中国科学院数学与系统科学研究院
2003 年硕士研究生招生初试试题
（ 3 小时完成，满分 150 ）

考试科目：高等代数　　　考试代码：401

1. (30 分) 已给如下三阶方阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ c & d & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) 求 $\det(A)$; (ii) 求 $\operatorname{tr}(A)$; (iii) 证明： $\operatorname{rank}(A) \geq 2$; (iv) 为使 $\operatorname{rank}(A) = 2$, 求出 a, b, c 和 d 应满足的条件。

2. (20 分) 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个变换. 试证：如果 $\mathcal{A}$ 保持内积不变，即对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个向量 α，β 都有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$$

那么，它一定是线性的，而且是正交的。

3. (20 分) 设 A 是 2003 阶实方阵，且 $A^r = 0$, 这里 r 是自然数. 问 A 的秩 $\operatorname{rank}(A)$ 最大是多少？

4. (20 分) 给定 $\mathbb{R}$ 上线性空间 V 的子空间 W_1, W_2. 证明： $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V)$. 这里 dim 表示空间维数。

5. (20 分) 给了 n 个不同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 试求一个 $\leq n-1$ 次的多项式 $f(x)$, 使 $f(a_i) = b_i$, 这里 b_i 也是给定的值， $i = 1, \cdots, n$.

6. (20 分) 给定 $\mathbb{R}$ 上二维线性空间 V 的线性变换 $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}$ 在一组基下的矩阵表示为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. 求 $\mathbb{A}$ 的不变子空间。

7. (20 分) 若 Q 为 n 阶对称正定方阵，x 为 n 维实向量. 证明：$0 \leq x^T(Q+xx^T)^{-1}x < 1$. 这里 x^T 表示 x 的转置。

中国科学院数学与系统科学研究院
2004 年硕士研究生招生初试试题
（ 3 小时完成，满分 150 ）

考试科目：高等代数　　　考试代码：401

1. (15 分) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n, \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n. \end{cases}$ 已知 $x_0 = 1, y_0 = 0$，求 x_{100}, y_{100}.

2. (15 分) 设 A 、 B 为同阶对称正定阵. 若 $A > B$ (即 $A - B$ 为正定阵)，试问是否一定有 $A^2 > B^2$ ？为什么？

3. (20 分) 证明：若 S 为 n 阶对称正定矩阵，则 (i) 存在唯一的对称正定矩阵 S_1 ，使得 $S = S_1^2$; (ii) 若 A 是 n 阶实对称矩阵，则 AS 的特征值是实数。

4. (20 分) 设 $A = (a_{ij})$ 是 2004 阶方阵，且 $a_{ij} = ij, 1 \le i, j \le 2004$. I 是 2004 阶单位阵，计算 $f(x) = \det(I + Ax)$，这里 $x \in \mathbb{R}$.

5. (20 分) 令 $f(x,y) = 2x^2 - 7xy + y^2$. 求 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆上的极大值与极小值及极值点.

6. (20 分) 设 A, B 是 n 阶实方阵，而 I 是 n 阶单位阵. 证明：若 $I - AB$ 可逆，则 $I - BA$ 也可逆.

7. (20 分) 设 A 为 $n \times n$ 阶实对称矩阵， b 为 $n \times 1$ 维实向量. 证明： $A - bb^\tau > 0$ 的充分必要条件是

$$A > 0 \quad \text{及} \quad b^\tau A^{-1} b < 1.$$

其中 b^τ 表示 b 的转置.

8. (20 分) 设 V 是 n 维向量空间， f, g 是 V 上的线性变换 (即 $f, g \in L(V)$)，且 f 有 n 个互异的特征根. 证明： $fg = gf$ 的充要条件是 g 是 $f^0 = I$(恒等变换)， $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ 的线性组合.

中科院04高代解答

1

$$(X_{n+1}\quad Y_{n+1})=(X_n\quad Y_n)\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\Rightarrow(X_n\quad Y_n)=(1\quad 0)\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}^n$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2\sqrt{2}&0\\0&1+2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$(X_{100}\quad Y_{100})=(1\quad 0)\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-2\sqrt{2})^{100}&0\\0&(1+2\sqrt{2})^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow(X_{100}\quad Y_{100})=(\frac{1}{2}(1-2\sqrt{2})^{100}+\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})^{100},\frac{\sqrt{2}}{4}(1-2\sqrt{2})^{100}-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+2\sqrt{2})^{100})$$

2

不一定，$A=\begin{pmatrix}4&2.4\\2.4&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$时

$A-B=\begin{pmatrix}2&1.4\\1.4&1\end{pmatrix}$正定，但$|A^2-B^2|=-0.2624$不是正定

3

$$S=P'\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\end{pmatrix}P,\text{P为正交阵，}a_i>0(i=1,2,....n)\Rightarrow S=P'\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&0\\&\ddots&\\0&&\sqrt{a_n}\end{pmatrix}PP'\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&\\&\ddots&\\0&&\sqrt{}\end{pmatrix}$$

$$S=S_1S_1,S_1=P'\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&0\\&\ddots&\\0&&\sqrt{a_n}\end{pmatrix}P\text{为正定阵。}$$

设∃λ为非实数使$AS_1S_1\alpha=\lambda\alpha$成立，则（$S_1AS_1'$）$S_1\alpha=\lambda S_1\alpha$($S_1$为对称阵）

$\Rightarrow\lambda$为S_1AS_1'的特征根，因为S_1AS_1'为对称阵，所以λ必为实数，矛盾。所以AS的特征根都为实

4

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+1&2x&&nx\\2x&2^2x+1&&2nx\\\vdots&&\ddots&\vdots\\nx&&\cdots&n^2x+1\end{vmatrix}\text{第一列分别乘}-k\text{加到第k列得}\begin{vmatrix}x+1&-2&&-n\\2x&1&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\&&0&0\\nx&&0&1\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}i^2X+1$$

5

f(x, y)的二次型$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$算的特征值λ为$\frac{3\pm\sqrt{50}}{2}$，$\because \lambda_1 x'x \le x'Ax \le \lambda_2 x'x$,

在单位圆上$x'x=1$，$\therefore$ 最大最小值分别为$\frac{3\pm\sqrt{50}}{2}$

$\lambda=\frac{3+\sqrt{50}}{2}$时，特向量为$\pm(-7,\sqrt{50}-1)$，

单位化为$\pm(\frac{-7}{\sqrt{100-2\sqrt{50}}},\frac{\sqrt{50}-1}{\sqrt{100-2\sqrt{50}}})$ ＝（x, y）为极大值点

$\lambda=\frac{3-\sqrt{50}}{2}$时，特向量为$\pm(7,\sqrt{50}+1)$，

单位化为$\pm(\frac{7}{\sqrt{100+2\sqrt{50}}},\frac{\sqrt{50}+1}{\sqrt{100+2\sqrt{50}}})$ ＝（x, y）为极小值点

6

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I-BA \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$取行列式则$|I-BA|=|I-AB|$，$I-AB$可逆$\Rightarrow$ I-BA可逆

7

$$\begin{pmatrix} E & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -b' & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-bb' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & \\ -b'A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1-b'A^{-1}b \end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix} A-bb' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1-b'A^{-1}b \end{pmatrix}$合同，从而正定性相同

8

充分性，f有n个互异特根$\Rightarrow$f有n个互异特向量$\Rightarrow\exists$（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)为V一组基使得

f（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)=（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)A，A为对角阵，

当$g=\sum_{i=0}^{n-1} k_i f^i$时，g（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)=$\sum_{i=0}^{n-1} k_i f^i(a_0, a_1, \cdots a_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1} f^i(k_i a_0, k_i a_1, \cdots k_i a_{n-1})$=

$$(a_0, a_1, \cdots a_{n-1})\sum_{i=0}^{n-1}\begin{pmatrix} k_i\lambda_0^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_i\lambda_{n-1}^i \end{pmatrix},\quad (f^i(a_0, a_1, \cdots a_{n-1})=(a_0, a_1, \cdots a_{n-1})A^i)$$

g（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)=（$a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$)$B, B=\sum_{i=0}^{n-1}\begin{pmatrix} k_i\lambda_0^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_i\lambda_{n-1}^i \end{pmatrix}$为对角阵。所以AB＝BA，即fg＝

必要性，dim g＝n，只要证明f^i线性无关则f^i就能线表g，

设$\sum_{i=0}^{n-1} k_i f^i=0$，所以$\sum_{i=0}^{n-1} k_i f^i(a_j)=0\Rightarrow(\sum_{i=0}^{n-1} k_i\lambda_j^i)a_j=0\Rightarrow$

$\sum_{i=0}^{n-1} k_i\lambda_j^i=0$对j＝0，1，$\cdots n-1$成立，距阵行列式为范德蒙行列式且$\lambda_j$相异所以不为0

所以$k_i=0$，即f^i线性无关。

中国科学院数学与系统科学研究院

2005 年硕士研究生招生初试试题

(3 小时完成，满分 150)

考试科目：高等代数　　　考试代码：

1. **(15 分)** 设四元齐次线性方程组 **(I)** 为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又知某线性齐次方程组 **(II)** 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$. **(i)** 求线性方程组 **(I)** 的基础解系； **(ii)** 问线性方程组 **(I)** 和 **(II)** 是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解，若没有，则说明理由。

2. **(15 分)** 给定两个四维向量 $\alpha_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$, $\alpha_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$. 求作一个四阶正交矩阵 Q, 以 α_1, α_2 作为它的前两个列向量.

3. **(20 分)(i)** 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形，并计算 e^A(注：按通常定义 $e^A = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \cdots$)；
(ii) 设

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4.5 & -1 \\ -3 & -3.5 & 1 \\ -2 & -3 & 1.5 \end{pmatrix},$$

求 B^{2005}(精确到小数点后 4 位).

4. **(20 分)** 证明函数 $\log\det(\cdot)$ 在对称正定矩阵集上是凹函数，即：对于任意两个 $n \times n$ 对称正定矩阵 A, B, 及 $\forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$\log\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \lambda \log\det(A) + (1-\lambda)\log\det(B),$$

其中，函数 $\log\det(A)$ 表示先对矩阵 A 取行列式再取自然对数.

注：第 5－8 题见下页

5. **(20 分)(i)** 考虑如下形式的矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$a_i, 1\le i\le n$ 都为实数。证明：矩阵 P 非负定；**(ii)** 证明：非零实二次型 $f(x_1,\dots x_n)$ 可以写成 $f(x_1,\dots x_n)=(u_1x_1+\dots+u_nx_n)(v_1x_1+\dots+v_nx_n)$ 的充要条件是：或者它的秩为 1，或者它的秩为 **2** 且符号差为 0.

6. **(20 分)** 证明：**(i)** 任何 n 阶实对称方阵 A 必合同于对角阵 $D=\mathbf{diag}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，即存在 n 阶非奇异实方阵 C 使得 $C^TAC=D$，这里 $\delta_i=-1$ 或 0 或 1；**(ii)** 任何 n 阶实反对称非奇异方阵 B 必为偶数阶 (即 $n=2k$)，且合同于块对角阵 $L=\mathbf{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_k\}$，即存在 n 阶非奇异实方阵 E 使得 $E^TBE=L$，这里 $J_i\equiv\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;**(iii)** 对迹 (对角元之和) 为 0 的 n 阶实方阵 G，存在实正交阵 H，使得 H^TGH 的主对角元全为零。

注：这里 C^T, E^T, H^T 分别表示 C, E, H 的转置。

7. **(20 分)** 试求 7 次多项式 $f(X)$，使 $f(X)+1$ 能被 $(X-1)^4$ 整除，而 $f(X)-1$ 能被 $(X+1)^4$ 整除。

8. **(20 分)** 给定一单调递减序列 $b_1>b_2>\cdots>b_p>0$，定义

$$\beta=\left(p!\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{\min\limits_{1\le k\le p-1}(b_k-b_{k+1})}}.$$

假设复数 $a_i, i=1,2,\dots,p$ 满足 $|a_i|>\beta|a_{i+1}|, i=1,2,\cdots,p-1$，且 $|a_p|\ge 1$. 证明以下行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{b_1} & a_1^{b_2} & \cdots & a_1^{b_p} \\ a_2^{b_1} & a_2^{b_2} & \cdots & a_2^{b_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{b_1} & a_p^{b_2} & \cdots & a_p^{b_p} \end{vmatrix}$$

其绝对值有上下界如下：

$$\frac{1}{p}\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}<|D|<2\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}.$$

中国科学院数学与系统科学研究院

2006 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数（代码： **839** ）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上或草稿纸上一律无效。

1. **(16 分)** 已知 α, β, γ 为实数，求 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的行列式的值。

2. **(16 分)** 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

设 $M_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是在矩阵 A 中划去第 j 列所得到的 $n-1$ 阶子式。试证：

(i) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解；

(ii) 如果 A 的秩为 $n-1$，那么方程组的解全是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数。

3. **(16 分)** 若 α 为一实数，试计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

4. **(18 分)** 设 a 为实数，$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$，求 A^{50} 第一行元素之和。

1

[1]科目名称：高等代数

5. **(18 分)** 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>2)$ 线性无关，讨论 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 线性相关性。

6. **(18 分)** 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $y'^2+4z'^2=4$. 求 a,b 的值和正交矩阵 P.

7. **(16 分)** 设有实二次型 $f(x)=x^\top Ax$, 其中 $x^\top$ 是 x 的转置， A 是 3×3 实对称矩阵并满足以下方程：

$$A^3-6A^2+11A-6I=0.$$

试计算

$$\max_A \max_{\|x\|=1} f(x).$$

其中 $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, 第一个极大值是对满足以上方程的所有实对称矩阵 A 来求。

8. **(16 分)**$A\in\mathbb{R}^{2006\times 2006}$ 是给定的幂零阵 (即：存在正整数 p 使得 $A^p=0$ 而 $A^{p-1}\neq 0$)，试分析线性方程组 $Ax=0$ $(x\in\mathbb{R}^{2006})$ 非零独立解个数的最大值和最小值。

9. **(16 分)** 设 f 是有限维向量空间 V 上的线性变换，且 f^n 是 V 上的恒等变换，这里 n 是某个正整数。设 $W=\{v\in V|f(v)=v\}$. 证明 W 是 V 的一个子空间，并且其维数等于线性变换 $(f+f^2+\cdots+f^n)/n$ 的迹。

2

[2]科目名称：高等代数

中国科学院研究生院

2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．（10分）设多项式 $f(x),g(x),h(x)$ 只有非零常数公因子，证明：存在多项式 $u(x),v(x),w(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)+w(x)h(x)=1$。

2．（10分）设 m,n,p 都是非负整数，证明：(x^2+x+1) 整除 $(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2})$。

3．（10分）设 A 是 n 阶实数矩阵，$A\neq 0$，而且 A 的每个元素都和它的代数余子式相等。证明 A 是可逆矩阵。

4．（25分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

5．（20分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathrm{R}^n$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，$s,t\in\mathrm{R}$，$\beta_1=s\alpha_1+t\alpha_2,\cdots,\beta_{k-1}=s\alpha_{k-1}+t\alpha_k,\beta_k=s\alpha_k+t\alpha_1$。试问：$s,t$ 应该满足什么关系，使得 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\beta_k$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系，反之，当 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\beta_k$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系时，这个关系必须成立。

5．(15 分) 设 A 是实对称矩阵，如果 A 是半正定的，则存在实的半正定矩阵 B，使得 $A=B^2$。

6．(20 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，试证明对于 $n\geq 3$ 有 $A^n=A^{n-2}+A^2-I$，并计算 A^{100}，其中 I 表示单位矩阵。

7．(20 分) 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，求参数 a,b 及所用的正交变换。

8．(20 分) 设A 是复数域上 6 维线性空间 V 的线性变换，A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2(\lambda+2)$，证明 V 能够分解成三个不变子空间的直和，而且它们的维数分别是 1，2，3。

2008年研究生入学考试试题

一、填空

1、已知方阵A,求A^n

2、已知方阵A,求A^{-1}

3、线性方程组

4、求以A(1,-2,1),B(2,3,0),C(0,-1,4),D(1,3,-1)为四顶点的四面体的体积。

5、向量组线性相关

6、求线性变换在某基下的矩阵

7、已知四阶λ方阵$A(\lambda)$的秩为4，初等因子组为$\{\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ (\lambda-1)^2\ (\lambda-1)^3,\ \lambda+1\}$，则$A(\lambda)$的不变因子是____，行列式因子是___

8、$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求它的Smith标准形___

9、$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的Jordon标准形是______

10、求实正交阵的正交相似标准形。

二、若对任意可逆$F\in P^{n\times n}$，FA=AF，则A为数量矩阵。

三、证明：酉矩阵的特征值的模长是1。

四、已知直线$l_1: x-1=\dfrac{y+2}{-2}=-z-1$和平面$\pi$:2x-y+z=0

(1)、求l_1在π上的投影直线l_2的方程

(2)、求l_1绕l_2旋转所得的旋转曲面的方程

五、已知二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3-4x_3x_1$

(1）用正交变换将$Q(x_1,x_2,x_3)$化为标准形

(2）判断曲面$Q(x_1,x_2,x_3)=1$的类型

六、n阶实对称方阵A，B，A+B的正惯性指数分别是P_A，P_B，P_{A+B}

证明：$P_A+P_B\geq P_{A+B}$

七、证明：n阶实方阵A正交相似于一个准上三角阵

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * & * \\ 0 & 0 & B_s & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2s+1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$，其中$B_1,\cdots,B_s$为二阶实方阵；$\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n$为实数。

八、设实方阵A，B相似且相合，问A，B是否正交相似，试证之。

中国科学院2005年攻读硕士学位研究生入学考试
《高等代数》试题解答

1.【解】（1）据题设，方程组（Ⅰ）的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，故（Ⅰ）的基础解系可取为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,1,0)^T,\quad \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0,1)^T.$$

（2）有非零公共解．下面给出两种解法：

（方法1）将方程组（Ⅱ）的通解$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$代入方程组（Ⅰ），得

$$\begin{cases}k_1+k_2=0,\\k_1+k_2=0.\end{cases}$$

解得$k_1=-k_2$．当$k_1=-k_2\neq0$时，非零向量

$$\begin{aligned}k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T&=k_2[(0,-1,-1,0)+(-1,2,2,1)]^T\\&=k_2(-1,1,1,1)^T\end{aligned}$$

满足方程组（Ⅰ）（显然是（Ⅱ）的解），故方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解，所有非零公共解是

$$k(-1,1,1,1)^T\quad(\text{其中}k\text{是不为零的任意常数}).$$

（方法2）令方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的通解相等，即

$$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=k_3(-1,0,1,0)^T+k_4(0,1,0,1)^T,$$

得到关于k_1,k_2,k_3,k_4的一个齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_2-k_3=0,\\k_1+2k_2-k_3=0,\\k_1+2k_2-k_4=0,\\k_2-k_4=0,\end{cases}$$

易得其通解为$(k_1,k_2,k_3,k_4)^T=k(-1,1,1,1)^T$，将$k_1=-k,k_2=k$代入（Ⅰ）或（Ⅱ）的通解，得$k(-1,1,1,1)^T$，故方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的所有非零公共解为

$$k(-1,1,1,1)^T\quad(\text{其中}k\neq0\text{为任意常数}).$$

2.【解】设正交矩阵$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1-2x_2+2x_4=0\\-2x_1+x_3+x_4=0\end{cases}$$

的解空间$\mathbf{S}$的一个标准正交基．容易求得上述方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,4,0)^T,\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-2,0,-5,1)^T.$$

利用施密特（Schmidt）正交化方法，由$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$可得$\mathbf{S}$的一个标准正交基为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,1,4,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{3\sqrt{14}}(2,8,-3,7)^T.$$

【注】因为方程组的基础解系不惟一，所以$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$因而$\boldsymbol{Q}$的解也不惟一．

3.【解】(1)先求 A 的 Jordan 标准形. 因为 A 的行列式因子 $D_4(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^4$,且因 $\lambda E-A$ 的左上角的一个3阶子式为 λ^3,右上角的一个3阶子式为 $-(\lambda+1)^2$,所以 $D_3(\lambda)=1$,故 A 的不变因子组为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\ d_4(\lambda)=\lambda^4.$$

由此可知,A 的初等因子为 λ^4. 于是 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

再计算 e^A. 因 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^4$,故由 Cayley 定理,$f(A)=A^4=O$. 于是

$$e^A=E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}=\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}&\frac{13}{6}\\0&1&1&\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2)易知,B 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-B|=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})^2$. 根据 Cayley 定理,可知 $f(B)=O$. 若设 $\varphi(\lambda)=\lambda^{2005}$,则根据带余除法,有

$$\varphi(\lambda)=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),\text{ 其中 }\deg r(\lambda)<\deg f(\lambda)=3.$$

于是 $f(\lambda)\,|\,[\varphi(\lambda)-r(\lambda)]$,且 $\lambda=1$ 是 $\varphi(\lambda)-r(\lambda)$ 的单根,$\lambda=\frac{1}{2}$ 是 $\varphi(\lambda)-r(\lambda)$ 的重根.

现在令 $r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$,其中 a,b,c 是待定系数. 则

$$\begin{cases}\varphi(1)-r(1)=0,\\ \varphi(\frac{1}{2})-r(\frac{1}{2})=0,\\ \varphi'(\frac{1}{2})-r'(\frac{1}{2})=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}a+b+c=1,\\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=\frac{1}{2^{2005}},\\ a+b=\frac{2005}{2^{2004}},\end{cases}$$

解得 a,b,c 的近似值(精确到小数点后4位)$a=4,\ b=-4,\ c=1$. 于是,有

$$B^{2005}=\varphi(B)=f(B)q(B)+r(B)=4B^2-4B+E$$
$$=\begin{pmatrix}3&3&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

4.【解】 因为 A,B 是正定矩阵,所以(见本题注(2)),存在 n 阶可逆矩阵 P,使得

$$A=PP^T,\quad B=PDP^T,$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$,$\mu_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\log\det(\lambda A+(1-\lambda)B)=\log\det(PP^T)+\log\det(\lambda E+(1-\lambda)D),$$
$$\lambda\log\det(A)+(1-\lambda)\log\det(B)=\log\det(A)+(1-\lambda)\log\det(D).$$

比较上述二式，我们只需证明

$$\log\det(\lambda E+(1-\lambda)D)\geqslant(1-\lambda)\log\det(D). \qquad ①$$

因为对数函数是严格上凸函数，故

$$\log\det(\lambda E+(1-\lambda)D)=\log\prod_{i=1}^{n}(\lambda+(1-\lambda)\mu_i)=\sum_{i=1}^{n}\log(\lambda+(1-\lambda)\mu_i)$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}[\lambda\log 1+(1-\lambda)\log\mu_i] \qquad ②$$

$$=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\log\mu_i=(1-\lambda)\log\det(D).$$

这就证得①式，从而所给不等式得证.

【注】(1) 由于对数函数 $\log x$ 的严格凸性，根据②式知，等号成立的充分必要条件是 $\lambda=0$ 或 1 或 $\mu_i=1(i=1,2,\cdots,n)$. 因此，原不等式中的等号成立的充分必要条件是 $\lambda=0$ 或 1 或 $A=B$.

(2)(浙江大学 2000 年研究生试题) 设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶实对称矩阵，证明：必存在 n 阶可逆矩阵 G，使

$$G^{T}AG=E,\quad G^{T}BG=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

其中 E 是 n 阶单位矩阵，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $|\lambda A-B|=0$ 的 n 个实根.

【该证明如下】 因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以存在 n 阶可逆矩阵 P，使 $P^{T}AP=E$. 由于 B 是 n 阶实对称矩阵，所以 $P^{T}BP$ 也是 n 阶实对称矩阵，故存在 n 阶正交矩阵 Q，使

$$Q^{T}(P^{T}BP)Q=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $P^{T}BP$ 的 n 个实特征值. 令 $G=PQ$，则

$$G^{T}AG=E,\quad G^{T}BG=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$

注意到

$$G^{T}(\lambda A-B)G=\mathrm{diag}(\lambda-\mu_1,\lambda-\mu_2,\cdots,\lambda-\mu_n),$$

两边取行列式，得

$$|G|^2|\lambda A-B|=(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\cdots(\lambda-\mu_n).$$

因此 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $|\lambda A-B|=0$ 的 n 个实根.

5.【解】 (1) 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{T}$，则 $P=AA^{T}$ 是实对称矩阵. 对于任意 n 维实的列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$，则 $A^{T}x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ 为实数，且

$$x^{T}Px=(A^{T}x)^{T}(A^{T}x)=(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)^2\geqslant 0,$$

所以 P 是非负定矩阵.

(2) 先证必要性. 设 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{T}$, $\beta=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{T}$，则 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$，且 $f=x^{T}Ax$ 的矩阵为 $A=\frac{1}{2}(\alpha\beta^{T}+\beta\alpha^{T})$. 显然 $1\leqslant\mathrm{rank}(A)\leqslant 2$.

若 α 与 β 线性相关，则 $\alpha=k\beta$, $k\neq 0$，所以 $A=k\beta\beta^{T}$, $\mathrm{rank}(A)=1$，因此二次型 f 的秩为 1；

若 α 与 β 线性无关，不妨设 $u_1v_2\neq u_2v_1$，则经非退化的线性变换

$$y_1 = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n, y_2 = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n, y_i = x_i(i = 3, \cdots, n),$$

可得 $f = y_1y_2$. 再作非退化的线性变换 $y_1 = z_1 + z_2, y_2 = z_1 - z_2, y_i = z_i(i = 3, \cdots, n)$，则 $f = z_1^2 - z_2^2$，因此 f 的秩为 2 且符号差为 0.

再证充分性. 若 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = 1$，则存在 n 维实的列向量 $\boldsymbol{\alpha} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \neq \boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，于是有

$$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = (u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n)(v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n);$$

若 f 的秩为 2 且符号差为 0，则存在实的非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$，使 $f = y_1^2 - y_2^2$. 令 $\boldsymbol{C}^{-1} = (c_{ij})$，及 $u_i = c_{1i} + c_{2i}, v_i = c_{1i} - c_{2i}(i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$f = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = (u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n)(v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n).$$

6.【解】（1）对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，实二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可经非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{C}$ 为非奇异矩阵）化为规范形

$$f = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \delta_1y_1^2 + \delta_2y_2^2 + \cdots + \delta_ny_n^2 = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y},$$

其中 $\delta_i = -1$ 或 0 或 1，而二次型的矩阵是惟一的，所以 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$，即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$.

（2）因为奇数阶反对称矩阵的行列式为 0，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 非奇异，所以 $\boldsymbol{B}$ 的阶数必为偶数 $n = 2k$. 下证第二个结论：$\boldsymbol{B}$ 合同于分块对角阵 $\boldsymbol{E} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_k)$. 对 k 用数学归纳法.

当 $k = 1$ 时，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}$，由于 $a_{12} \neq 0$，把 $\boldsymbol{B}$ 的第一行及第一列都乘以 $\frac{1}{a_{12}}$，得 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，即对 $\boldsymbol{B}$ 作合同变换得

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设当 $k = m$ 时结论成立，下证 $k = m + 1$ 时结论成立. 此时

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{c:ccccc} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1,2m+1} & -a_{1,2m+2} \\ \hdashline a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2,2m+1} & -a_{2,2m+2} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3,2m+1} & -a_{3,2m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,2m+1} & a_{2,2m+1} & a_{3,2m+1} & \cdots & 0 & -a_{2m+1,2m+2} \\ a_{1,2m+2} & a_{2,2m+2} & a_{3,2m+2} & \cdots & a_{2m+1,2m+2} & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1,2m+2})^T$，$\boldsymbol{B}_1$ 为 $2m+1$ 阶实反对称矩阵. 因为 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，否则 $|\boldsymbol{B}_1| \neq 0$，矛盾. 不妨设 $a_{12} \neq 0$，令 $\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & \\ & \boldsymbol{E}_{2m+1} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_{2m+1}$ 是 $2m+1$ 阶单位矩阵，则

$$\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & \\ & \boldsymbol{E}_{2m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}} & \\ & \boldsymbol{E}_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix},$$

其中 B_2 为 $2m$ 阶实反对称矩阵，C 为 $2\times(2m)$ 实矩阵．令 $Q_2=\begin{pmatrix} E_2 & -J_1C \\ O & E_{2m} \end{pmatrix}$，注意到 $J_1^{-1}=J_1^{T}=-J_1$，则

$$Q_2^{T}Q_1^{T}BQ_1Q_2=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ -C^{T}J_1^{-1} & E_{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 & -C \\ C^{T} & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & -J_1C \\ O & E_{2m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & B_2-C^{T}J_1C \end{pmatrix}.$$

对于 $2m$ 阶实反对称矩阵 $B_2-C^{T}J_1C$，根据归纳假设，存在 $2m$ 阶实可逆矩阵 Q，使

$$Q^{T}(B_2-C^{T}J_1C)Q=\mathrm{diag}(J_2,J_3,\cdots,J_{m+1}).$$

令 $Q_3=\begin{pmatrix} E_2 & \\ & Q \end{pmatrix}$，并记 $E=Q_1Q_2Q_3$，则 E 是 $2(m+1)$ 阶实的可逆矩阵，且

$$\begin{aligned} E^{T}BE&=Q_3^{T}Q_2^{T}Q_1^{T}BQ_1Q_2Q_3=\begin{pmatrix} E_2 & \\ & Q^{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & B_2-C^{T}J_1C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & \\ & Q \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} J_1 & \\ & Q^{T}(B_2-C^{T}J_1C)Q \end{pmatrix}=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_{m+1}). \end{aligned}$$

因此，对于任意实反对称非奇异方阵（必为偶数阶）结论成立．

（3）先证：对于实对称矩阵 A，若 $\mathrm{Tr}(A)=0$，则存在正交矩阵 H，使 $H^{T}AH$ 的主对角元全为零．

对 A 的阶数 n 用归纳法：当 $n=1$ 时结论显然成立．假设 $n-1$ 时结论成立，再证对于 n 阶矩阵结论成立．不妨设 $A\neq O$，则 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不全为零，但 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{Tr}(A)=0$．

因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 H_1，使

$$H_1^{T}AH_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D.$$

令 n 维列向量 $\alpha_1=\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{T}$，$\alpha_2=\frac{1}{k}D\alpha_1$，其中 $k=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}\neq 0$，则 α_1,α_2 是相互正交的单位向量．把 α_1,α_2 扩充为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $H_2=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是正交矩阵，且

$$DH_2=D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline k & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A_1 & & \\ 0 & & & & \end{array}\right),$$

其中 A_1 是 $n-1$ 阶实矩阵，显然也是对称矩阵，且 $\mathrm{Tr}(A_1)=\mathrm{Tr}(H_2^{T}AH_2)=\mathrm{Tr}(D)=0$．据归纳假设，存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q，使

$$Q^{T}A_1Q=\begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},\quad 其中\ c_{22}=c_{33}=\cdots=c_{nn}=0.$$

令 $H=H_1H_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则 H 为 n 阶正交矩阵，且

$$H^{T}AH=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^{T}\end{pmatrix}H_2^{T}H_1^{T}AH_1H_2\begin{pmatrix}1&0\\0&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&*\\ *&Q^{T}A_1Q\end{pmatrix}$$

的主对角元全为零. 因此,结论得证.

对于实矩阵 G,由于 $G=A+B$,其中 $A=\frac{1}{2}(G+G^{T})$为实对称矩阵,$B=\frac{1}{2}(G-G^{T})$为实反对称矩阵,而 B 的主对角元全为零,所以 $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(G)=0$. 根据已证得的结论,存在正交矩阵 H,使得 $H^{T}AH$ 的主对角元全为零. 而 $H^{T}BH$ 仍为实反对称矩阵,其主对角元全为零,因此

$$H^{T}GH=H^{T}AH+H^{T}BH$$

的主对角元全为零.

7.【解】因为 $x=1$ 是 $f(x)+1$ 的 4 重根,所以 $x=1$ 是 $f'(x)$的 3 重根. 同理可知 $x=-1$ 是 $f'(x)$的 3 重根. 又因为 $\deg f'(x)<\deg f(x)=7$,故 $\deg f'(x)=6$,于是可设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1),\text{ 其中 } a \text{ 待定.}$$

从而有

$$f(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+b.$$

又由已知 $f(1)=-1$, $f(-1)=1$,可得

$$a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+b=-1,\qquad a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)+b=1.$$

解得 $a=\frac{35}{16}$, $b=0$. 因此 $f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$.

8.【解】 根据行列式的定义,D 为 $p!$ 个乘积项的和:$D=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_p}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_p)}a_{i_1}^{\ b_1}a_{i_2}^{\ b_2}\cdots a_{i_p}^{\ b_p}$,其中 $\tau(i_1i_2\cdots i_p)$是排列 $i_1i_2\cdots i_p$ 的逆序数,则

$$\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}-D_1\leqslant|D|\leqslant\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}+D_1,\qquad ①$$

其中 $D_1=\sum\limits_{\substack{i_1i_2\cdots i_p\\ \neq 12\cdots p}}|a_{i_1}|^{b_1}|a_{i_2}|^{b_2}\cdots|a_{i_p}|^{b_p}$ 是 $p!-1$ 个乘积项的和,而且每一乘积项中 a_{i_j}, b_j 的下标呈乱序排列. 对于每一个这样的乘积项,容易证明如下不等式:

$$|a_{i_1}|^{b_1}|a_{i_2}|^{b_2}\cdots|a_{i_p}|^{b_p}\leqslant\frac{p-1}{p!p}\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}.$$

于是有

$$D_1\leqslant(p!-1)\frac{p-1}{p!p}\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}=\left(1-\frac{1}{p}-\frac{p-1}{p!p}\right)\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}.$$

代入①式即得所证不等式:

$$\frac{1}{p}\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}<|D|<2\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}.$$

中国科学院研究生院
2012年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．（15分） 证明 多项式 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根。

2．（20 分） 设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x),f_1(x)$ 都是多项式，$r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$。

3．（20分） 已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sum_{i=1}^n a_i=1$，$\sum_{i=1}^n a_i^2=n$。

1) 求 A 的全部特征值；
2) 求 A 的行列式 $\det(A)$ 和迹 $\mathrm{tr}(A)$。

4．（15 分）设数域 k 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $(A-I_n)x=0$ 在 k^n 中的解空间，试证明：$\mathrm{k}^n=V_1\oplus V_2$，其中 I_n 代表 n 阶单位矩阵，$\oplus$ 表示直和。

5. (20 分) 设 n 阶矩阵 A 可逆，α, β 均为 n 维列向量，且 $1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$，其中 β^T 表示 β 的转置。

1）证明矩阵 $P=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆矩阵；

2）证明矩阵 $Q=A+\alpha\beta^T$ 可逆，并求其逆矩阵。

6. (20 分) 证明：任何复数方阵 A 都与它的转置矩阵 A^T 相似。

7. (22 分) 在二阶实数矩阵构成的线性空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中定义：

$$(A,B)=\mathrm{tr}(A^T B), \quad \forall A,B\in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

其中，A^T 表示矩阵 A 的转置，$\mathrm{tr}(X)$ 表示矩阵 X 的迹。

1) 证明 (A,B) 是线性空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的内积；

2) 设 W 是由 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间。试求 $W^\perp$ 的一组标准正交基。

8. (18 分) 设 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 是数域上线性空间 V 的非零线性变换，试证明存在向量 $\alpha\in V$，使得 $T_i(\alpha)\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。

中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．(15 分) 求下面 $n+1$ 阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

其中，$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$。

2．(15 分) 假设矩阵 A 与 B 没有公共的特征根，$f(x)$ 是矩阵 A 的特征多项式，证明以下结论：

1) 矩阵 $f(B)$ 可逆；

2) 矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解。

3．(15 分)设 $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ 是斜对称方阵，即 $a_{i,j}=a_{n-j+1,n-i+1}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明：若 A 可逆，则其逆阵也是斜对称方阵。

4．(20 分) 设二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经由正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化成椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，试求 a,b 和正交矩阵 P。

5．(15 分) 假设 3 阶实方阵 A 满足：$A^2=E$，E 是单位方阵，$A\neq\pm E$。证明 $\left(Tr(A)\right)^2=1$，其中 $Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹。

6．(15 分) 设 A 为 n 阶半正定实矩阵。证明：$|A+2013E|\geqslant 2013^n$，等号成立当且仅当 A=0。其中，$E$ 是单位矩阵。

7．（15 分）证明：任何一个实方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积，其中至少有一个矩阵可逆。

8．(15 分) 设 A 是一个 3×3 正交矩阵，证明 A 可以写成 CR，其中 C 对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的旋转变换，R 对应于 $\mathbf{R}^3$ 的恒等变换或对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的镜面反射变换，其中 $\mathbf{R}$ 表示实数域。

9．(10 分)设 V 是数域 $\mathbf{F}$ 上的有限维向量空间，ϕ 是 V 上的线性变换。证明 V 能够分解成两个子空间的之和 $V=U\oplus W$，其中，U,W 满足：对任意 $u\in U$，存在正整数 k 使得 $\phi^k(u)=0$；对任意 $w\in W$，存在 $v_m\in V$，使得 $w=\phi^m(v_m)$ 对所有的正整数 m。

10．(15 分)设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维线性空间，ϕ 是 V 上的线性变换，满足 $\phi^2=-\varepsilon$（ε 是 V 上的恒等变换）。

1) 证明 n 是偶数；

2) 若 ψ 是 V 上的线性变换，满足 $\psi\phi=\phi\psi$，证明 $\det(\psi)\geq 0$。

中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．（15 分） 证明 多项式 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根。

2．（20 分） 设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x),f_1(x)$ 都是多项式，$r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$。

3．（20 分） 已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n$。

1) 求 A 的全部特征值；

2) 求 A 的行列式 $\det(A)$ 和迹 $\mathrm{tr}(A)$。

4．（15 分）设数域 k 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $(A-I_n)x=0$ 在 k^n 中的解空间，试证明：$\mathrm{k}^n=V_1\oplus V_2$，其中 I_n 代表 n 阶单位矩阵，$\oplus$ 表示直和。

5．(20 分) 设 n 阶矩阵 A 可逆，α,β 均为 n 维列向量，且 $1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$，其中 β^T 表示 β 的转置。

1）证明矩阵 $P=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆矩阵；

2）证明矩阵 $Q=A+\alpha\beta^T$ 可逆，并求其逆矩阵。

6．(20 分) 证明：任何复数方阵 A 都与它的转置矩阵 A^T 相似。

7．(22 分) 在二阶实数矩阵构成的线性空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中定义：

$$(A,B)=\mathrm{tr}(A^T B),\quad \forall A,B\in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

其中，A^T 表示矩阵 A 的转置，$\mathrm{tr}(X)$ 表示矩阵 X 的迹。

1) 证明 (A,B) 是线性空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的内积；

2) 设 W 是由 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间。试求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基。

8．(18 分) 设 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是数域上线性空间 V 的非零线性变换，试证明存在向量 $\alpha\in V$，使得 $T_i(\alpha)\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。