DOI:10.13979/j.cnki.bsxb.2006.03.002
第 19 卷第 3 期 广西右江民族师专学报 2006 年 6 月
Vol. 19 - No. 3 JOURNAL OF YOUJIANG TEACHERS COLLEGE FOR NATIONALITIES GUANGXI Jun. 2006

# 拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用

李曼生, 陈 莉
(兰州城市学院 数学系, 甘肃兰州 730070)

摘 要: 文章讨论了高阶线性常微分方程解的构成, 从信号与系统的角度出发, 给出了线性方程的系统模型。使用拉普拉斯变换的方法对几种常见的问题进行了解答, 极大地简化了计算。

关键词: 线性非齐次微分方程; 拉普拉斯变换; 线性系统
分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1008-8113(2006)03-0005-04

## Application of Laplace Transform to General Solutions of Nonhomogeneous Linear Differential Equations of Constant Coefficient

*LI Man-sheng, CHEN Li*
(Department of Mathematics, Lanzhou City College, Lanzhou, Gansu 730070, China)

**Abstract**: This paper studies the general solutions of nonhomogeneous linear differential equations with constant coefficients, and the system model of the linear differential equations is given from the points of signal and system. The method of using Laplace transforms to get the solutions of the linear differential equations is proposed in the paper. As a result, the complexity of computing is reduced.

**Key words**: Nonhomogeneous Linear Differential Equation; Laplace Transform; Linear System

## 1 问题的引出

常系数非齐次线性微分方程是高等数学中极为重要的内容, 它广泛应用于电子、物理、力学等学科中, 它的求解往往是解决问题的关键。下面笔者先对线性非齐次微分方程的解的结构进行分析, 以二阶方程为例, 二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为:

$$y''+q_1y'+q_2y=f(x)\ (其中\ q_1、q_2\ 是常数) \tag{1}$$

由定理: 设 $y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+q_1y'+q_2y=f(x)$ 的一个特解, $y$ 是上式对应的齐次方程的通解, 那么 $y^*+y$ 为二阶非齐次方程的通解。可知: 求(1)式的通解可以归结为求对应的齐次方程

$$y''+q_1y'+q_2y=0 \tag{2}$$

收稿日期: 2006-02-23
作者简介: 李曼生(1968~), 女, 汉族, 河南省郑州人, 兰州城市学院数学系副教授; 陈莉(1979~), 女, 汉族, 甘肃天水人, 兰州城市学院数学系助教。

的通解和(1)式特解的问题。(2)式的通解可以方便地使用特征方程法进行求解,因此问题主要集中在(1)式特解的求解上。传统的方法是待定系数法,其求解过程比较繁琐,且容易出错,而使用拉普拉斯变换求解微分方程的新算法可以极大地简化计算。

## 2 模型的建立

从信号与系统的角度出发,系统可以等效成一个微分方程,线性系统就可以等效成一个线性非齐次方程,系统分析就是研究它所对应的微分方程解的情况,反之,如果我们可以使用别的方法来求出系统的输出,就可以完成对微分方程的求解过程。对应的模型建立如图1所示:

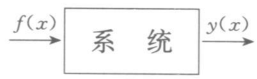


图1 系统模型

此时,我们可以得出定量的给出 $f(x)$,通过一特定的系统求出输出的 $y(x)$,即可以通过 $y(x)^1$ 来求出该系统对应的微分方程的特解。如果已知的微分方程为 $y''+q_1y'+q_2y=f(x)$,此时对应的线性系统框图应该如图2所示:

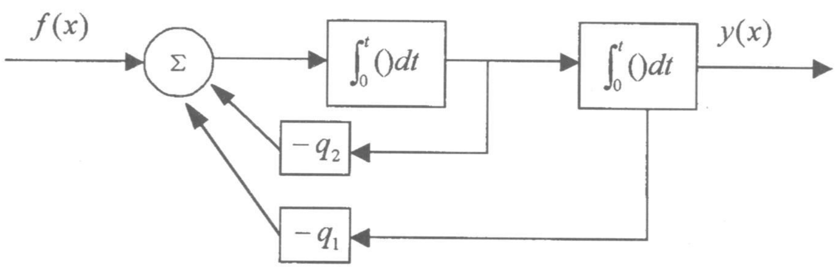


图2 二阶差分方程对应的系统图

由图2可以得出:对于一个任意给定的线性常微分方程都可以设计一个线性系统与之对应,从而将微分方程的求解问题转换成为对应的线性系统的求解问题。线性系统的求解方法很多,如微分算子法、频域分析法、拉普拉斯变换法等等,在此笔者着重以拉普拉斯变换为例进行说明。

## 3 拉普拉斯变换的有关知识

拉普拉斯变换的定义:设 $f(x)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$,则

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\ (\text{其中 } s=\sigma+j\omega)$$

拉普拉斯变换的性质:

(1) $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$

(2) 当 $f(0^-)=0$ 时, $f'(t)\leftrightarrow sF(s)$

(3) 当 $f(0^-)=0$ 时, $\int_0^t f(t)dt\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}$

表 1　几种常用信号的拉普拉斯变换

| 拉普拉斯变换 | | |
|---|---|---|
| $u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$ | $e^{\alpha t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$ | $e^{\alpha t}\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$ |
| $t^n e^{\alpha t}u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | $t^n e^{\alpha t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-a)^2}$ | $e^{\alpha t}\cos\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$ |
| $t\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$ | | |

注：上式中的 $s$ 可以像代数式一样进行计算。

## 4　解题的方法以及例题举例

设一高阶线性非齐次微分方程：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y(s)=f(s)$，先利用第 3 部分中讲到的拉普拉斯变换性质对其进行拉氏变换，变换结果为：

$$s^n y(s)+a_{n-1}s^{(n-1)}y(s)+\cdots+a_1 sy(s)+a_0 y(s)=f(s) \tag{3}$$

因此有：$y(s)=\frac{f(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$ 由信号与系统的知识可知：要求出(3) 的特解也就是要求出输出全响应中的强迫响应。根据强迫响应的性质以及强迫响应的拉氏变换可知，强迫响应就是 $y(s)$ 的部分展开式中与 $f(s)$ 极点所对应的分式的拉普拉斯反变换。根据部分展开定理结合我们平时所用到的 $f(x)$ 的形式分类作以介绍。常用的 $f(x)$ 分为：$f(x)=e^{ax}$、$f(x)=e^{ax}p(x)$，其中 $p(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$、$f(x)=\sin\lambda x$ 和 $f(x)=\cos\lambda x$ 等三种形式。现结合这三种形式分别作介绍。

(1) 当 $f(x)=e^{ax}$ 时，其解题对应的计算方法如下：

(a)　当 $y(\lambda)\neq 0$ 时，$y^*(x)=\frac{1}{y(s)}e^{\lambda x}=\frac{1}{y(\lambda)}e^{\lambda x}$；

(b)　当 $y(\lambda)=0$ 时，$y^*(x)=\frac{1}{y(s)}e^{\lambda x}=\frac{1}{y'(\lambda)}e^{\lambda x}$。

例 1　$y''-4y=e^{2x}$ 的通解是________(1999 年研究生入学考试试题)。

解：首先使用特征方程法求出该方程对应的齐次方程的通解是：

$$y_1=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$$

利用上面所讲到的方法可以求出特解：

$$y^*=\frac{1}{y(s)}e^{2x}=x\frac{1}{y'(2)}e^{2x}=\frac{1}{4}xe^{2x}$$

因此原式的通解为：

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$$

(2) 当 $f(x)=e^{\lambda x}p(x)$ 时，特解 $y^*(x)=e^{\lambda x}\frac{1}{y(s+\lambda)}p(x)$。

例 2　求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

解：首先使用特征方程法求出该方程对应的齐次方程的通解：

$$y_1=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

利用上面所提到的方法可以进行以下的求解：

$$y^{*}=e^{\lambda x}\frac{1}{y(s+\lambda)}p(x)=e^{2x}\frac{1}{(s+2)^{2}-5(s+2)+6}x=e^{2x}\frac{1}{s^{2}-s}x=e^{2x}\frac{1}{s(s-1)}x=e^{2x}\left(1+\frac{1}{s}\right)x$$
$$=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^{2}+x\right)$$

因此

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^{2}+x\right)$$

(3) 当 $f(x)=\sin\lambda x$ 时，$\frac{1}{y(s^{2})}\sin\lambda x=\frac{1}{y(-\lambda^{2})}\sin\lambda x$；

当 $f(x)=\cos\lambda x$ 时，$\frac{1}{y(s^{2})}\cos\lambda x=\frac{1}{y(-\lambda^{2})}\cos\lambda x$。

此时有运算规则：

$$\frac{1}{s^{2n+1}}\sin\lambda x=\frac{1}{s^{2n}s}\sin a\lambda x=\frac{1}{(-\lambda^{2})^{n}}\cdot\frac{1}{s}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos\lambda x}{\lambda^{2n+1}}$$
$$\frac{1}{s^{2n+1}}\cos\lambda x=\frac{1}{s^{2n}s}\cos a\lambda x=\frac{1}{(-\lambda^{2})^{n}}\cdot\frac{1}{s}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin\lambda x}{\lambda^{2n+1}}$$

例3　求：$y''+4y'+5y=\sin 2x$ 的特解。

解：$y^{*}=\frac{1}{y(s)}\sin 2x=\frac{1}{s^{2}+4s+5}\sin 2x=\frac{1}{-4+4s+5}\sin 2x=\frac{1}{4s+1}\sin 2x=\frac{4s-1}{16s^{2}-1}\sin 2x$

$=\frac{4s-1}{-16\times 4-1}\sin 2x=-\frac{1}{65}[8\cos 2x-\sin 2x]$

由以上的解题步骤可以看出使用拉普拉斯变换求解微分方程特解的方法与传统的待定系数法相比具有简洁明快、计算量小等特点，而且由于在求解的过程中有公式可循，因此可以采用计算机编程实现。

参考文献：

[1] 吴大正. 信号与系统[M]. 北京：高等教育出版社，2000.

[2] 罗永生. 信号与线性系统分析[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1996.

[3] 同济大学数学教研组. 高等数学[M]. 北京：高等教育出版社，1996.

【责任编辑：邓崇亮】