张量分析简明教程知识点

2015.6.23

1.1. ① $\underline{P} = P^1\underline{g}_1 + P^2\underline{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} P^\alpha \underline{g}_\alpha = P^\alpha \underline{g}_\alpha$ 约定求和(爱因斯坦约定) α：哑指标

② $\underline{g}_i$ 协变基矢量(沿坐标线)
$\underline{g}^i$ 逆变基矢量(新引入) $\Big\}$ $\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ (kronecker delta)
逆变基矢量的确定方法　两者满足正交归一关系.

③ $\underline{P} = p^i\underline{g}_i = p_i\underline{g}^i$，$p^i$ 称为逆变分量，p_i 称为协变分量

$\cdot\ \underline{P}\cdot\underline{g}^i = (p^j\underline{g}_j)\cdot\underline{g}^i = p^j\cdot(\underline{g}_j\cdot\underline{g}^i) = p^j\delta^i_j \overset{j=i}{=\!=} p^i \Rightarrow p^i = \underline{P}\cdot\underline{g}^i \quad p_i = \underline{P}\cdot\underline{g}_i$

④. $\underline{u}\cdot\underline{v} = u_i\underline{g}^i\cdot v^j\underline{g}_j = u_i v^j \delta^i_j \overset{j=i}{=\!=} u_i v^i$ 同理 $\underline{u}\cdot\underline{v} = u^i v_i$

⑤ $|\underline{P}| = \sqrt{\underline{P}\cdot\underline{P}} = \sqrt{p^i\underline{g}_i\cdot p_j\underline{g}^j} = \sqrt{p^i p_j \delta^j_i} = \sqrt{p^i p_i}$ ($\sqrt{\text{逆变分量}\cdot\text{协变分量}}$)

1.2 ① $\underline{R}$ 矢径. 协变基矢量 $\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}$，($\underline{g}^i = \frac{\partial R}{\partial x_i}$ 错误) 协变基矢量的确定方法

② 曲线坐标系是局部坐标系，每一点基矢量都不同。基矢量是点的函数。

1.3 ① $\underline{g}_{i'} = \beta^j_{i'}\underline{g}_j$，$\beta^j_{i'}$：协变变换系数
$\underline{g}^{i'} = \beta^{i'}_j\underline{g}^j$，$\beta^{i'}_j$：逆变变换系数 $\Big\}$ 新基在老坐标系中的分解式：系数由九个数组成. i' 自由标，表三个式子. j 哑标，表求和.

②. $\delta^{k'}_{i'} = \underline{g}_{i'}\cdot\underline{g}^{k'} = \beta^j_{i'}\underline{g}_j\cdot\beta^{k'}_l\underline{g}^l = \beta^j_{i'}\beta^{k'}_l\delta^l_j \begin{cases} =\beta^l_{i'}\beta^{k'}_l \\ =\beta^j_{i'}\beta^{k'}_j \end{cases} = \beta^j_{i'}\beta^{k'}_j = \delta^{k'}_{i'}$

$\beta^{i'}_k$　i' 在上，逆变
$\beta^k_{i'}$　i' 在下，协变.

③. $\underline{g}_k = \beta^{i'}_k\underline{g}_{i'}$，
$\underline{g}^k = \beta^k_{i'}\underline{g}^{i'}$，$\Big\}$ 老基在新坐标系中的分解式　下指标表示行，下上指标表示列　$\delta^j_k = \beta^{i'}_k\cdot\beta^j_{i'}$

④ 如何求 $\beta^j_{i'}$ 与 $\beta^{i'}_j$？ $\underline{g}_i = \frac{\partial R}{\partial x^i}$，$\underline{g}_{i'} = \frac{\partial R}{\partial x^{i'}}$ $\therefore \underline{g}_{i'} = \frac{\partial R}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial R}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\underline{g}_j = \beta^j_{i'}\underline{g}_j$

$\therefore \beta^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$ 同理 $\beta^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial j}$

⑤. $v_{j'} = \beta^i_{j'} v_i$
$v^{j'} = \beta^{j'}_i v^i$ $\Big\}$ 同一矢量在不同坐标系中的协(逆)变分量之间的变换关系.

1.4 在三维空间中，3^n 个数的集合称为张量，只要它们在两个不同坐标系中的值满足由式 $T^{j_1'\cdots j_n'}_{i_1'\cdots i_m'} = \beta^{j_1'}_{j_1}\cdots\beta^{j_n'}_{j_n}\beta^{i_1}_{i_1'}\cdots\beta^{i_m}_{i_m'}T^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$（定义式）给出的变换关系。（证明关键在满足变换）张量的定义

1.5. ① 张量实体表示：N阶张量分量配以N个相应的基矢量构成N阶张量实体（不变性记法）
以3阶张量为例：$\underset{\sim}{T} = T^{ijk}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}_k = T_i^{\cdot jk}\underline{g}^i\underline{g}_j\underline{g}_k = T_{ijk}\underline{g}^i\underline{g}^j\underline{g}^k$

② 并乘(并矢、张量积) $\underline{a}\,\underline{b}\,(\underline{a}\otimes\underline{b}) = a^i\underline{g}_i\, b^j\underline{g}_j = a^i b^j \boxed{\underline{g}_i\underline{g}_j}$ (共4种表达式) 基矢量次序不能随意变动。③ 对于张量分量，N个自由标 = N阶张量；对于张量实体，N个并基 = N阶张量。

1.6 ① $\underline{g_i} = g_{ij}\underline{g^j}$, $\underline{g^i} = g^{ij}\underline{g_j}$

② ☆ $g_{ij} = \underline{g_i}\cdot\underline{g_j}$, $g^{ij} = \underline{g^i}\cdot\underline{g^j}$ （$g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$） 求解式

③ $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ 证明：$\delta_i^j = \underline{g_i}\cdot\underline{g^j} = (g_{ik}\underline{g^k})\cdot\underline{g^j} = g_{ik}(\underline{g^k}\cdot\underline{g^j}) = g_{ik}g^{kj}$

④ 度量张量 $\underset{\sim}{G}$　$\underset{\sim}{G} = g_{ij}\underline{g^i}\underline{g^j} = g^{ij}\underline{g_i}\underline{g_j} = \delta_i^j\underline{g^i}\underline{g_j} = \delta_j^i\underline{g_i}\underline{g^j}$（实体形式

如何证明 g_{ij} 与 g^{ij} 是同一个张量的协、逆变分量？

1. 先证明 g_{ij} , g^{ij} 是张量的协、逆变分量。

补充：两个向量点积
$\underline{a}\cdot\underline{b} = a^i\underline{g_i}\, b_j\underline{g^j} = a^i b_j\delta_i^j = a^i b_i$
$= a_i b^i$

$g_{i'j'} = \underline{g_{i'}}\cdot\underline{g_{j'}}$, $g^{i'j'} = \underline{g^{i'}}\cdot\underline{g^{j'}}$

$g_{i'j'} = \underline{g_{i'}}\cdot\underline{g_{j'}} = (\beta_{i'}^{i}\underline{g_i})\cdot(\beta_{j'}^{j}\underline{g_j}) = \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\underline{g_i}\cdot\underline{g_j} = \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}g_{ij}$ 同理 $g^{i'j'} = \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}g^{ij}$

满足张量的定义式，故得证。

2. 设 g_{ij} 是某张量 $\underset{\sim}{G}$ 的协变分量，即 $\underset{\sim}{G} = g_{ij}\underline{g^i}\underline{g^j}$ ，可改写为

$\underset{\sim}{G} = g_{kl}\underline{g^k}\underline{g^l} = g_{kl}(g^{ki}\underline{g_i})(g^{lj}\underline{g_j}) = \underline{g_{lk}g^{ki}}g^{lj}\underline{g_i}\cdot\underline{g_j} = \delta_l^i g^{lj}\underline{g_i}\cdot\underline{g_j} \overset{l=i}{=\!=} g^{ij}\underline{g_i}\cdot\underline{g_j}$

得证。

⑤ 线元长度 ds ：$(ds)^2 = d\underline{R}\cdot d\underline{R} = (\underline{g_i}dx^i)\cdot(\underline{g_j}dx^j) = \boxed{g_{ij}}dx^i dx^j$

⑥ 利用 g^{ij} 与 g_{ij} 可以升降指标。例：$u_i\cdot g^{ij} = u^j$, $u^i\cdot g_{ij} = u_j$

$T_i^{\cdot j}\cdot g^{ik} = T^{kj}$, $T^{ij}\cdot g_{jk} = T^{i}_{\cdot k}$, $T_{ij}\cdot g^{ik}g^{jl} = T^{kl}$

1.7. ① $g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$, $\frac{1}{g} = |g^{ij}| = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}$　$[\underline{g_1}\underline{g_2}\underline{g_3}] = \sqrt{g}$

$[\underline{g^1}\underline{g^2}\underline{g^3}] = \frac{1}{\sqrt{g}}$

② $\varepsilon_{ijk} = [\underline{g_i}\underline{g_j}\underline{g_k}] = \begin{cases} \sqrt{g} & i,j,k\text{为偶排列} \\ -\sqrt{g} & i,j,k\text{为奇排列} \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$

$\varepsilon^{ijk} = [\underline{g^i}\underline{g^j}\underline{g^k}] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{g}} & i,j,k\text{为偶排列} \\ -\frac{1}{\sqrt{g}} & i,j,k\text{为奇排列} \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}$

偶排列	奇排列
1 2 3	1 3 2
2 3 1	3 2 1
3 1 2	2 1 3

ε_{ijk} , ε^{ijk} 是置换张量 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 的协变分量及逆变分量

$\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk}\underline{g^i}\underline{g^j}\underline{g^k} = \varepsilon^{ijk}\underline{g_i}\underline{g_j}\underline{g_k}$（实体形式）任意交换指标位置，改变符号，反对称

③ 叉积：$\underline{u}\times\underline{v} = \varepsilon_{ijk}u^j u^k\underline{g^i} = \varepsilon^{ijk}u_j u_k\underline{g_i}$　$\underline{u}\times\underline{v} = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \underline{g^1} & \underline{g^2} & \underline{g^3} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \underline{g_1} & \underline{g_2} & \underline{g_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

对于协逆变基矢量 ☆ $\underline{g_i}\times\underline{g_j} = \varepsilon_{ijk}\underline{g^k}$　$\underline{g^i}\times\underline{g^j} = \varepsilon^{ijk}\underline{g_k}$

④ 混合积：$[\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}] = \varepsilon_{ijk}u^i v^j w^k = \varepsilon^{ijk}u_i v_j w_k$　$(\underline{u}\times\underline{v})^k = \varepsilon^{ijk}u_i v_j$　$(\underline{u}\times\underline{v})_k = \varepsilon_{ijk}u^i v^j$

$[\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}] = \sqrt{g}\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

⑥ ☆ 重要等式 $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_s^j\delta_t^k - \delta_t^j\delta_s^k = \delta_{st}^{jk}$

⑦ 二重叉积公式：
$(a\times b)\times c = (a\cdot c)\cdot b - (b\cdot c)\cdot a$
$a\times(b\times c) = (a\cdot c)\cdot b - (a\cdot b)\cdot c$

⑤ $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst} = \delta_{rst}^{ijk}$ 排列相同 =1，一奇一偶 = −1，其余为0

2.1. $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 哈密顿算子

1. 梯度 $\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \nabla\varphi$ 标量场的梯度是矢量

2. 散度 $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{v}$ 矢量场的散度是标量（源的强度）（无源）

3. 旋度 $\mathrm{curl}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \nabla\times\mathbf{v}$ 矢量场的旋度是矢量（无旋）

2.2. 为描述基矢量随点的位置而变化的特性，引入基矢量关于坐标的导数的概念。

逗号记法：$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \partial_j \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{i,j}$

引入克氏符号 $\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}$ 也是矢量，可在该点的基矢量中分解。

令分解式为 $\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ijk}\mathbf{g}^k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k$（第一、二类克氏符号）

计算式：$\Gamma_{ijk} = \mathbf{g}_{i,j}\cdot\mathbf{g}_k$; $\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}_{i,j}\cdot\mathbf{g}^k$ 解法一

推导：$\mathbf{g}_{i,j}\cdot\mathbf{g}_k = \Gamma_{ijl}\mathbf{g}^l\cdot\mathbf{g}_k = \Gamma_{ijl}\delta^l_k \overset{l=k}{=} \Gamma_{ijk}$ $(\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{g}_k = \Gamma_{ijk}\mathbf{g}^k)$

克氏符号的特性：1. 不是张量的分量

2. 第3个指标具有张量性 $\Gamma_{ijk} = \mathbf{g}_{i,j}\cdot\mathbf{g}_k = \Gamma^l_{ij}\mathbf{g}_l\cdot\mathbf{g}_k = \Gamma^l_{ij} g_{lk}$

利用度量张量升降 $\Gamma^k_{ij} = \mathbf{g}_{i,j}\cdot\mathbf{g}^k = \Gamma_{ijl}\mathbf{g}^l\cdot\mathbf{g}^k = \Gamma_{ijl}\, g^{lk}$ 已知第一类求第二类

3. 第1、2个指标具有对称性。∵ $\mathbf{g}_{i,j} = \mathbf{R}_{,ij} = \mathbf{R}_{,ji} = \mathbf{g}_{j,i}$ 求导顺序可交换

$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$; $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

4. 计算式（利用度量张量对坐标的导数表示）

推导：$g_{ij} = \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j \Rightarrow g_{ij,k} = \mathbf{g}_{i,k}\cdot\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_{j,k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jki}$ ①改写为偶排列

指标轮换 $g_{jk,i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij}$ ②

$g_{ki,j} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{ijk}$ ③

令②+③−①得 $(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) = 2\Gamma_{ijk}$

∴ $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$ 解法二

$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}(g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$ 指标i,j,k轮换，偶排列，前2个为正后为负

5. 克氏符号与 $\sqrt{g}$ 的关系

$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\ln\sqrt{g}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}(\ln g) = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j}$

讨论 $\mathbf{g}^i$ 的导数：$\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_k = \delta^i_k \Rightarrow \mathbf{g}^i_{,j}\cdot\mathbf{g}_k + \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_{k,j} = 0 \Rightarrow \mathbf{g}^i_{,j}\cdot\mathbf{g}_k = -\Gamma^i_{kj}$

∴ $\mathbf{g}^i_{,j} = \frac{\partial\mathbf{g}^i}{\partial x^j} = \partial_j\mathbf{g}^i = -\Gamma^i_{jk}\mathbf{g}^k$

2.3 ①设 $\underline{v}=v^i\underline{g}_i$ 对 x^j 求导

$\underline{v}_{,j}=v^i{}_{;j}\underline{g}_i$ 或 $\partial_j\underline{v}=\nabla_j v^i\underline{g}_i$；其中 $v^i{}_{;j}=v^i{}_{,j}+v^k\Gamma^i_{jk}$ 或 $\nabla_j v^i=\partial_j v^i+v^k\Gamma^i_{jk}$

协变导数 设 $\underline{v}=v_i\underline{g}^i$ 对 x^j 求导.

$\underline{v}_{,j}=v_{i;j}\underline{g}^i$ 或 $\partial_j\underline{v}=\nabla_j v_i\underline{g}^i$；其中 $v_{i;j}=v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij}$ 或 $\nabla_j v_i=\partial_j v_i-v_k\Gamma^k_{ij}$

$\underline{v}_{,j}\triangleq\partial_j\underline{v}$　$v_{i;j}\triangleq\nabla_j v_i$ 两种符号的区别

②. $\underline{v}$ 的左梯度 $\nabla\underline{v}=\underline{g}^j\dfrac{\partial\underline{v}}{\partial x^j}=\underline{g}^j\ v_{i;j}\underline{g}^i=v_{i;j}\underline{g}^j\underline{g}^i=\nabla_j v_i\underline{g}^j\underline{g}^i$；$\nabla(\ )=\underline{g}^l\partial_l(\ )=\underline{g}^l\dfrac{\partial(\ )}{\partial x^l}$

右梯度. $\underline{v}\nabla=\dfrac{\partial\underline{v}}{\partial x^j}\underline{g}^j=v_{i;j}\underline{g}^i\underline{g}^j=v^i{}_{;j}\underline{g}_i\underline{g}^j=\nabla_j v^i\underline{g}_i\underline{g}^j$；$(\ )\nabla=\partial_l(\ )\underline{g}^l=\dfrac{\partial(\ )}{\partial x^l}\underline{g}^l$

2.4 ①张量对坐标的导数. $\underset{\sim}{T}=T^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k$

$\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^l}=T_{,l}=T^{ij}{}_{\cdot\cdot k;l}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k$；其中 $T^{ij}{}_{\cdot\cdot k;l}=T^{ij}{}_{\cdot\cdot k,l}+T^{mj}{}_{\cdot\cdot k}\Gamma^i_{ml}+T^{im}{}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ml}-T^{ij}{}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{lk}$

梯度

1. $\nabla\underset{\sim}{T}=\underline{g}^l\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^l}=T^{ij}{}_{\cdot\cdot k;l}\underline{g}^l\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k=\nabla_j T^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\underline{g}^l\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k$ （一般 $\nabla\underset{\sim}{T}\neq\underset{\sim}{T}\nabla$）

$\underset{\sim}{T}\nabla=\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^l}\underline{g}^l=T^{ij}{}_{\cdot\cdot k;l}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k\underline{g}^l=\nabla_j T^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k\underline{g}^l$

2. $\underset{\sim}{G}$ 与 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 是常张量，其分量可任意移进，移出协变导数号内外

3. 求协变导数遵循莱布尼茨法则.

2.5 散度 $\nabla\cdot\underset{\sim}{T}=\underline{g}^l\cdot\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^l}$　一般 $\nabla\cdot\underset{\sim}{T}\neq\underset{\sim}{T}\cdot\nabla$　对于矢量 $\underline{v}$　$\nabla\cdot\underline{v}=\underline{g}^j\cdot(v_{i;j}\underline{g}^i)=v_{i;j}\underset{\sim}{g}^{ij}=v^i{}_{;i}=v^i{}_{;i}=v^i{}_{,i}+v^m\Gamma^i_{mi}$ 度量张量

$\underset{\sim}{T}\cdot\nabla=\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^l}\cdot\underline{g}^l$　矢量左右散度相等　$\underline{v}\cdot\nabla=v_{i;j}\underline{g}^i\cdot\underline{g}^j=v_{i;j}\underset{\sim}{g}^{ij}=v^i{}_{;i}=v^i{}_{;i}$

旋度 $\nabla\times\underset{\sim}{T}=\underline{g}^i\times\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^i}$

$\underset{\sim}{T}\times\nabla=\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^i}\times\underline{g}^i$　$\nabla\times\underset{\sim}{T}\neq\underset{\sim}{T}\times\nabla$，对于矢量 $\underline{v}=v_j\underline{g}^j$　$\operatorname{curl}\underline{v}=\nabla\times\underline{v}=\underline{g}^i\times\dfrac{\partial\underline{v}}{\partial x^i}=\underline{g}^i\times\nabla_i v_j\underline{g}^j$

$=\nabla_i v_j\ \underline{g}^i\times\underline{g}^j=\varepsilon^{ijk}\nabla_i v_j\underline{g}_k$

$\therefore\operatorname{curl}\underline{v}=\nabla\times\underline{v}=\varepsilon^{ijk}\nabla_i v_j\underline{g}_k$

其中 $\varepsilon^{ijk}\nabla_i v_j=\varepsilon^{ijk}(\partial_i v_j-v_m\Gamma^m_{ij})=\varepsilon^{ijk}\partial_i v_j\boxed{-v_m\varepsilon^{ijk}\Gamma^k_{ij}}=0$ (对称+反对称)

$\therefore$ 化简为 $\operatorname{curl}\underline{v}=\nabla\times\underline{v}=\varepsilon^{ijk}\partial_i v_j\underline{g}_k=\varepsilon^{ijk}v_{j,i}\underline{g}_k=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\underline{g}_1&\underline{g}_2&\underline{g}_3\\\partial_1&\partial_2&\partial_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$

$\nabla\times\underline{v}=-\underline{v}\times\nabla$

2.6 1. $\nabla^2\underset{\sim}{T}=\nabla\cdot\nabla T=\underline{g}^r\cdot\dfrac{\partial}{\partial x^r}(\underline{g}^s\dfrac{\partial\underset{\sim}{T}}{\partial x^s})=g^{rs}\nabla_r\nabla_s T^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k$ （梯度的散度）Laplace 算子

仍得到张量，阶数相同.

2. 梯度的旋度 $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi=0$

3. 旋度的散度. $\operatorname{div}\operatorname{curl}\underline{v}=0$ (管量场无散度)

补充：利用交换哑指标证明。例：P50

逆变基矢量　利用 $\delta_j^i = \underline{g}_j \cdot \underline{g}^i$ 求得

协变基矢量　$\underline{g}_i = \frac{\partial R}{\partial x^i}$

补充：$(a\times b)\times c = (a\cdot c)\cdot b - (b\cdot c)\,a$

$a\times(b\times c) = (a\cdot c)\cdot b - (a\cdot b)\,c$

基矢量

坐标变换

基变换

$\begin{cases} \underline{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j}\underline{g}_j \\ \underline{g}^{i'} = \beta_j^{i'}\underline{g}^j \end{cases}$　$\beta_{i'}^{j}$ 协变变换系数　$\beta_j^{i'}$ 逆变变换系数

$\begin{cases} \underline{g}_j = \beta_j^{i'}\underline{g}_{i'} \\ \underline{g}^j = \beta_{i'}^{j}\underline{g}^{i'} \end{cases}$　$\beta_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$　$\beta_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$

张量的定义

在三维空间中，3^N个数的集合称为张量，只要它们满足：在两个不同坐标系中的值符合式：$T_{i_1'\cdots i_m'}^{j_1'\cdots j_n'} = \beta_{j_1}^{j_1'}\cdots\beta_{j_n}^{j_n'}\beta_{i_1'}^{i_1}\cdots\beta_{i_m'}^{i_m}T_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_n}$ 给出的变换关系。

张量的实体表示

$\underset{\sim}{T} = T^{ijk}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}_k = T_i^{\cdot jk}\underline{g}^i\underline{g}_j\underline{g}_k = T_{ijk}\underline{g}^i\underline{g}^j\underline{g}^k$

克氏符号

1. $\Gamma_{ijk} = \underline{g}_{i,j}\cdot\underline{g}_k$；$\Gamma_{ij}^k = \underline{g}_{i,j}\cdot\underline{g}^k$　ij对称性，非张量性
2. $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})$

协变导数

$\underline{v}_{,j} = v_{i;j}\,\underline{g}^i$；$v_{i;j} = v_{i,j} - v_k\Gamma_{ij}^k$

$\underset{\sim}{T}_{,l} = T_{\cdot\cdot k;l}^{ij}\underline{g}_i\underline{g}_j\underline{g}^k$；$T_{\cdot\cdot k;l}^{ij} = T_{\cdot\cdot k,l}^{ij} + T_{\cdot\cdot k}^{mj}\Gamma_{ml}^i + T_{\cdot\cdot k}^{im}\Gamma_{ml}^j - T_{\cdot\cdot m}^{ij}\Gamma_{lk}^m$

点积

度量张量

$g_{ij} = \underline{g}_i\cdot\underline{g}_j$；$g^{ij} = \underline{g}^i\cdot\underline{g}^j$

$(ds)^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$

指标升降：$u_i g^{ij} = u^j$，$u^i g_{ij} = u_j$

散度

$\nabla\cdot\underset{\sim}{T}$　$\nabla\underline{v} = \underline{v}\cdot\nabla$

$T\cdot\underset{\sim}{\nabla}$

叉积

置换张量　反对称性

$g = |g_{ij}|$；$\frac{1}{g} = |g^{ij}|$

$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \sqrt{g}, & ijk\text{偶排列} \\ -\sqrt{g}, & ijk\text{奇排列} \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$

$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{g}} & ijk\text{偶排列} \\ -\frac{1}{\sqrt{g}} & ijk\text{奇排列} \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$

$\underline{u}\times\underline{v} = \varepsilon^{ijk}u_i v_j\underline{g}_k$

$= \varepsilon_{ijk}u^i v^j\underline{g}^k$

$(\underline{u}\times\underline{v})^k = \varepsilon^{ijk}u_i v_j$

$= \varepsilon_{ijk}u^i v^j$

$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_s^j\delta_t^k - \delta_t^j\delta_s^k$

旋度

$\nabla\times\underset{\sim}{T}$　$\nabla\times\underline{v} = -\underline{v}\times\nabla$

$\underset{\sim}{T}\times\nabla$

并矢

梯度

$\nabla\underset{\sim}{T}$

$\underset{\sim}{T}\nabla$