RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Fonction exponentielle

$$f : x \mapsto \exp(x)$$

C'est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Ainsi : $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

$\exp(1) = e \approx 2{,}718\ 28$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

Relations fonctionnelles

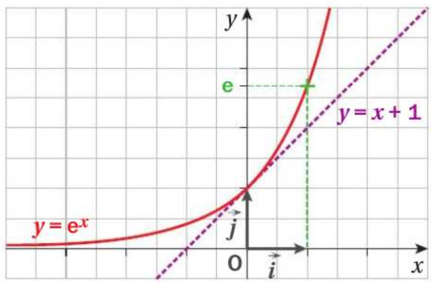
Pour tous nombres réels x et y :

$\boxed{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\boxed{e^x \times e^{-x} = 1}$ $\boxed{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$

Variations et signe de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.



Résolution d'équations et d'inéquations

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.

Modélisation par une croissance ou une décroissance exponentielle

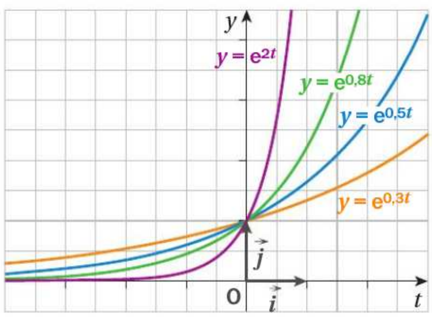
k est un nombre réel strictement positif.

Modélisation par une croissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$f_k : t \mapsto e^{kt}$$

f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $f_k'(t) = k \times e^{kt}$.

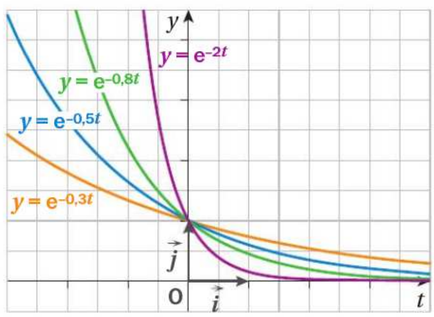


Modélisation par une décroissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$g_k : t \mapsto e^{-kt}$$

g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $g_k'(t) = -k \times e^{-kt}$.



Phénomènes discrets

La représentation graphique de la suite géométrique $(u_0 q^n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$) est un **nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction** $t \mapsto u_0 e^{bt}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $e^b = q$.

- $\forall\, b \in \mathbb{R}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^{nb} = \left(e^n\right)^b$
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.

Savoir-faire

1 Dériver un produit, un quotient

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

a. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (-2x+1)\mathrm{e}^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$, définie et dérivable sur $]-\infty\,;-2[\, \cup \,]-2\,;+\infty[$, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

Solution

a. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = -2 \times \mathrm{e}^x + (-2x+1) \times \mathrm{e}^x = \boxed{(-2x-1) \times \mathrm{e}^x}$.
$f'(x)$ est du signe de $(-2x-1)$ car $\mathrm{e}^x > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	

b. Pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (x+2) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}}$.

Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 est :

$$y = g(-1) + g'(-1) \times (x-(-1)) \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{-1} + 0 \times (x+1) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, et donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Le coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine $x \mapsto -2x-1$ est strictement négatif.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x+2$, et donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$.

Application

9 **a.** Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (5x-15)\mathrm{e}^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variations de f.
b. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

10 Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x-3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1{,}5\}$, et le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de g.

2 Utiliser les relations fonctionnelles

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = 1$.

Solution

Pour tout nombre réel x :

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-6x} \times \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-6x+5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x-(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$;
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$;
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Application

11 Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $\mathrm{e}^{-5x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-2x}} - \mathrm{e}^{3x}\right) = 0$.

12 Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{1{,}5}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-0{,}5}} = \mathrm{e}$.

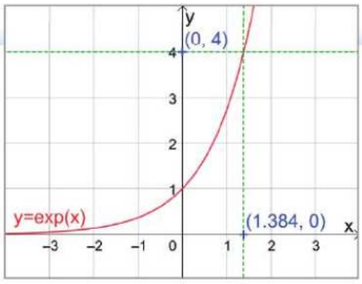
3 Résoudre des équations ou des inéquations

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a.** l'inéquation $e^x - 1 \geqslant 0$; **b.** l'équation $e^x = e^{x^2-x+1}$.

2. Donner une valeur approchée au millième de la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = 4$.

Solution



1. a. $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [0\ ;\ +\infty[}$.

b. $e^x = e^{x^2-x+1} \Leftrightarrow x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$.

2. On trace la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide d'un outil numérique.
En affichant les valeurs au millième près, on obtient la valeur $\boxed{x \approx 1{,}384}$.

Application

13 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x > e$. **b.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-x} = e^{x+3}$.

4 Étudier les variations d'une fonction

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x-1}}{x-3}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Solution

• f est définie pour tout nombre réel x tel que $x - 3 \neq 0$.
Donc f est définie (et dérivable) sur $\boxed{]-\infty\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[}$.

Le dénominateur ne doit pas s'annuler.

• Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}(x-3) - e^{2x-1} \times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6) - e^{2x-1} \times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6-1)}{(x-3)^2}$$

d'où $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{2x-1}(2x-7)}{(x-3)^2}}$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = e^{2x-1}$ et $v(x) = x - 3$, et donc $u'(x) = 2e^{2x-1}$ et $v'(x) = 1$.

• Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$, $e^{2x-1} > 0$ et $(x-3)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x - 7)$; on en déduit le tableau de variations de f :

On étudie le signe de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		3		$3{,}5$		$+\infty$
Signe de $(2x-7)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	‖	↘	$2e^6$	↗	

Penser à indiquer les valeurs interdites dans le tableau.

Application

14 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 3)e^{-2x+5}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

15 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{-x+1}}{5x-2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}4\}$.

Lien pour la vidéo proposée ci-dessous : https://hatier-clic.fr/ma1169

Vidéo
Modéliser par une croissance exponentielle
hatier-clic.fr/ma1169

Savoir-faire

OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

5 Modéliser par une croissance exponentielle

Selon le mathématicien et économiste gallois Richard Price (1723-1791), emprunter un penny (monnaie britannique) au taux d'intérêt annuel de 5 % conduit à s'endetter de façon exponentielle.
Supposons qu'au 1er janvier 2019, un État emprunte 1 000 € à ce taux.

1. On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, la dette en janvier de l'année 2019 + n.
a. Préciser u_0, montrer que $u_1 = 1\,050$, puis calculer u_2.
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner son terme général en fonction de n.
c. Représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.

2. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times e^{kt}$. On cherche à déterminer une expression de f.
a. Que vaut $f(0)$? En déduire la valeur de a.
b. À l'aide de la représentation graphique de la fonction exponentielle, donner une valeur approchée à 10^{-5} de k.
c. Quelle sera la dette de l'État en juin 2023 ?

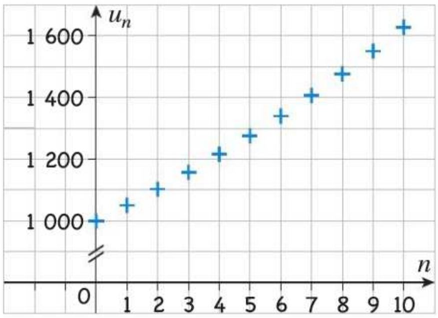
Solution

1. a. $u_0 = \underline{1\,000}$; $u_1 = u_0 \times \left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = \underline{1\,050}$; $u_2 = u_1 \times 1{,}05 = \underline{1\,102{,}5}$.

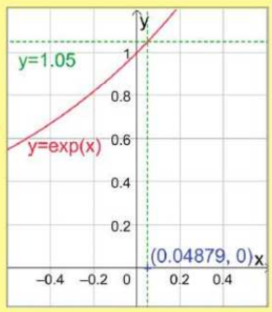
Augmenter une valeur de 5 % revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $\left(1+\dfrac{5}{100}\right) = 1{,}05$.

b. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}05$.
Son terme général est $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 1{,}05^n}$.

c.



2. a. D'une part, $u_0 = 1\,000$ et d'autre part, $f(0) = a \times e^0 = a$ donc $\underline{a = 1\,000}$.
b. On cherche une valeur approchée de la solution réelle de l'équation $e^k = 1{,}05$.
À l'aide d'un outil logiciel (affichage des valeurs au cent millième près), on trouve $\underline{k \approx 0{,}04879}$.



c. En juin 2023, 4,5 années se seront écoulées depuis l'emprunt.
On calcule alors une valeur approchée de l'image de 4,5 par la fonction f.
$f(4{,}5) = a \times e^{k \times 4{,}5} \approx 1\,000 \times e^{0{,}04879 \times 4{,}5} \approx 1\,245$.
<u>En juin 2023, la dette sera d'environ 1 245 €.</u>

Application

16 Une ville comptait 30 000 habitants en 2 015. Chaque année le nombre d'habitants baisse de 8 %.
a. Modéliser la situation par une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, où u_n représente le nombre d'habitants, en milliers, en (2 015 + n), puis représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.
b. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times e^{kt}$.
Déterminer une expression de la fonction f.
c. Déterminer le mois et l'année où le nombre d'habitants sera divisé par deux si cette évolution à décroissance exponentielle se poursuit.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Dériver un produit, un quotient

37 Donner une expression de la dérivée de chaque fonction.

a. $f : x \mapsto 3x\mathrm{e}^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-0{,}5\}$.

c. $h : x \mapsto \mathrm{e}^x \times \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. $k : x \mapsto (3x^2 - 5x + 8) \times \mathrm{e}^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les relations fonctionnelles

38 Associer chaque expression à sa forme simplifiée.

Expressions
1. $\mathrm{e}^{-3x} \times \mathrm{e}^x$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^x}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-5x}}{\mathrm{e}^{-2x}}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{3x})^2}$

Formes simplifiées
a. e^{-5x}
b. e^{-4x}
c. e^{-2x}
d. e^{-x}

39 Montrer que :

a. $\mathrm{e}^{6x} \times \mathrm{e}^{3x} = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{-6x}}$

b. $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x+2} + \mathrm{e}^x)$

c. $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - 1)$

d. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}\left(\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^5)^2\right)}{\mathrm{e}^{2x}} = 1 - \mathrm{e}^{x+10}$

Résoudre des équations ou des inéquations

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{5x-1}$ **b.** $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{-5}$

c. $\mathrm{e}^{2x^2} = \mathrm{e}^{18}$ **d.** $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-3x+2} = \mathrm{e}^{3x-5}$

e. $\mathrm{e}^{x^2-2x-3} = 1$ **f.** $\dfrac{\mathrm{e}^{4x+1}}{\mathrm{e}^{2x+3}} = \mathrm{e}$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $\mathrm{e}^{2x} > 1$ **b.** $\mathrm{e}^{-x+3} \geqslant 1$

c. $\mathrm{e}^{3+x} < \mathrm{e}$ **d.** $\mathrm{e}^{-2x+5} \leqslant \mathrm{e}$

e. $\mathrm{e}^{x^2+x-6} < 1$ **f.** $\mathrm{e}^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Étudier les variations d'une fonction

42 Pour chaque fonction, donner une expression de sa dérivée et en déduire ses variations.

a. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-5x+3}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{3x-5}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. $h : x \mapsto (-2x + 5)\mathrm{e}^{3x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. $k : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x+2}}{x^2 - x - 2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 2\}$.

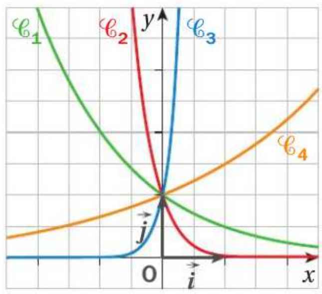
43 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto \mathrm{e}^{0{,}4x}$

$g : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$

$h : x \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}7x}$

$k : x \mapsto \mathrm{e}^{5x}$



44 Recopier et compléter notamment avec les mots « croissante » et « décroissante ».

a. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-5x}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

b. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto 3 \times \mathrm{e}^{5x-4}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

c. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (-3) \times \mathrm{e}^{2x-1}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

45 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, dire si elle peut modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

a. $u_n = \mathrm{e}^{5n}$ **b.** $v_n = 0{,}1 \times 7^n$

c. $w_n = 3 \times (0{,}2)^n$ **d.** $t_n = \mathrm{e}^{-5n}$

46 Les représentations graphiques des suites géométriques ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, appartiennent aux courbes représentatives de fonctions de la forme $a\mathrm{e}^{kt}$ ou $a\mathrm{e}^{-kt}$ ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$).

Déterminer dans chaque cas la valeur exacte de a et une valeur approchée de k.

a. $u_n = 3 \times 2^n$ **b.** $v_n = 0{,}2 \times 3^n$

c. $w_n = (-4) \times (1{,}3)^n$ **d.** $t_n = 5 \times 0{,}8^n$