ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Réseaux, information et communication

Canal bruité
Entropie conditionnelle
Information mutuelle
Capacité d'un canal

Yves Roggeman

FACULTÉ DES SCIENCES - DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Boulevard du Triomphe - CP212
B-1050 Bruxelles (Belgium)
Tél. : +32-2-650 5598
E-mail : `yves.roggeman@ulb.ac.be`

Année 2015–2016

yves.roggeman@ulb.ac.be

Information croisée et conditionnelle

- **Rappel : probabilités**
  - **Distributions multivariées : $\mathbb{P}[X, Y]$**
    - Corrélation, indépendance…
  - **Probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}[X \mid Y]$**
    - Th. Bayes (XVIII^e) : $\mathbb{P}[X \wedge Y] = \mathbb{P}[X \mid Y] \,.\, \mathbb{P}[Y]$
- **Idem pour information et entropie ?**
  - **$I(S, T)$, $I(S \mid T)$…**
  - **$H(S, T)$, $H(S \mid T)$…**
  - **Pas immédiat, si on veut garder le sens**

Canal bruité : problème

- **Distinguer source et destination**
  - **Source émet**
    - $S = \{s_i\}$ et $\mathbb{P}[s_i] = p_i$, $|S| = q$
    - Code $K(s_i) = w_i \in C^*$, $|w_i| = \ell_i$, $|C| = r$
  - **Destination reçoit**
    - $c_{i1}c_{i2}\ldots c_{in} = ? \neq w_i$, $n = ? \neq \ell_i$
    - $\Rightarrow$ Comment décoder, retrouver s_i
- **Simplifier $\Rightarrow$ Modèle = canal bruité**
  - **Se concentrer sur la transmission**

ULB

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

yves.roggeman@ulb.ac.be

Canal bruité : modèle

- **Données**
  - **Input :** $X = \{x_i\}, |X| = m$
  - **Output :** $Y = \{y_j\}, |Y| = n$
  - **Transfert :** $\mathbb{P}[y_j \mid x_i]$ = recevoir y_j si x_i émis
    - $\Rightarrow$ induit proba sur y_j : $\forall i : \sum_j \mathbb{P}[y_j \mid x_i] = 1$
    - Markovien (oubli du passé, stable)
- **Si distribution sur l'input ($\mathbb{P}[x_i]$) :**
  - **Distr. liée :** $\mathbb{P}[x_i , y_j] = \mathbb{P}[x_i] \cdot \mathbb{P}[y_j \mid x_i]$
  - **Distr. marginale :** $\mathbb{P}[y_j] = \sum_i \mathbb{P}[x_i , y_j]$
  - **Donc :** $\mathbb{P}[x_i \mid y_j] = \mathbb{P}[x_i , y_j] / \mathbb{P}[y_j]$

Entropie conditionnelle et croisée

- **Conditionnelle : en 2 étapes**
  - $\forall j \; H(X \mid y_j) = - \sum_i \mathbb{P}[x_i \mid y_j] \log \mathbb{P}[x_i \mid y_j]$
  - $H(X \mid Y) = \sum_j \mathbb{P}[y_j] \, H(X \mid y_j)$
    $= - \sum_i \sum_j \mathbb{P}[x_i, y_j] \log \mathbb{P}[x_i \mid y_j]$
  - Et symétrique : $H(Y \mid X)$
- **Croisée ou jointe :**
  - $H(X, Y) = - \sum_i \sum_j \mathbb{P}[x_i, y_j] \log \mathbb{P}[x_i, y_j]$
    $= H(X) + H(Y \mid X)$
    $= H(Y) + H(X \mid Y)$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES
yves.roggeman@ulb.ac.be

Information mutuelle

- **Idée : se déduit de l'entropie**
  - $\mathbb{P}[x_i]$: probabilité ***a priori*** de l'input x_i
  - $\mathbb{P}[x_i \mid y_j]$: probabilité x_i émis si y_j reçu
    $\Rightarrow$ probabilité ***a posteriori*** de x_i
  - Gain d'information = info mutuelle
- **Définition**
  - $I(x_i) = -\log \mathbb{P}[x_i] \Rightarrow I(x_i \mid y_j) = -\log \mathbb{P}[x_i \mid y_j]$
  - $I(x_i, y_j) = I(x_i) - I(x_i \mid y_j) \leq I(x_i)$
  - $I(X, Y) = \sum_i \sum_j \mathbb{P}[x_i, y_j] \log \mathbb{P}[x_i, y_j] / (\mathbb{P}[x_i] \cdot \mathbb{P}[y_j])$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES
yves.roggeman@ulb.ac.be

yves.roggeman@ulb.ac.be

Propriétés

- Information
  - $0 \leq I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$
    $= H(X) - H(X \mid Y)$
    $= H(Y) - H(Y \mid X)$
- Entropie
  - $0 \leq H(X \mid Y) \leq H(X)$
    $0 \leq H(Y \mid X) \leq H(Y)$
  - $0 \leq H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X, Y)$
    $\leq H(X) + H(Y)$

Capacité d'un canal

- **Définition**
  - **Idée : trouver le meilleur input**
    Pour minimiser les pertes, les erreurs
  - $\Rightarrow C = \mathrm{Max}_{\mathbb{P}[X]}\, I(X, Y)$
  - **Propriété : ne dépend que de $\mathbb{P}[x_i, y_j]$**
- **Cas particulier : canal binaire symétrique**
  - **Définition $\mathbb{P}[\mathrm{swap}] = p$**
  - **Théorème : $C = 1 - H(p, 1\text{-}p)$**

yves.roggeman@ulb.ac.be