第4章 正弦交流电路

4.1 正弦电压与电流

★ 4.2 正弦量的相量表示法

4.3 电阻元件、电感元件与电容元件的交流电路

4.4 电阻、电感与电容元件串联交流电路

4.5 阻抗的串联与并联

★ 4.6 复杂正弦交流电路的分析与计算

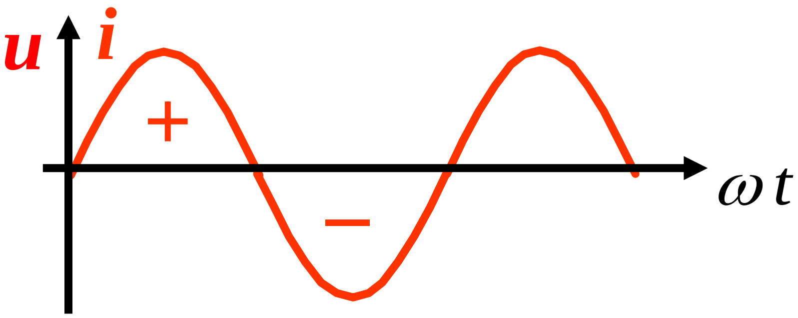
4.7 交流电路的频率特性

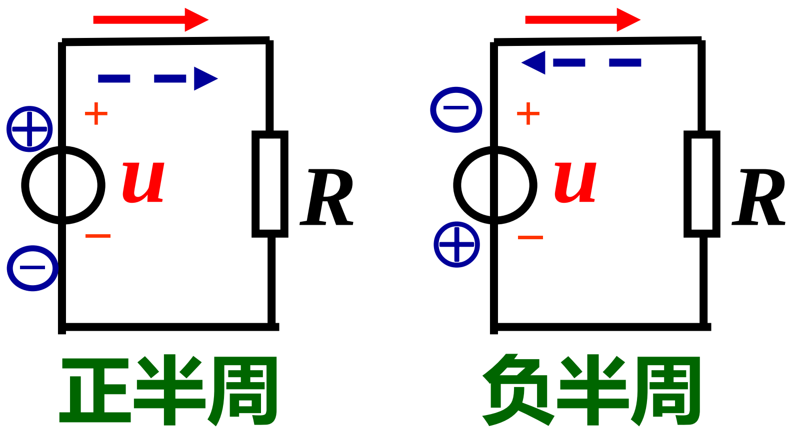
4.8 功率因数的提高

4.9 非正弦周期电压和电流

4.1 正弦电压与电流

正弦量：随时间按正弦规律做周期变化的量。





正弦交流电的优越性：

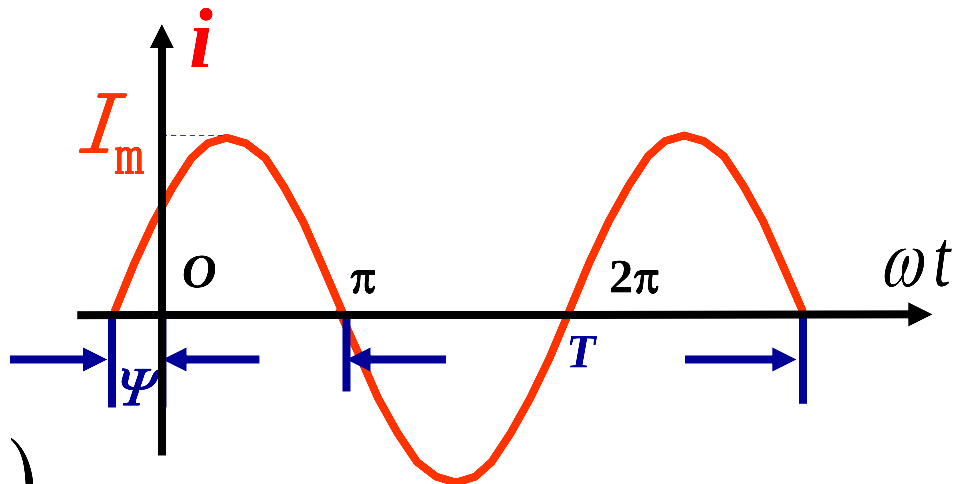
便于传输；易于变换

便于运算；

有利于电器设备的运行；

. . . . .

设正弦交流电流：



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

初相角：决定正弦量起始位置

角频率：决定正弦量变化快慢

幅值：决定正弦量的大小

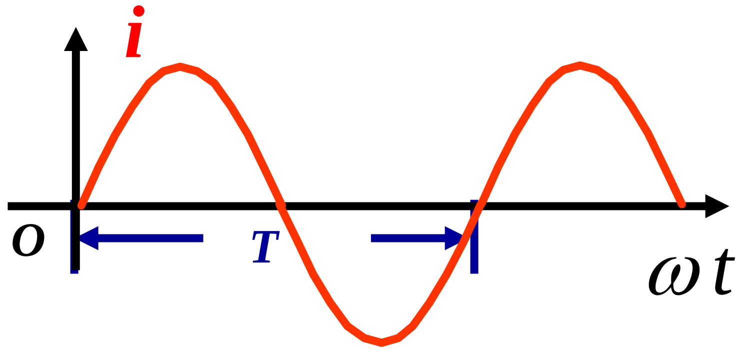
幅值、角频率、初相角成为正弦量的三要素。

一、 频率与周期

周期T：变化一周所需的时间（s）

频率f：$f = \dfrac{1}{T}$ （Hz）

角频率：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$（rad/s）



* 电网频率：我国 50 Hz ，美国 、日本 60 Hz

* 高频炉频率：200 ~ 300 kHZ

* 中频炉频率：500 ~ 8000 Hz

* 无线通信频率： 30 kHz ~ 30GHz

频率单位：赫兹(Hz)、千赫(KHz)、兆赫(MHz)、吉赫(GHz)

二、 幅值与有效值

幅值必须大写，下标加 m。

幅值：I_m、U_m、E_m

有效值:与交流热效应相等的直流定义为交流电的有效值。

$$\underbrace{\int_0^T i^2 R\,dt}_{\text{交流}} = \underbrace{I^2 RT}_{\text{直流}}$$

有效值必须大写

则有 $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t\, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

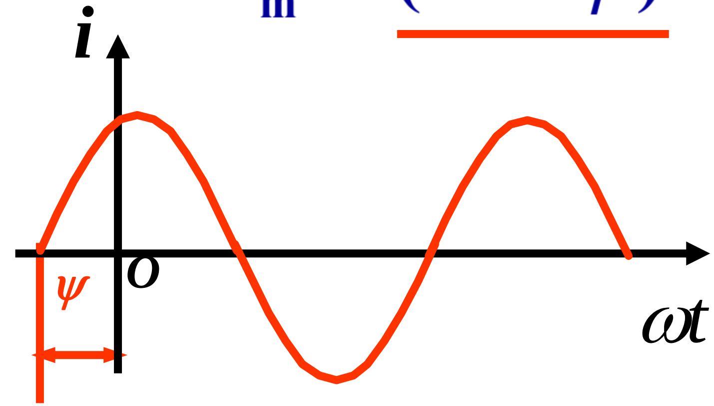
同理：$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$

说明：

1. 交流电压、电流表测量数据为有效值；
2. 交流设备名牌标注的电压、电流均为有效值。

三、初相位与相位差

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$



相位： $\omega t + \psi$

反映正弦量变化的进程。

初相位： $\psi = \left(\omega t + \psi\right)\big|_{t=0}$

表示正弦量在 t =0时的相角。

ψ：给出了观察正弦波的起点或参考点。

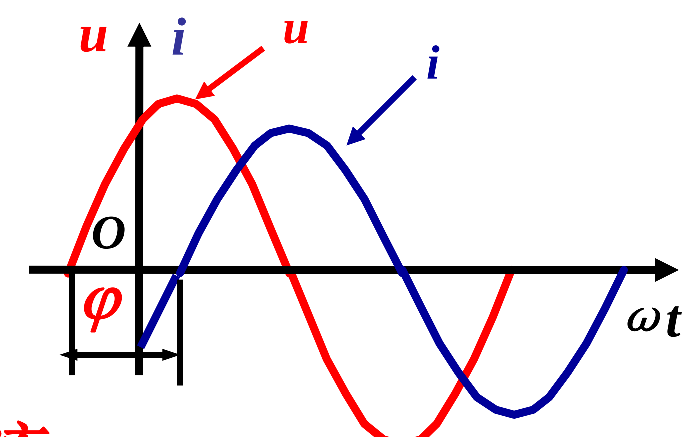
相位差φ：两同频率的正弦量之间的初相位之差。

如：$u = U_m \sin(\omega t + \psi_1)$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_2)$$

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2)$$

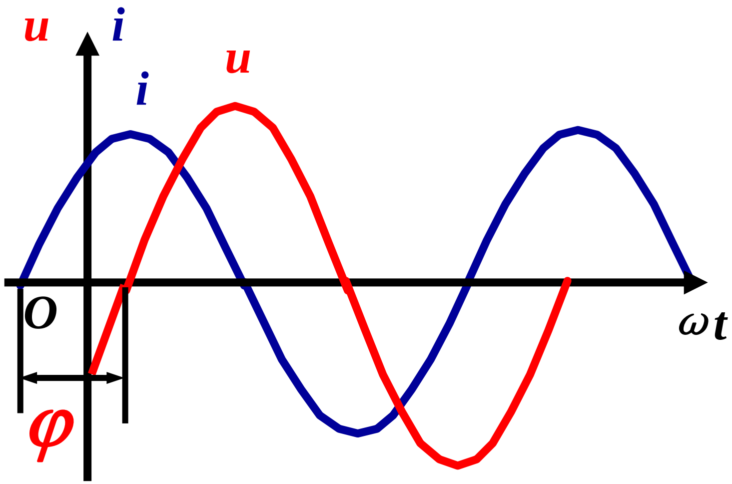
$$= \psi_1 - \psi_2$$



若 $\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$　电压超前电流φ

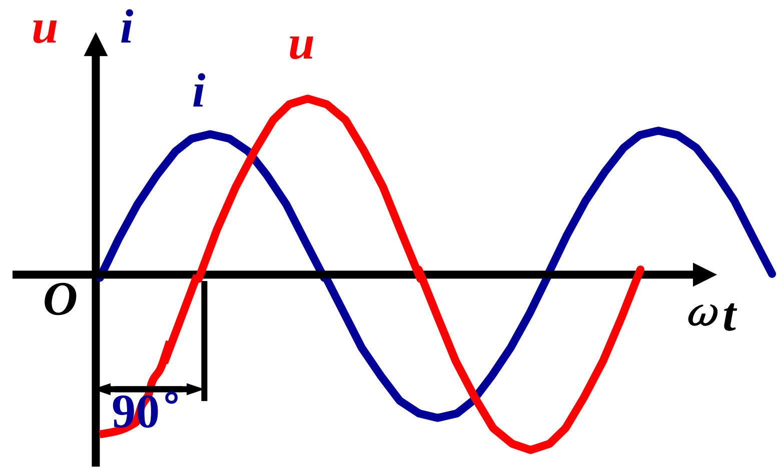
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 < 0$$

电流超前电压 φ



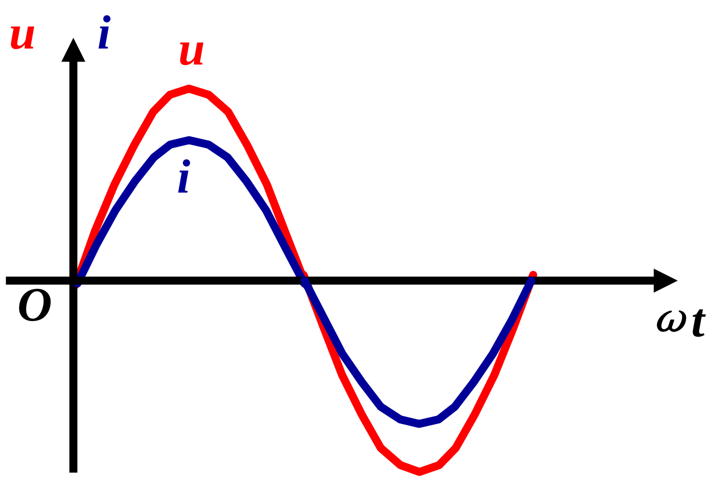
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = -90^\circ$$

电流超前电压90°



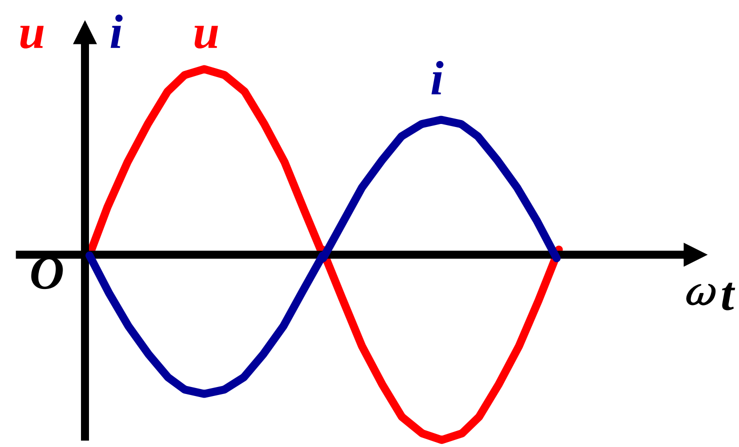
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 0$$

电压与电流同相



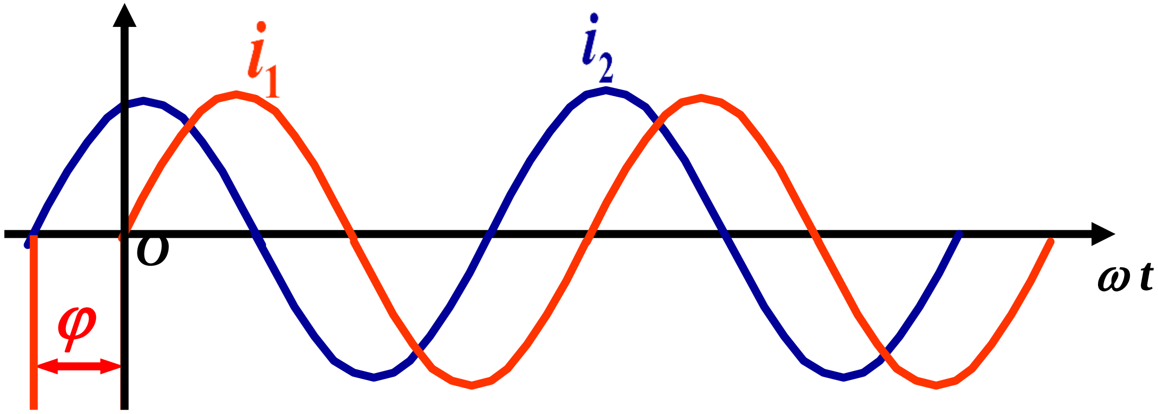
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ$$

电压与电流反相



注意:

① 两同频率的正弦量之间的相位差为常数，与计时的选择起点无关。

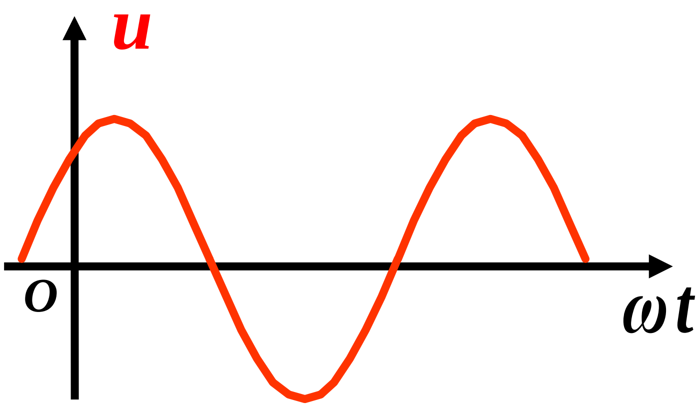


② 不同频率的正弦量比较无意义。

4.2 正弦量的相量表示法

1 .正弦量的表示方法

波形图



瞬时值表达式

$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi)$$

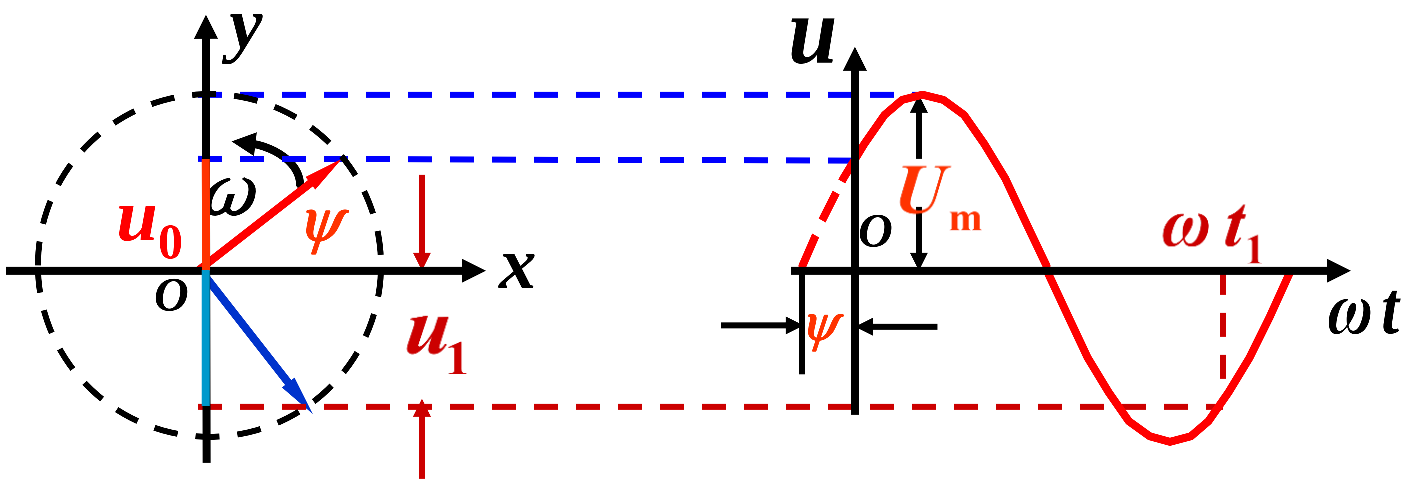
必须小写

相量 $\dot{U} = U \angle \psi$

前两种不便于运算，重点介绍相量表示法。

2. 正弦量用旋转有向线段表示

设正弦量: $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$



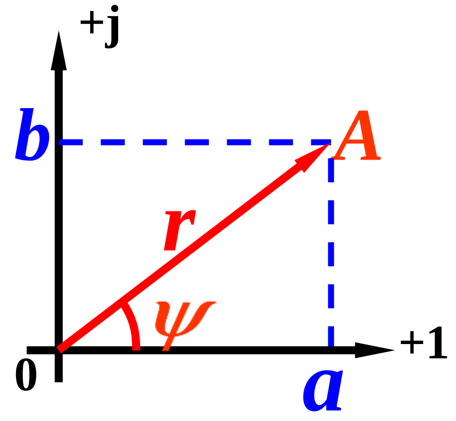
若: 有向线段长度 $=U_m$

有向线段与横轴夹角 = 初相位 ψ

有向线段以速度 ω 按逆时针方向旋转

则: 该旋转有向线段每一瞬时在纵轴上的投影即表示相应时刻正弦量的瞬时值。

3. 正弦量的相量表示



实质：用复数表示正弦量

复数表示形式

设A为复数:

(1) 代数式 $A = a + jb$

式中: $a = r\cos\psi$ $b = r\sin\psi$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{复数的模} \\ \psi = \arctan \dfrac{b}{a} & \text{复数的辐角} \end{cases}$$

(2) 三角式 $A = r\cos\psi + j\,r\sin\psi = r(\cos\psi + j\sin\psi)$

由欧拉公式: $\cos\psi = \dfrac{e^{j\psi} + e^{-j\psi}}{2}$, $\sin\psi = \dfrac{e^{j\psi} - e^{-j\psi}}{2j}$

可得: $e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$

$$e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$$

(3) 指数式 $A = r\,e^{j\psi}$

(4) 极坐标式 $A = r\angle\psi$

$$A = a + jb = r\cos\psi + j\,r\sin\psi = re^{j\psi} = r\angle\psi$$

相量：表示正弦量的复数称相量

设正弦量: $\boldsymbol{u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi)}$

相量表示:

$$\dot{U} = Ue^{\mathrm{j}\psi} = U\angle\psi \begin{cases} \text{相量的模=正弦量的有效值} \\ \text{相量辐角=正弦量的初相角} \end{cases}$$

电压的有效值相量

电压的幅值相量

或：$\dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}\psi} = U_{\mathrm{m}} \angle \psi$ $\begin{cases} \text{相量的模=正弦量的最大值} \\ \text{相量辐角=正弦量的初相角} \end{cases}$

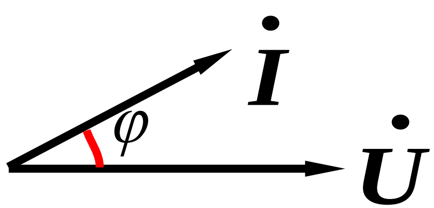
注意:

①相量只是表示正弦量，而不等于正弦量。

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi) \cancel{\stackrel{?}{=}} I_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}\psi} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi$$

②只有正弦量才能用相量表示，
非正弦量不能用相量表示。

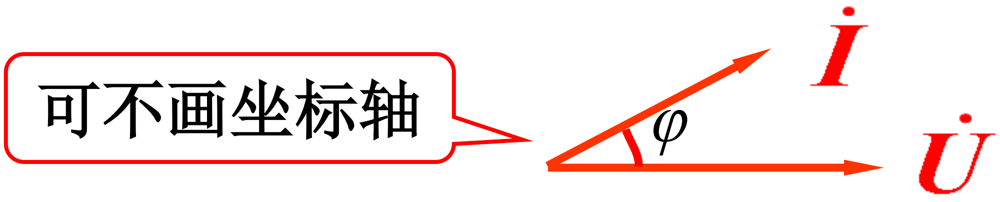
③只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。



④相量的两种表示形式

相量式: $\dot{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U\angle\psi = U(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)$

相量图: 把相量表示在复平面的图形



⑤相量的书写方式

模用最大值表示 ，则用符号：$\dot{U}_m$、$\dot{I}_m$

实际应用中，模多采用有效值，符号：$\dot{U}$、$\dot{I}$

如：已知 $u = 220\sin(\omega t + 45°)\mathrm{V}$

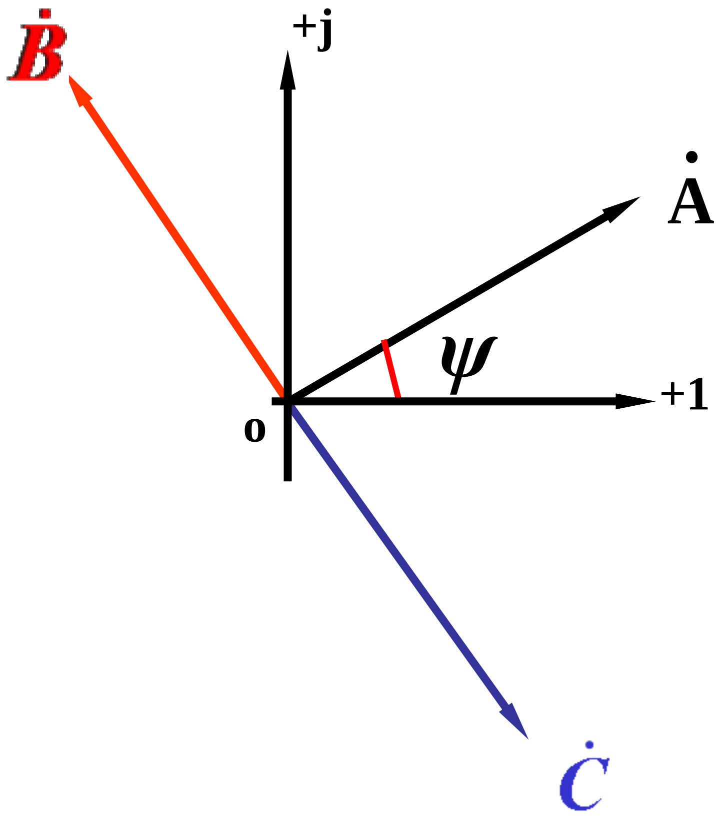
则 $\dot{U}_{\mathrm{m}} = 220\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°}\mathrm{V}$ 或 $\dot{U} = \dfrac{220}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°}\mathrm{V}$

⑥"j"的数学意义和物理意义

旋转90° 因子：$e^{\pm j90^\circ}$

$$e^{\pm j90^\circ}=\cos 90^\circ \pm j\sin 90^\circ = \pm j$$

设相量 $\dot{A}=re^{j\psi}$



相量 $\dot{A}$ 乘以 e^{j90°，$\dot{A}$ 将逆时针旋转90° 得到 $\dot{B}$

相量 $\dot{A}$ 乘以e^{-j90°，$\dot{A}$ 将顺时针旋转90° 得到 $\dot{C}$

正误判断

1.已知：

$$u=220\sin(\omega t+45°)\text{V}$$

$$\dot{U}=\frac{220}{\sqrt{2}}\angle 45°\text{V} \quad ×$$

有效值

j45°

$$\dot{U}_m=220\,e^{45°}\text{V} \quad ×$$

2.已知： $\dot{I}=10\angle 60°\text{A}$

$$i=10\sin(\omega t+60°)\text{A} \quad ×$$

有效值

$10\sqrt{2}$

3.已知：

复数

$$\dot{I}=4\,e^{j30°}\text{A}$$

$$\cancel{=}\,4\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)\text{A}$$

瞬时值

4.已知：

$$\dot{U}=100\angle -15°\text{V}$$

$$U=100\text{V} \quad √$$

$$\dot{U}=100\,e^{j15°}\text{V} \quad ×$$

-15°

例1: 将 u_1、u_2 用相量表示

$$u_1 = 220\sqrt{2}\sin(\omega t + 20°)\ \text{V}$$

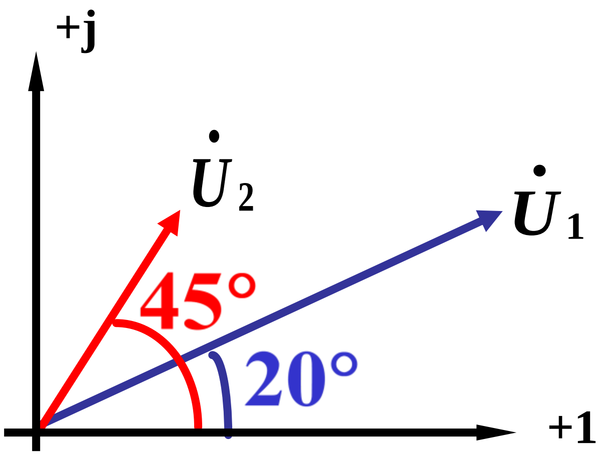
$$u_2 = 110\sqrt{2}\sin(\omega t + 45°)\ \text{V}$$

解: (1) 相量式

$$\dot{U}_1 = 220\underline{/+20°}\text{V}$$

$$\dot{U}_2 = 110\ \underline{/+45°}\text{V}$$

(2) 相量图



$\boxed{\dot{U}_1\text{落后于}\dot{U}_2}$

例2: 已知 $i_1 = 12.7\sqrt{2}\sin(314t + 30°)\text{A}$

$i_2 = 11\sqrt{2}\sin(314t - 60°)\text{A}$

求: $i = i_1 + i_2$。

$\dot{I}_1 = 12.7\angle 30°\text{A}$ $\quad$ $\dot{I}_2 = 11\angle -60°\text{A}$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 12.7\angle 30°\text{A} + 11\angle -60°\text{A}$$

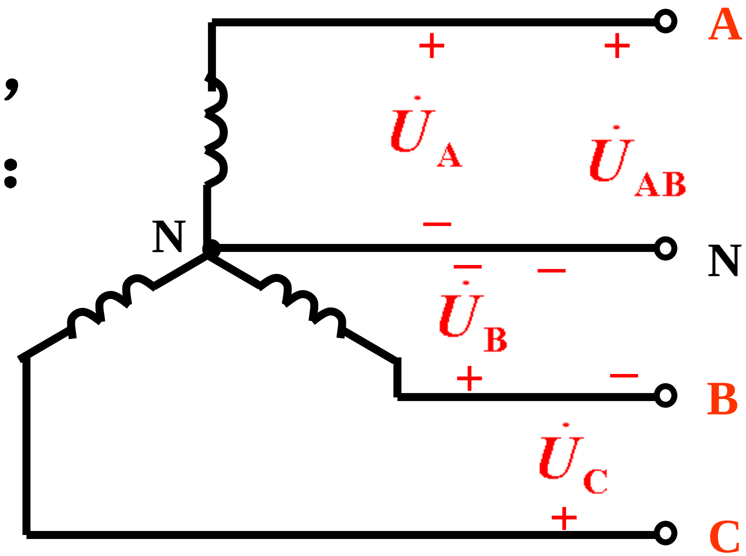
$$= 12.7(\cos 30° + \text{j}\sin 30°)\text{A} + 11(\cos 60° - \text{j}\sin 60°)\text{A}$$

$$= (16.5 - \text{j}3.18)\text{A} = 16.8\angle -10.9°\text{A}$$

$$i = 16.8\sqrt{2}\sin(314t - 10.9°)\ \text{A}$$

有效值 $I = 16.8\ \text{A}$

例3： 图示电路是三相四线制电源，已知三个电源的电压分别为：



$$u_A = 220\sqrt{2}\sin 314t\ \text{V}$$

$$u_B = 220\sqrt{2}\sin(314t - 120°)\text{V}$$

$$u_C = 220\sqrt{2}\sin(314t + 120°)\text{V}$$

试求u_{AB}，并画出相量图。

解:(1) 用相量法计算：

$$\dot{U}_A = 220\angle 0°\text{V}$$

$$\dot{U}_B = 220\angle -120°\text{V} \qquad \dot{U}_C = 220\angle +120°\text{V}$$

由KVL定律 $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = 220\angle 0°\text{V} - 220\angle -120°\text{V}$

$$\dot{U}_{AB} = 220\ \text{V} - 220\left[\cos(-120°) + \text{j}\sin(-120°)\right]\text{V}$$

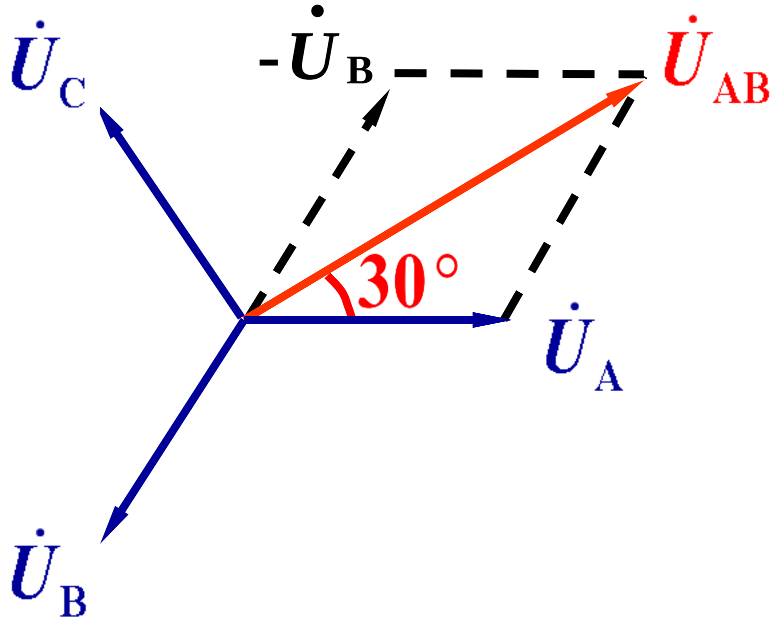
$$= 220(1 + 0.5 + \text{j}0.866)\text{V} = 220 \times 1.73\angle 30°\text{V}$$

$= 380\angle 30°\text{V}$ 所以$u_{AB} = 380\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)\text{V}$

$$\dot{U}_A = 220\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_B = 220\angle -120^\circ \text{V}$$

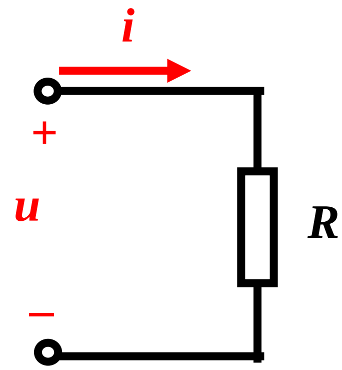
$$\dot{U}_C = 220\angle +120^\circ \text{V}$$



(2) 相量图

$$\dot{U}_{AB} = 380\angle 30^\circ \text{V}$$

4.3 单一参数的交流电路



一、 电阻元件的交流电路

1. 电压与电流的关系

根据欧姆定律: $u = iR$

设 $u = U_{\mathrm{m}} \sin \omega t$

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\mathrm{m}} \sin \omega t}{R} = \frac{\sqrt{2} U}{R} \sin \omega t = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$$

① 频率相同

②大小关系: $I = \dfrac{U}{R}$

相量图

相量式:

$\dot{I} = I\angle 0^\circ$

$\dot{U} = U\angle 0^\circ = \dot{I} R$

③相位关系：u、i 相位相同

相位差 φ：$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$

2. 功率关系

(1) 瞬时功率 p:

瞬时电压与瞬时电流的乘积

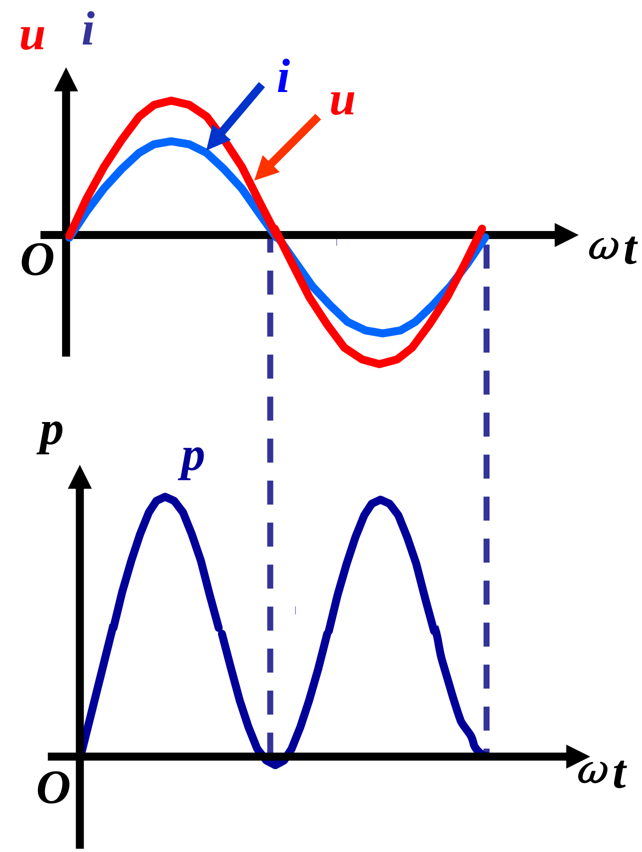
$$i=\sqrt{2}\,I\sin\omega t$$

$$u=\sqrt{2}\,U\sin\omega t$$

$$p=u\cdot i=U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin^2\omega t$$

小写

$$=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}(1-\cos 2\omega t)$$



结论: $p\geq 0$ （耗能元件）, 且随时间变化。

(2)　平均功率(有功功率)P

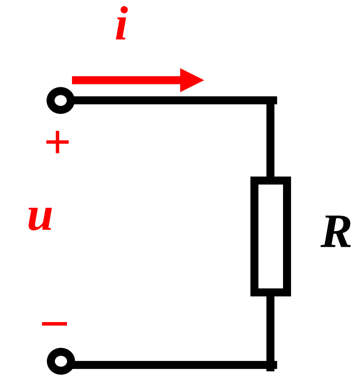
瞬时功率在一个周期内的平均值

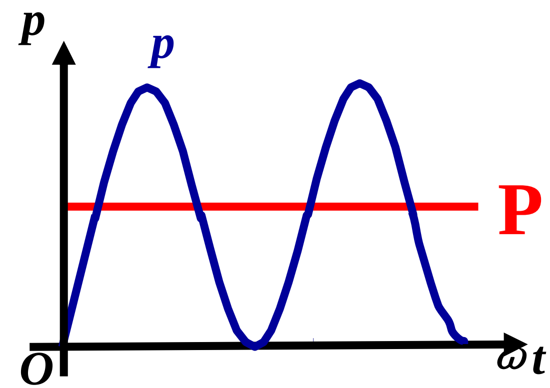
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i\,\mathrm{d}t$$

大写

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}U_m I_m (1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T UI(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t = UI$$

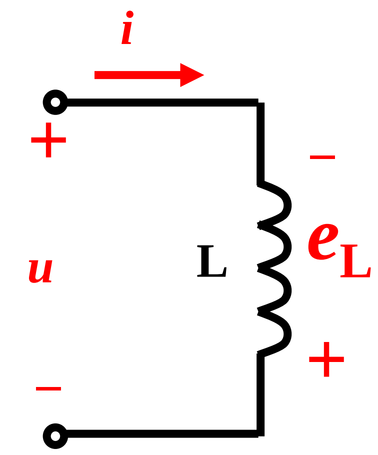




$$P = U \times I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$ 单位:瓦（W）

注意：通常铭牌数据或测量的功率均指有功功率。

二、 电感元件的交流电路



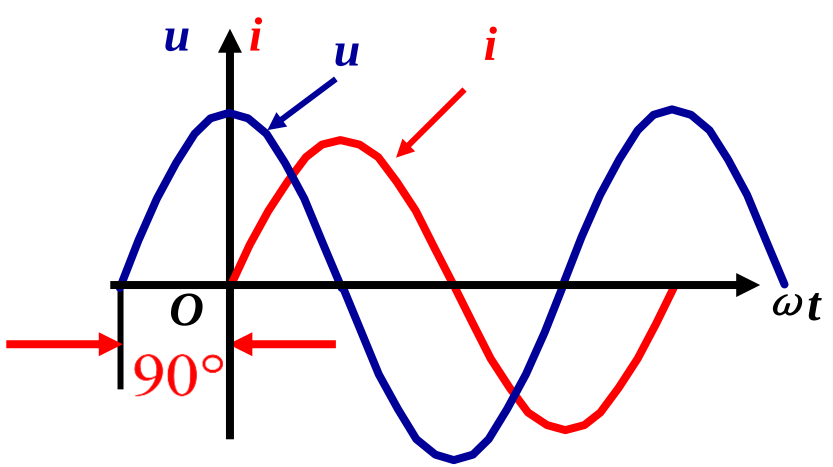
1. 电压与电流的关系

基本关系式：$u = -e_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

设：$i = \sqrt{2}I\sin\omega t$

$$u = L\frac{\mathrm{d}(I_m \sin\omega t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\underline{I\omega L}\sin(\omega t + 90°)$$

$$= \sqrt{2}\underline{U}\sin(\omega t + 90°)$$



① 频率相同

② $U = I\omega L$

③ 电压超前电流90°

相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90°$

$$\begin{cases} i = \sqrt{2} I \sin \omega t \\ u = \sqrt{2} I \underline{\omega L} \cdot \sin (\omega t + 90°) \end{cases}$$

有效值：$U = I \cdot \omega L$ 或 $I = \dfrac{U}{\omega L}$

定义：$\boxed{X_L = \omega L = 2\pi f L}$ 感抗（Ω）

则：$\boxed{U = I X_L}$

$X_L = 2\pi f L$ $\begin{cases} \text{直流：} f = 0,\ X_L = 0\text{，电感}L\text{视为短路} \\ \text{交流：} f \uparrow \longrightarrow X_L \uparrow \end{cases}$

∴ 电感L具有通直阻交的作用

$$\boxed{X_L = \omega L = 2\pi f}$$

感抗X_L是频率的函数

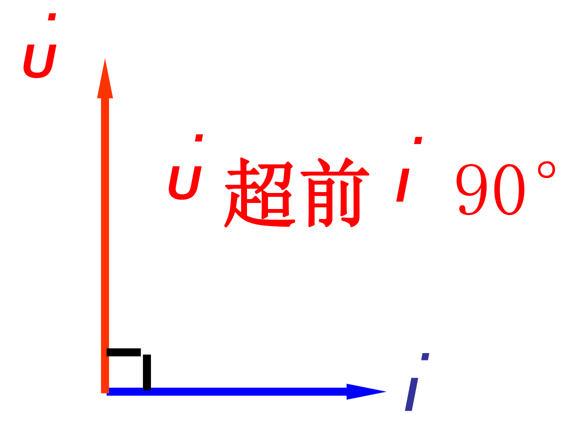
根据：
$$\begin{cases} i = \sqrt{2} I \sin \omega t \\ u = \sqrt{2} I \ \omega L \cdot \sin \ (\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

可得相量式：

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ$$

$$\dot{U} = U \angle 90^\circ = I \omega L \angle 90^\circ$$

则：
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle 90^\circ = \mathrm{j} \omega \mathrm{L}$$



相量图

$$\boxed{\dot{U} = \mathrm{j} \dot{I} \omega L = \dot{I} \cdot (\mathrm{j} X_L)}$$

电感电路复数形式的欧姆定律

2. 功率关系

$$\begin{cases} i = \sqrt{2} I \sin \omega t \\ u = \sqrt{2} I \,\omega L \cdot \sin\ (\omega t + 90\,°) \end{cases}$$

(1) 瞬时功率

$$p = i \cdot u = U_{m} I_{m} \sin \omega t \sin(\omega t + 90°)$$

$$= U_{m} I_{m} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_{m} I_{m}}{2} \sin 2\omega t$$

$$= UI \sin 2\omega t$$

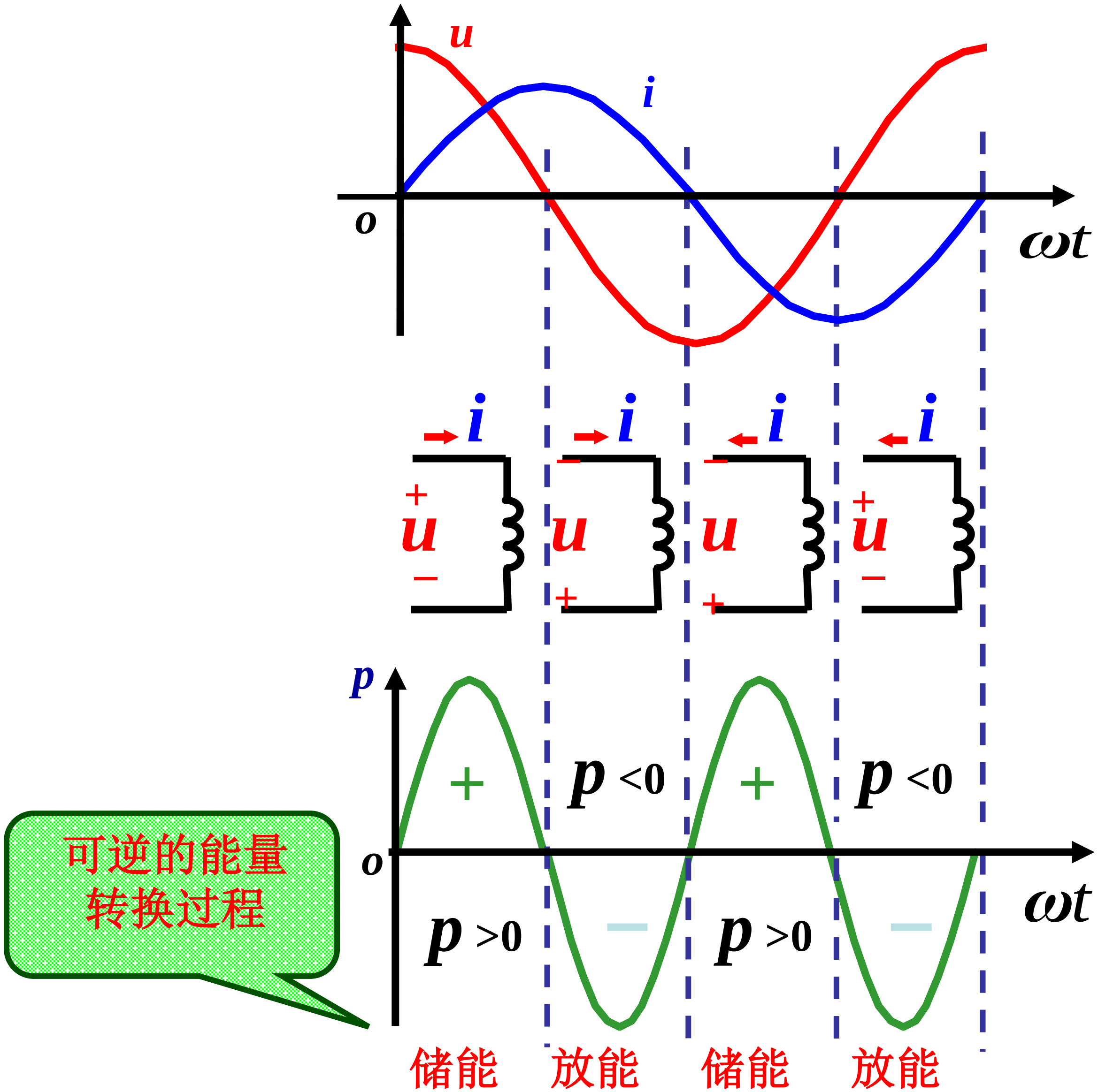
(2) 平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} p \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T} \int_{0}^{T} UI \sin\ (2\omega t) \, \mathrm{d}t = 0$$

*L*是非耗能元件

分析：瞬时功率 ：$p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论：
纯电感不消耗能量，只和电源进行能量交换（能量的吞吐）。

∴ 电感L是储能元件。

(3) 无功功率 Q

用以衡量电感电路中能量交换的规模。

用瞬时功率达到的最大值表征，即

瞬时功率 ：$p = i \cdot u = UI\sin 2\omega t$

$$\boxed{Q = UI = I^2 X_L = U^2 / X_L}$$

单位：var

例1: 把一个0.1H的电感接到 f=50Hz, U=10V的正弦电源上，求I，如保持U不变，而电源 f = 5000Hz, 这时I为多少？

解: (1) 当 f = 50Hz 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.1\Omega = 31.4\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{31.4} = 318\text{mA}$$

（2）当 $f = 5000\text{Hz}$ 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 5000 \times 0.1 = 3140\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{3140} = 3.18\text{mA}$$

所以电感元件具有通低频阻高频的特性

习题：

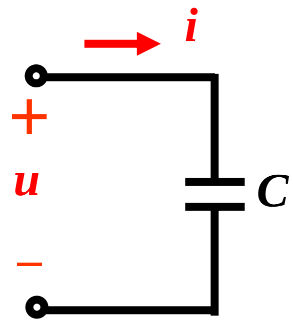
1.一只L=20mH的电感线圈，通以

$i = 5\sqrt{2}\sin(314t - 30°)\text{A}$的电流

求(1)感抗X_L; (2)线圈两端的电压u;

(3)有功功率和无功功率。

三、 电容元件的交流电路



1. 电流与电压的关系

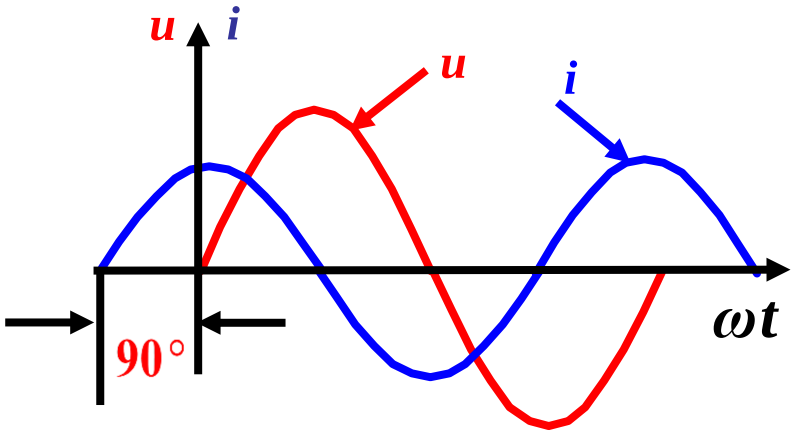
基本关系式： $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

电流与电压的变化率成正比

设： $u = \sqrt{2}U\sin\omega t$

则： $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}UC\omega\cos\omega t$

$= \sqrt{2}U\omega C\sin(\omega t + 90°)$



① 频率相同

② $I = U\omega C$

③电流超前电压90°

相位差 $\phi = \psi_u - \psi_i = -90°$

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} U \sin \omega t \\ i = \sqrt{2} \underline{U \omega C} \cdot \sin(\omega t + \underline{90^\circ}) \end{cases}$$

有效值：$I = U \cdot \omega C$ 或 $U = \dfrac{I}{\omega C}$

定义：$\boxed{X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C}}$ 容抗（Ω）

则：$\boxed{U = I X_C}$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

直流：$f \to 0,\ X_C \to \infty$，电容C视为开路

交流：$f \uparrow \longrightarrow X_C \downarrow$

$\therefore$ 电容C具有隔直通交的作用

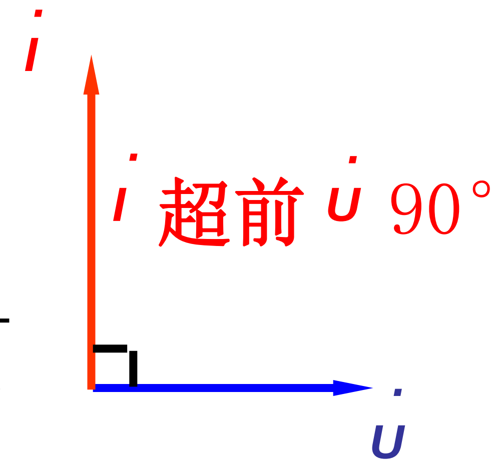
$$\boxed{X_C = \frac{1}{2\pi fC}}$$

容抗X_C是频率的函数

由：$\begin{cases} u = \sqrt{2}U\sin\omega t \\ i = \sqrt{2}U\omega C\cdot\sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$

可得相量式 $\dot{U} = U\angle 0^\circ$

$$\dot{I} = I\angle 90^\circ = \mathrm{j}U\omega C$$



则：$\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{U}{I}\angle -90^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$

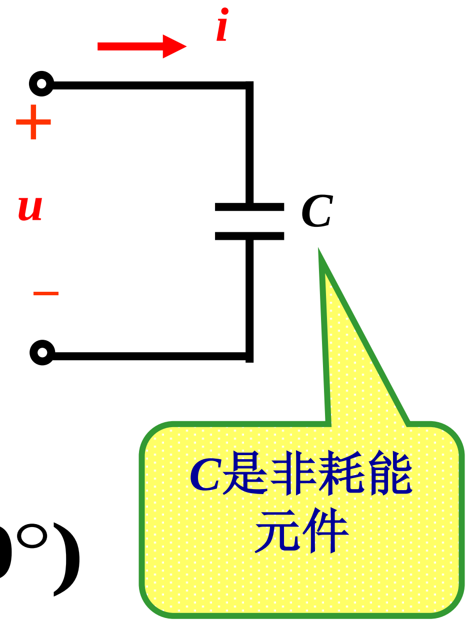
相量图

$$\boxed{\dot{U} = \dot{I}\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \dot{I}\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right) = -\mathrm{j}\dot{I}X_C}$$

电容电路中复数形式的欧姆定律

2.功率关系

由 $\begin{cases} u = \sqrt{2}U\sin\omega t \\ i = \sqrt{2}U\omega C\cdot\sin(\omega t + 90°) \end{cases}$



(1) 瞬时功率

$$p = i\cdot u = U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin\omega t\sin(\omega t + 90°)$$

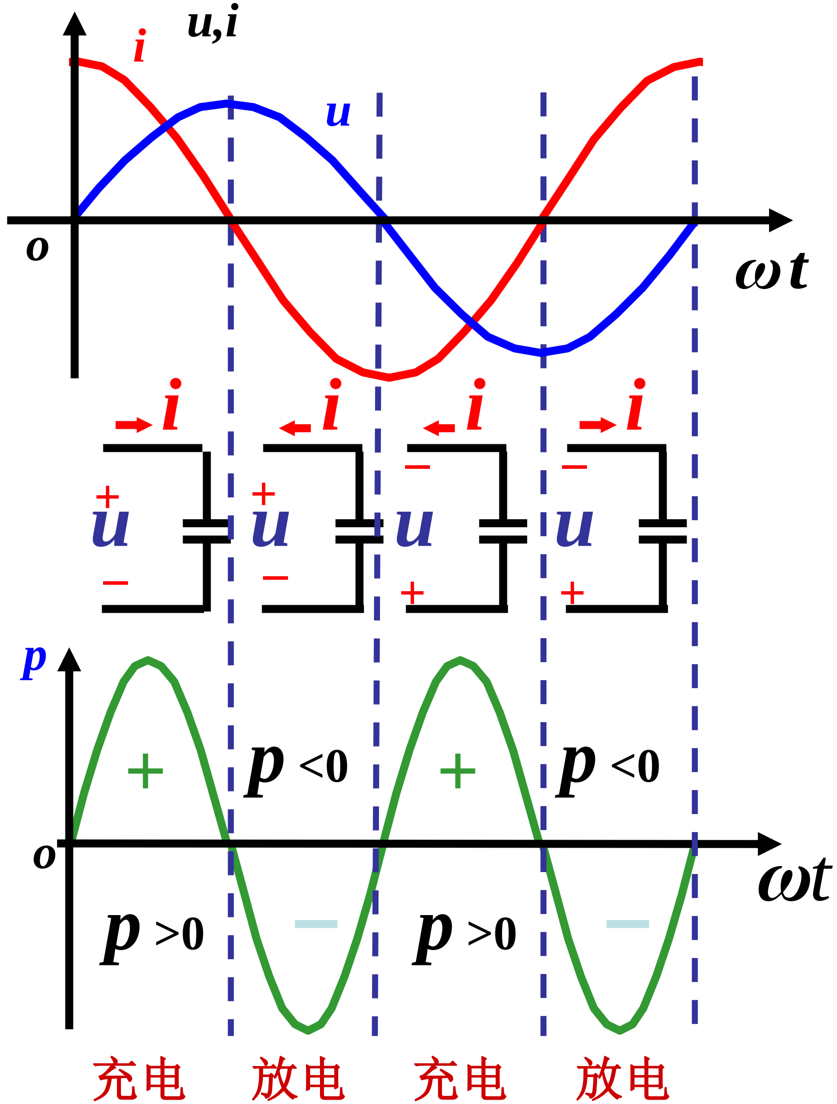
$$= \frac{U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}}{2}\sin 2\omega t = UI\sin 2\omega t$$

(2) 平均功率 P

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

瞬时功率 ：$p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论：

纯电容不消耗能量，只和电源进行能量交换（能量的吞吐）。

电容C是储能元件

(3) 无功功率 Q

为了同电感电路的无功功率相比较，这里也设

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

则：$u = \sqrt{2} U \sin\ (\omega t - 90°)$

所以 $p = -UI \sin 2\omega t$

同理，无功功率等于瞬时功率达到的最大值。

$$\boxed{Q = -UI = -I^2 X_C = -\frac{U^2}{X_C}}$$

单位：var

习题： 指出下列各式中哪些是对的，哪些是错的？

在电阻电路中：

$$I=\frac{U}{R}$$

$$i=\frac{U}{R}$$

$$i=\frac{u}{R}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}$$

在电感电路中：

$$i=\frac{u}{X_L}$$

$$\frac{U}{I}=\mathrm{j}\omega L$$

$$I=\frac{U}{\omega L}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\mathrm{j}X_L$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=X_L$$

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$i=\frac{u}{\omega L}$$

在电容电路中：

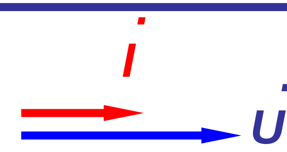
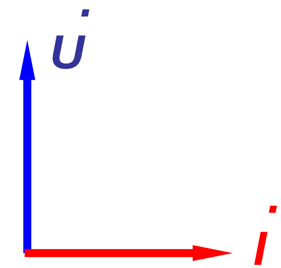
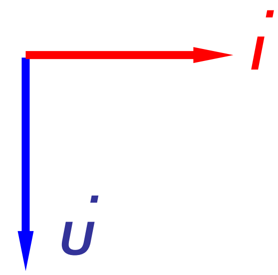
$$U=I\cdot\omega C$$

$$u=i\cdot X_C$$

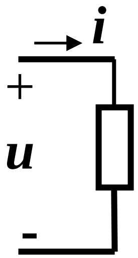
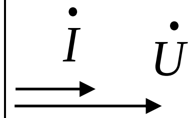
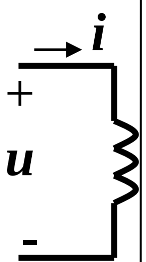
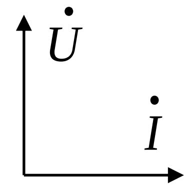
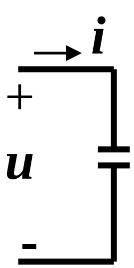
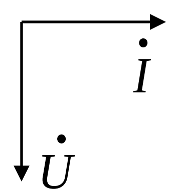
$$\dot{I}=\dot{U}\cdot\mathrm{j}\omega C$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

单一参数电路中的基本关系

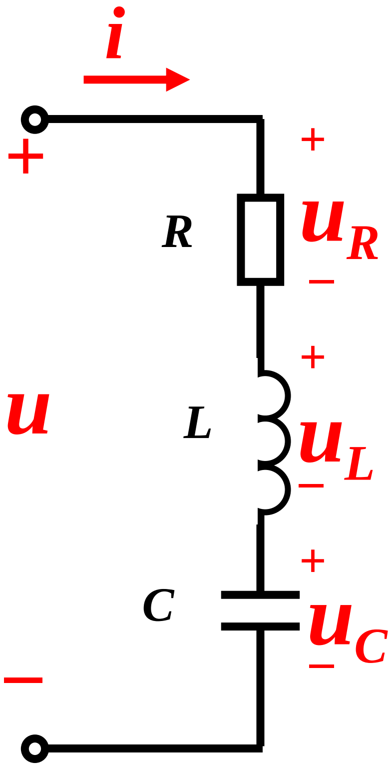
参数	阻抗	基本关系	相量式	相量图
R	R	$u = iR$	$\dot{U} = \dot{I}R$	
L	$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_L$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$	
C	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}X_C$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$	

单一参数正弦交流电路的分析计算小结

电路参数	电路图(参考方向)	基本关系	阻抗	电压、电流关系				功率	
				瞬时值	有效值	相量图	相量式	有功功率	无功功率
R		$u=iR$	R	设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$ 则 $u=\sqrt{2}U\sin\omega t$	$U=IR$	 u、i 同相	$\dot U=\dot I R$	UI I^2R	0
L		$u=L\frac{di}{dt}$	jX_L	设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$ 则 $u=\sqrt{2}I\omega L\sin(\omega t+90°)$	$U=IX_L$ $X_L=\omega L$	 u领先 i 90°	$\dot U=j\dot I X_L$	0	UI I^2X_L
C		$i=C\frac{du}{dt}$	$-jX_C$	设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$ 则 $u=\sqrt{2}I\omega C\sin(\omega t-90°)$	$U=IX_C$ $X_C=1/\omega c$	 u落后 i 90°	$\dot U=-j\dot I X_C$	0	$-UI$ $-I^2X_C$

4.4　*R*、*L*、*C*串联的交流电路

1. 电流、电压的关系



直流电路两电阻串联时

$$U = IR_1 + IR_2$$

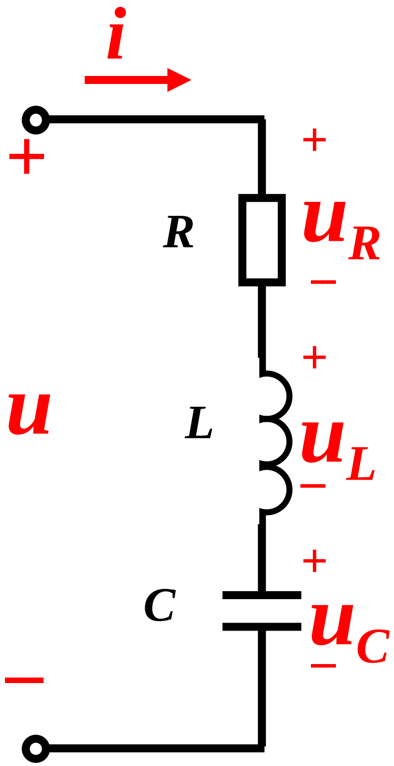
*RLC*串联交流电路中

设：$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

$$U \neq IR + I\omega L + I\frac{1}{\omega C}$$

交流电路、$\dot{U}$, $\dot{I}$ 与参数*R*、*L*、*C*、ω 间的关系如何?

(1) 瞬时值表达式



根据KVL可得：

$$u = u_R + u_L + u_C$$

$$= iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

设：$i = \sqrt{2}I\sin\omega t$

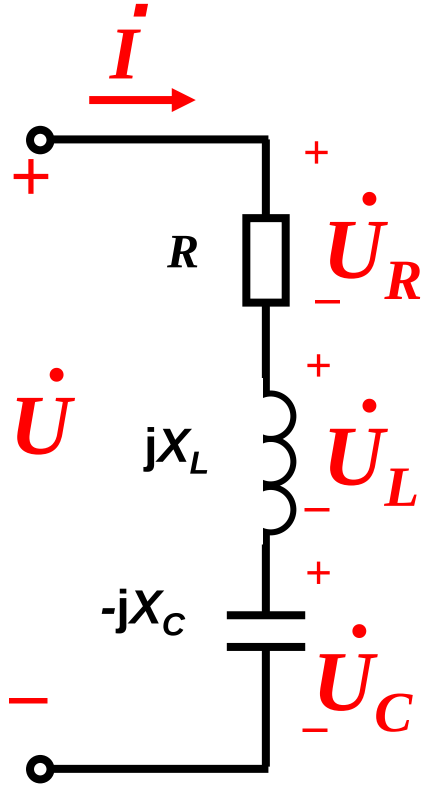
则 $u = \sqrt{2}IR\sin\omega t$

$$+\sqrt{2}I(\omega L)\sin(\omega t + 90°)$$

$$+\sqrt{2}I(\frac{1}{\omega C})\sin(\omega t - 90°)$$

同频率
正弦量

(2)相量法



1)相量式

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

设 $\dot{I} = I\angle 0°$（参考相量）

则 $\dot{U}_R = \dot{I}R$

$$\dot{U}_L = \dot{I}(jX_L)$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C)$$

$$\dot{U} = \dot{I}R + \dot{I}(jX_L) + \dot{I}(-jX_C) = \dot{I}\left[R + j\left(X_L - X_C\right)\right]$$

总电压与总电流的相量关系式

根据 $\dot{U} = \dot{I}\left[R + \mathrm{j}\left(X_L - X_C\right)\right]$

令 $\boxed{Z = R + \mathrm{j}\left(X_L - X_C\right)}$ 阻抗

则 ★★ $\boxed{\dot{U} = \dot{I}Z}$ 复数形式的欧姆定律

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i} = |Z|\angle\varphi = \frac{U}{I}\angle(\psi_u - \psi_i)$$

Z 的模表示 u、i 的大小关系，

Z 的辐角（阻抗角）为 u、i 的相位差。

注意：Z 是一个复数，不是相量，上面不能加点。

$$\boxed{Z = |Z|\angle\varphi = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)}$$

阻抗模： $|Z| = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

阻抗角： $\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R} = \arctan\dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

★ φ 由电路参数决定。

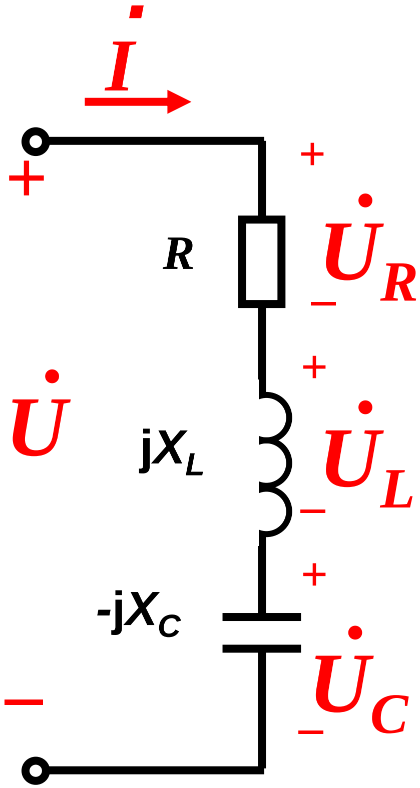
电路参数与电路性质的关系：

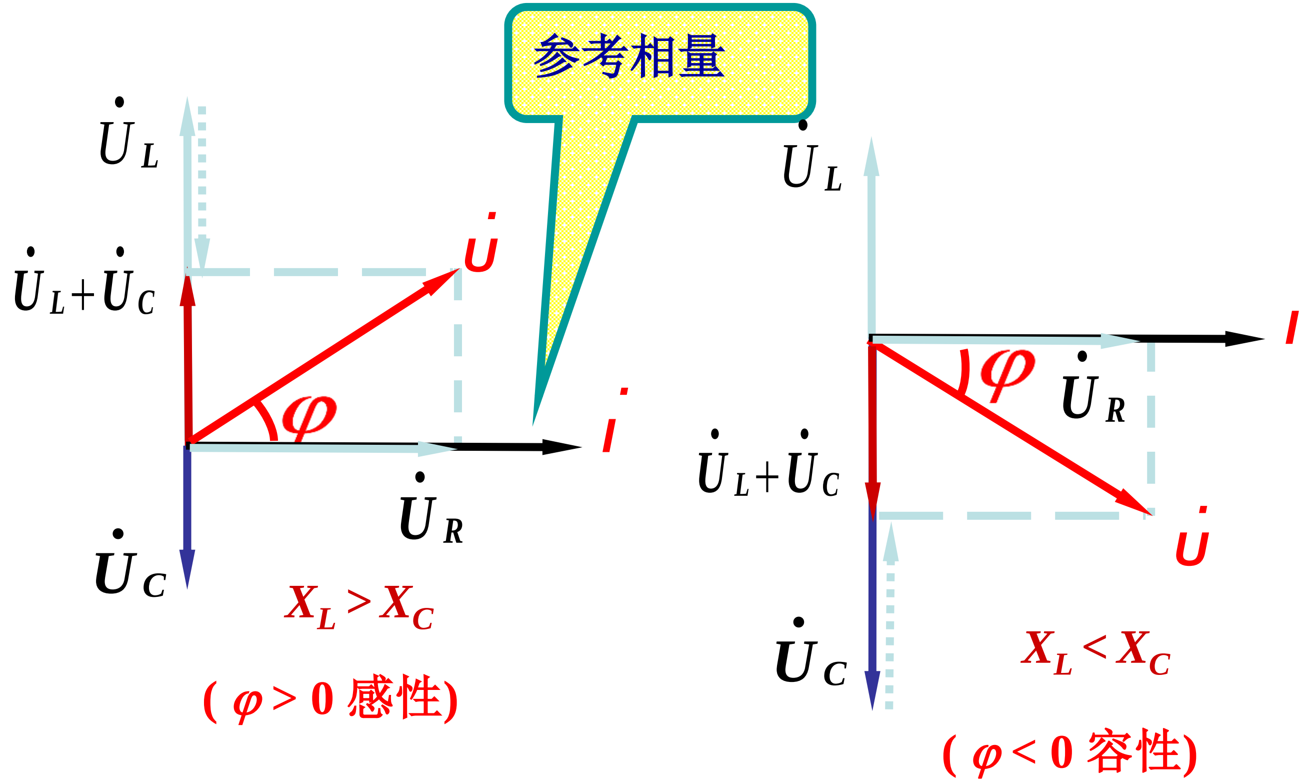
当 $X_L > X_C$ 时， $\varphi > 0$， u 超前 i —— 呈感性

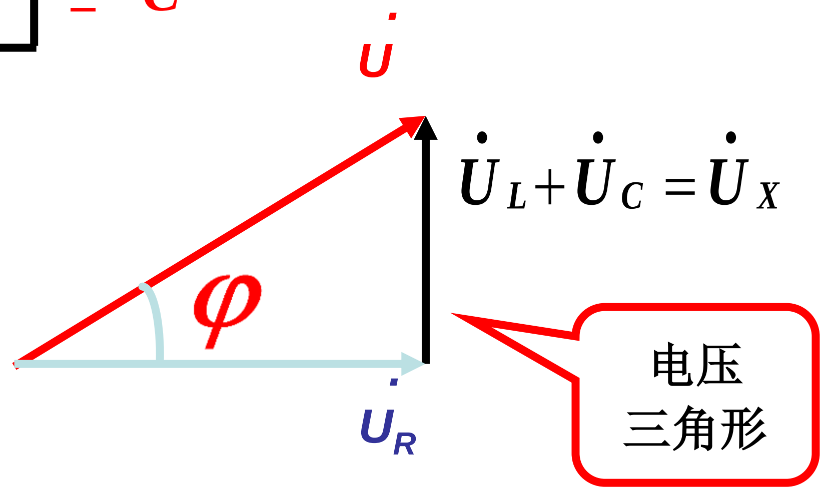
当 $X_L < X_C$ 时， $\varphi < 0$， u 滞后 i —— 呈容性

当 $X_L = X_C$ 时， $\varphi = 0$， u、 i 同相 —— 呈电阻性

2) 相量图





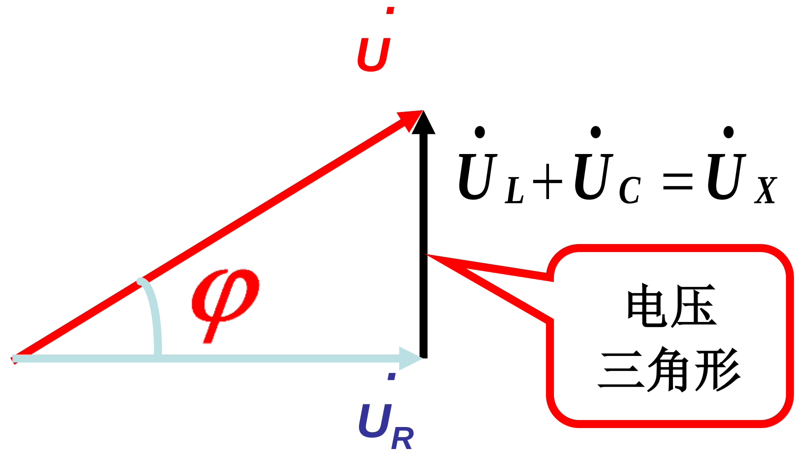


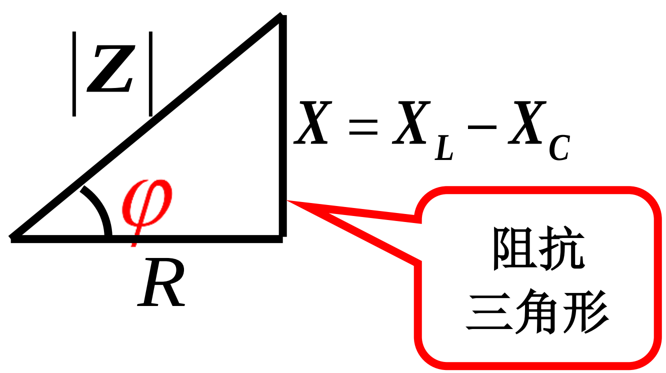
由电压三角形可得:

$$U_R = U\cos\varphi$$

$$U_x = U\sin\varphi$$

2) 相量图





$$R=|Z|\cos\varphi$$

$$X=|Z|\sin\varphi$$

由相量图可求得:

$$U=\sqrt{U_R^{\ 2}+(U_L-U_C)^2}$$

$$=I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

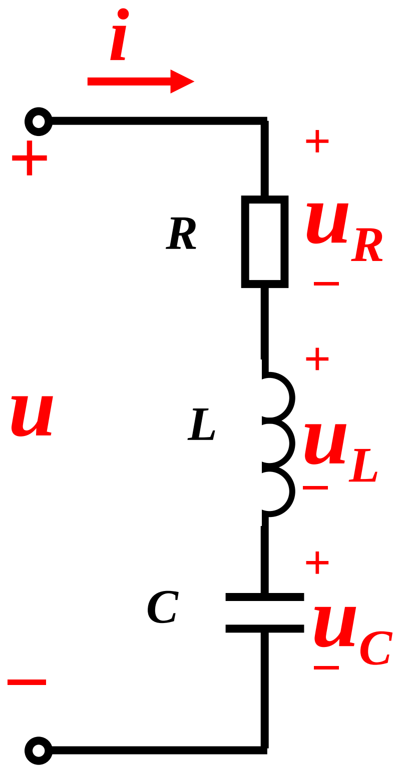
$$=I\sqrt{R^2+X^2}$$

$$=I\,|Z|$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}$$

2.功率关系



(1) 瞬时功率

设：$i = I_m \sin \omega t$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t$$

$$= \underline{U_m I_m \cos\varphi \sin^2 \omega t} + \underline{UI \sin\varphi \ \sin 2\omega t}$$

耗能元件上的瞬时功率　　储能元件上的瞬时功率

每一瞬间，电源提供的功率一部分被耗能元件消耗掉，一部分与储能元件进行能量交换。

(2) 平均功率P（有功功率）

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T [UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t+\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$ 单位：W

cosφ 称为功率因数，用来衡量对电源的利用程度。

所以$P=UI\cos\varphi$

总电压

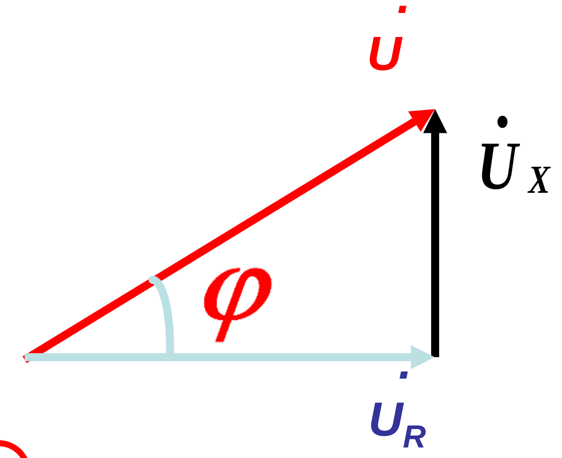
总电流

u 与 i 的夹角

根据电压三角形可得：

$$P = UI\cos\varphi = U_R I = I^2 R$$

电阻消耗的电能



(3) 无功功率Q

$$Q = U_L I - U_C I = (U_L - U_C)I = I^2(X_L - X_C)$$

电感和电容与电源之间的能量互换

根据电压三角形可得：

$$Q = UI\sin\varphi$$

单位：var

总电压

总电流

u 与 i 的夹角

(4) 视在功率 S

电路中总电压与总电流有效值的乘积。

$$S = UI = |Z| I^2$$ 单位：V·A

说明：$S_N = U_N I_N$ 称为发电机、变压器 等供电设备的容量，可用来衡量发电机、变压器可能提供的最大有功功率。

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S \cancel{=} P + Q$$

注意：*P*、*Q*、*S* 都不是正弦量，不能用相量表示。

阻抗三角形、电压三角形、功率三角形

将电压三角形的有效值同除 *I* 得到阻抗三角形

将电压三角形的有效值同乘 *I* 得到功率三角形

$$U = \sqrt{U_R^{\,2} + (U_L - U_C)^2}$$

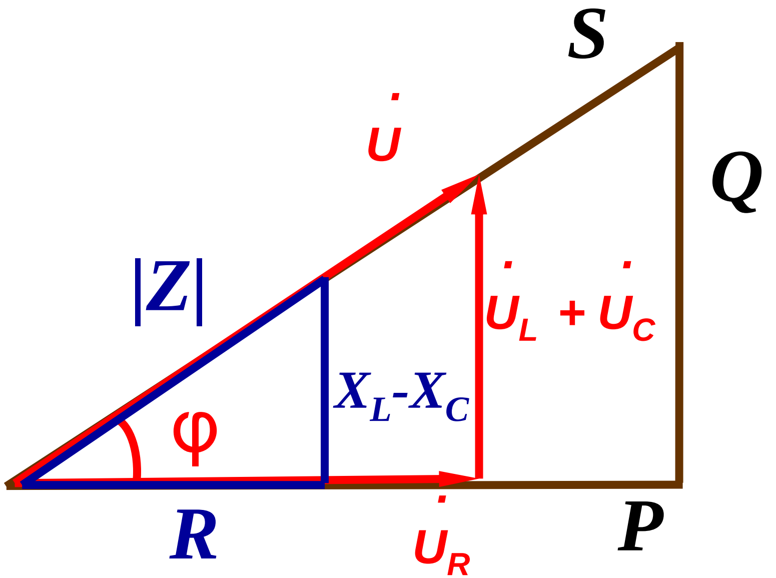
$$U_R = U\cos\varphi$$

$$U_X = U\sin\varphi$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$R = |Z|\cos\varphi$$

$$X = |Z|\sin\varphi$$



$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\sin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

例1： 在*RLC*串联交流电路中，已知:

$$R = 30\Omega, L = 127\text{mH}, C = 40\mu\text{F}$$

$$u = 220\sqrt{2}\sin(314t + 20^\circ)\text{V}$$

求：(1)电流的有效值*I*与瞬时值 *i*；

(2) 各部分电压的有效值与瞬时值;

(3) 作相量图;

(4)有功功率*P*、无功功率*Q*和视在功率*S*。

解:

$$X_L = \omega L = 314 \times 127 \times 10^{-3}\Omega = 40\Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 40 \times 10^{-6}}\Omega = 80\Omega,$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40-80)^2}\Omega = 50\Omega,$$

$R=30\Omega,\ L=127\text{mH},C=40\mu\ \text{F}$　　$u=220\sqrt{2}\sin(314t+20^\circ)\text{V}$

$X_L = 40\ \Omega$

$X_C = 80\ \Omega$

$|Z| = 50\ \Omega$

法1： (1) $I=\dfrac{U}{|Z|}=\dfrac{220}{50}\text{A}=4.4\text{A}$

$$\varphi=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}=\arctan\frac{40-80}{30}=-53^\circ$$

因为$\varphi=\psi_u-\psi_i=-53^\circ$，所以$\psi_i=73^\circ$

$$i=4.4\sqrt{2}\sin(314t+73^\circ)\text{A}$$

(2)

$$U_R=IR=4.4\times30\text{V}=132\text{V}$$

$$u_R=132\sqrt{2}\sin(314t+73^\circ)\text{V}$$

$$U_L=IX_L=4.4\times40\text{V}=176\text{V}$$

$$u_L=176\sqrt{2}\sin(314t+163^\circ)\text{V}$$

$$U_C=IX_C=4.4\times80=352\text{V}$$

$$u_C=352\sqrt{2}\sin(314t-17^\circ)\text{V}$$

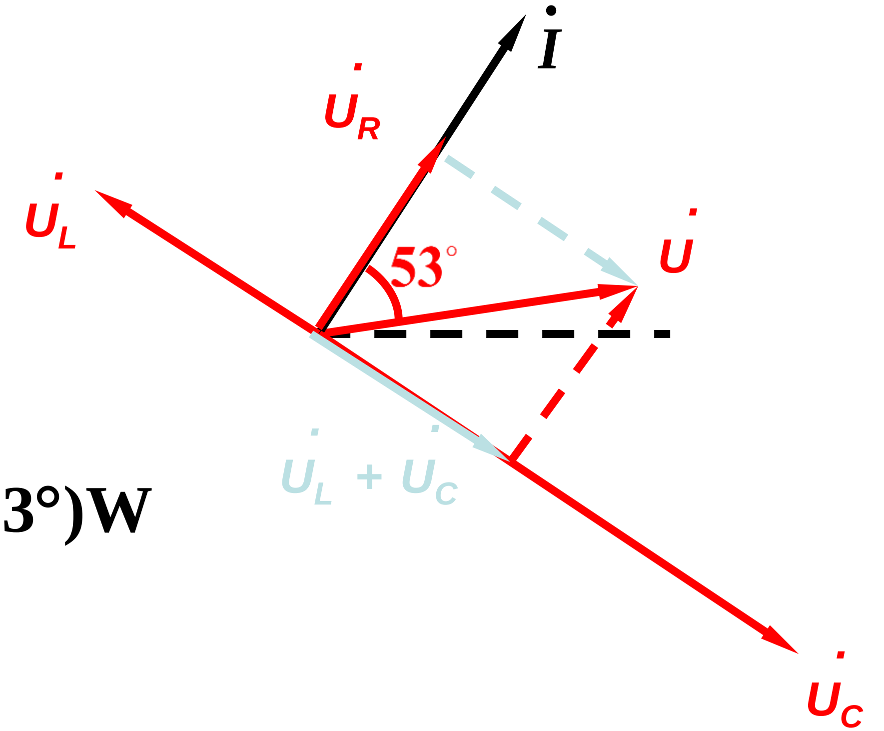
通过计算可看出：

$$U\neq U_R+U_L+U_C$$

而是

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$$

(3)相量图



(4)

$$P = UI\cos\varphi = 220\times4.4\times\cos(-53^\circ)\text{W}$$
$$= 580.8\text{W}$$

或 $P = U_R I = I^2 R = 580.8\text{W}$

$$Q = UI\sin\varphi = 220\times4.4\times\sin(-53^\circ)\text{var} = -774.4\text{var}$$

或 $Q = (U_L - U_C)I = I^2(X_L - X_C) = -774.4\text{var}$ 呈容性

方法2：复数运算

解：$\dot{U} = 220\underline{/20°}\text{V}$

$$Z = R + \text{j}(X_L - X_C) = (30 - \text{j}40)\Omega = 50\underline{/-53°}\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\underline{/20°}}{50\underline{/-53°}}\text{A} = 4.4\underline{/73°}\text{A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = 4.4\underline{/73°} \times 30\text{V} = 132\underline{/73°}\text{V}$$

$$\dot{U}_L = \text{j}\dot{I}X_L = \text{j}4.4 \times 40\underline{/73°}\text{V} = 176\underline{/163°}\text{V}$$

$$\dot{U}_C = -\text{j}\dot{I}X_C = -\text{j}4.4 \times 80\underline{/73°}\text{V} = 352\underline{/-17°}\text{V}$$

正误判断

在*RLC*串联电路中， 设 $\dot{I} = I\angle 0^\circ$

$I = \dfrac{U}{|Z|}$ √

$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z}$ √

$I = \dfrac{U}{Z}$ ×

$i = \dfrac{u}{|Z|}$ ×

$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{|Z|}$ ×

$\varphi = \arctan\dfrac{U_L - U_C}{U_R}$ √

$\varphi = \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R}$ √

$\varphi = \arctan\dfrac{\omega L - \omega C}{R}$

$\varphi = \arctan\dfrac{U_L - U_C}{U}$ ×

$I = \dfrac{U}{R + X_L + X_C}$ ×

$U = U_R + U_L + U_C$ ×

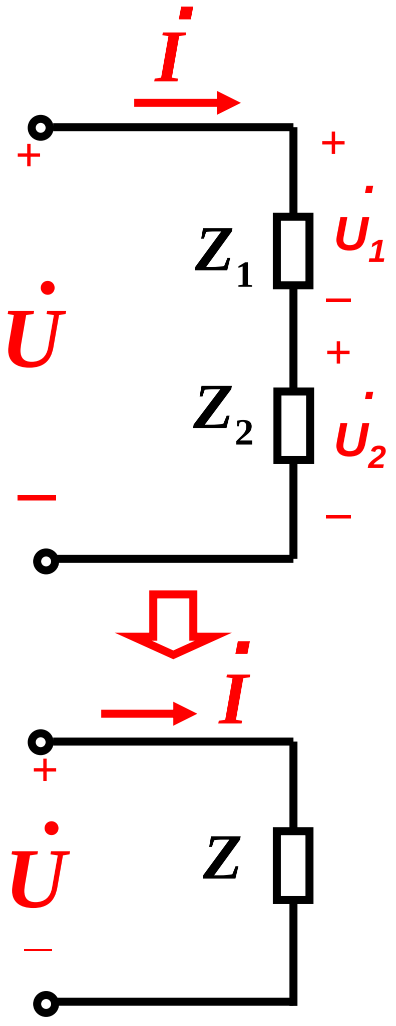
$u = u_R + u_L + u_C$ √

$Z = R + X_L + X_C$ ×

$Z = R + j(X_L + X_C)$ ×

4.5 阻抗的串联与并联

一、阻抗的串联



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1\dot{I} + Z_2\dot{I} = (Z_1 + Z_2)\dot{I}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

通式：$$Z = \sum Z_k = \sum R_k + \mathrm{j}\sum X_k$$

注意：$$|Z| \neq |Z_1| + |Z_2|$$

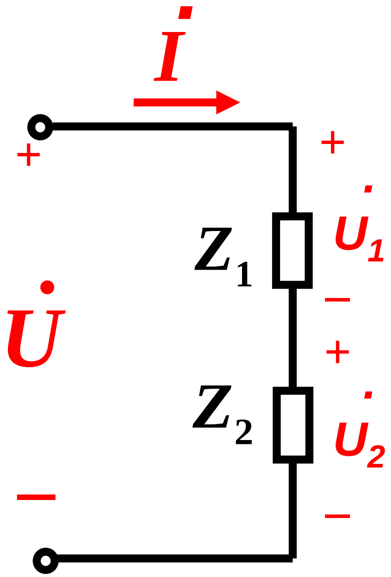
分压公式：

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{U} \qquad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$$

例1: 有两个阻抗 $Z_1 = 6.16 + j9\Omega$ $Z_2 = 2.5 - j4\Omega$

它们串联接在 $\dot{U} = 220\angle 30°\text{V}$ 的电源;

求: $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 并作相量图。



解: $Z = Z_1 + Z_2 = (6.16 + 2.5) + j(9 - 4)$

$= 8.66 + j5 = 10\angle 30°\Omega$

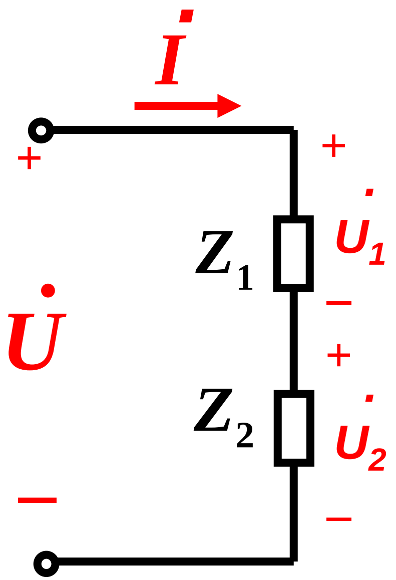
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 30°}{10\angle 30°} = 22\angle 0°\text{A}$$

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I} = (6.16 + j9) \times 22\text{V}$$

$$= 10.9\angle 55.6° \times 22\text{V} = 239.8\angle 55.6°\text{V}$$

同理: $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I} = (2.5 - j4) \times 22\text{V} = 103.6\angle -58°\text{V}$

或利用分压公式:



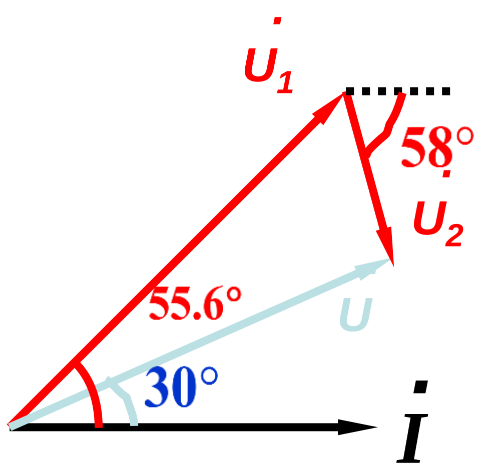
$$\dot{U}_1=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{U}=\frac{6.16+j9}{8.66+j5}\times 220\angle 30^\circ\text{V}$$

$$=239.8\angle 55.6^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_2=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{U}=\frac{2.5-j4}{8.66+j5}\times 220\angle 30^\circ\text{V}$$

$$=103.6\angle -58^\circ\text{V}$$

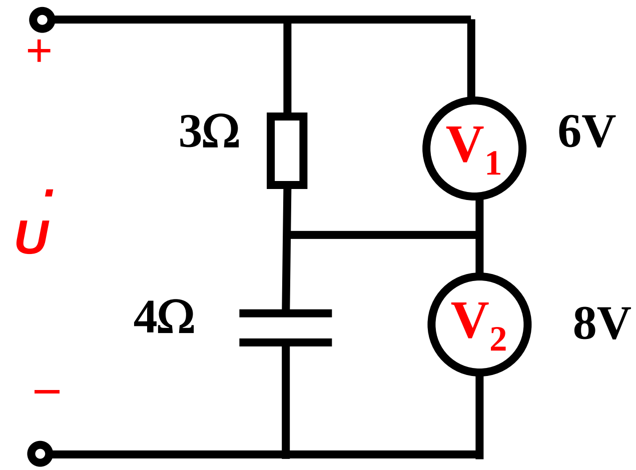
相量图



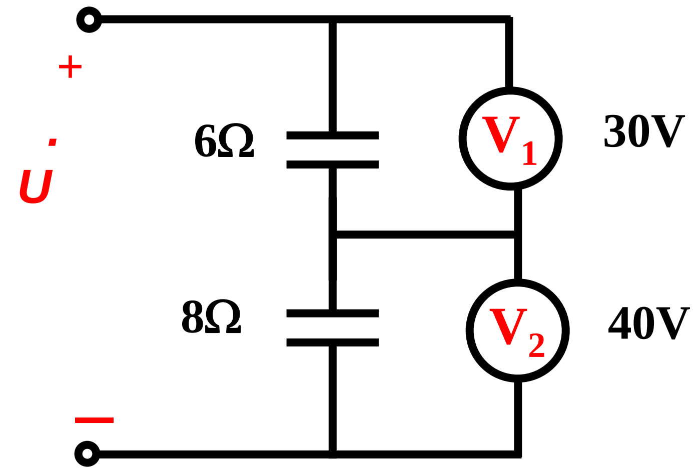
注意: $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

$U\neq U_1+U_2$

下列各图中给定的电路电压、阻抗是否正确?



(a)



(b)

A. $|Z|=7\,\Omega$ $\quad U=14V$

B. $|Z|=5\,\Omega$ $\quad U=10U$ √

C. $|Z|=5\,\Omega$ $\quad U=2V$

D. $|Z|=2.4\,\Omega$ $\quad U=14U$

A. $|Z|=14\,\Omega$ $\quad U=50V$

B. $|Z|=14\,\Omega$ $\quad U=70U$ √

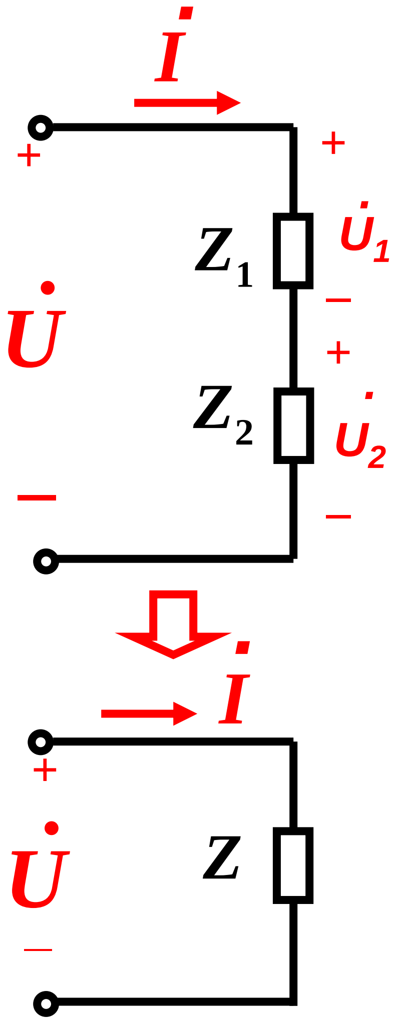
C. $|Z|=2.4\,\Omega$ $\quad U=10V$

D. $|Z|=10\,\Omega$ $\quad U=70U$

两个阻抗串联时,在什么情况下: $|Z|=|Z_1|+|Z_2|$ 成立。

4.5 阻抗的串联与并联

一、阻抗的串联



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1\dot{I} + Z_2\dot{I} = (Z_1 + Z_2)\dot{I}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

通式: $$Z = \sum Z_k = \sum R_k + \mathrm{j}\sum X_k$$

注意: $$|Z| \neq |Z_1| + |Z_2|$$

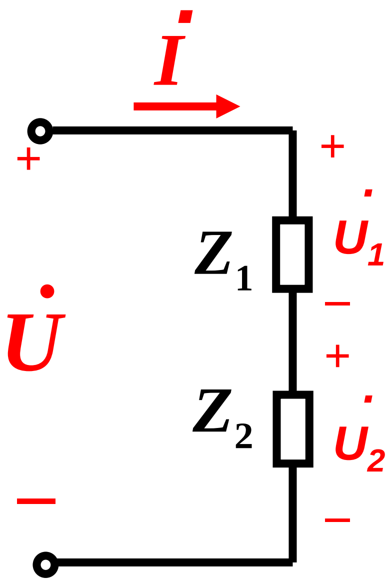
分压公式:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{U} \qquad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$$

例1: 有两个阻抗 $Z_1 = 6.16 + j9\Omega$ $Z_2 = 2.5 - j4\Omega$

它们串联接在 $\dot{U} = 220\angle 30°\text{V}$ 的电源;

求: $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 并作相量图。



解: $Z = Z_1 + Z_2 = (6.16 + 2.5) + j(9 - 4)$

$= 8.66 + j5 = 10\angle 30°\Omega$

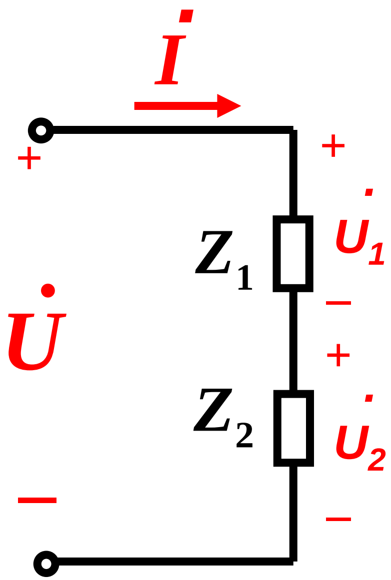
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 30°}{10\angle 30°} = 22\angle 0°\text{A}$$

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I} = (6.16 + j9) \times 22\text{V}$$

$$= 10.9\angle 55.6° \times 22\text{V} = 239.8\angle 55.6°\text{V}$$

同理: $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I} = (2.5 - j4) \times 22\text{V} = 103.6\angle -58°\text{V}$

或利用分压公式:



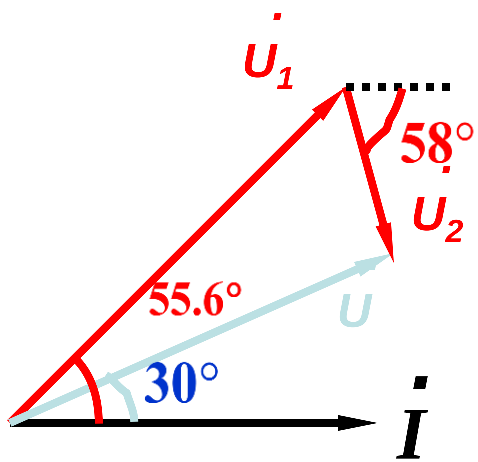
$$\dot{U}_1=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{U}=\frac{6.16+j9}{8.66+j5}\times 220\angle 30^\circ\text{V}$$

$$=239.8\angle 55.6^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_2=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{U}=\frac{2.5-j4}{8.66+j5}\times 220\angle 30^\circ\text{V}$$

$$=103.6\angle -58^\circ\text{V}$$

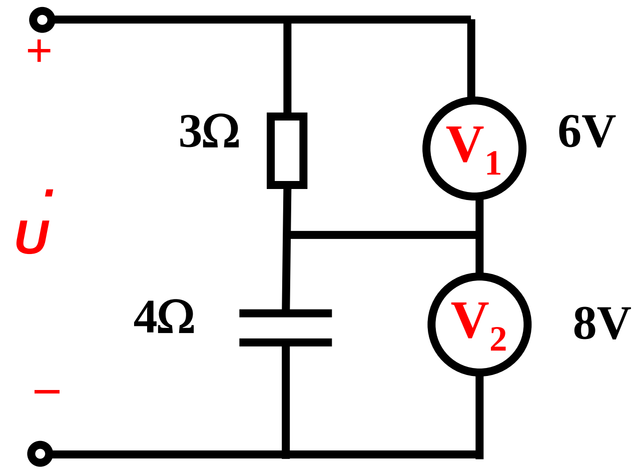
相量图



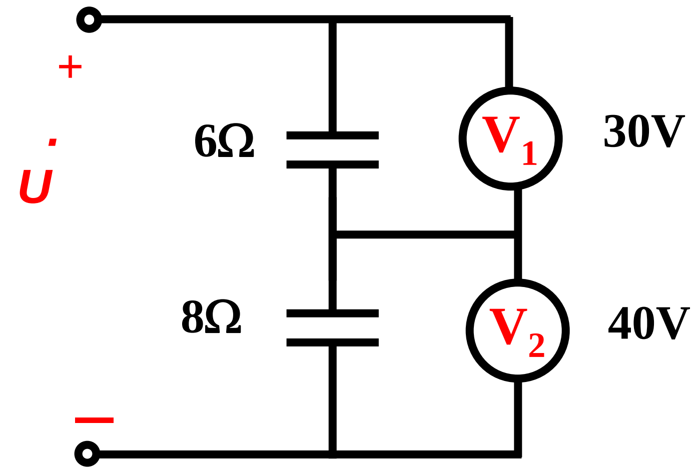
注意: $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

$U\neq U_1+U_2$

下列各图中给定的电路电压、阻抗是否正确？



(a)



(b)

(a)

A. $|Z|=7\,\Omega$ $U=14V$

B. $|Z|=5\,\Omega$ $U=10U$ √

C. $|Z|=5\,\Omega$ $U=2V$

D. $|Z|=2.4\,\Omega$ $U=14U$

(b)

A. $|Z|=14\,\Omega$ $U=50V$

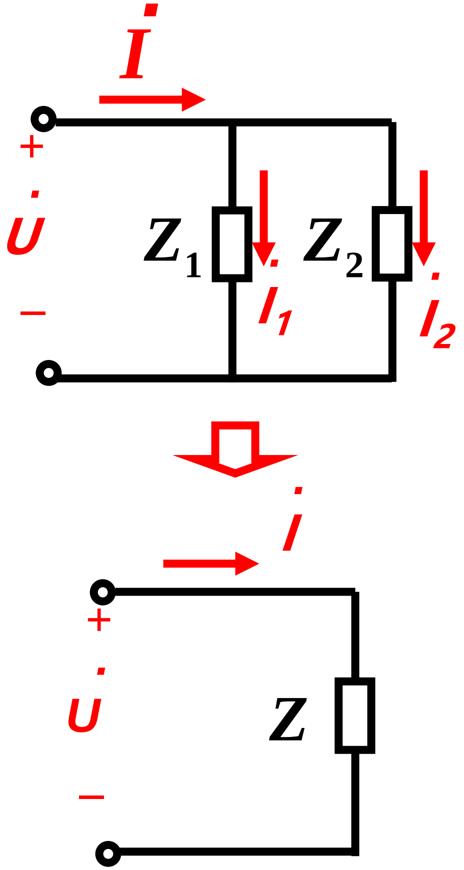
B. $|Z|=14\,\Omega$ $U=70U$ √

C. $|Z|=2.4\,\Omega$ $U=10V$

D. $|Z|=10\,\Omega$ $U=70U$

两个阻抗串联时,在什么情况下： $|Z|=|Z_1|+|Z_2|$ 成立。

二、 阻抗并联



$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \qquad \boxed{Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

通式： $$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}$$

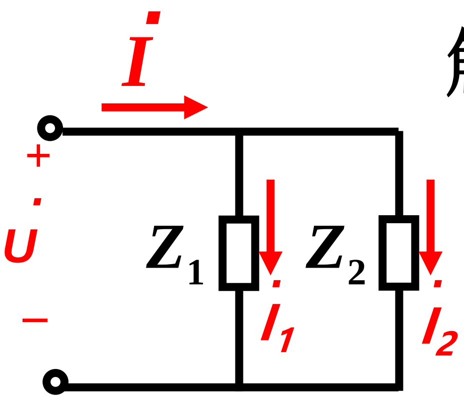
注意： $$\frac{1}{|Z|} \neq \frac{1}{|Z_1|} + \frac{1}{|Z_2|}$$

分流公式： $$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{I} \qquad \dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{I}$$

例2: 有两个阻抗 $Z_1 = 3 + j4\Omega$ $Z_2 = 8 - j6\Omega$

它们并联接在 $\dot{U} = 220\angle 0°\text{V}$ 的电源上;

求: $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 和 $\dot{I}$ 并作相量图。



解: $$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5\angle 53° \times 10\angle -37°}{3 + j4 + 8 - j6}\Omega$$

$$= \frac{50\angle 16°}{11.8\angle -10.5°}\Omega = 4.47\angle 26.5°\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0°}{5\angle 53°}\text{A} = 44\angle -53°\text{A}$$

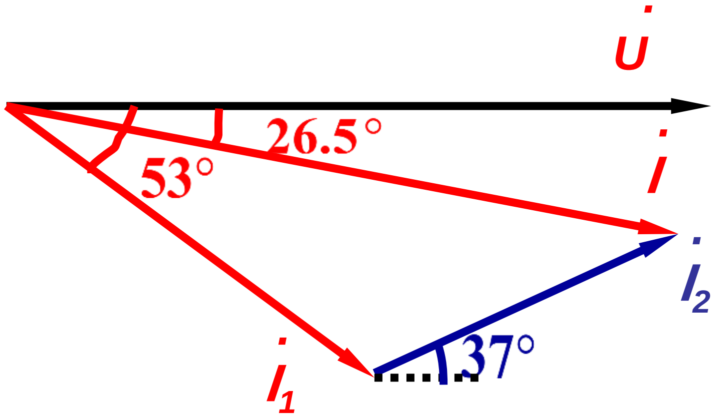
同理: $$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 0°}{10\angle -37°}\text{A} = 22\angle 37°\text{A}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{220\angle 0^\circ}{4.47\angle 26.5^\circ}=49.2\angle -26.5^\circ\text{A}$$

或

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=44\angle -53^\circ\text{A}+22\angle 37^\circ\text{A}$$

$$=49.2\angle -26.5^\circ\text{A}$$

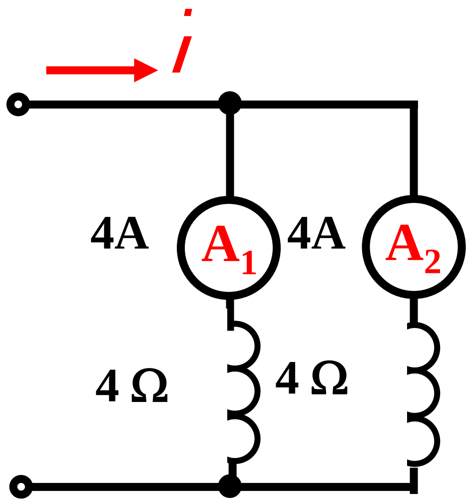


相量图

注意：$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$

$$I\neq I_1+I_2$$

下列各图中给定的电路电流、阻抗是否正确？



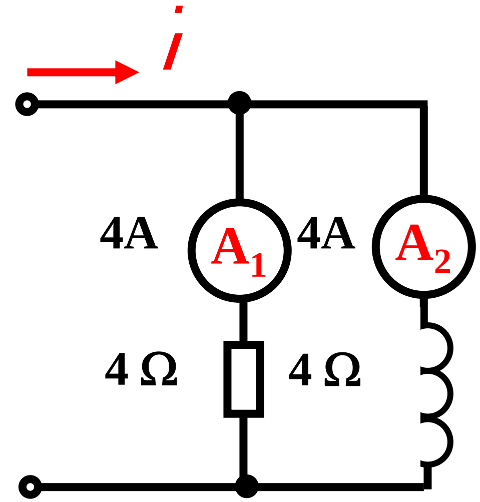
(*c*)

A. $|Z|=2\,\Omega$　　$I=8\text{A}$　√

B. $|Z|=8\,\Omega$　　$I=2\text{A}$

C. $|Z|=2\,\Omega$　　$I=4\text{A}$

D. $|Z|=4\,\Omega$　　$I=8\text{A}$



(*d*)

A. $|Z|=2\,\Omega$　　$I=8\text{A}$

B. $|Z|=8\,\Omega$　　$I=4\sqrt{2}\,\text{A}$

C. $|Z|=2\sqrt{2}\,\Omega$　　$I=8\text{A}$

D. $|Z|=2\sqrt{2}\,\Omega$　　$I=4\sqrt{2}\,\text{A}$　√

两个阻抗并联时,在什么情况下：$\dfrac{1}{|Z|}=\dfrac{1}{|Z_1|}+\dfrac{1}{|Z_2|}$ 成立。

一般正弦交流电路的解题步骤

1. 根据原电路图画出相量模型图(电路结构不变)

$$R \to R、\ L \to \mathrm{j}X_L \text{ 或 } j\omega L、\ C \to -\mathrm{j}X_C \text{ 或 } \frac{1}{j\omega C}$$

$$u \to \dot{U}、\quad i \to \dot{I}、\quad e \to \dot{E}$$

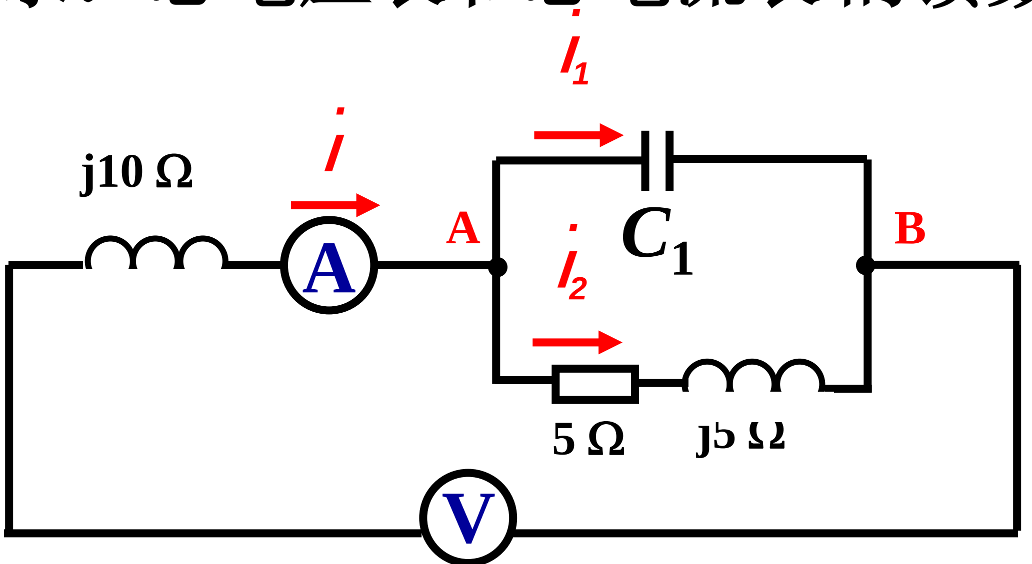
2. 根据相量模型列出相量方程式或画相量图

3. 用相量法或相量图求解

4. 将结果变换成要求的形式

例2： 下图电路中已知：I_1=10A、U_{AB} =100V，

求：总电压表和总电流表 的读数。



法1：用相量计算

解题方法有两种：(1) 用相量(复数)计算

(2) 利用相量图分析求解

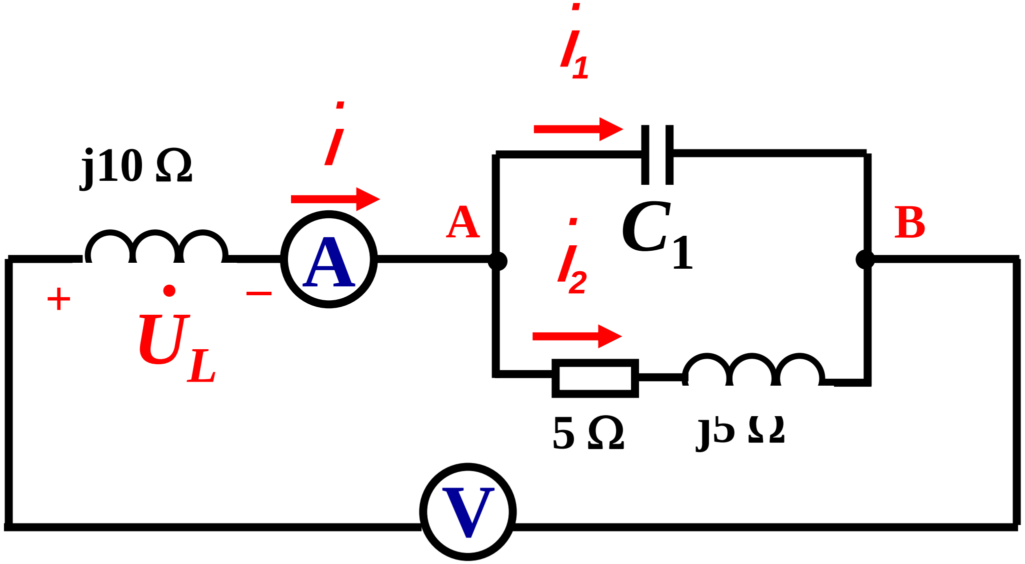
设：$\dot{U}_{AB}$ 为参考相量，即：$\dot{U}_{AB} = 100\angle 0^\circ$ V

则：$\dot{I}_2 = [100/(5+j5)]\ \text{A} = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ$ A

$\dot{I}_1 = 10\angle 90^\circ \text{A} = j10\ \text{A}$

$$\boxed{\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ \text{A}}$$

所以A读数为 10安



已知：I_1=10A、
U_{AB} =100V，

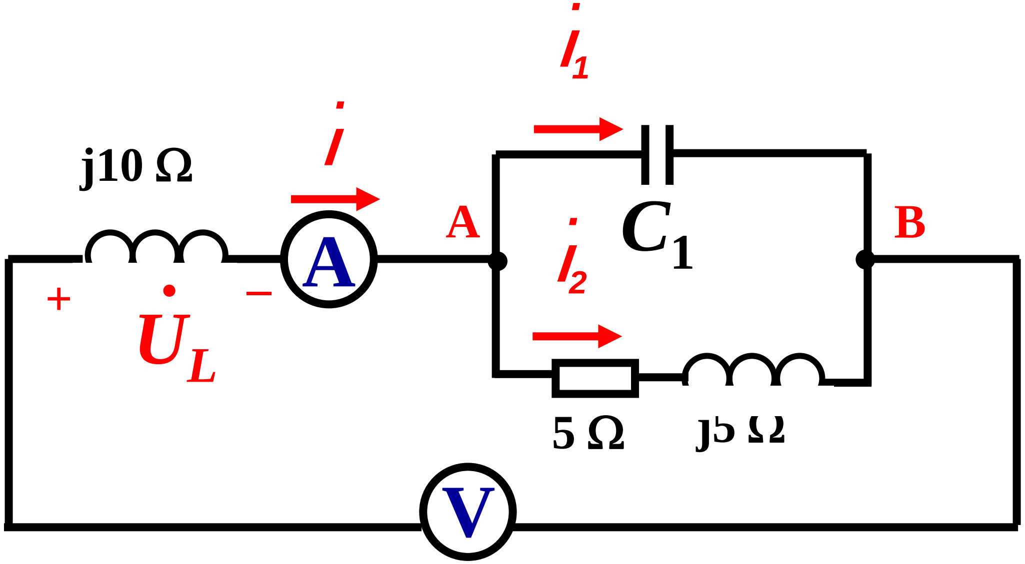
求：A、V 的读数

因为 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ\ \text{A}$

所以 $\dot{U}_L = \dot{I}(\text{j}10)\text{V} = \text{j}100\ \text{V}$

$$\boxed{\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_{AB} = 100 + \text{j}100\text{V} = 100\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{V}}$$

∴ V 读数为141V



已知：I_1=10A、
U_{AB} =100V，

求：A、V 的读数

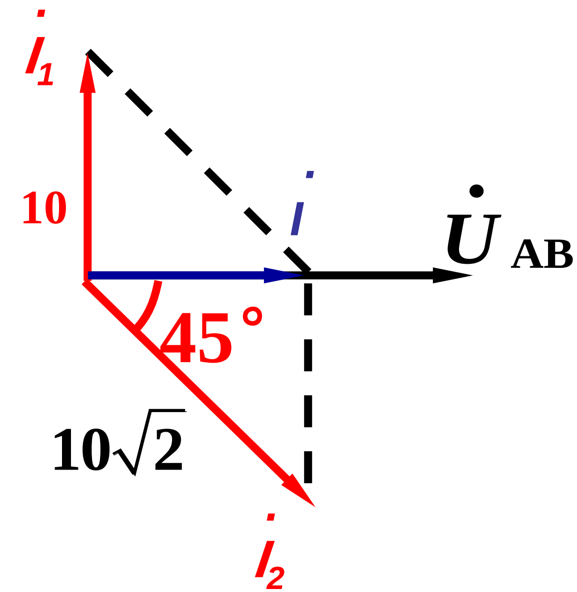
法2：利用相量图分析求解

设 $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量,

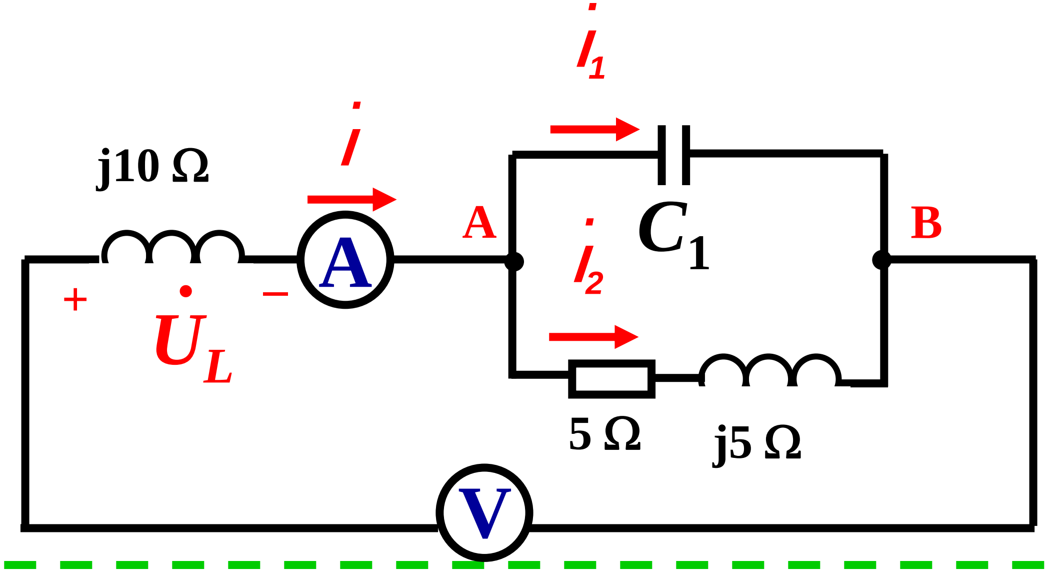
$I_1 = 10\text{A}$　$\dot{I}_1$ 超前 $\dot{U}_{AB}$ 90°

$$I_2 = \frac{100}{\sqrt{5^2+5^2}} = 10\sqrt{2}\text{A},$$

$\dot{I}_2$滞后$\dot{U}_{AB}$ 45°



由相量图可求得：　I =10 A



已知：I_1=10A、

U_{AB} =100V，

求：A、V 的读数

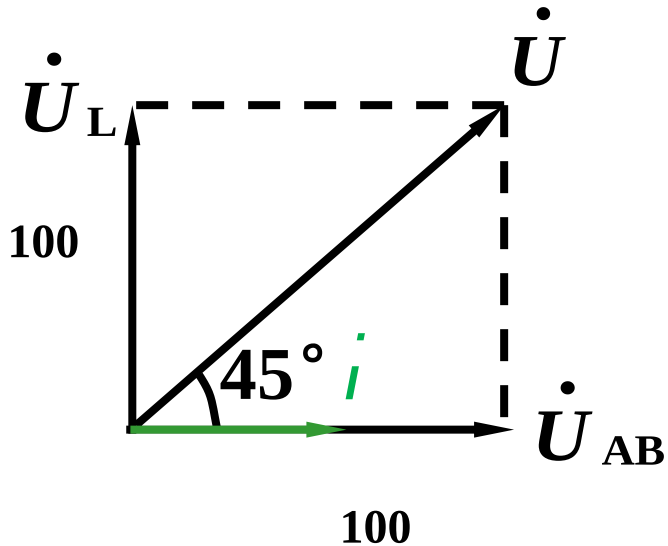
设 $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量，

$U_L = I\ X_L = 100V$

$\dot{U}_L$ 超前 $\dot{I}$ 90°

由相量图可求得：

$\boxed{U = 141V}$



4.6 复杂正弦交流电路的分析和计算

若正弦量用相量 $\dot{U}$、$\dot{I}$ 表示，电路参数用复数阻抗（$R \to R$、$L \to j\omega L$、$C \to -j\dfrac{1}{\omega C}$）表示，则直流电路中介绍的基本定律、定理及各种分析方法在正弦交流电路中都能使用。

相量（复数）形式的欧姆定律

电阻电路	纯电感电路	纯电容电路	一般电路
$\dot{U} = \dot{I}R$	$\dot{U} = \dot{I}(j\omega L) = \dot{I}(jX_L)$	$\dot{U} = \dot{I}\left(\dfrac{1}{j\omega C}\right) = \dot{I}(-jX_C)$	$\dot{U} = \dot{I}Z$

相量形式的基尔霍夫定律

KCL $\sum \dot{I} = 0$ **KVL** $\sum \dot{U} = 0$

有功功率 P

有功功率等于电路中各电阻有功功率之和，或各支路有功功率之和。

$$P=\sum_{1}^{i} I_{i}^{2} R_{i} \quad \text{或} \quad P=\sum_{1}^{i} U_{i} I_{i} \cos \varphi_{i}$$

φ_i为$\dot{U}_i$与$\dot{I}_i$的相位差

无功功率 Q

无功功率等于电路中各电感、电容无功功率之和，或各支路无功功率之和。

$$Q=\sum_{1}^{i} I_{i}^{2}\left(X_{Li}-X_{Ci}\right) \quad \text{或} \quad Q=\sum_{1}^{i} U_{i} I_{i} \sin \varphi_{i}$$

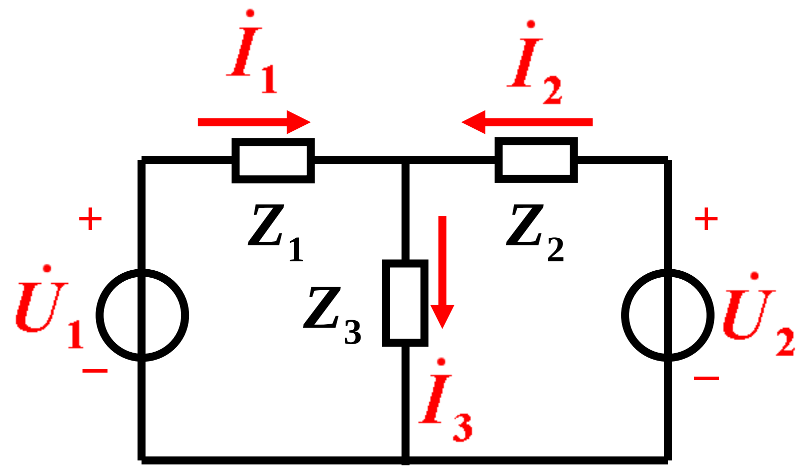
同第二章计算复杂直流电路一样,支路电流法、结点电压法、叠加原理、戴维南定理等方法也适用于计算复杂交流电路。所不同的是电压和电流用相量表示,电阻、电感、和电容及组成的电路用阻抗来表示，采用相量法计算。

例1: 图示电路中，已知

$\dot{U}_1 = 230\angle 0°\text{V}$, $\dot{U}_2 = 227\angle 0°\text{V}$,

$Z_1 = Z_2 = (0.1 + \text{j}0.5)\Omega$,

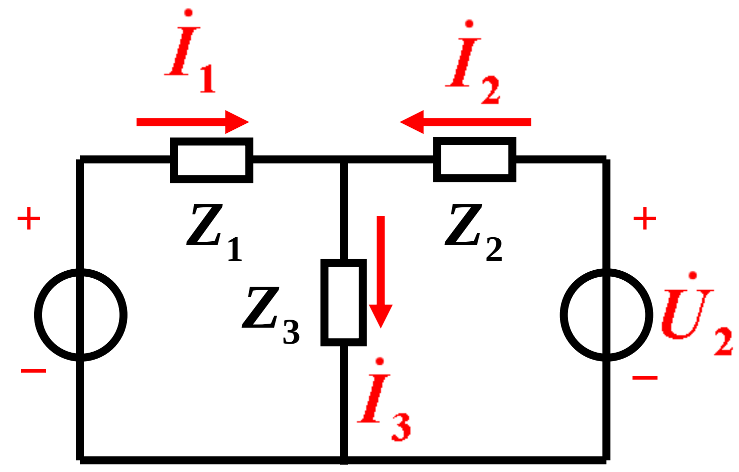
$Z_3 = (5 + \text{j}5)\Omega$



试用支路电流法求电流 $\dot{I}_3$。

解：应用基尔霍夫定律列出相量表示方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{U}_1 \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{U}_2 \end{cases}$$

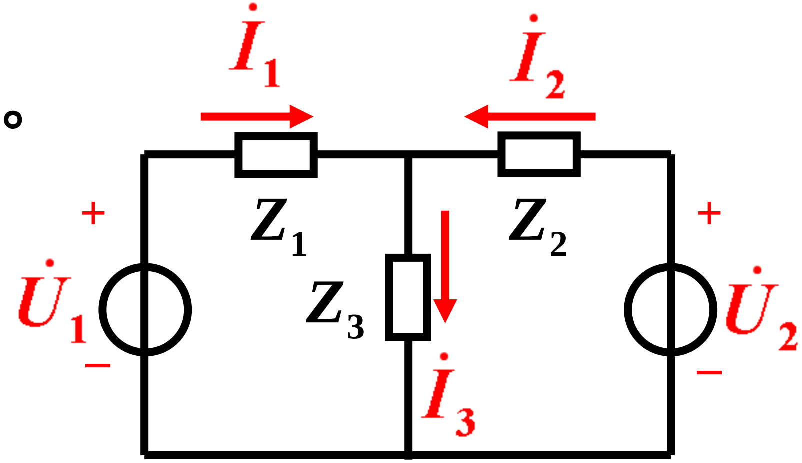


代入已知数据，可得：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ (0.1 + j0.5)\dot{I}_1 + (5 + j5)\dot{I}_3 = 230\angle 0^\circ \mathrm{V} \\ (0.1 + j0.5)\dot{I}_2 + (5 + j5)\dot{I}_3 = 227\angle 0^\circ \mathrm{V} \end{cases}$$

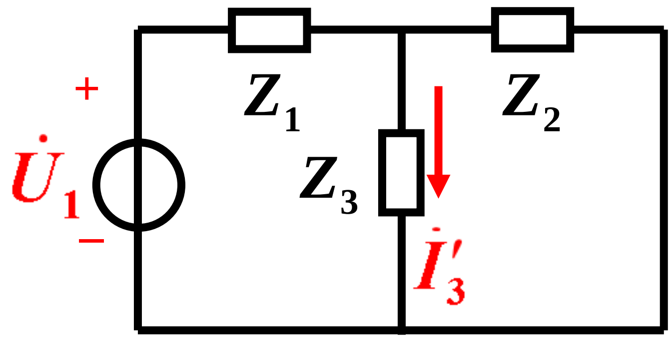
解之，得：$\dot{I}_3 = 31.3\angle -46.1^\circ \mathrm{A}$

例2: 应用叠加原理计算上例。



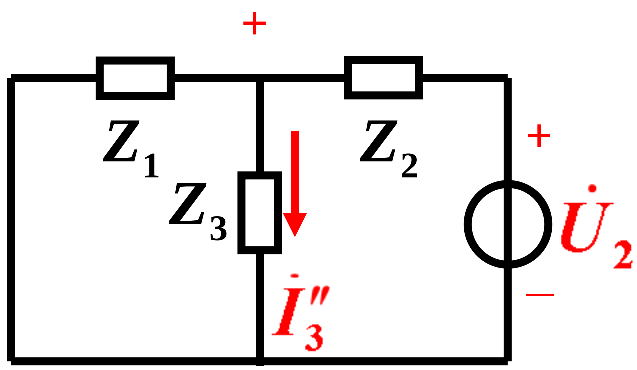
解: (1) 当 $\dot{U}_1$ 单独作用时

$$\dot{I}'_3 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2 // Z_3} \times \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$



同理（2）当 $\dot{U}_2$ 单独作用时

$$\dot{I}''_3 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2 + Z_1 // Z_3} \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$



$$\dot{I}_3 = \dot{I}'_3 + \dot{I}''_3 = 31.3 \angle -46.1° \text{A}$$

例3: 应用戴维宁计算上例。

解：(1)断开Z_3支路，

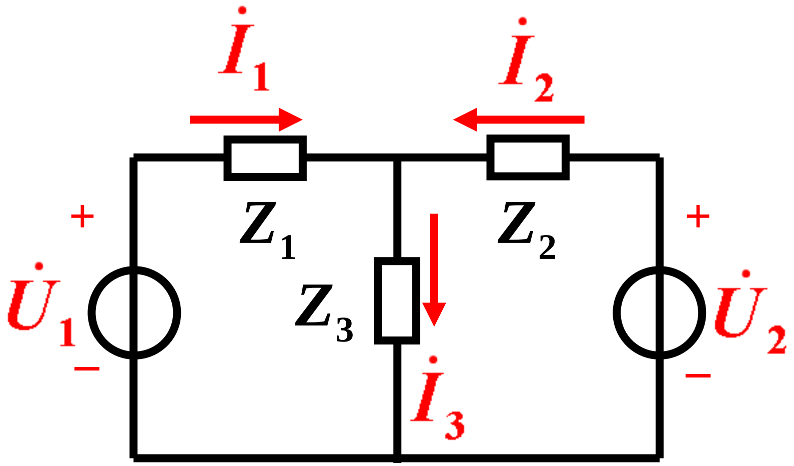
求开路电压 $\dot{U}_0$

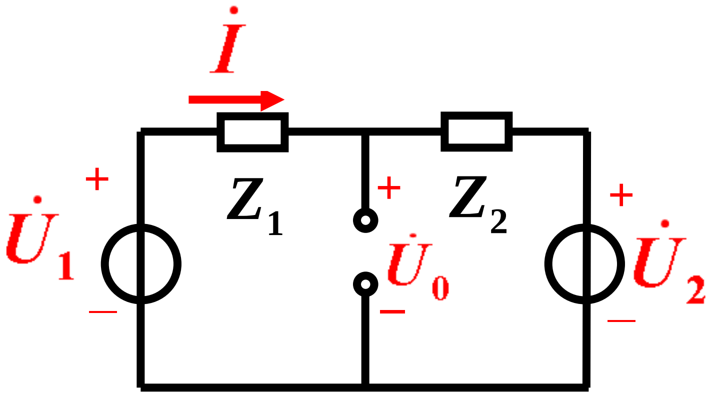
$$\dot{U}_0=\frac{\dot{U}_1-\dot{U}_2}{Z_1+Z_2}\times Z_2+\dot{U}_2=228.85\angle 0^{\circ}\mathrm{V}$$

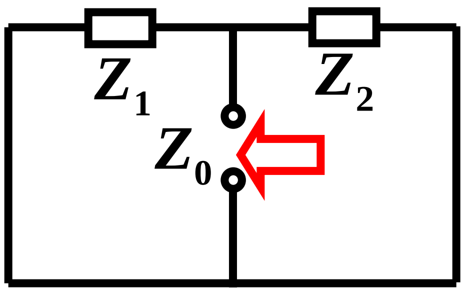
(2)求等效内阻抗 Z_0

$$Z_0=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{Z_1}{2}=(0.05+\mathrm{j}0.25)\Omega$$

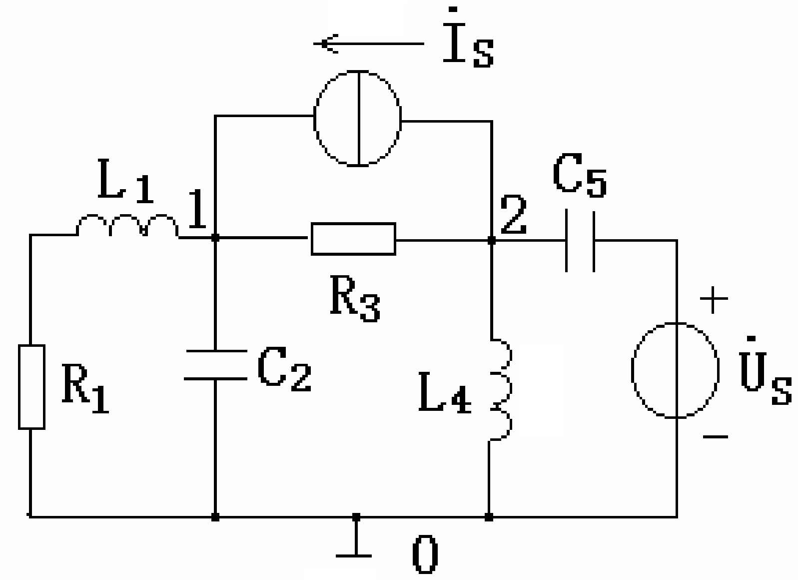
(3) $$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_0}{Z_0+Z_3}=31.3\angle -46.1^{\circ}\mathrm{A}$$







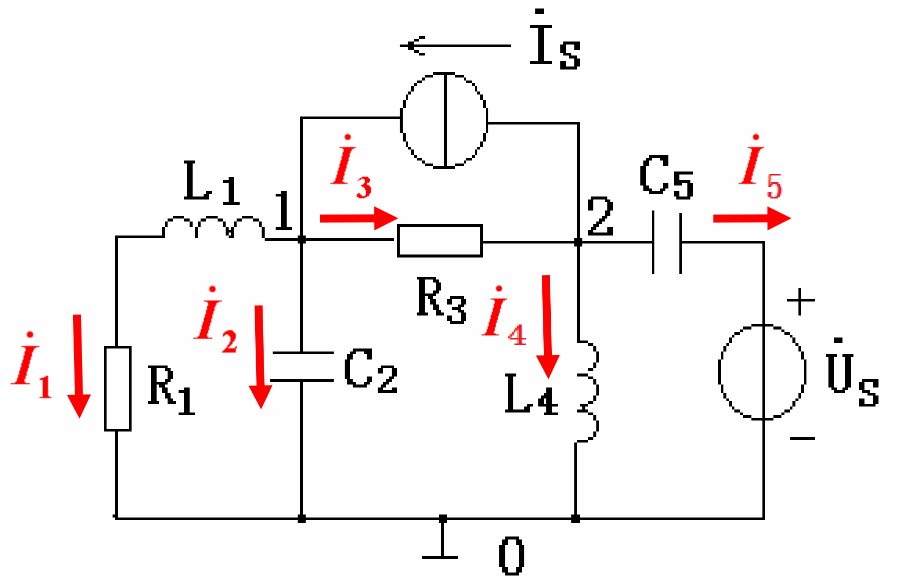
习题：写出图示电路的节点电压方程。



$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1+j\omega L_1}+\frac{1}{\dfrac{1}{j\omega C_2}}\right)\dot{U}_{n1}-\frac{1}{R_3}\dot{U}_{n2}=\dot{I}_S$$

$$-\frac{1}{R_3}\dot{U}_{n1}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L_4}+\frac{1}{\dfrac{1}{j\omega C_5}}\right)\dot{U}_{n2}=\frac{\dot{U}_S}{\dfrac{1}{j\omega C_5}}-\dot{I}_S$$

习题：写出图示电路的支路电流法方程。



$$-\dot{I}_1-\dot{I}_2-\dot{I}_3+\dot{I}_S=0$$

$$\dot{I}_3-\dot{I}_4-\dot{I}_5-\dot{I}_S=0$$

$$\dot{I}_2\frac{1}{j\omega C_2}-\dot{I}_1\left(R_1+j\omega L_1\right)=0$$

$$\dot{I}_3R_3+\dot{I}_4\left(j\omega L_4\right)-\dot{I}_2\frac{1}{j\omega C_2}=0$$

$$\dot{I}_5\frac{1}{j\omega C_5}+\dot{U}_S-\dot{I}_4\left(j\omega L_4\right)=0$$