`PROJ401` Fonctions continues nulle part dérivables et le Théorème de Baire

Pardo Aurélien

Avril 2021

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Histoire et Exemples

Jusqu'au début du XIX même siècle tous les mathématiciens étaient d'accord avec le fait qu'une fonction continue était dérivable, à part peut-être en quelques points [5] .

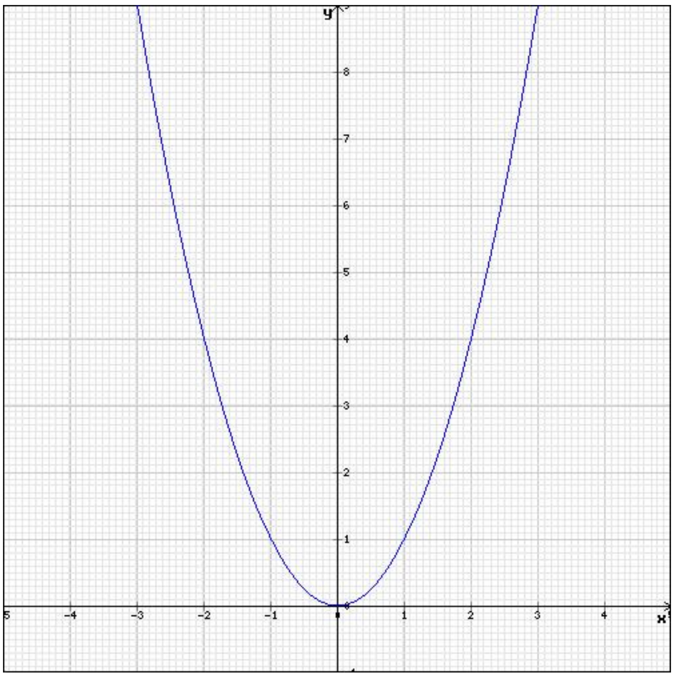

FIGURE 1.1 – Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ ($f(x) = x^2$)

Cependant durant ce même siècle les recherches s'intensifient et plusieurs exemples de fonctions continues nulle part dérivables ou dérivables en quelques points seulement ("monstre mathématique" selon *Henri Poincaré*) vont être explicitées. On peut notamment citer la fonction de Cellérier en 1860, de Riemann en 1861 et surtout la fonction de Weierstrass en 1872 (la première à être publiée) :

$$C(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k x), x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

la fonction n'est dérivable en aucun point pour a un entier pair très grand.

$$R(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x), x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

la fonction n'est dérivable en x que lorsque $x = \frac{a\pi}{b}$ où a et b sont des entiers impairs.

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x), x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

la fonction n'est dérivable en aucun point pour $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a < 1, b \in 4\mathbb{N}$ et $ab > 2\pi + 1$.

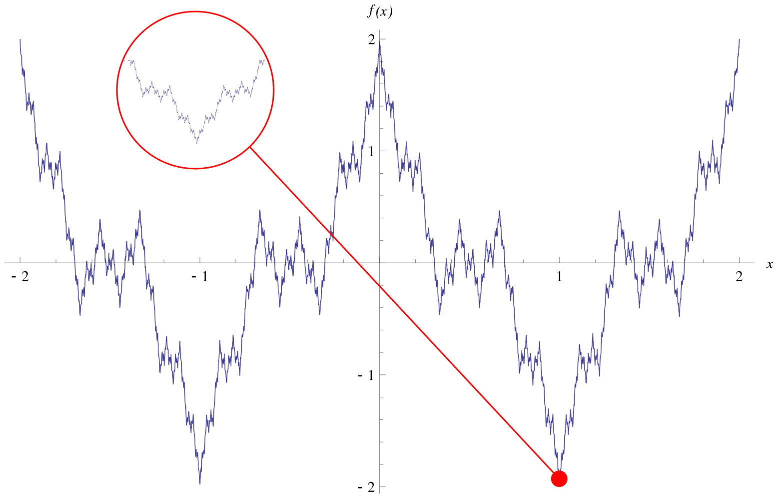

FIGURE 1.2 – Exemple d'une fonction continue nulle part dérivable. Fonction de Weierstrass

Par la suite d'autres types de fonctions continues nulle part dérivables vont être découverts comme par exemple la courbe de Takagi en 1903 autrement appelé la courbe du blanc-manger mais aussi les fonctions de Wen datant de 2002.

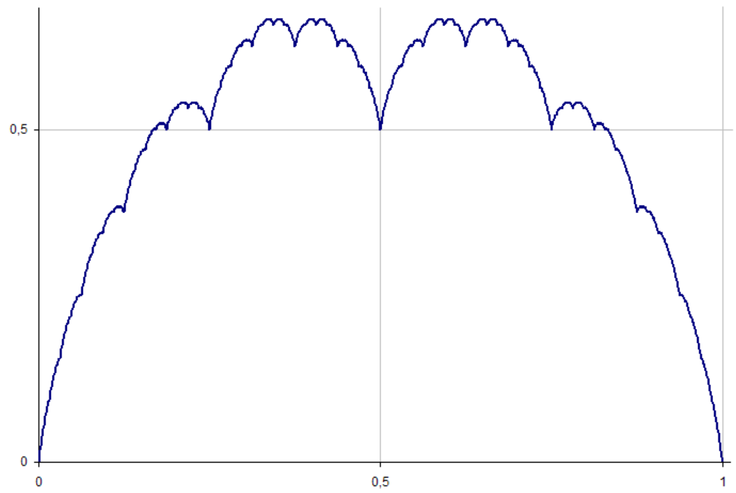

FIGURE 1.3 – Fonction de Takagi

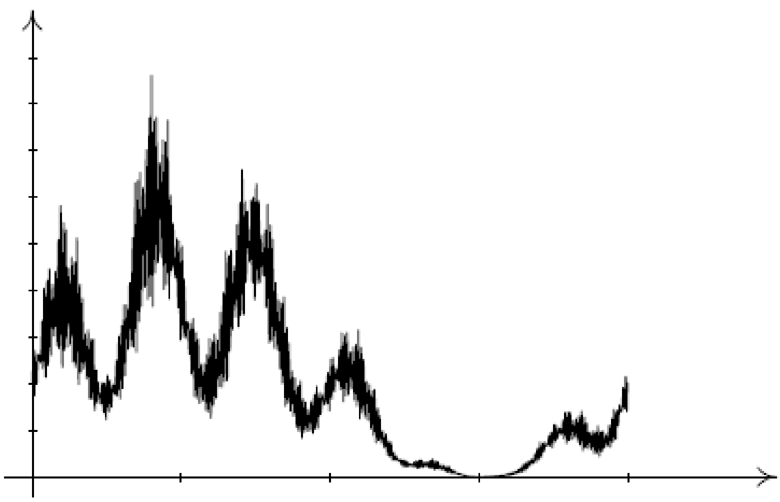

FIGURE 1.4 – Fonction de Wen

Chapitre 2

Fonction de Weierstrass

La fonction de Weierstrass, provenant du mathématicien du même nom, est un exemple de fonctions continues nulle part dérivables que nous proposons de traiter par la suite. Après une rapide présentation de Karl Weierstrass, nous allons faire la preuve d'une telle fonction puis la modéliser graphiquement.

2.1 Karl Weierstrass

Karl Weierstrass est un grand mathématicien allemand du XIX ème siècle (1815-1897) qui a fortement contribué à l'analyse moderne des mathématiques. Il a notamment éclairci certaines définitions considérées comme ambiguës et donne une nouvelle interprétation de l'analyse. Sa contribution mathématique est très importante aux points que plusieurs théorèmes portent son nom (Théorème de Bolzano-Weierstrass, Théorème de Lindemann-Weierstrass etc). Il est le premier à exposer, à l'académie royale des sciences de Berlin, l'exemple d'une fonction continue nulle part dérivable. Au cours de sa vie il va obtenir de nombreuses distinctions personnelles tels que la médaille Cothenius et Médaille Helmholtz en 1887 et la médaille Copley en 1895 la médaille la plus prestigieuse décernée par la Royal Society [3].

2.2 Démonstration

2.2.1 Définition

Rappel de l'expression de la fonction de Weierstrass :

$$W(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x), x \in \mathbb{R}$$

2.2.2 Continuité

Supposons que $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a < 1, b \in 4\mathbb{N}$ et $ab > 2\pi + 1$. Tout d'abord, on montre que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n \cos(b^n \pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $|a^n \cos(b^n \pi x)| \leqslant |a^n| = a^n$, car $|\cos(b^n \pi x)| \leqslant 1$. On a une majoration uniforme en x, de plus $\sum a^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $|a^n| < 1$.

Donc $\sum a^n \cos(b^n \pi x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Ainsi d'après le théorème de continuité des séries de fonctions f est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Non-dérivabilité

On montre maintenant que cette fonction est continue partout mais nulle part dérivable [2]. Pour cela, on va chercher à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} |\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| = \infty$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ avec $h = \frac{1}{b^p}$ où p est un entier.

On note $\tau_{f(x)}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Donc en reprenant l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\tau_{f(x)}(h) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h} \\ &= \sum_{n=0}^{p} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h}\end{aligned}$$

Car $b^n h = b^n b^{-p} = b^{n-p}$ et pour $n > p$ on a b^{n-p} un entier pair.
En reprenant l'expression précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\tau_{f(x)}(h) &= S_{p-1}(h) + a^p \frac{\cos(b^p\pi(x+h)) - \cos(b^p\pi x)}{h} \\ &= S_{p-1}(h) + a^p b^p (\cos(b^p\pi(x+h)) - \cos(b^p\pi x)) \\ &= S_{p-1}(h) + a^p b^p (\cos(b^p\pi x + \pi) - \cos(b^p\pi x)) \\ &= S_{p-1}(h) - 2a^p b^p \cos(b^p\pi x)\end{aligned}$$

Où,

$$S_{p-1}(h) = \sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h}$$

On reprend le même principe pour $\frac{h}{2}$.

$$\begin{aligned}\tau_{f(x)}(\frac{h}{2}) &= S_{p-1}(\frac{h}{2}) + a^p \frac{\cos(b^p\pi(x+\frac{h}{2})) - \cos(b^p\pi x)}{\frac{h}{2}} \\ &= S_{p-1}(\frac{h}{2}) + 2a^p b^p (\cos(b^p\pi(x+\frac{h}{2})) - \cos(b^p\pi x)) \\ &= S_{p-1}(\frac{h}{2}) + 2a^p b^p (\cos(b^p\pi x + \frac{\pi}{2}) - \cos(b^p\pi x)) \\ &= S_{p-1}(\frac{h}{2}) + 2a^p b^p (-\sin(b^p\pi x) - \cos(b^p\pi x)) \\ &= S_{p-1}(\frac{h}{2}) - 2\sqrt{2}a^p b^p \sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue on a :

$$|\tau_{f(x)}(h)| = |S_{p-1}(h) - 2a^p b^p \cos(b^p\pi x)|$$

$$|\tau_{f(x)}(\frac{h}{2})| = |S_{p-1}(\frac{h}{2}) - 2\sqrt{2}a^p b^p \sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})|$$

En appliquant l'inégalité triangulaire les expressions ci-dessus deviennent :

$$|\tau_{f(x)}(h)| \geq |2a^p b^p \cos(b^p\pi x)| - |S_{p-1}(h)|$$

$$|\tau_{f(x)}(\frac{h}{2})| \geq |2\sqrt{2}a^p b^p \sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})| - |S_{p-1}(\frac{h}{2})|$$

Or,

$$\begin{aligned}
|S_{p-1}(h)| &= \left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h}\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{-2\sin(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{2})\sin(\frac{b^n h\pi}{2})}{h}\right| \\
&= 2\left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\sin(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{2})\sin(\frac{b^n h\pi}{2})}{h}\right| \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{p-1} a^n \left|\frac{\sin(\frac{b^n h\pi}{2})}{h}\right|
\end{aligned}$$

De plus, $\forall x > 0, |\sin x| \leq x$. Donc

$$|S_{p-1}(h)| \leq 2\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\frac{b^n h\pi}{2}}{h} = \pi \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^n = \pi\frac{a^p b^p - 1}{ab-1} < \pi\frac{a^p b^p}{ab-1}$$

Sachant que $ab \geq 2\pi + 1 (ab - 1 \geq 2\pi)$. On déduit finalement que,

$$|S_{p-1}(h)| \leq \frac{a^p b^p}{2}$$

De la même manière on a,

$$\begin{aligned}
|S_{p-1}(\frac{h}{2})| &= \left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\cos(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{2}) - \cos(b^n\pi x)}{\frac{h}{2}}\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{-2\sin(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{4})\sin(\frac{b^n h\pi}{4})}{\frac{h}{2}}\right| \\
&= 2\left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\sin(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{4})\sin(\frac{b^n h\pi}{4})}{\frac{h}{2}}\right| \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{p-1} a^n \left|\frac{\sin(\frac{b^n h\pi}{4})}{\frac{h}{2}}\right|
\end{aligned}$$

Et on peut écrire,

$$|S_{p-1}(h)| \leq 2\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\frac{b^n h\pi}{4}}{\frac{h}{2}} = \pi \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^n$$

On retrouve finalement que,

$$|S_{p-1}(\frac{h}{2})| \leq \frac{a^p b^p}{2}$$

Ensuite on montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $|\cos(b^p\pi x)| \geq \sin(\frac{\pi}{8}) \geq 0$ ou $|\sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})| \geq \sin(\frac{\pi}{8}) \geq 0$.

En effet, $\sin(\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{3\pi}{8})$.

Or avoir $|\cos(b^p\pi x)| \leq \sin(\frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow b^p\pi x \in [\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}] \cup [\frac{-5\pi}{8}, \frac{-3\pi}{8}]$ donc $b^p\pi x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}] \cup [\frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}]$ c'est à dire $|\sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})| \geq \sin(\frac{\pi}{8})$ et inversement on peut montrer que si $|\sin(b^p\pi x + \frac{\pi}{4})| \leq \sin(\frac{\pi}{8})$ alors on a $|\cos(b^p\pi x)| \geq \sin(\frac{\pi}{8})$.

En reprenant nos précédentes équations, on a soit

$$|\tau_{f(x)}(h)| \geq 2a^p b^p \sin(\frac{\pi}{8}) - \frac{a^p b^p}{2} = 2a^p b^p(\sin(\frac{\pi}{8}) - \frac{1}{4}) \geq 0$$

soit,

$$|\tau_{f(x)}(\frac{h}{2})| \geq 2\sqrt{2}a^p b^p \sin(\frac{\pi}{8}) - \frac{a^p b^p}{2} = 2\sqrt{2}a^p b^p (\sin(\frac{\pi}{8}) - \frac{1}{4\sqrt{2}}) \geq 0$$

Sachant que,

$$\lim_{p \to +\infty} a^p b^p = +\infty$$

On a,

$$\limsup_{h \to 0} |\, \tau_{f(x)}(h)| = +\infty$$

Donc f n'est pas continue en x.

On a donc montré que la fonction de Weierstrass est une fonction continue nulle part dérivable.

2.3 Représentation graphique

On peut ainsi représenter graphiquement différentes fonctions de Weierstrass à l'aide du code suivant en python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin
from math import cos
from math import pi

# pour créer l'animation:
# convert -delay 100 -loop 0 M5P5*.png M5P5_animation.gif

def draw_result(lst_x, lst_y, title):
  plt.plot(lst_x, lst_y, '-b')

  plt.xlabel("x")
  plt.legend(loc='center')
  plt.title(title)
  plt.grid()
  plt.savefig(title+".png")

  plt.show(block=False)
  plt.close()

PROFONDEUR = 1000
LIMITE = 1e-5 # pour limiter les calculs
def R(x, a, b):
  Rx = 0

  for n in range(0, PROFONDEUR):
    an = pow(a, n) * cos(pow(b,n) * pi * x)
    Rx += an
    if abs(an) < LIMITE:
      break

  return Rx


def Plot(xmin, xmax, title, a, b):
  if (a*b <= 2*pi + 1) or (b < 0) or (b%4 != 0) or (a<0) or (a>1):
    print("Invalide ! a=" + str(a) + " b=" + str(b))
    exit(666)
```

```
NBPTS = 1000
#xincr = 0.000001
xincr = (xmax-xmin) / (NBPTS-1)
x = xmin

xs = []
ys = []
pts = 0
while x <= xmax:
  y = R(x, a, b)
  xs.append(x)
  ys.append(y)
  x += xincr
  pts += 1

draw_result(xs, ys, title)
```

On obtient les graphiques suivants :

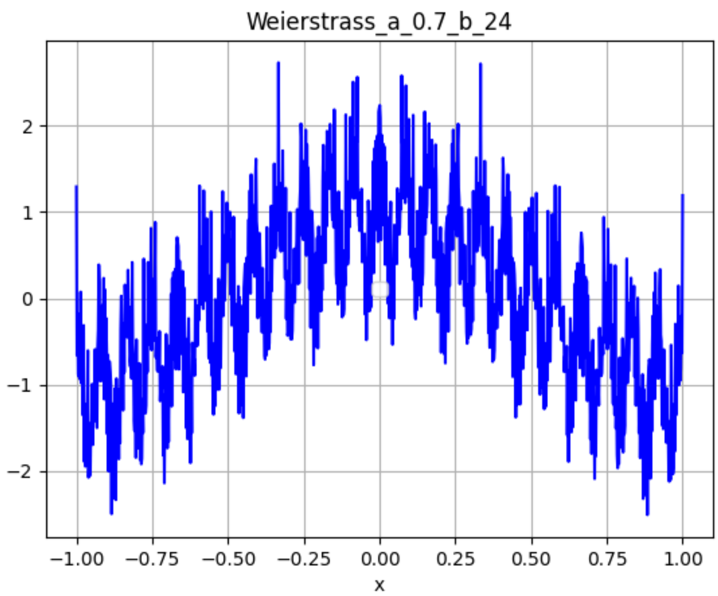

FIGURE 2.1 – Fonction de Weierstrass sur l'intervalle [-1,1]

On peut faire un zoom sur un intervalle plus petit :

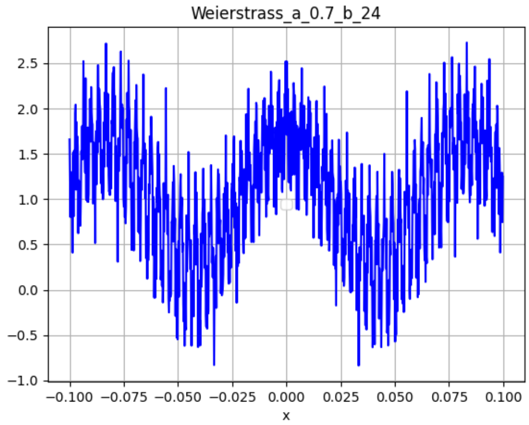

Figure 2.2 – Fonction de Weierstrass sur l'intervalle [-0.1,0.1]

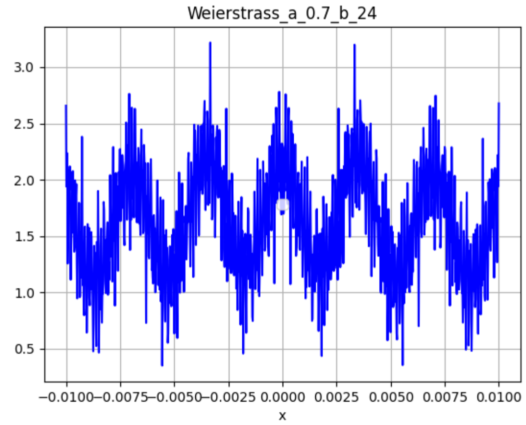

Figure 2.3 – Fonction de Weierstrass sur l'intervalle [-0.01,0.01]

On peut aussi faire varier les paramètres. On remarque que "a" joue sur l'amplitude et "b" joue sur la fréquence :

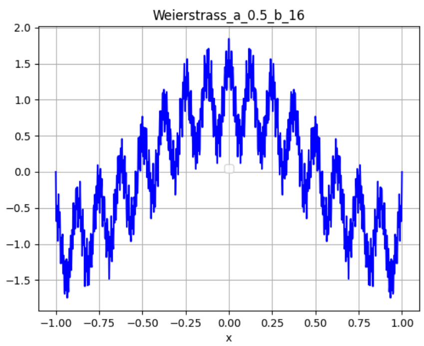

Figure 2.4 – Fonction de Weierstrass a=0.5 b=16

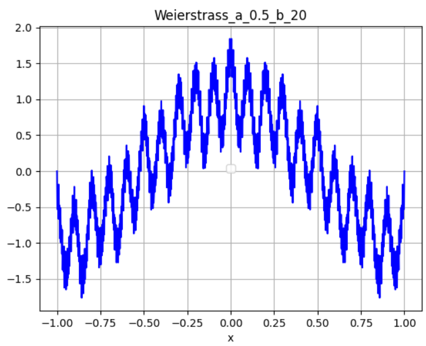

Figure 2.5 – Fonction de Weierstrass a=0.5 b=20

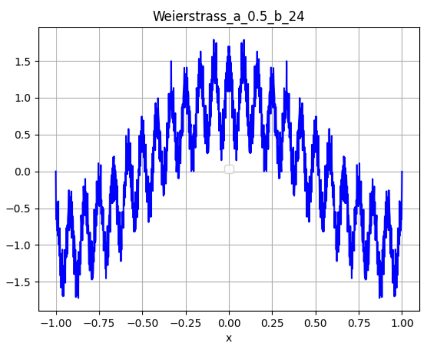

Figure 2.6 – Fonction de Weierstrass a=0.5 b=24

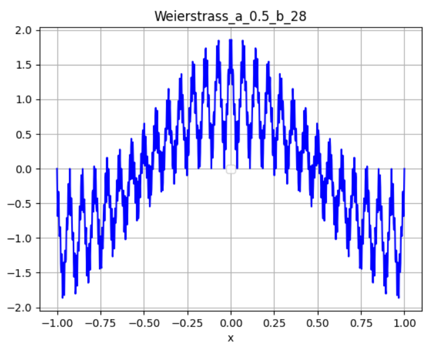

Figure 2.7 – Fonction de Weierstrass a=0.5 b=28

Chapitre 3

Théorème de Baire et Application

Dans ce chapitre on va expliciter le théorème de Baire et les éléments essentiels à sa compréhension comme le théorème des fermés emboîtés afin de montrer que l'on peut utiliser le théorème de Baire pour arriver à un résultat très intéressant sur les fonctions continues nulle part dérivables [4] .

3.1 René Baire

René Baire est un mathématicien français du XIX ème siècle et XX ème siècle (1874-1932). Il est connue pour avoir contribué dans le domaine de l'analyse en développant notamment une théorie des ensembles et d'analyse pour arriver au théorème Baire. Plusieurs propriétés porte son nom dans le domaine de la topologie et il est aussi connu pour ses recherches sur la continuité et les nombres irrationnels à travers son oeuvre "Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité" en 1905. A titre personnel il est lauréat du prix Francoeur et Chevalier de la Légion d'honneur.

3.2 Éléments de topologie

Pour bien comprendre les théorèmes qui vont suivre il est important de définir certains éléments de topologie [2].

(E, d) est un *espace métrique* si E est un ensemble et d une distance sur E qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\, x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{3.1}$$

$$\forall\, x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x) \tag{3.2}$$

$$\forall\, x, y \in E,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{3.3}$$

(E, d) est un *espace métrique complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E.
On rappelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E :
si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ si $q \geq p \geq N$ alors $d(x_q, x_p) \leq \epsilon$.

(E, d) est un *espace métrique de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E c'est à dire : pour $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts denses de $E, \cap(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E.
On rappelle que O_n est dense dans E si et seulement si :
$\forall x \in E \quad \exists\, (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite de O_n tel que $a_m \to x$.

3.3 Théorème des fermés emboîtés

Avant d'établir la démonstration du théorème de Baire, il est nécessaire d'expliciter le théorème des fermés emboîtés.

3.3.1 Définition

Théorème 3.3.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet alors pour toute suite $(\bar{B_n})_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante de boules fermées de rayon R_n avec $R_n \to 0$, $\cap\, \bar{B_n} = \{x\}$.*

Où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{B_n} = \{\, x \mid d(x, centre\ B_n) \leq rayon\ B_n\}$

3.3.2 Preuve

Soit (E,d) un espace métrique complet et $(\bar{B_n})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de boules fermées de rayon R_n avec $R_n \to 0$.

On va montrer :

1. $\cap \bar{B_n}$ est non vide
2. Si $x, y \in \cap \bar{B_n}$ alors $x = y$

On montre facilement le deuxième point :
En effet $\forall n \in \mathbb{N}\, x, y \in \bar{B_n}$ donc $d(x,y) \leq 2R_n$. Or, $\lim_{n\to+\infty} 2R_n = 0$ donc $x = y$.

Pour montrer le premier point, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \bar{B_n}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E.
On doit montrer :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors elle converge car E est complet et on note x la limite
2. $x \in \cap \bar{B_n}$

Tout d'abord, on montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soit $\epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq 2R_n \leq \epsilon$. Pour $q > p > N$, x_p et $x_q \in B_N$ donc $d(x_p, x_q) \leq 2R_N < \epsilon$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Sachant que E est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c'est à dire :
$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad d(x, x_n) < 2R_n < \epsilon$ donc $x \in \bar{B_N}$.

On montre ensuite que $x \in \cap \bar{B_n}$.
Soit N fixé, $(x_n)_{n\geq N}$ est une suite de la boule B_N.
Or, on sait que B_N est fermée donc $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ appartient à B_N donc $x \in \cap \bar{B_n}$.

On a donc fait la preuve du théorème des fermés emboîtés que l'on va réutiliser par la suite.

3.4 Théorème de Baire

On s'intéresse désormais au théorème de Baire dont voici la définition puis la preuve.

3.4.1 Définition

Théorème 3.4.1 *Si (E,d) est un espace métrique complet alors (E,d) est un espace de Baire.*

3.4.2 Preuve

Soit (E,d) un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts denses de E. On veut montrer que $\cap(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E. C'est à dire que $\forall x \in E$, $\exists$ une suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\cap(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. C'est à dire que pour tout ouvert non vide V de E : $V \cap (\cap(O_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$.

Soit V un ouvert non vide de E, on cherche à montrer $V \cap (\cap(O_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$.
L'idée pour démontrer cela est de construire une suite de boules fermées $(\bar{B_n})_{n\in\mathbf{N}}$ de rayon $R_n \to 0$ et tel que $\bar{B_0} \subseteq O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bar{B_{n+1}} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B_n}$. Où $\mathring{B_n}$ est une boule ouverte .

On prend comme rayon $R_n = \frac{1}{2^n}$ et on a bien que $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Construction des $\bar{B_n}$ par récurrence :

O_0 est un ouvert dense de E et V est un ouvert non vide donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$, donc $\exists\, a \in O_0 \cap V$.
$O_0 \cap V$ est un ouvert comme intersection d'ouverts donc $\exists\, R_0 > 0$ tel que $\bar{B}(a, R_0) \subseteq O_0 \cap V$. Où $\bar{B}(a, R_0) = \{\, x \in E \mid d(a,x) \leq R_0\}$ que l'on note $\bar{B}_0$.

On suppose construits $\bar{B}_0, .., \bar{B}_n$ et on veut construire B_{n+1} :

Or on sait que O_{n+1} est un ouvert dense et $\mathring{B_n} = \{\, x \in E \mid d(centre\ de\ B_n, x) \leq R_n\}$ est un ouvert. Donc $O_{n+1} \cap \mathring{B_n} \neq \emptyset$.

Ainsi $\exists\, a_{n+1} \in O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ donc $\exists\, R_{n+1} > 0$ tel que $\bar{B}(a_{n+1}, R_{n+1})$ que l'on note $\bar{B}_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$.

Or $(\bar{B}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de boules fermées non vide de E dont le rayon tend vers 0 et E est complet donc $\cap \bar{B}_n = x$ par le théorème des fermés emboîtés.

De plus , $\forall n \in \mathbb{N}\ \bar{B}_n \subset O_n$ donc $x \in O_n$, donc $x \in \cap O_n$. Sachant que $x \in B_0 \subseteq O_0 \cap V$ on en déduit que $x \in V$. On en conclut que $V\ \cap (\cap (O_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$

On a donc bien démontré le théorème de Baire .

3.5 Application : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues

On va maintenant voir que l'on peut utiliser le théorème de Baire pour montrer la densité des fonctions continues nulle part dérivables.

Pour cela je m'appuie sur l'article [1].

On note C l'espace vectoriel des fonctions continus sur l'intervalle $I = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. $(C, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach c'est à dire un espace vectoriel complet pour la distance issue de sa norme.

Pour $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$U_{\epsilon,n} = \left\{ f \in C \mid \forall\, x \in I,\ \exists\, y \in I, 0 < |y - x| < \epsilon,\ |\frac{f(y) - f(x)}{y - x}| > n \right\}$$

C'est à dire, on regarde les fonctions continues sur I, tel que pour tout $x \in I$, il existe un $y \in I$ à une distance au plus de ϵ tel que la pente de la corde est supérieure à n .

On montre que :

1. $U_{\epsilon,n}$ est un ouvert de C.
2. $U_{\epsilon,n}$ est dense dans C.
3. $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$ est une partie dense de C.
4. Tout élément de R est une fonction continue nulle part dérivable.

Tout d'abord, montrer que $U_{\epsilon,n}$ est un ouvert de C revient à montrer que son complémentaire $F_{\epsilon,n}$ est fermé. On a

$$F_{\epsilon,n} = \left\{ f \in C \mid \exists\, x \in I,\ \forall\, y \in I, 0 < |y - x| < \epsilon,\ |\frac{f(y) - f(x)}{y - x}| \leq n \right\}$$

On considère ensuite une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $F_{\epsilon,n}$ qui converge vers $f \in C$. Il s'agit de montrer que $f \in F_{\epsilon,n}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $f_p \in F_{\epsilon,n}$ donc

$$\exists\, x_p \in I, \forall\, y \in I, |y - x_p| < \epsilon, \quad |f_p(y) - f_p(x_p)| \leq n|y - x_p|.$$

Or, on peut extraire une sous-suite convergente de (x_p) notée $(x_{\psi(p)})$, et on appelle x sa limite. Soit $y \in I$ tel que $0 < |y - x| < \epsilon$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < |y - x_{\psi(p)}| < \epsilon$ pour tout $p \geq N$.

On a donc,

$$\forall p \geq N, \quad |f_{\psi(p)}(y) - f_{\psi(p)}(x_{\psi(p)})| \leq n|y - x_{\psi(p)}|.$$

On sait $f \in C$ et que (f_p) tend vers f pour $\|.\|_\infty$ donc $(f_{\psi(p)}(x_{\psi(p)}))$ tend vers $f(x)$. Si on reprends l'équation ci-dessus et que l'on fait tendre p vers l'infini, on déduit que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$. Donc $f \in F_{\epsilon,n}$, $F_{\epsilon,n}$ est fermé de C donc $U_{\epsilon,n}$ est ouvert de C.

On montre ensuite que $U_{\epsilon,n}$ est dense dans C.

Soit $f \in C$ et $\delta > 0$. On veut trouver $g \in U_{\epsilon,n}$ tel que $\|f - g\|_\infty \leq \delta$. On cherche g de la forme $g(x) = f(x) + \delta \sin{(Nx)}$.

f est uniformément continue sur I. Alors

$$\exists\, \alpha \in]0, \epsilon[, \forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| < \alpha, \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{4}$$

On choisit N de sorte que $N > 2\pi$ tel que $\frac{4\pi}{N} < \alpha$ et $\frac{\delta N}{8\pi} > n$.

Soit $x \in I$, alors $\frac{2\pi}{N} \leq |x - y| \leq \frac{4\pi}{N}$ donc $|x - y| < \alpha$ donc $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| < \frac{\delta}{4} \cdot \frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi}$. De plus, $|\frac{\delta \sin{(Nx)} - \delta \sin{(Ny)}}{x-y}| \geq \frac{\delta}{|x-y|} \geq \frac{\delta N}{4\pi}$.

Donc $|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}| > \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} = \frac{\delta N}{8\pi} > n$, avec $0 < |x - y| < \alpha < \epsilon$.

Donc $g \in U_{\epsilon,n}$, et comme $\|f-g\|_\infty = \delta$ et on en déduit ainsi que $U_{\epsilon,n}$.

On montre que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$ est une partie dense de C. On note $R = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$. Or C est un espace complet donc d'après le théorème de Baire c'est un espace de Baire donc toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense et R est une intersection dénombrable d'ouverts denses donc $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$ est une partie dense de C.

Enfin, on montre que toute fonction de R est continue nulle part dérivable.

Soit $f \in R$. Pour tout n, $f \in U_{\frac{1}{n},n}$. Soit $x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in I, 0 < |x - x_n| < \frac{1}{n}$ et $|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}| > n$.

Ainsi (x_n) tend vers x quand n tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}| = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en x. f est continue nulle part dérivable.

Donc tout élément de R est nul part dérivable. On en conclut que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur I.

Bibliographie

[1] *Annexe A Theorème de Baire et applications*.

[2] Denis MONASSE. *Cours de Mathématiques MP-MP**. Spartacus IDH.

[3] WIKIPEDIA. URL : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass`.

[4] WIKIPEDIA. URL : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Rene_Baire`.

[5] WIKIPEDIA. *Fonction continue nulle part derivable*. URL : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_continue_nulle_part_d%C3%A9rivable`.