplement en calculant la racine carrée de la variance

Correction :
On a vu précédemment que $E(X) = 1,3$.
On a alors :
$Var(X) = 0,2 \times (21,3)^2 + 0,5 \times (11,3)^2 + 0,3 \times (41,3)^2 = 0,2 \times (3,3)^2 + 0,5 \times 0,32 + 0,3 \times 2,72 = 0,2 \times 10,89 + 0,5 \times 0,09 + 0,3 \times 7,29 = 2,178 + 0,045 + 2,187 = 4,41$
Doù $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4,41} = 2,1$

5 Simulation d'une variable aléatoire

Un jeu consiste à lancer n fois deux dés parfaitement équilibrés.
Lorsqu'on obtient un double, on gagne 5 euros, sinon on perd 1 euro.

```
from random import randint
    n=int(input("Quel est le nombre de lancers?"))
    G=0
    for i in range(n):
         R=randint(1,6)
         S=randint(1,6)
         if R==S:
            G=G+5
         else:
            G=G-1
print(G/n)
```

1. On considère l'algorithme ci-dessus.

  a. Qu'affiche cet algorithme?

  b. Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel.
  Effectuer plusieurs simulations pour $n = 10$; $n = 50$ et $n = 100$. Que constate-t-on?

2. Recopier et compléter le tableau à double entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	$+5$	-1				
2						
3						
4						
5						
6						

3. Calculer la probabilité p de perdre 1 euro, puis la probabilité q de gagner 5 euros à ce jeu.

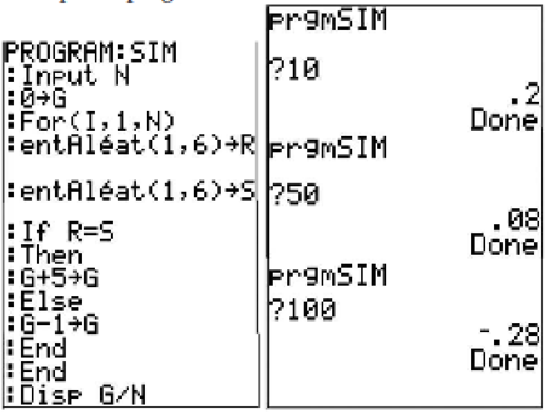
4. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain de ce jeu.

- Quelles sont les valeurs prises par X?
- Donner le tableau de loi de la variable aléatoire X (vous pouvez vous aider de la question précédente)
- Calculer l'espérance de X
- Que pensez-vous du gain moyen que peut espérer le joueur sur un grand nombre de parties? Ce jeu favorise-t-il le joueur ou l'organisateur?

Correction :

1) a) Cet algorithme simule n lancers de 2 dés et calcule le gain moyen algébrique obtenu par partie.

b) Exemple de programme sur TI.



On constate que le gain moyen peut être négatif ou positif. Lorsqu'on répète un grand nombre de simulations, le gain moyen algébrique semble se rappocher de 0.

2)

	1	2	3	4	5	6
1	+5	−1	−1	−1	−1	−1
2	−1	+5	−1	−1	−1	−1
3	−1	−1	+5	−1	−1	−1
4	−1	−1	−1	+5	−1	−1
5	−1	−1	−1	−1	+5	−1
6	−1	−1	−1	−1	−1	+5

3) $p = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$ et $q = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

X prend les valeurs 5 ou -1.

$P(X=5) = \dfrac{cas favorables}{cas possibles} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$P(X=-1) = \dfrac{cas favorables}{cas possibles} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

Loi de probabilité :

x_i	5	-1
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{5}{6}$

Calcul de l'espérance :

$E(X) = 5 \times \dfrac{1}{6} + (-1) \times \dfrac{5}{6} = 0$

L'espérance est nulle, le jeu est donc équitable (le jeu ne favorise ni le joueur ni l'organisateur)