



北京市高等教育精品教材立项项目



该文档是极速PDF编辑器生成，
如果想去掉该提示，请访问并下载：
<http://www.jspdfeditor.com/>

北京大学数学教学系列丛书



研究生
数学基础课教材

复分析导引

李 忠 著

北京大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

复 分 析 导 引

李 忠 著

北 京 大 学 出 版 社

• 北 京 •

图书在版编目(CIP)数据

复分析导引/李忠著. —北京:北京大学出版社, 2004. 11

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-07798-X

I. 复… II. 李… III. 复分析-高等学校-教材 IV. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 090191 号

书 名: 复分析导引

著作责任者: 李 忠 著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-07798-X/O · 0610

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890 mm × 1240 mm A5 9.5 印张 269 千字

2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 20.00 元

内 容 简 介

本书是为综合性大学、高等师范院校数学专业本科高年级学生和研究生编写的复分析教材,其目的是讲述现代复分析(不含多复分析)的一些基本理论及其近代重要发展。

本书共分九章,主要内容有:正规族与 Riemann 映射定理,经典几何函数论,共形模与极值长度,拟共形映射,Riemann 曲面的基本概念,Riemann-Roch 定理与单值化定理,Teichmüller 理论与模空间。这些内容与现代核心数学的许多分支领域有着深刻的联系。因此,本书不仅面向主修复分析的学生,而且也面向其他有关领域的学生。

本书是在作者多年来使用的讲义基础上编写而成,文字叙述简洁,通俗易懂,重点突出;特别注重解释重要概念和重要定理的意义以及方法的实质;部分定理的证明具有自己的明显特色。书中对一些重要理论的历史发展及其与其他领域的联系,作了必要的介绍与评述。

本书可作为高等院校高年级大学生、研究生的复分析教材,也可作为有关专业研究人员的参考书。

作者简介

李忠 北京大学数学科学学院教授、博士生导师。1936 年出生于河北省,1960 年毕业于北京大学数学力学系,毕业后一直在北京大学从事科研与教学工作。

李忠教授的主要研究领域为复分析。他在拟共形映射和 Teichmüller 空间等方面有系统深入的研究,发表学术论文 50 余篇,并著有《拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用》等书。他的研究成果曾两次获国家自然科学三等奖和国家教委科技进步一等奖。1991 年被国家人事部和国家教委评为“国家有突出贡献的中青年专家”。

李忠教授长期从事基础课教学工作并努力实践教学改革。他曾获得国家教学优秀成果一等奖,并在 1993 年被国家教委评为“国家优秀教师”。他主编的教材《高等数学简明教程》获 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖。

李忠教授 1987 年至 1991 年任北京大学数学系主任。1987 年至 1995 年任中国数学学会常务理事兼秘书长。1997 年至今任北京数学学会理事长。

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合,我们进行了有组织的教材建设,计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材,这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前 言

本书是为综合性大学数学专业本科生高年级学生及研究生编写的复分析教材。它不仅是面向主修复分析的学生的,而且也是面向数学专业中主修其他各有关领域的学生的。作者希望通过此书向他们介绍有关现代复分析(不含多复分析)中的某些基本概念、基本理论与重要发展。它既是一部供一学期使用的教材,也是一部供有关研究人员使用的专业参考书。

本书的主要内容有:经典几何函数论,拟共形映射,Riemann 曲面和 Teichmüller 空间。之所以选择这些内容,这自然与本书作者的研究兴趣有关,但同时也考虑到它们在现代数学中与其他分支领域有较多的联系。在本书中,几何函数论并不是我们讨论的重点。我们只介绍几何函数论中那些最基本的部分,以便为后面的讨论做必要的准备。拟共形映射的理论是著名数学家 Lavrent'yev 与 Ahlfors 从不同的出发点创立的。它在 Riemann 曲面的模问题、单值化理论和 Klein 群等研究中显示了重要作用,其应用范围在不断扩大,甚至超出了复分析的范畴。对于初学者而言,Riemann 曲面理论是本书中最要紧的部分。解析函数的许多性质只有在 Riemann 曲面上才显得更为清晰、和谐与统一。大家知道,紧 Riemann 曲面的理论与代数几何及代数数论有直接的联系。作为一维复流形,Riemann 曲面所涉及的理论与方法,对于一般复流形和复几何的研究而言,是一个最基本的参照物。Riemann 曲面的理论与方法的推广,深刻地影响着现代数学的许多其他分支。本书的最后两章介绍 Teichmüller 空间的理论。它是 Teichmüller 关于 Riemann 模问题的著名结果的深化。这一理论是在 Ahlfors 的倡导下发展起来的;后来,由于其广泛应用而备受关注。它与低维拓扑(Thurston 的工作)、复解析动力系统(Sullivan 的工作和 McMullen 的工作)和微分几何(Tromba 的工作和 Wolf 的工作)之间有着深刻的联系,并出人意外地应用于理论物

理的弦理论之中。

作者自 1983 年至 1996 年,曾先后在北京大学和其他院校多次为数学系的高年级本科生和研究生讲授复分析课程。其间大多数是讲 Riemann 曲面,有时也讲拟共形映射或 Teichmüller 空间。当时,作者编写了三部油印讲义:《黎曼曲面基础》、《拟共形映射》和《Teichmüller 空间引论》,作为讲课的教材。后来,这些讲义已多年没有重印了。去年,当作者再次为北京大学数学学院开设复分析课时,便面临着讲义的问题和讲什么的问题。这时便萌发了将上述三部分内容合写成一本书,并希望能在一学期之内讲完的想法。这一想法的主要出发点是复分析课的内容不宜过窄,并应体现学科之间的联系。于是,对于上述讲义的材料进行了筛选、修订甚至重写,并增添了经典几何函数论的章节,形成了本书的初稿。2003 年 2 月至 7 月之间,作者用该书初稿在北大数学学院为高年级学生和研究生讲授了复分析课,讲完了其主要内容,实现了作者的初衷。

为使读者容易把握事情的本质,在编写此书时作者反复斟酌了内容的组织与表述方式,以尽可能作到叙述上简单明了,突出主线。我们希望把主要篇幅用于解释重要概念和定理的意义以及方法的实质,而不是把时间花费在证明的技术细节和形式的验证上。书中许多定理的证明在过去的教学过程中逐步形成了自己的简单形式。在此次的书稿中,我们对于单值化定理的传统证明作了较大的更动。我们没有使用传统的次调和函数的 Perron 族方法,而是利用 Montel 正规规定则给出了单值化定理一个简单的证明,缩减了讨论的篇幅。为了加深读者对所涉及理论的理解,在书中我们对相关理论的历史发展作了简要评述。

作为数学系高年级学生或研究生的选修课,原本没有什么规定的大纲;其材料的选取是“仁者见仁”“智者见智”。在使用这部教材授课时,主讲教师完全可以根据自己的兴趣与实际情况,对本书的内容进行增删。此外,将一部分内容留给读者自己去学习、研究,可能要比什么内容都在课堂上讲授效果更好。

书中每一章都配备了适量的习题,其中大多数题目是不难的,但也有少数题目要花费较多的时间。我希望青年学者不仅要有坚实而

广泛的专业知识,而且要有较强的独立动手能力。

在编写本书的过程中得到许多朋友的帮助。我的同事伍胜健教授参与了编写大纲的审定。郭辉教授、漆毅教授及王仙桃教授审阅了书稿,帮助作者改正了许多不当之处。此外,2004年崔贵珍教授与刘劲松博士以此书的书稿为主要参考书分别在浙江大学和北京大学为研究生讲授复分析课,他们对书稿提出了宝贵的建议。北京大学出版社的刘勇同志对此书的出版一直十分关心,并做了大量编审工作。作者在此对他们一并表示衷心的感谢!

鉴于作者水平有限,本书一定还存在不少毛病,欢迎读者批评指正。

李 忠

于北京大学

2004年6月20日

目 录

第一章 Riemann 映射定理	(1)
§ 1 解析映射	(1)
§ 2 解析函数序列与正规族	(3)
§ 3 Riemann 映射定理的证明	(5)
§ 4 共形映射的边界对应	(8)
§ 5 模函数	(11)
§ 6 单值性定理	(13)
§ 7 Picard 定理	(15)
§ 8 单叶函数	(16)
§ 9 区域序列共形映射的收敛定理	(21)
习题	(23)
第二章 广义 Schwarz 引理及其应用	(25)
§ 1 Poincaré 度量	(25)
§ 2 Schwarz-Pick 定理	(29)
§ 3 Montel 正规定则	(34)
§ 4 Ahlfors 超双曲度量	(35)
§ 5 $\rho_{0,1}(z)$ 的初等下界与 Landau 定理	(38)
§ 6 Picard 大定理	(42)
§ 7 Schottky 定理	(44)
习题	(45)
第三章 共形模与极值长度	(47)
§ 1 共形模	(47)
§ 2 极值长度	(51)
§ 3 Rengel 不等式	(54)
§ 4 模的单调性与次可加性	(55)

§ 5	保模映射	(58)
§ 6	模的连续性	(59)
§ 7	模的极值问题	(60)
	习题	(63)
第四章	拟共形映射	(65)
§ 1	几何定义	(65)
§ 2	可微拟共形映射	(66)
§ 3	K 拟共形映射的紧性	(72)
§ 4	广义导数	(75)
§ 5	拟共形映射的分析性质	(77)
§ 6	存在性定理及其推论	(87)
§ 7	拟共形映射的 Riemann 映射定理	(97)
§ 8	等温坐标的存在性	(100)
	习题	(101)
第五章	Riemann 曲面的基本概念	(103)
§ 1	Riemann 曲面的定义	(103)
§ 2	Riemann 曲面上的解析函数与映射	(107)
§ 3	紧 Riemann 曲面间的全纯映射	(111)
§ 4	微分形式	(115)
§ 5	调和微分与半纯微分	(120)
§ 6	Stokes 公式	(123)
§ 7	Weyl 引理	(126)
§ 8	一阶微分形式的 Hilbert 空间	(129)
§ 9	光滑微分的分解定理	(132)
§ 10	调和微分的存在性	(134)
§ 11	半纯微分与半纯函数的存在性	(139)
	习题	(140)
第六章	Riemann-Roch 定理	(143)
§ 1	曲面的拓扑	(143)
§ 2	de Rham 上同调群	(151)

§ 3	紧 Riemann 曲面上的全纯微分	(155)
§ 4	半纯微分的双线性关系	(160)
§ 5	除子与 Riemann-Roch 定理	(163)
§ 6	Riemann-Roch 定理的证明	(169)
§ 7	Weierstrass 空隙定理	(173)
§ 8	Abel 定理及其推论	(178)
	习题	(182)
第七章	单值化定理	(184)
§ 1	单值化问题与单值化定理	(184)
§ 2	单值化定理的证明	(186)
§ 3	单值化定理的推论	(188)
§ 4	Riemann 曲面上的度量	(192)
§ 5	双曲型 Riemann 曲面与 Fuchs 群	(193)
	习题	(201)
第八章	Riemann 曲面上的拟共形映射	(203)
§ 1	基本概念	(203)
§ 2	拟共形映射的同伦提升	(205)
§ 3	拟共形映射的极值问题	(211)
§ 4	二次微分的轨线结构	(215)
§ 5	Teichmüller 映射	(228)
§ 6	Teichmüller 惟一性定理	(232)
	习题	(236)
第九章	Teichmüller 空间	(239)
§ 1	Riemann 曲面的模问题	(239)
§ 2	Teichmüller 空间的模型	(243)
§ 3	Fricke 空间	(246)
§ 4	Teichmüller 存在性定理	(250)
§ 5	Teichmüller 度量	(255)
§ 6	模群及其间断性	(259)
§ 7	模变换的分类	(267)

习题.....	(273)
符号说明.....	(275)
名词索引.....	(277)
参考文献.....	(280)

第一章 Riemann 映射定理

Riemann 映射定理在复变函数论中是一块重要的基石. 本章的主要目的是证明这一定理. 同时围绕着 Riemann 映射定理的证明与应用, 来介绍解析函数的正规族理论、模函数及共形映射的边界对应等, 并证明 Picard 定理等.

Riemann 映射定理在 Riemann 曲面论中的推广就是所谓单值化定理. 这将是第七章中讨论的主题.

§ 1 解析映射

解析函数所实现的映射称为**解析映射**, 或**全纯映射**.

我们知道, 解析映射的基本特征是它在非临界点的局部保角性. 它的另一个特征(拓扑特征)是将开集变为开集, 除非它退化为常值映射.

将开集变为开集的映射通常称为**开映射**.

定理 1 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在区域 D 内的解析函数, 且不恒等于常数, 则 f 是区域 D 上的一个开映射.

证 显然, 只要证明对于任意一点 $z_0 \in D$, $f(z_0)$ 是集合 $f(D)$ 的内点就足够了.

由于 f 不是常数, 故由幂级数展开式可知 f 在点 z_0 附近可表为

$$f(z) = f(z_0) + g(z)(z - z_0)^n,$$

其中 $z \in \Delta_r(z_0) = \{z: |z - z_0| < r\}$, n 为一自然数, r 是充分小的正数, g 在 $\overline{\Delta_r(z_0)}$ 上解析且不等于零. 设

$$c = \min\{|g(z)|: z \in \overline{\Delta_r(z_0)}\}.$$

那么, 在圆周 $C_r(z_0) = \{z: |z - z_0| = r\}$ 上 $|f(z) - f(z_0)|$ 大于或等于 cr^n . 于是对于任意一点 w , 只要

$$|w - f(z_0)| < cr^n,$$

则由 Rouché 定理推出, f 在 $\Delta_r(z_0)$ 内将取到 w 值 n 次. 可见邻域 $\{w: |w - f(z_0)| < cr^n\} \subset f(D)$, 即 $f(z_0)$ 是 $f(D)$ 的一个内点. 证毕.

通常我们所说的区域是指连通的开集. 显然, 解析映射保持开集的连通性. 因此, 我们由定理 1 立即推出:

定理 2 非常值的解析映射总是把区域映射为区域.

若解析映射 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 上的单射, 且到 G 是满射, 则称 f 是区域 D 到 G 的**共形映射**.

若区域 D 与 G 之间存在一个 D 到 G 的共形映射, 则称 D 与 G **解析同构或共形等价**, 而 D 到 G 的共形映射则称为**解析同构映射**.

一个区域 D 上的全体 D 到自身的解析同构映射, 在复合运算作为乘法的意义下, 显然组成一个群, 通常记做 $\text{Aut}(D)$, 并称之为 D 的**解析自同构群**.

确定一个区域或一个 Riemann 曲面的解析自同构群常常是很重要的, 尤其是对一些常见的区域.

单位圆 Δ 的解析自同构群是

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ z \mapsto e^{ia} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a \in \mathbb{R}, a \in \Delta \right\}.$$

证明是容易的. 可以直接验证, 上述形式的分式线性变换都是 Δ 到自身的一个共形映射. 而要证明每一个 Δ 的解析自同构映射都具有上述形式也并非难事; 但有趣的是, 这要用到 Schwarz 引理. 详细证明留给读者.

顺便指出, Schwarz 引理虽然通常人们称之为引理, 但其作用却很大. 我们将有专门的一章讨论它的推广及应用.

作为练习及复习, 请读者自己证明

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

共形映射的概念可推广到含有点 ∞ 的区域上, 这时映射函数或其逆允许有一个 1 阶极点.

$\bar{\mathbb{C}}$ 的解析自同构群 $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ 是全体形如

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1)$$

的分式线性变换, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. 这里由系数 a, b, c, d 组成的矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

称做该分式线性变换的系数矩阵.

很容易验证, 两个上述分式线性变换的复合运算恰好相当于其系数矩阵的乘法运算. 另外, 注意到矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

在 $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ 中对应于同一元素. 故解析自同构群 $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ 同构于 $\text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$, 或写作

$$\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

今后我们用 \mathbb{H} 表示上半复平面, 也即

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}.$$

很容易推出

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

§ 2 解析函数序列与正规族

设 $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在区域 D 上的解析函数, $n=1, 2, \dots$. 我们称序列 $\{f_n\}$ 在 D 内**局部一致收敛**于 f , 如果对任意一点 $z_0 \in D$, 都存在一个以 z_0 为圆心、以 r 为半径的小圆 $\Delta_r(z_0)$, 使得 $\{f_n\}$ 在闭圆 $\overline{\Delta_r(z_0)}$ 上一致收敛于 f .

显然, 局部一致收敛的概念等价于通常说的内闭一致收敛.

定理 1 (Weierstrass 定理) 设 $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是区域 D 内的解析函数, $n=1, 2, \dots$. 若序列 $\{f_n\}$ 在 D 内局部一致收敛于 f , 则 f 在 D 内也是解析函数, 且 $\{f'_n\}$ 在 D 内局部一致收敛于 f' .

这是通常解析函数论教程中的定理, 其证明只要用 Cauchy 公式即可.

解析函数序列的极限仍然是解析函数, 在解析函数论中这是一

项很基本的事实.

一对一的解析映射,通常称为**单叶函数**(univalent function).

单叶函数序列的极限是否依然是单叶的? 下面的定理回答了这一问题:

定理 2 设 $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是区域 D 内的单叶函数, $n=1, 2, \dots$. 若序列 $\{f_n\}$ 在 D 内局部一致收敛于 f , 则 f 要么是常数, 要么是 D 内的单叶函数.

证 用反证法. 设 f 既不是常数, 又不是单叶函数. 这时, 存在两点 $z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2)$. 在 D 内取一条 Jordan 闭曲线 Γ , 使得其内部全部包含于 D 内, 且 Γ 的内部包含 z_1 与 z_2 . 此外, 由于 f 不是常数, 故可要求在 Γ 上 $f(z) - f(z_1)$ 没有零点. 令

$$\eta = \min\{|f(z) - f(z_1)| : z \in \Gamma\},$$

则 $\eta > 0$. 另外, 当 n 充分大时, $|f(z) - f_n(z)|$ 在 Γ 上的值 $< \eta$. 这时,

$$|f(z) - f_n(z)| < |f(z) - f(z_1)|, \quad \forall z \in \Gamma.$$

注意到

$$f_n(z) - f(z_1) = (f_n(z) - f(z)) + (f(z) - f(z_1)),$$

由 Rouché 定理可以推出, 在 Γ 的内部 $f_n(z) - f(z_1)$ 与 $f(z) - f(z_1)$ 有相同的零点个数. 但后者零点个数至少为 2. 于是, f_n 在 Γ 的内部至少取到 $f(z_1)$ 两次 (当 n 充分大时), 这与 f_n 的单叶性假定矛盾. 证毕.

为了证明 Riemann 映射定理, 我们还需要**正规族**的概念.

设 $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C} \mid \alpha \in A\}$ 是区域 D 上的一个解析函数族. 我们称 \mathcal{F} 是一个**正规族**(normal family), 如果 \mathcal{F} 中的任意序列都包含一个子序列, 该子序列在 D 内局部一致收敛.

历史的注记 G. Ascoli 在 1884 年提出等度连续的概念. 而 1895 年 C. Arzela 证明了连续函数族为紧性族的充要条件是等度连续与一致有界. 1907 年 Montel 提出了解析函数正规族的概念, 并证明了他的定理. 这个定理后来人们称之为 Montel 正规性定理.

根据 Arzela 定理, 只要 \mathcal{F} 中的函数族局部一致有界且等度连续, 则 \mathcal{F} 是正规的. Arzela 定理是针对连续函数族的. 但对于解析函数族而言, 函数族紧性条件可以放宽, 只要局部一致有界就足够

了,因为这时局部一致有界性蕴含着等度连续性.

定理 3(Montel 定理) 设 $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in A\}$ 是区域 D 上的一个解析函数族. 若对于 D 中的任意一个紧子集 $E \subset D$, f_α 在 E 上是一致有界的, 则 \mathcal{F} 在 D 上是正规族.

证 对于任意给定的紧子集 E , 我们取 $\delta_0 > 0$ 充分小, 使集合

$$E_0 = \{z \in \mathbb{C} : d(z, E) \leq 2\delta_0\} \subset D,$$

其中 $d(z, E)$ 是 z 到 E 的距离. 根据定理的假定, 对于紧子集 E_0 存在一数 M , 使得

$$|f_\alpha(z)| \leq M, \quad \forall z \in E_0, \alpha \in A.$$

由 Cauchy 不等式有

$$|f'_\alpha(z)| \leq \frac{M}{\delta_0}, \quad \forall z \in E, \alpha \in A.$$

这意味着

$$|f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2)| \leq \frac{M}{\delta_0} |z_1 - z_2|, \quad \alpha \in A,$$

只要 $z_1, z_2 \in E$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta_0$. 这样, f_α 在 E 上等度连续. 由 Arzela 定理就推出本定理. 证毕.

§ 3 Riemann 映射定理的证明

1851 年 Riemann 在其博士论文中证明了下面的定理 1. 但当时 Riemann 的证明中使用了所谓 Dirichlet 原理, 后来发现这一原理的陈述有毛病. 直到 1870 年一个完整的证明才由 C. Neumann 与 H. Schwarz 给出.

定理 1(Riemann 映射定理) 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通区域, 且其边界点多于一点. 又设 $z_0 \in D$ 是任意给定的一点, 则存在一个共形映射 $\varphi: D \rightarrow \Delta$, 将 D 映为单位圆 Δ , $\varphi(z_0) = 0$, 且 $\varphi'(z_0) > 0$. 这样的映射 φ 是惟一的.

证 设 $\mathcal{F} = \{f: D \rightarrow \Delta\}$ 是全体在 D 上单叶且将 D 映入 Δ 内的解析函数族.

首先, 我们证明 $\mathcal{F} \neq \emptyset$. 设 $a, b \in \partial D$, 且 $a \neq b$. 令

$$g(z) = \frac{z-a}{z-b},$$

那么, 区域 $D' = g(D)$ 是一个不包含 0 与 ∞ 的单连通域, 且其边界 $\partial D'$ 包含 0 及 ∞ . 于是, 函数 $w = \sqrt{g}$ 在 D 中有两个单值解析分支, 分别记为 $h_+(z)$ 及 $h_-(z)$, 且满足

$$h_+(z) = -h_-(z), \quad \forall z \in D.$$

这样, $h_+(D)$ 与 $h_-(D)$ 是关于原点对称的两个区域 (见图 1.1).

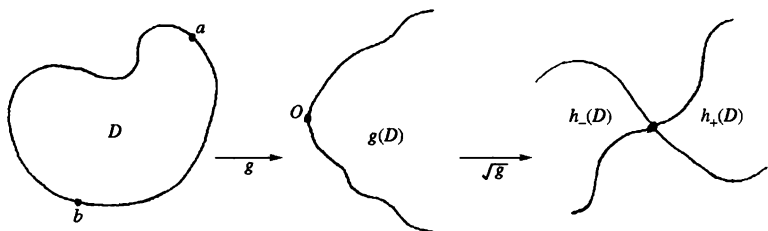


图 1.1

在 $h_-(D)$ 中取一点 w_0 , 并假定以 w_0 为圆心、以 $\delta > 0$ 为半径的圆完全包含于 $h_-(D)$ 之中. 这时函数

$$f_*(z) = \frac{\delta}{h_+(z) - w_0}$$

则在 \mathcal{F} 之中.

现在, 我们考虑这样的极值问题: 在 \mathcal{F} 中求一函数使其在 z_0 点的导数的模最大.

设 $r > 0$ 使得 $\Delta_r(z_0) \subset D$. 这时根据 Cauchy 不等式及单叶性,

$$0 < |f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

令

$$\alpha = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}.$$

由 $|f'_*(z_0)| > 0$ 可知 $\alpha > 0$. 显然, 存在 $f_n \in \mathcal{F} (n=1, 2, \dots)$, 使得

$$|f'_n(z_0)| \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

由 Montel 定理, \mathcal{F} 是一个正规族. 这样, 在序列 $\{f_n\}$ 中存在一个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 内局部一致收敛. 设其极限为 f_0 , 那么, 根据

Weierstrass 定理, f_0 是 D 上的解析函数, 且 $|f'_0(z_0)| = \alpha$.

又因为 f_n 是单叶的, 根据 § 2 中的定理 2, f_0 要么是单叶的, 要么是常数. 注意到 $\alpha > 0$, 可知后一种情况不可能. 故 f_0 是单叶函数, 且 $|f_0| < 1$.

这样, 我们证明了在 \mathcal{F} 中存在一个 f_0 , 使其在 z_0 点的导数的模达到最大.

现在, 我们要进一步证明 $f_0(z_0) = 0$ 且 f_0 将 D 变为 Δ .

假定 $f_0(z_0) = \beta \neq 0$. 令

$$f_1(z) = \frac{f_0(z) - \beta}{1 - \overline{\beta}f_0(z)},$$

则显然 $f_1 \in \mathcal{F}$. 简单计算表明

$$f'_1(z_0) = \frac{f'_0(z_0)}{1 - \overline{\beta}\beta}.$$

于是, $|f'_1(z_0)| > |f'_0(z_0)|$, 与 $|f'_0(z_0)|$ 的最大性矛盾. 由此推出

$$f_0(z_0) = 0.$$

假定 $f_0(D)$ 不是 Δ , 即存在一点 $w_1 \in \Delta \setminus f_0(D)$. 这时, 函数

$$\psi(z) = \frac{f_0(z) - w_1}{1 - \overline{w_1}f_0(z)} \quad (z \in D)$$

不取 0 及 ∞ . 因此, $\sqrt{\psi}$ 在 D 内有单值解析分支, 设其为 h . 则 $h \in \mathcal{F}$.

又令

$$f_2(z) = \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}h(z)},$$

则 $f_2 \in \mathcal{F}$. 经过计算, 我们有

$$f'_2(z_0) = \frac{-(1 + |w_1|)}{2\sqrt{w_1}} f'_0(z_0).$$

再次导致 $|f'_0(z_0)|$ 不是最大的, 产生矛盾. 由此推出: $f_0(D) = \Delta$.

总之, 我们证明了 $f_0: D \rightarrow \Delta$ 是 D 到 Δ 的共形映射, 且 $f_0(z_0) = 0$.

显然, 取适当的 $\theta \in \mathbb{R}$ 可使 $\varphi = e^{i\theta} f_0$ 满足定理要求: $\varphi'(z_0) > 0$.

下面证明映射的惟一性. 假如另有一个 D 到 Δ 的共形映射 $\tilde{\varphi}: D \rightarrow \Delta$, $\tilde{\varphi}(z_0) = 0$ 且 $\tilde{\varphi}'(z_0) > 0$. 那么 $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ 是 Δ 的解析自同构映

射, 且将 0 变为 0. 因此, $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$. 由条件 $\varphi'(z_0) > 0$ 及 $\tilde{\varphi}'(z_0) > 0$, 立即推出 $e^{i\theta} = 1$, 也即 $\tilde{\varphi} = \varphi$. 这样, 我们完成了定理中的惟一性部分的证明. 证毕.

Riemann 映射定理使我们得以对 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的单连通域, 进行解析同构分类:

定理 2 设 D 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的单连通域, 则 D 解析同构于下列三种典型区域之一: $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} , 或 Δ .

证明是容易的. 事实上, 若区域 D 不是 $\overline{\mathbb{C}}$ 且仅有一个边界点, 那么可以通过一个分式线性变换将该边界点变为 ∞ , 而这时 D 则变为 \mathbb{C} . 若区域 D 的边界点多于一点, 则通过一个分式线性变换使 D 的像成为 \mathbb{C} 中的单连通域, 且其边界点多于一点; 从而可应用 Riemann 映射定理.

这里我们要进一步指出, $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} 与 Δ 中两两互不解析同构.

事实上, $\overline{\mathbb{C}}$ 是紧的, 而 \mathbb{C} 与 Δ 是非紧的. 故 $\overline{\mathbb{C}}$ 与 \mathbb{C} 或 Δ 不拓扑等价, 因而不可能解析同构. 另外, 由 Liouville 定理可知, 任意一个解析函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \Delta$ 只能是常数, 这表明 \mathbb{C} 与 Δ 不可能解析同构.

这个定理可以推广到 D 是单连通 Riemann 曲面的情形. 这便是著名的单值化定理, 其证明要比 Riemann 映射定理困难得多.

§ 4 共形映射的边界对应

一个拓扑映射, 甚至光滑映射, 都未必能连续延拓到区域的边界上. 但是, 一个共形映射则常常能做到这一点, 只要映射的区域的边界不太复杂. 我们有下面的定理:

定理 1 设 D 是由一条 Jordan 曲线所围的区域, 则 D 到 Δ 的共形映射 φ 可延拓为 $\overline{D} \rightarrow \overline{\Delta}$ 的同胚映射.

证明并不复杂, 在通常解析函数论教程中可找到.

定理 1 告诉我们: 若 D 为 Jordan 区域, 则共形映射 $\varphi: D \rightarrow \Delta$ 自然诱导了 ∂D 到单位圆周的一个同胚映射. 这时我们总可以谈论 φ 的边界对应. 因此, 前面的 Riemann 映射定理中的惟一性部分, 可以

将关于 z_0 点的条件全部或部分地换成边界条件: 例如指定 ∂D 上的三点在 $\partial \Delta$ 上的像, 或者指定一内点 $z_0 \in D$ 及一边界点 $\zeta_0 \in \partial D$ 分别在 Δ 中及 $\partial \Delta$ 的像. 这时, Riemann 映射定理中的存在性部分及惟一性部分依然成立.

当所讨论的区域 D 不是 Jordan 区域, 情况则可能变得很复杂. 这时的边界点不一定是可接近的边界点.

区域 D 的一个边界点 ζ_0 称为**可接近点** (accessible point), 如果存在一条曲线

$$\alpha: [0, 1) \rightarrow D,$$

使得 $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = \zeta_0$.

图 1.2 中的矩形边界的竖边上的每点都不是可接近的.

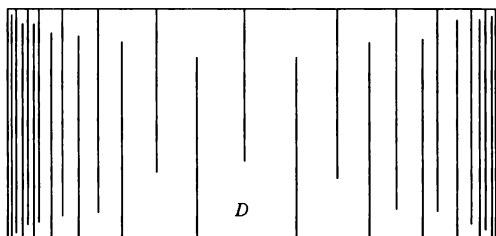


图 1.2

为了研究共形映射所诱导的边界对应, Carathéodory 引入了**素端** (prime end) 的概念. 他实际上对平面区域给出了一种新的紧化, 使平面区域间的共形映射在这种紧化下可以同胚延拓到边界.

Carathéodory 的这一定理有广泛的应用, 例如在最近的复动力系统的研究中得到了应用.

现在定义素端的概念.

给定一个单连通区域 D 及其中一点 z_0 . 一条曲线 $\gamma: (0, 1) \rightarrow D$ 称为 D 的一条**割线** (cross cut), 如果 γ 是一条 Jordan 曲线, 有端点可言且其两端均落在 ∂D . 显然, 割线 γ 将 D 分作两部分. 对给定的点 $z_0 \in D$, 若 γ 不经过 z_0 , 则 $D \setminus \{\gamma\}$ 的两个分支中有一个不包含 z_0 , 将其记为 $N(\gamma)$.

我们将 D 的割线序列 $\{\gamma_n\}$ 称为**基本链**, 如果它满足下列条件:

(i) $N(\gamma_{n+1}) \subset N(\gamma_n)$, $n=1, 2, \dots$;

(ii) $\text{diam}(\gamma_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

两个基本链 $\{\gamma_n\}$ 及 $\{\gamma'_n\}$ 称为**等价的**, 如果对于每个 n , $N(\gamma_n)$ 都包含某个 $N(\gamma'_m)$, 且 $N(\gamma'_n)$ 包含某个 $N(\gamma_k)$, 记为 $\{\gamma_n\} \sim \{\gamma'_n\}$.

基本链的等价类称为 D 的**素端**. 基本链 $\{\gamma_n\}$ 所代表的素端记为 $[\gamma_n]$.

为了具体理解素端的概念, 建议读者以图 1.2 为例, 说明图 1.2 中矩形边界的两条竖边各对应一个素端.

对于基本链 $\{\gamma_n\}$, 集合

$$\text{supp}\{\gamma_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N(\gamma_n)}$$

称做它的**支撑集**.

很容易看出, 若 $\{\gamma_n\} \sim \{\gamma'_n\}$, 则它们有相同的支撑集. 因此, 我们谈论素端的支撑集是有意义的.

这里提醒读者注意, 支撑集相同, 但素端可以不同, 见图 1.3.

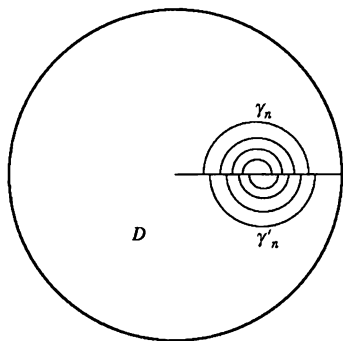


图 1.3

将 D 及其全体素端的集合并在一起记做 \hat{D} . 我们可以对 \hat{D} 中每一点建立邻域的概念, 从而使 \hat{D} 成为一个拓扑空间. 对于 D 中的点, 邻域的概念与原来相同. 对素端 $[\gamma_n]$, 我们定义集合

$$U(\gamma_n) = N(\gamma_n) \cup \{[\gamma'_n] | N(\gamma'_1) \subset N(\gamma_n)\}$$

为它的一个邻域.

定理 2(Carathéodory) 设 $\varphi: D \rightarrow \Delta$ 是有界单连通域 $D \subset \mathbb{C}$ 到

单位圆 Δ 的共形映射, 则 φ 可以延拓为 \hat{D} 到 $\bar{\Delta}$ 的同胚.

这里 $\bar{\Delta}$ 表示在通常拓扑下 Δ 的闭包.

Carathéodory 定理告诉我们共形映射诱导了区域的素端到单位圆周上的点的一一对应.

当区域 D 为 Jordan 区域时, \hat{D} 实际上完全等价于 \bar{D} . 因此, Carathéodory 定理是前面定理 1 的推广.

我们略去定理 2 的证明.

§ 5 模函数

模函数在单复分析中有广泛应用. 本节将利用 Riemann 映射定理及对称解析延拓原理给出它的定义. 在后面 § 7 中我们将应用它来证明 Picard 定理.

在单位圆内取定三条圆弧 L_1, L_2, L_3 , 它们与单位圆周正交, 并依次两两有共同之端点 (见图 1.4). 这三条圆弧围成一个单连通区域 D .

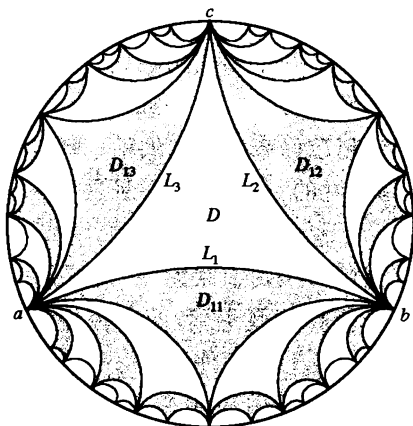


图 1.4

根据 Riemann 映射定理, 存在一个共形映射 $\mu: D \rightarrow \mathbb{H}$, 并将 D 的三个边界点 a, b, c (如图 1.4 所示) 分别对于 $0, 1, \infty$. 这里 \mathbb{H} 表示上半平面. 今后, 我们用 \mathbb{H}^* 表示下半平面.

我们将区域 D 关于圆弧 L_1 作反演变换. 由于 L_1 与单位圆周正

交,故关于 L_1 的反演变换是保持单位圆不变的. 因此, D 在此反演变换下像集仍在单位圆内,记 D 的像为 D_{11} .

根据 Schwarz 对称延拓原理, μ 可以解析延拓到 D_{11} 上. 这时 μ 将 D_{11} 映为下半平面 \mathbb{H}^* , 并将 L_1 映为区间 $(0,1)$.

将 D 关于弧 L_2 作反演得到 D_{12} , 同时将 μ 解析延拓到 D_{12} 上. 延拓后的 μ 将 D_{12} 映为 \mathbb{H}^* , 而将 L_2 映为 $(1,\infty)$. 类似地, 将 D 关于 L_3 作反演得到 D_{13} , 并将 μ 解析延拓到 D_{13} 上. 这时 μ 将 D_{13} 映为 \mathbb{H}^* , 并将 L_3 映为 $(-\infty,0)$.

这时, μ 在 D_{1j} ($j=1,2,3$) 的边界上都取值于实轴上, 而它们的边界又同样是垂直于单位圆周的圆弧, 故每个 D_{1j} 又可以关于它自己的新边界再作反演, 并把 μ 作相应的解析延拓.

如此下去, μ 可以解析延拓为 Δ 上的一个解析函数. 这个函数不取 $0,1,\infty$, 而取遍 \mathbb{C} 中其他一切点. 如图 1.4 中所示, 每个有阴影的曲边三角形都被 μ 映为下半平面, 而每个白色曲边三角形都被 μ 映为上半平面.

这样得到的函数 μ 称为**模函数**(modular function).

模函数 μ 的反函数是一个多值函数, 其 Riemann 曲面是无穷个上半平面与下半平面沿 $(0,1)$, $(1,\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 粘合的结果. 读者可以根据 μ 的解析延拓过程来确定它们粘合的办法.

显然, μ 是局部单叶的, 并且可以验证

$$\mu: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

形成了 Δ 到 $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 的一个覆盖映射.

覆盖映射是一个拓扑的概念. 若两个拓扑空间 M 与 N 之间有一个映射 $\pi: M \rightarrow N$, 满足下列条件: 对每一点 $q \in N$ 都存在一个开邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 可表成若干个开集 V_i 之并, 也即

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_i V_i,$$

而 $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 并且 π 在每个 V_i 上的限制 $\pi|_{V_i}$ 是 $V_i \rightarrow U$ 的同胚, 则称 π 是**覆盖映射**, 而 M 被称为**覆盖空间**或简称为**覆盖**.

显然, 覆盖映射一定是局部一一的满射. 但局部一一的满射未必是覆盖映射. 这一点应该提醒读者注意. 例如:

$$M = \{x + iy | 0 < x < 1, 0 < y < 4\pi\},$$

$$N = \{z: 1 < |z| < e\},$$

$\pi: M \rightarrow N$ 是映射 $z \mapsto e^z$. 这个映射是一个局部一一的满射. 但它不是覆盖映射. 将点 q 取在环域 N 中正实轴上, 则满足要求的邻域 U 不存在.

读者不难验证模函数 $\mu: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 是一个全纯的覆盖映射.

§ 6 单值性定理

我们先讨论幂级数的解析延拓及其导致多值解析函数的可能性.

我们用 $P(z; z_0, r_0)$ 表示一个幂级数

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

其收敛圆为 $\Delta_{r_0}(z_0) = \{z: |z - z_0| < r_0\}$. 设给定两个幂级数 $P_0 = P(z; z_0, r_0)$ 及 $P_1 = P(z; z_1, r_1)$. 如果

$$|z_1 - z_0| < r_0 + r_1,$$

且在 $\Delta_{r_0}(z_0) \cap \Delta_{r_1}(z_1)$ 上 P_0 与 P_1 有相同的值, 则称 P_1 是 P_0 的一个**直接延拓**.

设 P_0 是给定的幂级数. 又设 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 是一条弧, 且 $\gamma(0) = z_0$ 是 P_0 收敛圆的中心. 若有一串幂级数

$$P_0, P_1, \cdots, P_n \quad (P_j = P(z; z_j, r_j)),$$

其中 $z_j \in \gamma$ ($j=1, 2, \cdots, n$), $z_n = \gamma(1)$, 且 P_1, \cdots, P_n 中每个幂级数都是它前面一个的直接延拓, 则 P_n 称为 P_0 沿 γ 的**延拓**.

若 P_0 沿 γ 有另一个延拓 P'_m , 则显然 P_n 与 P'_m 在 γ 的端点 $\gamma(1)$ 处有相同的值.

但是, P_0 沿着不同的路径延拓到同一点时可能得到不同的值. 特别地, P_0 沿着一条闭路延拓时所得的值可能不同于 P_0 在起点的值. 例如, 设 P_0 是 \sqrt{z} 在 $z_0=1$ 的幂级数展开式:

$$P_0(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{8}(z-1)^2 + \cdots,$$

该级数收敛半径为 1, 并且可以沿着单位圆周延拓. 当延拓自 z_0 出发

旋转一周时,所得到值不再是 1,而是一1. 旋转两周时所得的值是 1.

因此,由给定的一个幂级数进行延拓可能得到的是一个多值解析函数.

在怎样的条件下,幂级数的延拓所得到的函数是单值函数呢?

为了回答这个问题,我们需要同伦的概念.

设 $\gamma_j: [0,1] \rightarrow D$ 是区域 D 中的道路, $j=1,2$; 并且 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. 我们称 γ_1 与 γ_2 在 D 中同伦,如果存在一个连续映射

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow D,$$

使得

$$F(0,t) = \gamma_1(t), \quad F(1,t) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in [0,1];$$

$$F(s,0) = \gamma_1(0), \quad F(s,1) = \gamma_1(1), \quad \forall s \in [0,1].$$

定理 1(单值性定理) 设 $P_0(z)$ 是给定的幂级数,其收敛圆为 $\Delta_0(z_0)$. 又设 D 是包含 z_0 的一个区域,且对于任意 $\zeta \in D$, P_0 沿着任意一条自 z_0 到 ζ 的道路 $\gamma: [0,1] \rightarrow D$ 都能延拓至 ζ . 若 γ_1 与 γ_2 是 D 中始点为 z_0 、终点为 z_1 的两条道路,且 γ_1 与 γ_2 在 D 中同伦,则 P_0 沿 γ_1 与 γ_2 延拓的结果在 z_1 点有相同的值.

证 设 $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow D$ 满足上述条件. 又设 $f(s)$ 是 P_0 沿道路 $F(s, \cdot): [0,1] \rightarrow D$ 的延拓在端点 $F(s,1)$ 所得到的值. 如果我们证明了 $f(s)$ 是常数即完成了定理之证明.

设 $s_0 \in [0,1]$ 是任意一点,而幂级数列

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

是 P_0 沿 $F(s_0, \cdot)$ 的一个延拓,其中 P_j 的收敛圆为

$$\Delta_j = \Delta_{r_j}(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

且 $|z_j - z_{j+1}| < r_j + r_{j+1}, \quad 0 \leq j < n.$

这时集合 $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ 是包含 $F(s_0, \cdot)$ 的一个开集. 因此,它含有道路 $F(s_0, \cdot)$ 的一个 ϵ 邻域 U .

显然,存在一个 δ ,使得当

$$s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \cap [0,1]$$

时, $F(s, \cdot)$ 全部落入 U 内. 这时 P_0 沿 $F(s, \cdot)$ 的延拓在 $F(s,1)$ 的值

显然就是 $f(s_0)$. 这样, 我们证明了 $f(s)$ 在 $[0, 1]$ 中每一点附近都是常数. 因此 $f(s)$ 在 $[0, 1]$ 等于常数. 证毕.

推论 若在定理 1 中区域 D 为单连通域, 则 P_0 延拓的结果总是单值解析函数.

§ 7 Picard 定理

1879 年 Picard 证明一条十分有趣的定理: 一个整函数如果不取两个值则必为常数. 同时他还证明了在解析函数的一个本性奇点的任意一个邻域内将取任何值无穷多次, 至多只有一个例外值. 前一个定理称为 Picard 小定理, 而后一个定理称为 Picard 大定理.

Picard 的工作激发了整函数及亚纯函数值分布的研究.

现在, 我们利用模函数及单值性定理来证明 Picard 小定理.

定理 1 (Picard 定理) 设 $f(z)$ 是一个整函数, 即在 \mathbb{C} 上解析的函数. 若存在两点 a 与 b , $a \neq b$, 使得

$$f(z) \neq a \text{ 和 } b, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

则 f 是常数.

这就是说, 非常数的整函数至多有一个例外值取不到. 有一个例外值的非常数的整函数是存在的, 例如 $w = e^z$.

证 不失一般性, 可设 $a = 0, b = 1$.

设 λ 是模函数 μ 的反函数. 它是一个多值解析函数, 但在任意一点附近可以取到单值解析分支. 设 $w_0 \in f(\mathbb{C})$, 则 $w_0 \neq 0, 1$. 那么, 可以在 w_0 的一个邻域内取到 λ 的一个单值分支, 仍记为 λ .

我们考虑复合函数 $\lambda \circ f$. 它在点 z_0 的附近是一个单值解析函数, 其中 $f(z_0) = w_0$. 设 P_0 是 $\lambda \circ f$ 在 z_0 处的幂级数展开式. 那么, P_0 在 \mathbb{C} 上沿任意一条路径均可延拓. 要说明这一点只要注意到 μ 是一覆盖映射即可, 请读者自行验证.

复平面 \mathbb{C} 是单连通域. 由单值性定理, 即推出 P_0 延拓的结果在 \mathbb{C} 上定义了一个单值解析函数, 记为 F . 那么, $|F(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{C}$. 由 Liouville 定理, F 是常数, 从而 f 是常数. 证毕.

§ 8 单叶函数

单叶函数有许多有趣的性质,曾吸引过不少人的注意与研究,构成了几何函数论的主要研究对象.

人们有兴趣的主要是两类单叶函数: S 类与 Σ 类.

S 类是指单位圆 Δ 内全体具有下列 Taylor 展开式的单叶函数:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots, \quad z \in \Delta.$$

这里我们要求 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=1$ 是为了规范化. 显然,对 S 类的单叶函数的任何命题可以相应推广至 Δ 内任意一个单叶函数上.

Σ 类是指单位圆外部 Δ^* 内的全体具有下列展式的单叶函数

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots, \quad z \in \Delta^*.$$

很容易看出, Σ 类单叶函数是 Δ^* 内单叶且将 ∞ 变为 ∞ 并满足规范条件:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z} = 1$$

的函数.

S 类与 Σ 类之间有一定的联系: 即若 $f \in S$, 则

$$\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \right]^{-1} \in \Sigma.$$

S 类与 Σ 类中的函数的系数有一些特殊性质.

T. H. Gronwall 于 1914 年给出了下列定理,人们称之为面积定理.

定理 1 设

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots, \quad z \in \Delta^*$$

是 Σ 类中的一个函数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leqslant 1.$$

证 设 $r > 1$ 为任意一个实数. 那么, $w = g(z)$ 将 $\{z: |z| = r\}$ 变成一条 Jordan 闭曲线 γ , 且 γ 的内部面积为正的. 记 γ 的内部的面积为 A , 则

$$A = \int_0^{2\pi} u(\theta) v'(\theta) d\theta,$$

其中

$$u(\theta) = \operatorname{Re} g(re^{i\theta}), \quad v(\theta) = \operatorname{Im} g(re^{i\theta}).$$

将 g 的展式代入后即有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ re^{i\theta} + re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (b_n e^{-in\theta} + \bar{b}_n e^{in\theta}) \right\} \\ &\quad \times \left\{ re^{i\theta} + re^{-i\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (nb_n e^{-in\theta} + n \bar{b}_n e^{in\theta}) \right\} d\theta. \end{aligned}$$

利用公式

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = 0, \end{cases}$$

由上述关于 A 的等式立即推出

$$A = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n}.$$

由 $A > 0$ 又得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} < r^2.$$

这样, 对于任意固定的自然数 N , 都有

$$\sum_{n=1}^N n |b_n|^2 r^{-2n} < r^2.$$

令 $r \rightarrow 1$ 即有

$$\sum_{n=1}^N n |b_n|^2 \leq 1.$$

再令 $N \rightarrow \infty$ 即证明了定理. 证毕.

由定理 1 立即推出

$$|b_1| \leq 1.$$

当 $|b_1| = 1$ 时, $b_n = 0$ 对于一切 $n > 1$ 成立. 这时函数 g 只能是

$$g(z) = z + b_0 + e^{i\alpha} z^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

而这个函数确实属于 Σ 类. 可见系数 b_1 的模可在 Σ 类中达到极大.

由 Σ 类函数的系数 b_1 的模不超过 1 可推得 S 类中函数的系数 a_2 的模不超过 2. 这是 Bieberbach 在 1916 年证明的.

定理 2 (Bieberbach 定理) 设

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$$

是 S 类中的函数, 则 $|a_2| \leq 2$.

证 令 $h(z) = f(z^2)/z^2$, 则

$$h(z) = 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots + a_n z^{2n-2} + \cdots,$$

在 Δ 内不取零值且为偶函数. 因此, $\sqrt{h(z)}$ 可在 Δ 内取到一个单值分支 $\phi(z)$, 使其在 $z=0$ 的值为 1, 这时 $\phi(z)$ 也是偶函数. 又令 $f_1(z) = z\phi(z)$, 那么 f_1 是奇函数, 且在 Δ 内单叶. 事实上, 若有两点 $z_1, z_2 \in \Delta$ 使得 $f_1(z_1) = f_1(z_2)$, 则 $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. 由 f 的单叶性推出 $z_1^2 = z_2^2$, 也即 $z_1 = \pm z_2$. 再注意到 f_1 是奇函数, 即又推得 $z_1 = z_2$.

利用 h 的展开式可算得

$$f_1(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \cdots,$$

这样 f_1 不仅是 Δ 上的单叶函数, 而且满足规范条件. 由此可见, $f_1 \in S$, 并有

$$g_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left[f_1 \left(\frac{1}{z} \right) \right]^{-1} \in \Sigma.$$

简单的计算表明

$$g_0(z) = z - \frac{a_2}{2} z^{-1} + \cdots, \quad z \in \Delta^*.$$

由面积定理, $|a_2|/2 \leq 1$. 证毕.

现在, 我们说明 $|a_2| \leq 2$ 的估计式已不能再改进. 事实上, 函数

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots$$

是单叶的, 它是将 Δ 映为区域

$$\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, -\frac{1}{4} \right]$$

的共形映射. $K(z) \in S$ 并使 a_2 的模达到最大.

这里的 $K(z)$ 通常被称做 **Koebe 函数**.

从定理 2 的证明过程中又可看出: 当 $|a_2| = 2$ 时, 我们有

$$g_0(z) = z - e^{ia} z^{-1} \quad \left(\frac{a_2}{2} = e^{ia} \right),$$

反推回去即得

$$f(z) = z + 2e^{ia} z^2 + 3e^{i2a} z^3 + \cdots = e^{-ia} K(e^{ia} z).$$

可见,当 $|a_2|=2$ 时相应的函数 $f \in S$ 必定是 Koebe 函数复合以适当的旋转.

有了这样一些迹象之后,似乎有理由认为 Koebe 函数及其旋转是 S 类中函数的系数 a_n 的模达到最大的极值函数. Bieberbach 于 1916 年提出下列著名猜想:

Bieberbach 猜想 设

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \in S,$$

则 $|a_n| \leq n$,且等号当且仅当 f 是 Koebe 函数复合适当旋转时成立.

Bieberbach 猜想曾吸引不少数学家进行研究.人们先后证明了

$$|a_3| \leq 3 \quad (\text{Löwner, 1923}),$$

$$|a_4| \leq 4 \quad (\text{Garabedian 与 Schiffer, 1955}),$$

$$|a_6| \leq 6 \quad (\text{Pederson 与 Ozawa, 1968}),$$

$$|a_5| \leq 5 \quad (\text{Pederson 与 Schiffer, 1972}).$$

最后终于在 1984 年由 Louis de Branges 完全证明了 Bieberbach 猜想.

目前人们很难说出 Bieberbach 猜想的具体应用.但是对于 Bieberbach 定理($|a_2| \leq 2$)却有许多重要应用.

定理 3(Koebe 定理) 设 f 是单位圆 Δ 内的单叶函数,且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则 $f(\Delta)$ 包含圆

$$\left\{ w: |w| < \frac{1}{4} \right\}.$$

证 设 c 不在 $f(\Delta)$ 之内,则 $c \neq 0$ 且函数

$$f_1(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c} \right) z^2 + \cdots,$$

其中 a_2 为 f 的展开式中的系数.显然, f_1 是 S 类函数.于是由 Bieberbach 定理有

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \leq 2,$$

也即

$$\frac{1}{|c|} \leq 2 + |a_2| \leq 4.$$

证毕.

这个定理又叫 **Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理**.

这里的掩蔽半径 $\frac{1}{4}$ 已不能再改进, Koebe 函数就是达到 $\frac{1}{4}$ 的例子.

Bieberbach 定理另一个应用是推出偏差定理.

定理 4(偏差定理) 设 $f \in S$, 则有估计式

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad \forall z \in \Delta.$$

证 证明有一定的技巧性. 令 z 为 Δ 内一固定点, 并考虑函数

$$f_1(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}.$$

显然, f_1 是 $\zeta \in \Delta$ 的单叶函数, 且 $f_1(0)=0, f_1'(0)=1$, 故 $f_1 \in S$. 由计算得

$$f_1''(0) = (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}.$$

由 Bieberbach 定理有 $|f_1''(0)/2| \leq 2$, 也即

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \quad |z| = r.$$

注意到

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)|,$$

我们有

$$\frac{-4+2r}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)| \leq \frac{4+2r}{1-r^2}.$$

对 r 积分即得

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

再对 r 积分即得我们所要的关于 $|f(z)|$ 的上界估计式.

为了得到 $|f(z)|$ 的下界估计式, 我们考虑以 0 为圆心过 z 点所作的圆周 Γ . 设 $z_1 \in \Gamma$ 使 $\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$ 达到最小, 并用直线段 β 连结 $f(z_1)$ 与 $f(0)=0$. 记 $f^{-1}(\beta)$ 为 α , 则有

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |f(z_1)| = \int_a^r |f'(t)| |dt| \\
&\geq \int_a^r \frac{1-|t|}{(1+|t|)^3} |dt| \geq \int_0^r \frac{1-\eta}{(1+\eta)^3} d\eta \\
&= \frac{r}{(1+r)^2} \quad (r = |z|).
\end{aligned}$$

证毕.

显然,偏差定理蕴含着 Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理.

§ 9 区域序列共形映射的收敛定理

有了 Riemann 映射定理之后,一个很自然的问题是:若单连通区域序列 $\{D_n\}$ 收敛到某个单连通域 D ,则相应的 D_n 到 Δ 的满足某种规范条件的共形映射是否也收敛于 D 到 Δ 的共形映射?

首先,需要明确何为 D_n 收敛于 D . 依照 Carathéodory 的说法,定义如下:

设 D_n 为一串包含点 z_0 的单连通域, $n=1,2,\dots$. 又设 D 也是一包含 z_0 的单连通域. 若满足下列条件则称 D 为 D_n 的核:

(i) 存在常数 $r>0$ 使得

$$\{z: |z - z_0| < r\} \subset D \cap \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right\};$$

(ii) \forall 紧集 $A \subset D$ 存在 n_0 使得

$$A \subset D_n, \quad \text{只要 } n \geq n_0;$$

(iii) 若有另外一个区域 D' 代替 D 也满足上述两条件,则 $D' \subset D$.

若 D_n 的每个子列均以区域 D 为其核,则称 D_n 收敛于 D , 记为 $D_n \rightarrow D$.

定理 1 (Carathéodory) 设 f_n 为 Δ 上的一串单叶函数, $f_n(0)=z_0, f'_n(0)>0, n=1,2,\dots$. 则 f_n 在 Δ 内收敛于一个非常数的函数,当且仅当区域序列 $D_n=f_n(\Delta)$ 收敛于某区域 D , 且 D 的边界点多于一点.

证 先证必要性.

不失一般性可设 $z_0=0$. 这时由偏差定理推出

$$f'_n(0) \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f_n(z)| \leq f'_n(0) \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

由第一个不等式立即看出 $\{f'_n(0)\}$ 有界. 再据此由第二个不等式推出 $\{f_n\}$ 局部一致有界. 于是 $\{f_n\}$ 为正规族, 而 $\{f_n\}$ 在 Δ 内收敛, 故它在 Δ 内局部一致收敛. 设其极限函数为 f , 则 f 显然为单叶函数, 且 $f(0)=0, f'(0)>0$. 令 $D=f(\Delta)$. 则由 Liouville 定理可知, D 不可能是全平面. 故其边界点多于一点. 下面只要证明 D_n 收敛于 D 就够了.

由 Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理可知, D_n 包含圆

$$\left\{w: |w| < \frac{1}{4}f'_n(0)\right\}, \quad n=1, 2, \dots.$$

而 D 包含 $\left\{w: |w| < \frac{1}{4}f'(0)\right\}$. 显然, D_n 与 D 包含一个公共的圆.

又因为 f_n 局部一致收敛于 f , 故由 Rouché 定理不难证明, 对于任意紧集 $A \subset D$, 存在 n_0 使得 $n \geq n_0$ 时, 有 $A \subset D_n$.

设 D' 是一个区域, 与 D_n 包含一个公共圆, 且对任意紧集 $A \subset D'$ 都有 m_0 , 使 $n \geq m_0$ 时 $A \subset D_n$. 于是 $\varphi_n = f_n^{-1}$ 一致有界, 故由 Montel 定理存在一个子序列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 使得它在 D' 的任意一个紧集上一致收敛. 这样 φ_{n_k} 的极限函数 φ 在 D' 内解析, 并且要么为单叶, 要么为常数. 但后者不可能, 因为 $\varphi'(0) = 1/f'(0) \neq 0$. 因此, φ 是 D' 上的一个单叶函数, 且 $\varphi(D') \subset \Delta$. 显然, 在 $z=0$ 附近 φ 恰好是 f^{-1} . 于是 $f \circ \varphi$ 在 D' 上是恒同映射, 也即有 $D' \subset D$.

这样, 我们证明了 D 是 D_n 的核.

检查上述证明的一切步骤, 立即发现将 D_n 换作它的任意一个子序列, 证明依然有效. 这表明 D 是 D_n 的任意子序列的核, 也即 $D_n \rightarrow D$.

现在证明条件的充分性. 仍假定 $z_0=0$.

设 $D_n \rightarrow D$, 且 D 的边界点多于一点. 根据 Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理, 对于一切 n , 有

$$\left\{w: |w| < \frac{1}{4}f'_n(0)\right\} \subset D_n.$$

若 $\{f'_n(0)\}$ 无界, 则存在一子序列 $\{f'_{n_k}(0)\}$, 使得

$$f'_{n_k}(0) \rightarrow \infty, \quad \text{当 } k \rightarrow \infty.$$

这时很容易证实 $\{D_{n_k}\}$ 的核为 \mathbb{C} . 但 $\{D_{n_k}\}$ 的核应为 D 且 ∂D 多于一点, 故上述结论为不可能. 由此推出 $\{f'_n(0)\}$ 是有界的.

再一次应用偏差定理, 由 $\{f'_n(0)\}$ 的有界性即推出 $\{f_n\}$ 在 Δ 内局部一致有界. 因此, 它是一个正规族.

设 $\{f_{n_k}\}$ 在 Δ 内局部一致收敛于 f . 那么 f 是 Δ 内的解析函数, 且

$$f'(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(0).$$

根据核的定义, D 与 D_n 包含一个公共的圆: $\{w: |w| < r\}$. 令 $\varphi_n = f_n^{-1}$, 并在 $\{w: |w| < r\}$ 上使用 Schwarz 引理, 即得 $|\varphi'_n(0)| \leq 1/r$, 也即

$$|f'_n(0)| \geq r, \quad n = 1, 2, \dots.$$

这样, 我们推出 $f'(0) \neq 0$. 于是, f 是 Δ 内的单叶函数, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. 令 $G = f(\Delta)$, 根据前面已证明的必要性部分的结论, $D_{n_k} \rightarrow G$. 但是已知 $D_{n_k} \rightarrow D$, 故 $G = D$. 这就是说, $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数是区域 D 所对应的共形映射, 与子序列 $\{f_{n_k}\}$ 的选取无关.

注意到 $\{f_n\}$ 的正规性, 由上述事实立即推出 $\{f_n\}$ 在 Δ 内收敛, 其极限函数显然不是常数. 这就完成了定理的证明.

习 题

1. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为共形映射. 证明 f 是线性函数: $f(z) = az + b$, 其中 a 与 b 为常数且 $a \neq 0$.

2. 证明: $\text{Aut}(\Delta) = \left\{z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \theta \in \mathbb{R}, a \in \Delta\right\}$.

3. 证明: $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

4. 证明: $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

5. 令 $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$. 又设 U 是点 $z = 1$ 的任意一个邻域. 证明函数族 $\mathcal{F} = \{f_n\}$ 在 U 上不是正规族, 且对于任意一个正数 M , 满足下列条件的自然数 n 只能是有有限个:

$$|f_n(z)| \leq M, \quad \forall z \in U.$$

6. 验证模函数 $\mu: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 是一个覆盖映射.

7. 复平面上的球面度量为

$$ds = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

复平面上的一条可求长曲线 γ 依球面度量之长度为

$$\int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

说明这个长度恰好就是球极平面投影中 γ 的逆像在单位球面上作为 \mathbb{R}^3 中的曲线在通常欧氏度量下的长度.

8. 一个函数族 $\mathcal{F} = \{f_{\alpha}: \alpha \in A\}$ 在区域 D 上的正规性定义有时推广成下列形式: \mathcal{F} 中的任意一个序列 $\{f_n\}$ 都有一个内闭一致收敛或内闭一致趋于 ∞ 的子序列. 在这种广义正规族的定义下, 试证明下列定理成立: 若 \mathcal{F} 中每个函数 f_{α} 在 D 中解析, 且函数族

$$\frac{|f'_{\alpha}(z)|}{1 + |f_{\alpha}(z)|^2}, \quad \alpha \in A$$

在 D 中内闭一致有界, 则 \mathcal{F} 在 D 上是正规族.

9. 证明单叶函数族 S 是正规族.

10. 设函数族 $\mathcal{F} = \{f_{\alpha}: D \rightarrow \mathbb{C} \mid \alpha \in A\}$ 为区域 D 内的解析函数族, 满足条件:

$$\iint_D |f_{\alpha}(z)| dx dy \leq M, \quad \forall \alpha \in A,$$

其中 M 为常数. 证明 \mathcal{F} 为正规族.

11. 设

$$\mathcal{F} = \left\{ f: \Delta \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \text{ 其中 } |a_n| \leq n \right\}.$$

证明 \mathcal{F} 是正规族.

12. 由偏差定理推出 Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理.

第二章 广义 Schwarz 引理及其应用

本章的目的是引入 Poincaré 度量及 Ahlfors 超双曲度量,来推广经典的 Schwarz 引理,然后利用推广后的 Schwarz 引理证明几个经典的定理,如 Montel 正规定则、Landau 定理、Picard 大定理及 Schottky 定理等.

广义 Schwarz 引理沟通了解析函数与双曲几何之间的联系,在现代复分析理论中有重要价值.

§ 1 Poincaré 度量

在单位圆内我们定义如下度量

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \Delta.$$

通常这个度量被称为单位圆上的 **Poincaré 度量**,有时也称为单位圆上的 **双曲度量**或**非欧度量**.它是一般 Riemann 度量 $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ 的一种特殊情况: $E = G = 4/[1 - (x^2 + y^2)]^2$, $F \equiv 0$. 其 Gauss 曲率为 -1 .

在这个度量下, Δ 中一条可求长曲线 γ 的长度是

$$\int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

而 Δ 中一个子区域 D 的面积是

$$\iint_D \frac{4 dx dy}{[1 - (x^2 + y^2)]^2}.$$

很容易算出区间 $[0, r]$ ($0 < r < 1$) 作为一条线段关于 Poincaré 度量的长度是

$$\ln \frac{1+r}{1-r}.$$

在 Poincaré 度量下, 两点 z_1 与 $z_2 \in \Delta$ 的距离定义为连结这两点的曲线的长度的下确界. 下面我们给出这种距离的公式.

首先, 我们证明点 $z=0$ 到 $z=r$ ($0 < r < 1$) 的 Poincaré 距离就是

$$\ln \frac{1+r}{1-r}.$$

设 γ 是任意一条连结 0 及 r 的曲线, 则显然有

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} &\geq \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|\operatorname{Re} z|^2} \geq \int_{\gamma} \frac{2|dx|}{1-x^2} \\ &\geq \int_0^r \frac{2dx}{1-x^2} = \ln \frac{1+r}{1-r}. \end{aligned}$$

于是证明了我们的结论.

为给出任意两点的 Poincaré 距离公式, 我们需要下列基本事实:

命题 1 在单位圆解析自同构映射下, Poincaré 距离不变.

证 事实上只要证明 Poincaré 度量在 Δ 的自同构映射下不变即可.

设 $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$, 也即 f 是保持单位圆 Δ 不变的分式线性变换:

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad a \in \Delta, \alpha \in \mathbb{R}.$$

那么, 我们有

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}.$$

简单计算表明

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2},$$

于是我们得到

$$\frac{2|dw|}{1-|w|^2} = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}, \quad w = f(z).$$

由此推出, 任意一条可求长曲线 γ 与它的像 $f(\gamma)$ 有相同的 Poincaré 长度, 从而 f 保持 Δ 中 Poincaré 距离不变. 证毕.

命题 2 设 $z_1, z_2 \in \Delta$ 是两个任意给定的点, 则它们之间的 Poincaré 距离是

$$d(z_1, z_2) = \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}.$$

证 令 f 是将 z_1 变为零且 z_2 落在正实轴上的保持 Δ 不变的分式线性变换. 显然这样的变换是存在的. 事实上, 取

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

适当选取 α 可使 $f(z_2) > 0$.

令 $r = f(z_2)$, 根据命题 1, 我们推出 z_1 与 z_2 之间的 Poincaré 距离

$$d(z_1, z_2) = d(0, r) = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

但是, 根据 f 的表达式

$$r = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}.$$

将 r 代入即完成了证明. 证毕.

命题 1 告诉我们, $\text{Aut}(\Delta)$ 是 Poincaré 度量下的保向刚体运动群. 利用这一事实可以求出连结任意两点的测地线.

一条曲线 $\gamma \subset \Delta$ 称为 Poincaré 度量下的测地线, 如果它是局部最短的. 更确切地说, 对于任意一点 $z_0 \in \gamma$, 都存在一个邻域 U , 使得 U 内任意两点 z_1 与 $z_2 \in \gamma$ 所确定的 γ 的弧, 在 Poincaré 度量下是 z_1 到 z_2 的最短连线.

若一条曲线的 Poincaré 长度恰好就是它的两端点的距离, 则显然该曲线是测地线.

因此, 点 0 到 r ($0 < r < 1$) 的测地线是实轴上的区间 $[0, r]$ 对应的线段.

从证明 0 到 r 的 Poincaré 距离为 $\ln(1+r)/(1-r)$ 的步骤中可以看出, 0 到 r 的测地线是惟一的.

现在我们来确定任意两点 z_1 与 $z_2 \in \Delta$ 的测地线.

设 $f \in \text{Aut}(\Delta)$, 将 z_1 变为 0 并且将 z_2 变为 $r > 0$. 根据命题 1, $f^{-1}([0, r])$ 是连结 z_1 与 z_2 的测地线. $[0, r]$ 是 Δ 的直径 $(-1, 1)$ 上的一段弧. 再注意到直径与单位圆周的正交性及 f 的保角性, 立即发现 $(-1, 1)$ 在 f^{-1} 下的像是与单位圆周正交的圆弧. 于是, 连结 z_1 与 z_2 的测地线是这条与单位圆周正交的圆弧的子弧 (见图 2.1).

总之,我们证明了

命题 3 设 $z_1, z_2 \in \Delta$ 是两个任意给定的不同点,则连结 z_1 与 z_2 的 Poincaré 测地线是一条圆弧,该圆弧的延长线与单位圆周正交.

这里圆弧是广义的,其中包含直线弧.

在单位圆内与单位圆周正交的圆弧,通常称为 Poincaré **直线** 或 **非欧直线**.

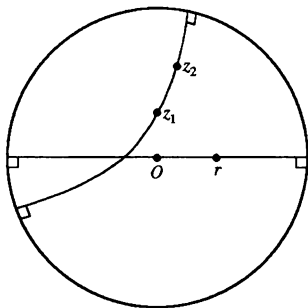


图 2.1

历史的注记 Euclid(欧几里得)《几何原本》中的第五公设(即平行公设)曾引起人们广泛的关注.人们试图用其他公设证明它,但都失败了.1837年 Lobachevskii 提出了与欧氏第五公设不同的公设,并在此基础上建立了一种新几何,打破了传统欧氏几何的一统天下.然而, Lobachevskii 几何在开始时很长一段时期内不为人们所接受,因为它没有一个实在模型.第一个这样的模型是 Beltrami 给出的,将 Lobachevskii 几何局部地在伪球面上实现.后来, Klein 与 Poincaré 先后给出了非欧几何的整体模型,使 Lobachevskii 几何在单位圆内实现.从此人们对它有了某种真实感. Poincaré 的模型尤其得到人们的关注,这是因为解析函数在 Poincaré 度量下有许多优美的性质.

Poincaré 将单位圆 Δ 设想为一张 Lobachevskii 平面.单位圆内与单位圆周正交的圆弧视作非欧直线,两条非欧直线之交角就是两圆弧在交点处的夹角.非欧圆周定义为到一点(非欧圆心)非欧距离等于常数的点集合.它实际上也是一个欧氏圆周,但一般说来非欧圆

心与欧氏圆心不重合. 在这样的看法之下, Lobacevskii 几何中的所有命题都变成了单位圆内关于圆弧或圆周的命题, 成为一种真实自然的几何现象. 例如, 非欧几何中三角形的三内角之和小于 180° (见图 2.2) 及过直线 l 外一点 z_0 可以作无穷多条平行直线, 即与 l 不相交的直线 (见图 2.3).

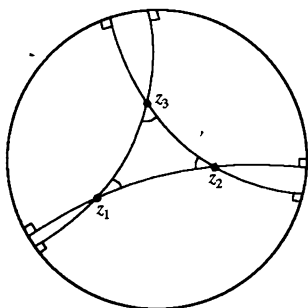


图 2.2

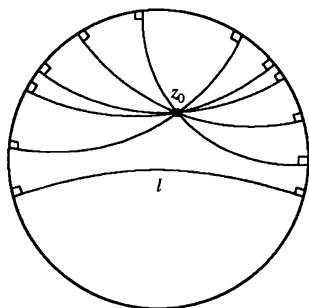


图 2.3

这就是为什么将 Poincaré 度量称做非欧度量的缘由.

§ 2 Schwarz-Pick 定理

非欧度量之所以在复分析有广泛的应用, 其原因在于解析映射保持非欧度量不减, 而这一性质恰好本质上就是 Schwarz 引理.

Schwarz 引理 设 f 是单位圆 Δ 内的解析函数, 且 $f(\Delta) \subset \Delta$, $f(0)=0$, 则 $|f'(0)| \leq 1$ 且 $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \Delta$. 若 $|f'(0)|=1$, 或对一点 $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ 有 $|f(z_0)|=|z_0|$, 则 $f(z) \equiv e^{i\theta}z$, 其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 是常数.

Pick 对 Schwarz 引理作了重要的观察和新的解释.

定理 1 (Schwarz-Pick) 设 f 是单位圆 Δ 内的解析函数, 且 $f(\Delta) \subset \Delta$. 又设 $d(\cdot, \cdot)$ 表示 Δ 内两点之间的 Poincaré 距离, 则有

$$d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \Delta,$$

这里等号对任意两个不同点 z_1 与 z_2 成立之充要条件为

$$f \in \text{Aut}(\Delta).$$

证 令 g 是将 z_1 变为 0 且保持 Δ 不变的分式线性变换, h 是将 $f(z_1)$ 变为 0 且保持 Δ 不变的分式线性变换. 我们考虑函数 $F = h \circ f \circ g^{-1}$, 则 F 是 Δ 内的解析函数, $F(0) = 0$, 且 $F(\Delta) \subset \Delta$. 应用 Schwarz 引理, 我们有

$$|F(\zeta_2)| \leq |\zeta_2|, \quad \zeta_2 = g(z_2).$$

Pick 将此式解释为

$$d(0, F(\zeta_2)) \leq d(0, \zeta_2),$$

也即

$$d(h \circ f(z_1), h \circ f(z_2)) \leq d(g(z_1), g(z_2)).$$

由 § 1 中的命题 1 立即推出:

$$d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2).$$

关于等号成立的条件可由 Schwarz 引理中相应部分推得. 证毕.

我们将单位圆 Δ 的 Poincaré 度量写成 $ds = \rho_\Delta(z) |dz|$, 其中

$$\rho_\Delta(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

称为 Poincaré 度量的**密度**. 上述定理可以写成**微分形式**:

$$\rho_\Delta(f(z)) |f'(z)| \leq \rho_\Delta(z), \quad \forall z \in \Delta.$$

Poincaré 度量不仅可以定义在单位圆内, 而且可以定义在与单位圆解析同构的任何单连通域上. 设 $\varphi: D \rightarrow \Delta$ 是区域 D 到 Δ 的共形映射. 则区域 D 上的 Poincaré 度量是 Δ 上的 Poincaré 度量根据 φ 作拉回 (pull-back) 定义的; 也即 D 的 Poincaré 度量是

$$ds = \rho_D(z) |dz|,$$

其中

$$\rho_D(z) = \rho_\Delta(\varphi(z)) |\varphi'(z)|.$$

这里应当说明这样定义 D 的 Poincaré 度量与共形映射 φ 的选取无关. 这是因为 φ 的不同选择只差一个保持 Δ 不变的分式线性变换, 而后者保持 Poincaré 度量不变.

除了单位圆之外, 上半平面 \mathbb{H} 上的 Poincaré 度量及相应的非欧几何也是很常用的. 根据上面的公式和直接计算, \mathbb{H} 上的 Poincaré 度量应当是

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

在 \mathbb{H} 上的非欧直线是垂直于实轴的圆弧或直线, 如图 2.4.

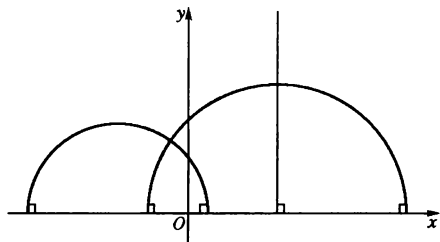


图 2.4

在上半平面上讨论非欧几何有时会比在单位圆上来得方便, 尤其是在某些计算上.

以上我们在单连通域 (限于解析同构于单位圆者) 内引入了 Poincaré 度量. 下面将在更广的一类平面区域内定义 Poincaré 度量, 以进一步推广 Schwarz 引理.

设区域 $D \subset \mathbb{C}$ 具有一个解析覆盖映射

$$h: \Delta \rightarrow D,$$

其中 Δ 为单位圆. 覆盖映射已在前面有过定义. 现在我们要求这一映射是解析的.

这时区域 D 上便可引入 Poincaré 度量. 事实上, 对于每一点 $z \in D$, 我们在 z 的某一邻域 U 内任取 h^{-1} 的一个单值分支 φ , 并利用它定义度量

$$ds = \rho(z) |dz| = \frac{2|\varphi'|}{1 - |\varphi|^2} |dz|.$$

只要说明这里的度量密度 ρ 与 h^{-1} 的单值分支的选取无关, 则上述度量的定义便是合理的.

设对于给定的点 $z \in D$ 有邻域 U 且在 Δ 内有两个开集 V_1 与 V_2 , 使得 $h|_{V_1}$ 与 $h|_{V_2}$ 为它们到 U 的同胚. 令 $\varphi_j: U \rightarrow V_j$ 为 $h|_{V_j}$ 的逆, $j=1, 2$. 我们要说明用 $\varphi=\varphi_1$ 与用 $\varphi=\varphi_2$ 所定义的度量 ds 相同. 为此, 只要说明 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 是保持 Δ 不变的分式线性变换即可. 事实上,

根据 h 的局部单叶性, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 可以沿 Δ 中任一道路解析延拓, 而成为 Δ 内的单值函数.

同样地, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 也可解析开拓为 Δ 内的单值函数. 可见, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 是 Δ 上的单叶函数, 且将 Δ 变为 Δ , 即 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \text{Aut}(\Delta)$.

同时, 我们还应指出 Δ 到 D 的覆盖映射 h 也不是惟一的; 但不同的覆盖映射之间只差一个 Δ 的解析自同构, 因此上面定义的 Poincaré 度量与覆盖映射的选择无关, 只取决于 D 本身.

以上我们说明了如果区域 D 具有一个全纯覆盖映射 $\Delta \rightarrow D$, 则区域 D 上可以定义 Poincaré 度量.

复平面 \mathbb{C} 中怎样的区域 D 才有这样的覆盖映射呢? 以后会证明只要 D 在 \mathbb{C} 中的边界点多于两点即可. 在这种区域中边界点最少的是 \mathbb{C} 挖去三点, 例如 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$.

对于 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$, 模函数 $\mu: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ 便是它的全纯覆盖映射. 因此, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ 的 Poincaré 度量的局部表达式是

$$ds = \frac{2|\lambda'(z)|}{1 - |\lambda(z)|^2} |dz|,$$

其中 λ 为 μ 的反函数的一个单值分支. $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ 的 Poincaré 度量在复分析中有特殊的意义, 人们对它进行了许多研究.

在 Poincaré 度量推广到一般区域上之后, Schwarz 引理便有了更一般的形式:

定理 2 (广义 Schwarz 引理) 设区域 D 与 G 均具有单位圆 Δ 到它们的全纯覆盖映射, 其 Poincaré 度量分别为

$$ds_1 = \sigma_1(z) |dz|, \quad z \in D;$$

$$ds_2 = \sigma_2(w) |dw|, \quad w \in G.$$

又设 $f: D \rightarrow G$ 是全纯映射, 则

$$\sigma_2(f(z)) |f'(z)| \leq \sigma_1(z), \quad z \in D,$$

其中等号在一点成立的充要条件是 f 是 D 到 G 的覆盖映射.

证 设 $h_1: \Delta \rightarrow D$ 与 $h_2: \Delta \rightarrow G$ 是全纯覆盖映射. 对于任意一点 $z_0 \in D$ 及 $w_0 = f(z_0) \in G$, 我们分别取它们的小邻域 U 及 V , 使得 h_1^{-1} 及 h_2^{-1} 分别在 U 及 V 上有单值分支. 我们将它们记为 $\varphi: U \rightarrow U_1$ 及 $\psi: V \rightarrow V_1$, 并考虑函数

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

只要 U 取得充分小使得 $f(U) \subset V$, 则上述 F 是有意义的.

F 是定义在 U_1 上一个解析函数. 它显然可以沿 Δ 内的任意一条路径进行解析延拓, 所得的结果是一个单值解析函数, 仍记为 F .

设 $\zeta_0 \in U_1$ 使得 $h_1(\zeta_0) = z_0$. 又记 $\eta_0 = F(\zeta_0)$. 对 $F: \Delta \rightarrow \Delta$ 使用 Schwarz-Pick 定理(微分形式), 则有

$$\rho_{\Delta}(F(\zeta_0)) |F'(\zeta_0)| \leq \rho_{\Delta}(\zeta_0),$$

也即 $\rho_{\Delta}(\eta_0) |\psi'(w_0)| \cdot |f'(z_0)| |h_1'(\zeta_0)| \leq \rho_{\Delta}(\zeta_0)$. 此式可以改写成

$$\rho_{\Delta}(\eta_0) |\psi'(w_0)| \cdot |f'(z_0)| \leq \rho_{\Delta}(\zeta_0) |\varphi'(\zeta_0)|.$$

根据 Poincaré 度量的定义, 我们有

$$\sigma_2(f(z_0)) |f'(z_0)| \leq \sigma_1(z_0).$$

当等号成立时, $F \in \text{Aut}(\Delta)$. 这时, 由 $h_2 \circ F = f \circ h_1$ 得

$$h_2 = f \circ h_1 \circ F^{-1}.$$

由此又可推出 f 是局部单叶的满射, 并满足覆盖映射的条件. 证毕.

推论 设区域 D 与 G 满足定理 2 的条件, 并分别用 σ_D 与 σ_G 表示各自的 Poincaré 度量的密度. 若 $D \subset G$, 则有

$$\sigma_G(z) \leq \sigma_D(z), \quad \forall z \in D,$$

其中等号在任意一点成立当且仅当 $D=G$ 时.

证 只要考虑映射

$$f: D \rightarrow G, \quad z \mapsto z, \quad \forall z \in D,$$

并应用定理 2 即可. 证毕.

这个推论告诉我们: **区域变大相应的 Poincaré 度量变小.**

广义的 Schwarz 引理有许多应用. 这在后面的章节中将会看到. 现在只给出一个简单例子, 利用它来证明 Picard 小定理.

设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 是一个解析函数. 用 $\rho_{0,1}(z) |dz|$ 表示 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 的 Poincaré 度量. 另外很容易算出 $\Delta_r(0) = \{z: |z| < r\}$ 的 Poincaré 度量是

$$ds = \frac{2r|dz|}{r^2 - |z|^2}.$$

将 f 视作 $\Delta_r(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 的解析函数, 并应用广义 Schwarz 引理即得

$$\rho_{0,1}(f(z))|f'(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2}, \quad \forall z \in \Delta_r(0).$$

令 $r \rightarrow \infty$ 即推出 $f'(z) = 0$, 从而 f 是常数.

§ 3 Montel 正规定则

作为广义 Schwarz 引理的一个应用, 本节要证明一个比第一章 § 2 定理 3 更为广泛的 Montel 正规定则.

首先, 我们要将正规族定义作一点拓广, 以便使它适用于更广的范围. 新的 Montel 正规定则也要求这样作.

设 $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in A\}$ 是一个函数族, 其中 $f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是解析函数. 我们称 \mathcal{F} 是 D 上的正规族, 如果 \mathcal{F} 中的任意一个函数序列都有一个子序列在 D 中内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷.

显然, 新定义中允许子序列内闭一致趋于无穷, 是其区别于原来定义之处.

定理 1 (Montel) 设 $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in A\}$ 是区域 D 中的一个解析函数族, 其中每一个函数 f_α 在 D 中不取值 a 与 b ($a \neq b$), 则 \mathcal{F} 在 D 上是一个正规族.

证 不失一般性, 可以假定 $a=0$ 及 $b=1$. 我们用 $\rho_{0,1}(z)|dz|$ 表示 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 的 Poincaré 度量. 设 $z_0 \in D$ 为任意点, 取 $\delta > 0$ 使

$$\Delta_\delta(z_0) = \{z: |z - z_0| < \delta\} \subset D.$$

这时, 对 f_α 在 $\Delta_\delta(z_0)$ 上的限制使用广义 Schwarz 引理, 我们有

$$\rho_{0,1}(f_\alpha(z))|f'_\alpha(z)| \leq \frac{2\delta}{\delta^2 - |z - z_0|^2}, \quad \forall z \in \Delta_\delta(z_0).$$

令 $m = \min\{\rho_{0,1}(w): w \in \bar{\Delta}\}$, 则有 $m > 0$ (见本章习题第 9 题), 并由此推出

$$m|f'_\alpha(z)| \leq \frac{2\delta}{\delta^2 - |z - z_0|^2}, \quad \forall z \in \Delta_\delta(z_0) \text{ 且 } |f_\alpha(z)| \leq 1.$$

另外一方面, 容易验证: $\rho_{0,1}(w) = |w|^{-2}\rho_{0,1}\left(\frac{1}{w}\right)$, 故我们又有

$$m|f'_\alpha(z)|/|f_\alpha(z)|^2 \leq \frac{2\delta}{\delta^2 - |z - z_0|^2}, \quad \forall z \in \Delta_\delta(z_0) \text{ 且 } |f_\alpha(z)| > 1.$$

于是, 我们得到

$$m \frac{|f'_a(z)|}{1 + |f_a(z)|^2} \leq \frac{2\delta}{\delta^2 - |z - z_0|^2}, \quad \forall z \in \Delta_\delta(z_0).$$

由此推出 $|f'_a(z)|/(1 + |f_a(z)|^2)$ 在 $\Delta_\delta(z_0)$ 的任一紧子集上一致有界. 由第一章习题第 8 题可知 \mathcal{F} 在 $\Delta_\delta(z_0)$ 中为正规族.

以上我们证明了 \mathcal{F} 在 $\Delta_\delta(z_0)$ 中的正规性. 由 z_0 的任意性即可推出 \mathcal{F} 在 D 中是正规族. 证毕.

上述定理可以推广到亚纯函数上: **不取三个不同值的亚纯函数族是正规族**. 对于亚纯函数族, 正规族的定义中关于内闭一致收敛性要借助于球面度量来描述.

Montel 关于正规族的理论在复分析的许多分支领域内有重要应用. 在 Fatou 与 Julia 关于复动力系统的奠基性研究中, Montel 的上述正规定则扮演着不可或缺的重要角色.

§ 4 Ahlfors 超双曲度量

Ahlfors 注意到 Poincaré 度量的曲率为 -1 的性质, 进一步推广了 Schwarz 引理, 并使之更便于应用. Ahlfors 是将微分几何中的曲率概念引入函数论的第一人.

设 $\rho(z)$ 是单位圆 Δ 的 Poincaré 度量的密度. 这时 Poincaré 度量 $ds = \rho|dz|$ 的曲率应当是 $K(\rho) = -\rho^{-2}\Delta\ln\rho$. 直接验算可以证明 $K(\rho) \equiv -1$, 也即

$$K(\rho) = -\rho^{-2}\Delta\ln\rho \equiv -1,$$

其中 Δ 为 Laplace 算子.

这里我们用到一个事实: 一个保角度量 $ds = \lambda|dz|$ 的 Gauss 曲率是

$$K(\lambda) = -\lambda^{-2}\Delta\ln\lambda.$$

对于不熟悉这一结论的读者, 可无须深究这一公式的来由, 暂且承认它就足够了.

Ahlfors 首先证明了 Poincaré 度量是一切曲率不超过 -1 的保角度量中的最大者.

定理 1 设 $ds = \rho|dz|$ 是单位圆 Δ 上的 Poincaré 度量, 而 $ds = \sigma|dz|$ 是 Δ 上一个度量, $\sigma > 0, \sigma \in C^2$, 且 $K(\sigma) \leq -1$. 则有

$$\rho(z) \geq \sigma(z), \quad \forall z \in \Delta.$$

证 首先假定 σ 在 $\bar{\Delta}$ 上连续, 且在单位圆周上严格大于 0. 我们考虑函数

$$F = \ln \rho - \ln \sigma.$$

显然, 当 $|z| \rightarrow 1$ 时 $F(z) \rightarrow +\infty$. 因此, F 在 Δ 内达到最小值. 设在 z_0 点达到 F 的最小值. 假若其最小值 $F(z_0) < 0$, 则

$$\begin{aligned} \Delta F|_{z_0} &= \Delta(\ln \rho - \ln \sigma)|_{z_0} \\ &\leq (\rho^2 - \sigma^2)|_{z_0} < 0, \end{aligned}$$

这与 z_0 是极小值稳定点矛盾. 因此, 最小值 $F(z_0) \geq 0$, 也即 $\rho(z) \geq \sigma(z), \forall z \in \Delta$.

现在, 我们去掉 σ 在 $\bar{\Delta}$ 上连续的限制. 令 $\sigma_r = r\sigma(rz), 0 < r < 1$. 这时对 σ_r 应用上述结论即有 $\rho(z) \geq r\sigma(rz)$. 令 $r \rightarrow 1$ 即完成定理之证明. 证毕.

不难发现, 上述证明中主要用到 $\Delta \ln \rho = \rho^2$ 及 $|z| \rightarrow 1$ 时 $\rho(z) \rightarrow \infty$ 这两件事. 后者保证了 F 在 Δ 内有最小值, 而前者保证了最小值非负. 有鉴于此, 定理 1 有如下之变形:

定理 2 设 D 是一个区域, $ds = \sigma_j|dz|$ 为 D 内的度量, $\sigma_j > 0, \sigma_j \in C^2, j=1, 2$, 并且满足

$$K(\sigma_1) = -1, \quad K(\sigma_2) \leq -1,$$

且对任意边界点 ζ 都有

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta} \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)} \geq 1,$$

则有

$$\sigma_1(z) \geq \sigma_2(z), \quad \forall z \in D.$$

证明与定理 1 类似, 留给读者完成.

Ahlfors 基于前述的观察引入了超双曲度量 (ultrahyperbolic metric) 使上述定理得到进一步推广. 他主要是注意到在定理 1 中要求 $\sigma \in C^2$ 及 $\sigma > 0$ 都是多余的, 并且妨碍 Schwarz 引理应用的广泛性.

Ahlfors 引入的**超双曲度量**的定义如下:

设 $ds = \sigma |dz|$ 是定义在区域 D 内的一个度量, $\sigma \geq 0$. 我们称之为**超双曲度量**, 如果它有如下的性质:

(i) σ 是上半连续的;

(ii) 对于每点 $z_0 \in D$, 只要 $\sigma(z_0) > 0$, 就存在一个邻域 U , 使得 U 内有一个度量 $ds = \sigma_0 |dz|$, $\sigma_0 \in C^2$, 且 $K(\sigma_0) \leq -1$, $\sigma|_U \geq \sigma_0$, $\sigma(z_0) = \sigma_0(z_0)$.

这里 σ_0 称为 σ 在点 z_0 处的**支撑度量**.

这样, Ahlfors 用局部支撑度量的存在性代替了原来对度量光滑性的要求.

定理 3 设 $ds = \rho |dz|$ 为单位圆 Δ 的 Poincaré 度量, 而 $ds = \sigma |dz|$ 为 Δ 内的一个超双曲度量, 则我们有

$$\rho(z) \geq \sigma(z), \quad \forall z \in \Delta.$$

证 首先假定 σ 在 $\bar{\Delta}$ 上半连续. 设 E 是 σ 的零点集合, 我们考虑函数 $F = \ln \rho - \ln \sigma$, 则 F 在 $\partial \Delta \cup E$ 上取值为 $+\infty$, 因此它在 $\Delta \setminus E$ 中达到最小值. 设 $z_0 \in \Delta \setminus E$ 使 F 达到最小, 则利用 σ 在 z_0 处的支撑度量, 可以证明 $F(z_0) \geq 0$. 其推理完全类似于定理 1 的证明.

σ 在 $\bar{\Delta}$ 中的上半连续性的限制可以参照定理 1 证明中的办法去掉. 证毕.

定理 3 可以写成更为一般的形式: 其中的区域 Δ 可以换成任意一个有 Poincaré 度量的区域.

定理 4 设 D 为一平面区域, $ds = \sigma_j |dz|$ 为 D 内的度量, $j=1, 2$. 又设 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_1 \in C^2$, 且 $K(\sigma_1) = -1$, $ds = \sigma_2 |dz|$ 为 D 的一个超双曲度量, 并满足下列条件:

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta} \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)} \geq 1, \quad \forall \zeta \in \partial D.$$

则有

$$\sigma_1(z) \geq \sigma_2(z), \quad \forall z \in D.$$

证明与定理 3 类似.

Ahlfors 利用超双曲度量将 Schwarz 引理推广成如下形式:

定理 5 (Ahlfors) 设 $f: \Delta \rightarrow D$ 是 Δ 内的一个解析函数, 又设

$ds = \sigma |dz|$ 是区域 D 内的一个超双曲度量. 则有

$$\sigma[f(z)]|f'(z)| \leq \frac{2}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in \Delta.$$

证 容易验证 $\sigma[f]|f'|$ 是 Δ 内的一个超双曲度量. 应用定理 3 即得本定理. 证毕.

应用定理 4 可以得到一个比定理 5 形式上更广泛的定理:

定理 6 设 $f: D_1 \rightarrow D_2$ 是区域 D_1 到 D_2 的解析映射. 又设 $ds = \sigma_1 |dz|$ 为 D_1 内的度量, $\sigma_1 \in C^2$, $\sigma_1 > 0$, 且 $K(\sigma_1) = -1$, 而 $ds = \sigma_2 |dz|$ 为 D_2 的一个超双曲度量, 且当点 z 从 D_1 内趋向其边界时, $\sigma_1(z)/\sigma_2[f(z)]|f'(z)|$ 的下极限 ≥ 1 . 则我们有

$$\sigma_1(z) \geq \sigma_2[f(z)]|f'(z)|, \quad \forall z \in D_1.$$

证明基于定理 2 与定理 4, 从略.

现在我们说明 Ahlfors 超双曲度量的意义. 广义 Schwarz 引理告诉我们: 一个解析函数 $f: D \rightarrow G$ 满足下列不等式

$$\sigma_G(f(z))|f'(z)| \leq \sigma_D(z), \quad z \in D,$$

其中 σ_D 与 σ_G 分别是区域 D 与 G 的 Poincaré 度量密度. 应用中往往由于缺乏 σ_G 的具体表达式而造成困难. Ahlfors 上述定理的意义在于: 我们利用超双曲度量给出 σ_G 的一个下方估计式, 如果此估计式有显式表达, 则它提供了有关 f 及 f' 的信息. 这一点将在下面几节的讨论中明显地展现出来.

§ 5 $\rho_{0,1}(z)$ 的初等下界与 Landau 定理

在叙述本节主要结果之前, 我们先计算穿孔盘 $\Delta \setminus \{0\} = \{z | 0 < |z| < 1\}$ 的 Poincaré 度量.

我们考虑映射:

$$\begin{aligned} E: \mathbb{H} &\rightarrow \Delta \setminus \{0\}, \\ z &\mapsto e^{iz}. \end{aligned}$$

它是 \mathbb{H} 到 $\Delta \setminus \{0\}$ 的覆盖映射. 我们已经知道 \mathbb{H} 的 Poincaré 度量为 $|dw|/\text{Im}w$. 因此, $\Delta \setminus \{0\}$ 的 Poincaré 度量可由 \mathbb{H} 的 Poincaré 度量算得, 也即将 E 的逆映射 $w = -i \ln z$ 代入 $|dw|/\text{Im}w$ 即可. 这样我们算

出 $\Delta \setminus \{0\}$ 的 Poincaré 度量为

$$ds = \frac{|dz|}{|z| \ln \frac{1}{|z|}}, \quad z \in \Delta \setminus \{0\}.$$

由此容易推出穿孔盘 $B_r = \{z: 0 < |z| < r\}$ 的 Poincaré 度量为

$$ds = \sigma_r(z) |dz| \equiv \frac{|dz|}{|z| \ln \frac{r}{|z|}}, \quad z \in B_r.$$

今后我们将穿孔复平面 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 的 Poincaré 度量记为 $\rho_{0,1}(z) |dz|$. 由 § 2 定理 2 推论立即得

$$\rho_{0,1}(z) \leq \frac{1}{|z| \ln \frac{1}{|z|}}, \quad \forall z \in \Delta \setminus \{0\}.$$

这样我们就得到 $\rho_{0,1}(z)$ 在 0 点附近的一个上界估计.

下面我们给出 $\rho_{0,1}(z)$ 的一个下界估计.

定理 1 (Ahlfors) 设 $\zeta = \zeta(z)$ 是区域 $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ 到 Δ 的共形映射, 保持原点不动且关于实轴对称. 则当 $|z| < 1$, $|z| < |z-1|$ 时, 我们有

$$\rho_{0,1}(z) \geq \left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right| [4 - \ln |\zeta(z)|]^{-1}.$$

证 记 Ω_1 为区域 $\{z: |z| < 1, |z| < |z-1|\}$, 并考虑度量

$$\sigma(z) = \left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right| [4 - \ln |\zeta(z)|]^{-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty).$$

显然 $\sigma(z) = \sigma_r(\zeta(z)) |\zeta'(z)|$, 其中 $\sigma_r(\zeta)$ 是穿孔盘 $\{\zeta: 0 < |\zeta| < r\}$ 的 Poincaré 度量, 这里 $r = e^4$. 由此可见, $\sigma(z) |dz|$ 的曲率为 -1 . 在 Ω_1 内我们取 $\rho(z) = \sigma(z)$, 而在区域 $\Omega_2 = \{z: |z-1| < 1, |z-1| < |z|\}$ 内, 取 $\rho(z) = \sigma(1-\bar{z})$. 此外, 按照 $\rho(z) = |z|^{-2} \rho\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ 将 $\rho(z)$ 延拓到 $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2\}$. 显然, $\rho(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 内是连续的, 并且在 Ω_1, Ω_2 和 Ω_3 内属于 C^2 , 其曲率为 -1 . 为说明 $\rho(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 为超曲度量, 我们必须验证 $\rho(z)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 的边界上处处有支撑度量. 实际上, 在 Ω_1 的边界点处其支撑度量可取为 $\sigma(z) |dz|$. 为说明这点, 只需验证在 Ω_1 的每一边界点的附近 $\rho(z) \geq \sigma(z)$ (见本章习题第 8 题). 这

样根据 $\rho(z)$ 的定义方式,它在 Ω_2 的其他边界上也就自然有了支撑度量.由上一节定理 3 立即推出本定理的结论.证毕.

函数 $\zeta = \zeta(z)$ 有下列显式表示:

$$\zeta(z) = \frac{\sqrt{1-z} - 1}{\sqrt{1-z} + 1} \quad (\operatorname{Re} \sqrt{1-z} > 0).$$

因此,定理 1 中的估计式可以写成下列等价形式:

$$\rho_{0,1}(z) \geq \frac{1}{|z| |\sqrt{1-z}|} [4 - \ln |\zeta(z)|]^{-1}.$$

下面我们对定理 1 的结果作进一步改进.

设 $\eta = \min \{\rho_{0,1}(z) : |z| = 1\}$, 则显然有 $0 < \eta < +\infty$. 取 $ds = \sigma^*(z) |dz|$ 为区域

$$\{z : 0 < |z| < \exp(1/\eta)\}$$

的 Poincaré 度量,也即 $\sigma^*(z) = 1 / \left\{ |z| \left[\frac{1}{\eta} - \ln |z| \right] \right\}$. 那么根据定义,显然有

$$\rho_{0,1}(z) / \sigma^*(z) \geq 1, \quad \text{当 } |z| = 1.$$

另一方面,由 σ^* 的定义及定理 1 的估计式的上述等价形式又推出:
 $\liminf_{z \rightarrow 0} \rho_{0,1}(z) / \sigma^*(z) \geq 1$. 应用 § 4 定理 4, 我们得到

$$\rho_{0,1}(z) \geq \sigma^*(z), \quad \forall z \in \Delta \setminus \{0\}.$$

这样我们证明了

定理 2 设 $ds = \rho_{0,1}(z) |dz|$ 为 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上的 Poincaré 度量,则在 $\Delta \setminus \{0\}$ 内 $\rho_{0,1}(z)$ 有下列估计式:

$$\rho_{0,1}(z) \geq \frac{1}{|z| \left(\frac{1}{\eta} - \ln |z| \right)}, \quad z \in \Delta \setminus \{0\},$$

其中 $\eta = \min \{\rho_{0,1}(z) : |z| = 1\}$.

给出 $\rho_{0,1}(z)$ 的显式下界估计式在经典解析函数论中有很价值. Ahlfors 利用超双曲度量首先给出这种估计式,并利用它给出了 Schottky 定理的初等证明. 定理 2 所提供的 $\rho_{0,1}(z)$ 的下界是本书作者给出的,它有更简单的表达式,并且是精确估计.

回顾前面给出的 $\rho_{0,1}(z)$ 在 $z=0$ 附近的上界估计,我们立即由定理 2 推出:

推论 当 $z \rightarrow 0$ 时, $\rho_{0,1}(z) \sim \frac{1}{|z| \ln \frac{1}{|z|}}$.

利用定理 2 立即推出 Landau 定理.

定理 3 (Landau 定理) 设 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Δ 内的解析函数, 不取 0 与 1. 则存在一个常数 $C > 0$, 使得

$$|f'(0)| \leq 2|f(0)|\{C + |\ln |f(0)||\}.$$

证 不失一般性, 可以假定 $|f(0)| < 1$. 否则可将 f 换成 $1/f$.

由广义 Schwarz 引理有

$$\rho_{0,1}[f(z)]|f'(z)| \leq 2/[1 - |z|^2].$$

特别地, $\rho_{0,1}[f(0)]|f'(0)| \leq 2$. 利用定理 2 即推出

$$|f'(0)| \leq 2|f(0)| \left\{ \frac{1}{\eta} - \ln |f(0)| \right\}.$$

令 $C = \frac{1}{\eta}$, 即完成定理之证明. 证毕.

定理 3 中的常数 C 被称为 **Landau 常数**. 初起人们只知其存在, 并试图给出其最佳值. 经过多年不断的改进, 最终在 20 世纪 70 年代末及 80 年代初先后由赖万才, J. A. Hempel 和 J. A. Jenkins 彼此独立地确定了它的最佳值:

$$C = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right) = 4.3768796\cdots.$$

一个很有趣的事实是, 本书所给的上述证明不仅十分简洁而且指出了 $C = \frac{1}{\eta}$ 恰好就是这个值. 事实上, 设 $\mu: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 为模函数. 又设 $h: \Delta \rightarrow \Delta$ 为一分式线性变换, 使得 $\mu \circ h(0) = \zeta$, 其中 ζ 使得

$$|\zeta| = 1, \quad \rho_{0,1}(\zeta) = \eta.$$

令 $f_0 = \mu \circ h$, 则根据 Poincaré 度量定义, 我们有

$$\rho_{0,1}[f_0]|f'_0(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \Delta.$$

特别地 $\rho_{0,1}(\zeta)|f'_0(0)| = 2$.

这样, $|f'_0(0)| = 2C$. 换句话说, f_0 使得定理中的估计式成立等号. 因此, 这个常数 $C = 1/\eta$ 不能再改小.

尽管如此, Landau 定理中的初等上界仍有改进形式. 本书作者

证明了下列估计式:

$$|f'(0)| \leq 2|f(0)|\{|\ln|f(0)|| + C - m\operatorname{Re}[(f(0))^\epsilon + 1]\},$$

其中 $\epsilon = -1$, 当 $|f(0)| \leq 1$; $\epsilon = 1$, 当 $|f(0)| > 1$, 而 $m > 0$ 是一个绝对常数(见 Science in China, Series A, Vol. 35, No. 8, 1992). 这一显式估计同样是精确的.

最后我们指出, $\eta = \rho_{0,1}(-1)$; 换句话说, $\rho_{0,1}(z)$ 在单位圆周上的最小值在 $z = -1$ 处达到. 事实上, $\rho_{0,1}(z)$ 关于实轴是对称的. 并且人们证明了当 z 沿单位圆的上半圆周向 $z = -1$ 处移动时 $\rho_{0,1}(z)$ 是递减的.

§ 6 Picard 大定理

前面我们已经提及这个定理, 现在作为广义 Schwarz 引理的应用来证明它.

定理 1 (Picard 大定理) 设 f 是穿孔盘 $B_r = \{z | 0 < |z| < r\}$ 内的解析函数, 不取值 $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$. 则点 $z = 0$ 要么是 f 的可去奇点, 要么是 f 的极点.

这个定理的另外一种叙述方式是: 解析函数在其孤立的本性奇点附近取遍 \mathbb{C} 中一切值, 最多只有一个例外值.

证 不失一般性可以假定 $r = 1$ 且 $a = 0, b = 1$. 这时 $f: \Delta \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 是穿孔盘 $\Delta \setminus \{0\}$ 上的解析函数, 不取 0 与 1 两个值. 应用广义 Schwarz 引理, 我们有

$$\rho_{0,1}[f(z)]|f'(z)| \leq \frac{1}{|z| \ln \frac{1}{|z|}}, \quad z \in \Delta \setminus \{0\}.$$

取 r_0 为一常数, $0 < r_0 < 1/e$, 并设

$$m = \min\{|f(z)| : |z| = r_0\}.$$

设 $z \in \Delta \setminus \{0\}, |z| < r_0$. 我们暂时假定 $|f(z)| < 1$. 表 z 为 $re^{i\theta}$, 并令 γ 是一条道路:

$$\begin{aligned} \gamma: [r, r_0] &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \\ t &\mapsto w = f(te^{i\theta}). \end{aligned}$$

这时有下列两种可能性:

(i) 整个道路 $\gamma \subset \Delta$;

(ii) 存在一点 $t=r_*$, $r < r_* < r_0$, 使得 $|f(r_*e^{i\theta})|=1$ 且 $t=r_*$ 对应的点是 γ 上第一个到达单位圆周的点.

在情况(i)之下, 应用 § 5 定理 2 有

$$\left| \frac{f'(te^{i\theta})}{f(te^{i\theta})} \right| [C - \ln |f(te^{i\theta})|]^{-1} \leq \frac{1}{t \ln \frac{1}{t}}, \quad r \leq t \leq r_0, \quad (2.1)$$

其中 $C = \frac{1}{\eta}$ 定义如前. 对上述不等式两端关于 t 积分, 并注意到 $|df| \geq d|f|$, 则有

$$\begin{aligned} & \ln[C - \ln |f(z)|] \\ & \leq \ln \ln \frac{1}{|z|} - \ln \ln \frac{1}{r_0} + \ln[C - \ln |f(r_0e^{i\theta})|] \\ & \leq \ln \ln \frac{1}{|z|} + \ln \ln \frac{e^C}{m}, \end{aligned}$$

这里用到 $r_0 < e^{-1}$ 和 $\ln \ln \frac{1}{r_0} > 0$. 可将上式改写为

$$-\ln |f(z)| < A_1 \ln \frac{1}{|z|},$$

其中 $A_1 = \ln e^C / m$.

在情况(ii)之下, 我们对不等式(2.1)从 $t=r$ 积分到 $t=r_*$, 即得

$$\begin{aligned} & \ln[C - \ln |f(z)|] \\ & \leq \ln \ln \frac{1}{|z|} - \ln \ln \frac{1}{r_*} + \ln C \\ & \leq \ln \ln \frac{1}{|z|} + \ln C, \end{aligned}$$

这里用到 $r_* < r_0 < e^{-1}$ 和 $|f(r_*e^{i\theta})|=1$. 这样, 我们得到

$$-\ln |f(z)| < A_2 \ln \frac{1}{|z|},$$

其中 $A_2 = C$.

总之, 我们在 $|f(z)| < 1$ 的情况下证明了

$$-\ln |f(z)| < A \ln \frac{1}{|z|},$$

其中 $A = \max(A_1, A_2)$.

当 $|f(z)| \geq 1$ 时, 上述不等式显然成立. 因此上述不等式对于一切 z ($|z| < r_0$) 都成立.

函数 $1/f$ 同样满足定理的条件, 对于函数 $1/f$ 应用前面结论, 使得

$$\ln |f(z)| < \tilde{A} \ln \frac{1}{|z|}, \quad 0 < |z| < e^{-1},$$

其中 \tilde{A} 为常数, $\tilde{A} > 0$. 这意味着 $z^n f(z)$ 在 $z=0$ 点为可去奇点, 其中 n 为充分大的自然数. 也就是说 $z=0$ 要么是 f 的可去奇点, 要么是 f 的极点. 定理证毕.

§ 7 Schottky 定理

现在我们应用广义 Schwarz 引理来证明 Schottky 定理. 它也称为 Picard-Schottky 定理, 与 Landau 定理、Picard 定理一样, 是解析函数论中的一个经典定理. 这里我们强调指出, 本书所给出的显式估计式是精确的.

定理 1 (Schottky 定理) 设 f 是单位圆 Δ 内的解析函数, 不取值 0 及 1. 则有

$$\ln |f(z)| \leq [C + \ln^+ |f(0)|] \frac{1 + |z|}{1 - |z|} - C,$$

其中 $\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$, 而 C 为常数:

$$C = \frac{1}{\eta}, \quad \eta = \min\{\rho_{0,1}(z) : |z| = 1\}.$$

证 应用广义 Schwarz 引理, 我们有

$$\rho_{0,1}[f(z)] |f'(z)| \leq \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

假定点 $z = re^{i\theta} \in \Delta$ 且 $|f(z)| < 1$. 我们考虑道路:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, r] &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\mapsto w = f(te^{i\theta}). \end{aligned}$$

若 $\gamma \subset \Delta$, 则应用 § 5 定理 2 有

$$\left| \frac{f'(te^{i\theta})}{f(te^{i\theta})} \right| [C - \ln |f(te^{i\theta})|]^{-1} \leq \frac{2}{1-t^2},$$

其中 $t \in [0, r]$. 两边对 t 积分, 并注意到 $|df| \geq d|f|$, 即得

$$\frac{C - \ln |f(z)|}{C - \ln |f(0)|} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

也即有

$$C - \ln |f(z)| \leq [C - \ln |f(0)|] \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

若 γ 不完全落入 Δ , 这时我们的积分从某个 r_* ($0 < r_* < r$) 积到 r , 其中 r_* 使得 $|f(r_*, e^{i\theta})| = 1$, 且点 $w = f(r_*, e^{i\theta})$ 是 γ 上最后落在单位圆周上的点. 这时我们有

$$[C - \ln |f(z)|]/C \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \Big/ \frac{1 + r_*}{1 - r_*} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

也即

$$C - \ln |f(z)| \leq C \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

合并我们所证明的两个不等式, 即当 $|f(z)| < 1$ 时, 有

$$C - \ln |f(z)| \leq \left[C + \ln^+ \frac{1}{|f(0)|} \right] \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

这个估计式显然在 $|f(z)| \geq 1$ 时也成立. 于是不论 $|f(z)|$ 是否小于 1, 它一般都成立. 将它应用于函数 $1/f$, 即得到所要的估计式. 证毕.

应该指出在这个定理中常数 C 不能再改小. 事实上, 取 $f_0: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 是 Δ 到 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 的一个全纯覆盖映射, 使得 $f_0(0) = -1$, 且 f_0 将区间 $(-1, 1)$ 映射为 $(-\infty, 0)$. 对于 f_0 应用定理的估计式, 并对估计式两端除以 $|z|$, 然后令 $|z| \rightarrow 0$ 取极限就得到 $|f'_0(0)| \leq 2C$. 然而, 我们已经知道此处等号成立 (根据 Landau 定理). 因此, 此处常数是最佳的.

我们还要指出, Schottky 定理是一个较强的定理, 例如利用它可以证明 Picard 小定理及 Montel 定理.

习 题

1. 用广义 Schwarz 引理证明代数基本定理 (提示: 用反证法,

并利用穿孔盘 $\{z: 0 < |z| < R\}$ 的 Poincaré 度量).

2. 写出上半平面 \mathbb{H} 到单位圆的共形映射, 并由此推出 \mathbb{H} 上的 Poincaré 度量的表达式.

3. 设 $d(z_1, z_2)$ 为单位圆 Δ 内任意两点 z_1 与 z_2 之间的 Poincaré 距离. 证明非欧圆周

$$C = \{z \in \Delta: d(z_0, z) = R\}$$

也是一个通常的圆周, 其中 $z_0 \in \Delta$ 为给定一点, $R > 0$ 是常数.

4. 计算在上半平面 \mathbb{H} 中区域

$$S := \{x + iy: y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

的 Poincaré 度量下的面积. 计算曲线

$$\alpha_y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H},$$

$$t \mapsto t + iy$$

的非欧长度 $l(\alpha_y)$, 并证明 $l(\alpha_y) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow \infty$ 时).

5. 设法写出环域 $B_R = \{z: 1 < |z| < R\}$ 的 Poincaré 度量.

6. 用 Schottky 定理证明 Picard 小定理.

7. 由 Picard 大定理推出 Picard 小定理.

8. 验证 § 5 定理 1 的证明中 $\sigma(z)$ 在 $\partial\Omega_1$ 上是 $\rho(z)$ 的支撑度量.

(提示: 证明在 $\partial\Omega_1$ 上的任意一点处, $\sigma(z)$ 沿 $\partial\Omega_1$ 的外法线方向的方向导数 < 0 , 见 Ahlfors 的书(见参考文献[3])第 18 页.)

9. 利用 Koebe 定理证明: 当 $|z|$ 充分小时, $\rho_{0,1}(z) > \frac{1}{4|z|}$.

(提示: 考虑区域

$$\Omega = \{w: 0 < \operatorname{Re} w < 1, |w - 1/2| > 1/2\},$$

并用 Ω 替代第一章 § 5 中的 D , 即可得到定义在 \mathbb{H} 上的模函数 $\mu: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$, 将 $\infty, 0, 1$ 分别对应于 $0, 1, \infty$. 这时 $\rho_{0,1}(\mu(w)) = 1/(\operatorname{Im} w \cdot |\mu'(w)|)$. 注意到当 $\operatorname{Im} w_0 > 3/2$ 时, $\mu(w)$ 在 $\{w: |w - w_0| < 1\}$ 是单叶函数, 利用 Koebe $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理即可证得.)

注: 由本题结果, 并注意到 $\rho_{0,1}(z) = \rho_{0,1}(1 - z)$, 即可推出 $\lim_{z \rightarrow 1} \rho_{0,1}(z) = \infty$. 于是导出 § 3 定理 1 证明中的 $m > 0$.

第三章 共形模与极值长度

共形模与极值长度是两个重要的共形不变量,有着广泛的应用,尤其在拟共形映射理论中它们扮演着重要角色.本章将介绍它们的基本概念、性质,并讨论几个极值问题.

本章的内容将为下一章讨论拟共形映射奠定基础.

§ 1 共 形 模

扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上任意一条 Jordan 闭曲线所围的区域称为 Jordan 区域.我们约定一个 Jordan 区域的边界的正向是使得区域局部地落在其左侧的方向.

设 Q 为一个 Jordan 区域,并在边界上按照正向依次选定四点 z_1, z_2, z_3, z_4 , 则 Q 连同这四点一起构成一个**拓扑四边形**(或简称**四边形**),记为 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. 这里的四个点称之为四边形的**顶点**.

这里不仅顶点的次序是重要的,而且谁是第一个顶点也是重要的.我们把 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 与 $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ 看作不同的四边形.

今后我们把四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的边界弧 (z_1, z_2) 与 (z_3, z_4) 称做**第一组对边**,而把边界弧 (z_2, z_3) 与 (z_4, z_1) 称做**第二组对边**.

两个四边形 $Q_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 与 $Q_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ 称为**共形等价的**,如果存在一个共形映射 φ , 将 Q_1 映射为 Q_2 , 且有顶点对应

$$\varphi(z_j) = \zeta_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

今后我们用 $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 表示以 z_1, z_2, z_3, z_4 为顶点的矩形四边形.

定理 1 对于任意给定的四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 都存在实数 $a > 0$ 与 $b > 0$, 使得 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形等价于矩形 $R(0, a, a + bi, bi)$. 这里比例 a/b 由四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 惟一地决定.

证 根据 Riemann 映射定理, 存在一个共形映射 $\varphi: Q \rightarrow \mathbb{H}$ 将 Q

映射为上半平面 \mathbb{H} . 设 Q 的四个顶点 z_1, z_2, z_3, z_4 依次对应于实轴上四点 x_1, x_2, x_3, x_4 . 再对 φ 复合以分式线性变换 $\psi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, 使 x_1, x_2, x_3, x_4 依次对应于

$$-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k}.$$

这里 $k < 1$ 是由四点 x_1, x_2, x_3, x_4 的交比确定的. 由 Christoffel-Schwarz 公式, 函数

$$w = \int_{-\frac{1}{k}}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

将 $\mathbb{H} \left(-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k} \right)$ 变成 $R(0, a, a+bi, bi)$, 其中

$$a = \int_{-\frac{1}{k}}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$b = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

这样 $w \circ \psi \circ \varphi$ 将 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形映射为 $R(0, a, a+bi, bi)$, 并保持了顶点依次对应.

若 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 另外还共形等价于矩形 $R(0, a', a'+b'i, b')$, 那么矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$ 共形等价于 $R(0, a', a'+b'i, b')$. 设 f 是这样的共形映射. 那么可以依据对称开拓原理可逐次解析延拓 f , 而最后将 f 解析延拓为 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的共形映射, 且 $f(0)=0$. 因此, $f(z)=\lambda z$, 其中 λ 是一常数. 由此推出 $a/b=a'/b'$. 证毕.

定义 若四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 共形等价于 $R(0, a, a+bi, bi)$, 则 a/b 称为 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的**共形模**(conformal modulus), 或简称为**模**, 记之为 $\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))$.

根据定义, 我们有

$$\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = 1/\text{Mod}(Q(z_2, z_3, z_4, z_1)).$$

定理 2 设 $Q_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 与 $Q_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ 为两个拓扑四边形. 若存在一个共形映射 $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$, 使得 $Q_2 = \varphi(Q_1)$, 且 $\zeta_j = \varphi(z_j)$, $j=1, 2, 3, 4$, 则有

$$\text{Mod}(Q_1(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \text{Mod}(Q_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)).$$

证明是显然的.

定理 2 表明拓扑四边形的模是一个共形不变量.

拓扑四边形的共形模依赖于第一组对边的选取,这一点请读者留意.但是,为了书写简单,有时将 $\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))$ 简单地写成 $\text{Mod}(Q)$,只要认为已明确规定了 Q 的第一组对边而不导致误解即可.

平面上的二连通域也可定义其共形模.

定理 3 平面上的二连通域共形等价于下列三种典型区域:

(i) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 即 $\{z: 0 < |z| < \infty\}$;

(ii) $\Delta \setminus \{0\}$, 即 $\{z: 0 < |z| < 1\}$;

(iii) $B_r = \{z: 1 < |z| < r\}$.

证 设 B 为 \mathbb{C} 上的一个二连通域.若 B 的补集 $\mathbb{C} \setminus B$ 由两个点组成,则通过一个分式线性变换分别将其变为 0 与 ∞ ,即证明了 B 共形等价于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

若 $\mathbb{C} \setminus B$ 的两个分支中有一个是单点集合 $\{a\}$ 而另一个分支多于一点,则 $B \cup \{a\}$ 是一个单连通域.应用 Riemann 映射定理,存在一个共形映射 $\varphi: B \cup \{a\} \rightarrow \Delta$, 且 $\varphi(a) = 0$. 这时 $\varphi|_B$ 即将 B 共形映射为 $\Delta \setminus \{0\}$.

若 $\mathbb{C} \setminus B$ 的两个分支 C_1 与 C_2 都多于两点,则先通过共形映射将 $B \cup C_2$ 映为 Δ , 并将 C_2 在 Δ 中的像记为 C'_2 , 将 $\Delta \setminus C'_2$ 记为 B' . 然后,通过共形映射将 $\mathbb{C} \setminus C'_2$ 映射为单位圆 Δ 之外部,并保持 ∞ 不动.这时,单位圆周 $\partial\Delta$ 变成一条解析的 Jordan 曲线,而 B' 的像则是 $\partial\Delta$ 与这条 Jordan 曲线所围的区域,记之为 B'' .

对于区域 B'' 作变换 $w = \ln z$, 则 B'' 变成 w 平面的一个带形域: 它的一条边是整个虚轴,而另一条边在虚轴之右侧,是一条无限长的曲线.记这个带形域为 Σ , 则 Σ 是一个单连通域,且在 $z \mapsto z + 2k\pi i$ 变换下不变, $k \in \mathbb{Z}$.

再通过共形映射将 Σ 变成 $\Sigma' = \{x + iy: 0 < x < d\}$, 同时保持 0, $i\infty$ 及 $-i\infty$ 不动 ($i\infty$ 及 $-i\infty$ 视作两个素端). 设这样的映射为 f . 不失一般性,可以假定 $f(2\pi i) = 2\pi i$, 因为否则总可通过复合一个相似变换(也即调整 d 的大小)达到目的.

现在我们来证明

$$f(z + 2\pi i) = f(z) + 2\pi i, \quad \forall z \in \Sigma.$$

令 $g = f(z + 2\pi i) - 2\pi i$, 则 g 也是 Σ 到 Σ' 的共形映射, 且保持 $0, i\infty$ 及 $-i\infty$ 不动. 由共形映射之惟一性推得 $g = f$, 也即

$$f(z + 2\pi i) - 2\pi i = f(z).$$

由上立即推出

$$f(z + 2k\pi i) = f(z) + 2k\pi i, \quad \forall z \in \Sigma, k \in \mathbb{Z}.$$

这样映射 $\zeta \mapsto \exp\{f(\ln \zeta)\}$ 是 B'' 到环域

$$\{z: 1 < |z| < e^d\}$$

的单值映射. 总之, 这时 B 共形等价于第三种典型区域. 证毕.

很容易证明上述三种典型区域两两互不共形等价.

另外, 若二连通域 B 共形等价于 $\{z: 1 < |z| < r\}$, 则 r 是惟一的. 这一点可由对称解析延拓证实.

现在我们定义二连通域的共形模.

设 B 是 \mathbb{C} 上的一个二连通域. 若 B 共形等价于 $\{z: 1 < |z| < r\}$, 则定义 B 的共形模为

$$\text{Mod}(B) = \frac{1}{2\pi} \ln r.$$

若 B 共形等价于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 或 $\Delta \setminus \{0\}$, 则定义它的模为 ∞ .

为什么用 $\frac{1}{2\pi} \ln r$ 来定义二连通域的模, 而不直接用 r 来定义呢?

这在下一节中将看到其更本质的原因. 现在可以说得出的一个简单的理由是为了使二连通域的模与四边形的模有某种统一性. 我们设想将环域 $\{z: 1 < |z| < r\}$ 割去实轴上的区间 $(1, r)$, 所余下的部分就成了一个四边形. 不过这个四边形不是由一条 Jordan 闭曲线围成而是将区间 $(1, r)$ 之两侧代表它的一组对边. 我们将这组对边规定为第一组对边, 并通过对数映射将该四边形映射为以

$$0, \ln r, \ln r + 2\pi i, 2\pi i$$

为顶点的矩形, 立即发现这个四边形的模就是 $\frac{1}{2\pi} \ln r$.

显然, 对于任意一个具有有限模的二连通域 B 而言, 我们都可以找到一条连结它的两个边界分支的曲线 γ , 使得 $B \setminus \gamma$ 作为四边形

的模就是 $\text{Mod}(B)$.

由定义立即推出

定理 4 二连通域的模是共形不变量, 即若 φ 是二连通域 B 的一个共形映射, 则

$$\text{Mod}(\varphi(B)) = \text{Mod}(B).$$

§ 2 极值长度

极值长度的概念最早是由 A. Beurling 提出来的, 经过 Ahlfors 的系统研究, 有了广泛的应用, 其应用范围甚至超出复分析的领域.

这一概念与前面定义的共形模有深刻联系. 而这种联系的建立是基于所谓面积长度方法, 其主要工具为 Schwarz 不等式.

设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个区域. 又设 $\Gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$ 是一个曲线族, 其中每条曲线 γ_α 落入 D 的内部, 并且假定是局部可求长的. 记 D 上全体非负 Borel 可测函数之集为 P . 对于任意一个 $\rho \in P$, 我们可以将其视作一个度量密度. 在这个度量之下, D 的 ρ 面积为

$$m_\rho(D) = \iint_D \rho^2 dx dy,$$

而每条曲线 $\gamma \in \Gamma$ 的 ρ 长度是

$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho |dz|.$$

我们考虑 P 的一个子集合

$$P_0 = \{\rho \in P: 0 < m_\rho(D) < \infty\},$$

并给出如下的定义:

曲线族 Γ 的**极值长度**定义为

$$\lambda_D(\Gamma) = \sup_{\rho \in P_0} \{ \inf_{\gamma \in \Gamma} l_\rho^2(\gamma) / m_\rho(D) \}.$$

首先应该指出, 曲线族 Γ 的极值长度不依赖于区域 D 的选择, 而只要 D 包含 Γ 中每一条曲线就足够了. 读者不难自己验证: 若区域 D_1 与 D_2 均包含 Γ 中的每一条曲线, 则有

$$\lambda_{D_1}(\Gamma) = \lambda_{D_2}(\Gamma) = \lambda_{D_1 \cap D_2}(\Gamma).$$

因此今后我们将用 $\lambda(\Gamma)$ 来替代 $\lambda_D(\Gamma)$.

定理 1 曲线族 Γ 的极值长度是共形不变量. 更确切地说, 若 f 为区域 D 的一个共形映射, 而 D 包含 Γ 中的每条曲线, 则 Γ 与 $f(\Gamma) = \{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ 有相同的极值长度.

证 记 P_0 为 D 内使得 $0 < m_\rho(D) < \infty$ 的非负 Borel 可测函数之全体. 又记 \tilde{P}_0 为 $G = f(D)$ 内使得 $0 < m_{\tilde{\rho}}(G) < \infty$ 的非负 Borel 可测函数 $\tilde{\rho}$ 之全体. 很容易看出, 对每一个 $\rho \in P_0$, 函数

$$\tilde{\rho} = (\rho \circ g) |g'| \in \tilde{P}_0,$$

其中 $g = f^{-1}$, 并且有

$$m_{\tilde{\rho}}(G) = m_\rho(D),$$

$$l_{\tilde{\rho}}(\tilde{\gamma}) = l_\rho(g(\tilde{\gamma})), \quad \forall \tilde{\gamma} \in f(\Gamma).$$

由此推出, $\lambda(\Gamma) \leq \lambda(f(\Gamma))$. 如果我们从 \tilde{P}_0 中的函数 $\tilde{\rho}$ 出发, 考虑它对应的 P_0 中的函数 $\rho = (\tilde{\rho} \circ f) |f'|$, 完全类似的讨论可以推出, $\lambda(f(\Gamma)) \leq \lambda(\Gamma)$. 证毕.

根据定义很容易直接验证定理 2、定理 3 的结论:

定理 2 设 Γ_1 与 Γ_2 为两个局部可求长曲线族. 若 Γ_1 中的每条曲线 γ_1 都包含 Γ_2 中的一条曲线 γ_2 , 则 $\lambda(\Gamma_1) \geq \lambda(\Gamma_2)$.

这就是说, 曲线较长而曲线较少的曲线族的极值长度较大. 这一定理被称为**比较原理**.

定理 3 设 Γ, Γ_1 和 Γ_2 是三个局部可求长的曲线族, 且 Γ_1 与 Γ_2 中的曲线分别包含于区域 D_1 与 D_2 之中, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. 则有

(i) 若 Γ_1 中的每一条曲线 γ_1 与 Γ_2 中的每一条曲线 γ_2 都包含 Γ 中的某条曲线 γ , 那么

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \geq \frac{1}{\lambda(\Gamma_1)} + \frac{1}{\lambda(\Gamma_2)};$$

(ii) 若 Γ 中的每一条曲线 γ 都包含 Γ_1 中的某条曲线 γ_1 及 Γ_2 中的某条曲线 γ_2 , 那么

$$\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2).$$

这一定理称为**合成原理**. 图 3.1 与图 3.2 解释了上述的两种情况. 证明并不困难, 这里略去.

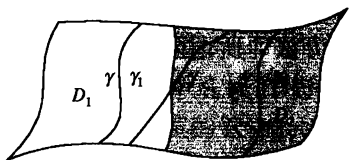


图 3.1

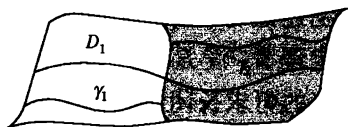


图 3.2

有趣的是极值长度与共形模之间有一定联系.

定理 4 设 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是一拓扑四边形. 又设 Γ 是 Q 中第一组对边之间的所有局部可求长连线所组成的曲线族, 则有

$$\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

证 因为共形模与极值长度都是共形不变量, 所以不失一般性可设 Q 是一矩形, 且所给的拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 就是 $R(0, a, a+bi, bi)$. 在这种假定下, Γ 就是 R 内局部可求长的连结两条水平边的连线的曲线族. 取 $\rho_0=1$, 那么

$$m_{\rho_0}(R) = ab,$$

$$l_{\rho_0}(\gamma) \geq b, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

于是有

$$l_{\rho_0}^2(\gamma)/m_{\rho_0}(R) \geq b/a, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

从而

$$\lambda(\Gamma) \geq b/a.$$

另一方面, 对于 R 内的任意 Borel 可测函数 $\rho \geq 0$, 我们有

$$m_\rho(R) = \int_0^a dx \int_0^b \rho^2(x+iy) dy.$$

由 Schwarz 不等式得到

$$\left(\int_0^b \rho(x+iy) dy \right)^2 \leq b \cdot \int_0^b \rho^2(x+iy) dy.$$

于是

$$\begin{aligned} m_\rho(R) &\geq \frac{1}{b} \int_0^a dx \left(\int_0^b \rho(x+iy) dy \right)^2 \\ &\geq \frac{a}{b} \inf_{\gamma \in \Gamma} l_\rho^2(\gamma). \end{aligned}$$

这样又得到 $\lambda(\Gamma) \leq b/a$.

总之,我们证明了 $\lambda(\Gamma)=b/a$,也即定理所陈述的结论.证毕.

上述证明中的后半部分所使用的方法即所谓面积长度方法.

定理 5 设 B 为一个二连通域.又设 Γ 为 B 中隔离 B 的两个边界分支的可求长闭曲线所组成的曲线族,则

$$\text{Mod}(B) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

证明留给读者完成,这里只作如下提示:先将 B 共形映射为环域,然后仿照定理 4 的证明并将其中 ρ_0 取为 $1/|z|$.

定理 5 进一步告诉我们为什么将二连通域的模式定义为 $\frac{1}{2\pi}\ln r$.

§ 3 Rengel 不等式

极值长度的概念为共形模大小的估计提供了途径.下面估计式称做 Rengel 不等式.

定理 1(Rengel) 设 d_1 与 d_2 分别是四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的第一组对边与第二组对边之落入 Q 中的连线的欧氏长度的下确界.则成立下述估计式:

$$\frac{d_2^2}{m(Q)} \leq \text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) \leq \frac{m(Q)}{d_1^2},$$

其中 $m(Q)$ 表示 Q 的欧氏面积.

证 设 Γ 为 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的第一组对边在 Q 中的连线所组成的曲线族.这时,我们有

$$\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

取 $\rho_0=1$, 则

$$l_{\rho_0}^2(\gamma) \geq d_1^2, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

于是 $\lambda(\Gamma) \geq d_1^2/m(Q)$.

这样我们就证明了要证的估计式中的右边的不等式.

为了证明估计式中左边的不等式,我们指出 $\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \lambda(\Gamma_*)$, 其中 Γ_* 是 Q 的第二组对边之连线的曲线族.利用这

个事实很容易证明上述估计式中的左边的不等式. 证毕.

对于二连通域的模也成立类似于 Rengel 不等式的估计式. § 2 中的定理 5 为建立这种估计式提供了可能性. 通常人们把下面的定理 2 当作二连通域的 Rengel 不等式.

定理 2 设 B 为一个二连通域, 且 $\bar{C} \setminus B$ 的两个分支中分别包含 0 与 ∞ . 则

$$\text{Mod}(B) \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_B \frac{dx dy}{|z|^2}.$$

证 设 Γ 是分隔 B 的两个边界分支的局部可求长曲线族. 由 § 2 中的定理 5,

$$\text{Mod}(B) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)},$$

也即 $\text{Mod}(B) = \inf_{\rho \in P_0} \{m_\rho(B) / \inf_{\gamma \in \Gamma} l_\rho^2(\gamma)\}$. 取 $\rho_0 = 1/|z|$, 那么

$$l_{\rho_0}(\gamma) \geq 2\pi, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

故有

$$\text{Mod}(B) \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_B \frac{dx dy}{|z|^2}.$$

证毕.

§ 4 模的单调性与次可加性

前面我们建立了模与极值长度之间的联系. 极值长度的比较原理反映在模上就是模的单调性, 而极值长度的合成原理反映在模上就是其次可加性.

定理 1 设 Q_1 与 Q_2 是两个拓扑四边形, $Q_1 \subset Q_2$ 且 Q_1 的第一组对边分别落在 Q_2 的第一组上, 如图 3.3 所示. 则有

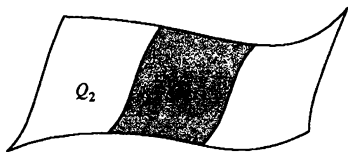


图 3.3

$$\text{Mod}(Q_1) \leq \text{Mod}(Q_2).$$

证明是容易的,应用 § 2 中的定理 2 及定理 4 即可.

完全类似地有

定理 2 设 B_1 与 B_2 是两个二连通域, $B_1 \subset B_2$, 且 $\bar{C} \setminus B_2$ 的两个分支分别包含于 $\bar{C} \setminus B_1$ 的两个分支之内 (见图 3.4), 则有

$$\text{Mod}(B_1) \leq \text{Mod}(B_2).$$

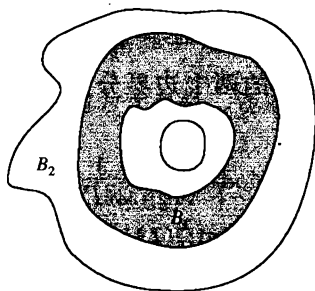


图 3.4

定理 1 与定理 2 可以推广成下列形式.

定理 3 设 Q, Q_1 及 Q_2 均为拓扑四边形, $Q_i \subset Q, Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, Q_i 的第一组对边分别落在 Q 的第一组对边上, $i=1, 2$. 则有

$$\text{Mod}(Q_1) + \text{Mod}(Q_2) \leq \text{Mod}(Q).$$

定理 4 设 B, B_1 与 B_2 均为二连通域, $B_1 \cap B_2 = \emptyset, B_i \subset B$, 且 $\bar{C} \setminus B$ 的两个分支分别落入 $\bar{C} \setminus B_i$ 的两个分支之中, $i=1, 2$. 则有

$$\text{Mod}(B_1) + \text{Mod}(B_2) \leq \text{Mod}(B).$$

这两个定理应用合成原理即可证明.

这两个定理中的 Q_i 或 B_i 可以推广至任意多个的情况, 并称之为模的次可加性.

我们有兴趣于定理 3 或定理 4 中何时等号成立. 这个问题与极值度量有关.

设 Γ 为区域 D 中的一个曲线族. 若 D 上的一个非负 Borel 可测函数 ρ_0 使得

$$\lambda(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_0}^2(\gamma) / m_{\rho_0}(D),$$

则称之为**极值度量**.

显然,连结矩形 $R(0, a, a+bi, bi)$ 的第一组对边的曲线族以 $\rho_0=1$ 为其极值度量.

由此推出,任意拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的第一组对边连线族的极值度量为 $\rho_0 = |f'|$, 其中 f 是 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 到 $R(0, a, a+bi, bi)$ 的共形映射, 且保持顶点依次对应. 这个极值度量除去差一个常数因子外是惟一确定的. 事实上, 若另有一个极值度量 ρ_1 , 那么 $\rho_* = \rho_1 \circ g |g'|$ 便是 $R(0, a, a+bi, bi)$ 的第一组对边连线之极值度量, 其中 $g = f^{-1}$. 于是我们有

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_*}^2(\gamma) / m_{\rho_*}(R) = \frac{b}{a},$$

其中 Γ 表示 R 的水平对边之间的连线族. 另外一方面, 由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} m_{\rho_*}(R) &= \int_0^a dx \int_0^b [\rho_*(x+iy)]^2 dy \\ &\geq \frac{1}{b} \int_0^a dx \left(\int_0^b \rho_*(x+iy) dy \right)^2 \\ &\geq \frac{a}{b} \inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_*}^2(\gamma). \end{aligned}$$

由 ρ_* 的极值性可知, 所有这里的不等式均成立等号. 第一个不等式等号成立要求 ρ_* 与 y 无关, 而第二个不等式等号成立则要求 ρ_* 与 x 无关. 因此, ρ_* 是常数, 也即 $\rho_1 \circ g |g'|$ 是常数. 那么, $\rho_1 = C |f'|$, 其中 C 为常数.

现在, 我们回到原来感兴趣的问题上.

若 Rengel 不等式成立等号, 则表示 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 的第一组或第二组对边之连线的曲线族以欧氏度量 $\rho_0=1$ 为其极值度量. 这意味着 $|f'|$ 是常数, 于是 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 必为矩形四边形.

反之, 若 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 为矩形四边形, 则 Rengel 不等式显然成立等号. 于是我们证明了

定理 5 Rengel 不等式中等号成立的充要条件是所给定的四边形为矩形.

定理 6 设 Q, Q_1 及 Q_2 满足定理 3 中的条件, 且 Q 为矩形. 则当

且仅当 Q_1 与 Q_2 都是矩形且 $\bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2 = \bar{Q}$ 时,

$$\text{Mod}(Q) = \text{Mod}(Q_1) + \text{Mod}(Q_2).$$

证 显然只需证明条件之必要性.

设 Q 是矩形四边形 $R(0, a, a+bi, bi)$. 那么由 Rengel 不等式有

$$\text{Mod}(Q_i) \leq m(Q_i)/b^2, \quad i = 1, 2,$$

其中 $m(Q_i)$ 表示 Q_i 之欧氏面积. 于是

$$\begin{aligned} \text{Mod}(Q_1) + \text{Mod}(Q_2) &\leq [m(Q_1) + m(Q_2)]/b^2 \\ &\leq m(Q)/b^2 = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

若 $\text{Mod}(Q) = \text{Mod}(Q_1) + \text{Mod}(Q_2)$, 则推出上述不等式均须成立等号. 于是又有

$$m(Q) = m(Q_1) + m(Q_2),$$

$$\text{Mod}(Q_i) = m(Q_i)/b^2, \quad i = 1, 2.$$

此处第一个等式表明 $\bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2 = \bar{Q}$. 而第二个等式表明 Q_i 均为矩形. 证毕.

对于二连通域也有类似于定理 6 的定理.

§ 5 保模映射

我们知道, 一个共形映射保持模不变. 我们自然会问: 保持模不变的同胚是否一定是共形映射呢? 回答是肯定的.

设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的一个保向同胚. 若对任意一个拓扑四边形

$$Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad \bar{Q} \subset D,$$

都有 $\text{Mod}(f(Q)) = \text{Mod}(Q)$, 则我们称 f 为**保模映射**.

这里 $f(Q)$ 表示拓扑四边形

$$f(Q)(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4),$$

其中 $\zeta_j = f(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

定理 1 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的一个保模映射, 则 f 是共形映射.

注 在保模映射的定义中, 没有要求 f 具有可微性或光滑性,

只要求它是一个同胚且使模不变. 但是, 这个定理告诉我们, 它不仅是光滑的而且是解析的. 可见保持模不变是共形映射的一个本质特征.

证 设 R 是 D 中的任意一个矩形. 显然, 只要证明 f 在 R 上是共形映射就够了. 另外, 对于区域 D 进行平移不改变 R 的模及 f 的保模性, 故不失一般性假定 R 的顶点是 $0, a, a+bi, bi$, 也即

$$R = R(0, a, a+bi, bi).$$

我们考虑矩形四边形:

$$R_t = R_t(0, t, t+bi, bi), \quad 0 < t < a,$$

则显然有

$$\text{Mod}(R) = \text{Mod}(R_t) + \text{Mod}(R_t^*),$$

其中 R_t^* 是以 $t, a, a+bi, t+bi$ 为顶点的矩形.

因为 f 是保持模不变的映射, 故存在一个共形映射 φ , 将 $f(R)$ 变成 $R = R(0, a, a+bi, bi)$, 并保持顶点依次对应. 这样复合映射 $\varphi \circ f$ 是 R 到自身的保模映射, 记之为 g .

设 $Q_t = g(R_t), Q_t^* = g(R_t^*)$, 则有

$$\text{Mod}(R) = \text{Mod}(Q_t) + \text{Mod}(Q_t^*).$$

由上一节定理 6 立即推出 Q_t 与 Q_t^* 都是矩形. 又由于 Q_t 与 R_t 有相同的模, 故 $Q_t = R_t$. 也即 g 将竖线 $\{z = t + \sigma i: 0 < \sigma < b\}$ 变成自己.

同样的讨论应用于 R 中的横线, 又得 g 将每条横线也变为自己. 于是 g 只能是恒同映射, 也即 $f = \varphi^{-1}$. 也就是说, 当 f 限制在 R 上时是共形映射. 由于 R 的任意性, f 在 D 上是共形映射. 证毕.

由于四边形的模与二连通域的模有某种统一性, 故很容易想到并证实下面定理成立.

定理 2 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的一个保向同胚. 则当且仅当对每一个二连通域 $B \subset D$ 都有 $\text{Mod}(f(B)) = \text{Mod}(B)$ 时, f 是共形映射.

§ 6 模的连续性

我们假定 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是一个有界的拓扑四边形, 并假定

$Q_n(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}, z_4^{(n)})$ 是 Q 中的拓扑四边形序列, $n=1, 2, \dots$. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_j^{(n)} = z_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

且对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 N 使得当 $n \geq N$ 时, Q_n 中的四条边全部落入各自对应的 Q 的边的 ϵ 邻域, 则我们称 Q_n 从 Q 的内部趋向于 Q .

定理 1 若 $Q_n(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}, z_4^{(n)})$ 从内部趋向于 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Mod}(Q_n) = \text{Mod}(Q).$$

证 设 $f: Q \rightarrow R$ 为共形映射, 将 Q 变成矩形 R , 并将 z_1, z_2, z_3, z_4 依次变成 $0, a, a+bi, bi$, 其中 $a > 0, b > 0$. 这时 $\text{Mod}(Q) = a/b$, 且 f 可以连续延拓到 \bar{Q} , 从而 f 在 \bar{Q} 上一致连续. 于是, 不难由 Q_n 趋于 Q 的假定及 f 的一致连续性可知, $f(Q_n)$ 从 $f(Q)$ 的内部趋于 $f(Q)$, 也就是说, 对于任意的 $\eta > 0$, 存在一个 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 顶点 $f(z_j^{(n)})$ 到 R 对应的顶点的距离小于 η , 而且 $\partial f(Q_n)$ 将进入以 ∂R 为边的宽度为 η 的一个“四方框”内. 这时由 Rengel 不等式有

$$\begin{aligned} (a - 2\eta)^2 / m(f(Q_n)) &\leq \text{Mod}(f(Q_n)) \\ &\leq m(f(Q_n)) / (b - 2\eta)^2, \end{aligned}$$

其中 $n \geq N$. 上式可改作

$$(a - 2\eta)^2 / ab \leq \text{Mod}(f(Q_n)) \leq ab / (b - 2\eta)^2,$$

只要 $n \geq N$. 于是, 我们证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Mod}(f(Q_n)) = \text{Mod}(f(Q)),$$

也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Mod}(Q_n) = \text{Mod}(Q)$. 证毕.

§ 7 模的极值问题

设 $E \subset \Delta$ 是 Δ 中的一个连通紧子集, 并假定 E 中包含 $z=0$ 及 $z=r$, 其中 r 是事先取定的正数. 记 $B = \Delta \setminus E$, 问何时 $\text{Mod}(B)$ 达到最大? 此问题称为 Grötzsch 问题. 下面的定理回答了这一问题:

定理 1 (Grötzsch 定理) 在单位圆内任意一个隔离单位圆周 $\{z: |z|=1\}$ 与集合 $\{0, r\}$ ($0 < r < 1$) 的二连通域 B 的模不超过 $\text{Mod}(G_r)$, 其中 G_r 为单位圆割去实轴上 $[0, r]$ 区间.

这就是说 Grötzsch 问题的解是单位圆割去实轴上区间 $[0, r]$.

证 设 $a = \text{Mod}(G_r)$. 则存在一个共形映射 φ 将 G_r 变成环域 $\{w: 1 < |w| < e^{2\pi a}\}$, 且 $\varphi(r) = 1$. 显然, 由于 G_r 关于实轴的对称性, 故 $\overline{\varphi(\bar{z})}$ 也满足同样的条件. 但满足这一条件的共形映射是惟一的, 因此有 $\varphi(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$. 也就是说, φ 关于实轴是对称的. 由共形映射的边界对应定理及对称延拓原理可知, $\varphi(z)$ 可以解析延拓到 $(0, r)$ 的上下两侧. 虽然, 这种解析延拓所得到的值与原来 φ 的值不同, 但是 $|\varphi'/\varphi|$ 的值却没有改变. 这一点可以由 φ 关于实轴的对称性推出.

设 B 是满足定理条件的任意一个二连通域, 并设 Γ 是 B 中全体隔离 B 的两个边界分支的局部可求长闭曲线族. 命 $\rho = |\varphi'/\varphi|/2\pi$, 那么当曲线 $\gamma \in \Gamma$ 不穿越 $[0, r]$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho(z) |dz| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|} |dz| \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varphi(\gamma)} \frac{dw}{w} \right| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varphi(\gamma)} \text{darg} w \right| \geq 1. \end{aligned}$$

这个不等式对于 Γ 中穿越区间 $[0, r]$ 的曲线 γ 也同样成立. 事实上, 将这样的 γ 作如下的调整: 将 γ 分成两段弧 γ_1 与 γ_2 , 它们的端点分别落在 $(-1, 0)$ 与 $(r, 1)$ 之内. 将 γ_1 中在实轴下方的点关于实轴作对称反射而在实轴上方的点保持不动, 将 γ_2 中在实轴上方的点关于实轴作对称反射而在实轴下方的点保持不动. 这样得到一条新的曲线 $\tilde{\gamma}$. 显然, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, 且 $\tilde{\gamma}$ 不穿越区间 $(0, r)$. 但是, 度量 $\rho(z) |dz|$ 关于实轴对称. 由此可见 $\tilde{\gamma}$ 与 γ 关于 $\rho(z) |dz|$ 有相同的长度. 因此, γ 关于 $\rho(z) |dz|$ 的长度 ≥ 1 .

这样, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Mod}(B) &\leq m_{\rho}(B) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_B \left| \frac{\varphi'}{\varphi} \right|^2 dx dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_{B_r} \left| \frac{\varphi'}{\varphi} \right|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{1 < |w| < e^{2\pi a}} \left(\frac{1}{|w|} \right)^2 du dv = a. \end{aligned}$$

证毕.

函数 $\mu(r) = \text{Mod}(G_r)$ 称为 **Grötzsch 函数**.

我们还要研究另外一个关于二连通域的模的极值问题: 设 B 为一个二连通域, 在 $\bar{\mathbb{C}} \setminus B$ 的两个连通分支 C_1 及 C_2 中分别包含了点偶 $\{-1, 0\}$ 与 $\{R, \infty\}$, 其中 $R > 0$ 是事先取定的数. 问这样的二连通域 B 中何时使 $\text{Mod}(B)$ 达到最大?

这个问题称为 Teichmüller 极值问题.

定理 2(Teichmüller) 隔离点偶 $\{-1, 0\}$ 与 $\{R, \infty\}$ 的二连通域 B 的模不超过区域 T_R 的模, 其中

$$T_R = \mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [R, \infty)).$$

证 设 B 为一个二连通域, 隔离点偶 $\{-1, 0\}$ 及 $\{R, \infty\}$. 记 $\bar{\mathbb{C}} \setminus B$ 的两个连通分支为 C_1 及 C_2 , 并假定 $\{-1, 0\} \subset C_1$, $\{R, \infty\} \subset C_2$. 设 φ 是将 $B \cup C_1$ 映成单位圆的共形映射, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-1) > 0$. 这时, $\varphi(B)$ 是一个隔离单位圆周及点偶 $\{0, \varphi(-1)\}$ 的二连通域. 由定理 1 得

$$\text{Mod}(B) = \text{Mod}(\varphi(B)) \leq \text{Mod}(G_r),$$

其中 $r = \varphi(-1)$.

考虑 φ 的逆映射 ψ . 由 Koebe 的偏差定理,

$$|\psi(\zeta)| \leq |\psi'(0)| |\zeta| / (1 - |\zeta|)^2.$$

特别地, 对 $\zeta = \varphi(-1)$ 有

$$1 \leq |\psi'(0)| |\varphi(-1)| / (1 - \varphi(-1))^2.$$

另一方面, 由 Koebe 的 $\frac{1}{4}$ 掩蔽定理, 映射 $\psi(\zeta)$ 掩盖一个圆 $\{|z| < |\psi'(0)|/4\}$. 因此, 点 $z = R$ 应在此圆之外, 也即

$$R \geq |\psi'(0)|/4,$$

于是有

$$\varphi(-1) \geq 1 + 2R - \sqrt{4R + 4R^2}.$$

由比较定理可知 $\text{Mod}(G_r)$ 是 r 的递减函数, 从而有

$$\text{Mod}(B) \leq \mu(\varphi(-1)) \leq \mu(1 + 2R - \sqrt{4R + 4R^2}).$$

读者很容易验证, 区域 T_R 通过开方及分式线性变换可变成 Grötzsch 区域 G_r , 其中 $r = 1 + 2R - \sqrt{4R + 4R^2}$. 这样,

$$\text{Mod}(T_R) = \mu(1 + 2R - \sqrt{4R + 4R^2}),$$

也即有 $\text{Mod}(B) \leq \text{Mod}(T_R)$. 证毕.

现在我们借助于函数 $\mu(r) = \text{Mod}(G_r)$ 给出 $\text{Mod}(T_R)$ 的另一个表达式:

$$\text{Mod}(T_R) = 2\mu\left(\sqrt{\frac{1}{1+R}}\right).$$

我们以 $z = -1$ 为中心、以 $\rho = \sqrt{1+R}$ 为半径作一个圆周 C . 不难看出, C 把 T_R 分作两部分: 圆内部分与圆外部分. 圆内部分恰好是圆外部分关于 C 之反演. 因此, 这两部分有相同的模. 此外, 这两部分的模的和恰好就是 T_R 的模. 事实上, 设 φ 是将圆内部分变成环域的共形映射, 那么 φ 可以解析延拓为 T_R 上的一个共形映射, 且该映射把 T_R 映为一个环域, C 是该环域中的一个同心圆周. 于是证明了我们的断言. 总之, 我们说明了 T_R 的模是它在 C 内部分的模的两倍. 但 C 内部分的模为 $\mu(1/\sqrt{1+R})$, 于是 $\text{Mod}(T_R)$ 有上述表达式.

因此, 定理 2 可叙述成下列形式:

定理 2' (Teichmüller) 设 B 为隔离点偶 $\{-1, 0\}$ 及 $\{R, \infty\}$ 的二连通域, 则

$$\text{Mod}(B) \leq 2\mu\left(\sqrt{\frac{1}{1+R}}\right).$$

这个定理可以有更为一般的形式:

定理 3 (Teichmüller) 设 B 为隔离点偶 $\{z_1, 0\}$ 及 $\{z_2, \infty\}$ 的二连通域, 则

$$\text{Mod}(B) \leq 2\mu\left(\sqrt{\frac{|z_1|}{|z_1| + |z_2|}}\right).$$

证明从略.

习 题

1. 证明关于极值长度的比较原理与合成原理, 即 § 2 定理 2 及定理 3.

2. 设 B 为一个二连通域. 又设 Γ 为隔离 B 的两个边界分支的局部可求长的曲线族. 试证明: $\text{Mod}(B) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}$, 其中 $\lambda(\Gamma)$ 是 Γ 的极值长度.

3. 设 $B_i \subset B, i=1, 2, \dots$, 其中 B_i 与 B 均为二连通域且每个 B_i 隔离 ∂B 的两个分支, 并且满足 $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$. 试证明:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{Mod}(B_i) \leq \text{Mod}(B).$$

4. 设 B 为二连通域, Γ 为局部可求长的隔离 ∂B 两个分支的 Jordan 曲线族. 试给出 $\lambda(\Gamma)$ 的极值度量.

5. 设 $B = \{z | 1 < |z| < r\}$, $B_1 = \{z | 1 < |z| < r_0\}$, $B_2 = B \setminus \overline{B_1}$. 假设 r 给定, 求 r_0 使得 $\text{Mod}(B_1) = \text{Mod}(B_2)$.

6. 将上题的结果推广到一般情况: 设 B 为二连通域, $\text{Mod}(B) < \infty$. 问是否在 B 中存在一条 Jordan 曲线 γ , 使得 $B \setminus \gamma$ 是两个二连通域 B_1 与 B_2 的并, 且 $\text{Mod}(B_1) = \text{Mod}(B_2)$? 这样的曲线 γ 是否是惟一的?

7. 用椭圆积分表示 $\text{Mod}(T_R)$ 及 $\mu(r)$, 其中 T_R 为 Teichmüller 问题中的极值区域, 而 $\mu(r)$ 为 Grötzsch 函数.

8. 设 Γ 是区域 D 内一族局部可求长曲线族, 其极值长度 $\lambda(\Gamma) \neq 0$. 试证明

$$\lambda(\Gamma) = 1 / \inf_{\rho \in P_1} \{m_\rho(D)\},$$

其中 P_1 为 D 中一切满足下列条件的非负 Borel 可测函数的集合:

$$\int_\gamma \rho |dz| \geq 1, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

第四章 拟共形映射

本章将介绍拟共形映射的基本概念及基本定理：几何定义、分析定义、Beltrami 方程以及存在性定理. 在拟共形映射的应用方面，本章将只涉及曲面等温坐标的存在性. 在以后的章节中，我们将进一步看到拟共形映射的其他重要应用.

§ 1 几何定义

拟共形映射是共形映射的推广. 共形映射是保持共形模不变的映射，而拟共形映射是一种保持共形模不变的映射. 共形映射是 Cauchy-Riemann 方程的经典同胚解，而拟共形映射是一种比 Cauchy-Riemann 方程更广的 Beltrami 方程的广义同胚解.

现在叙述拟共形映射的几何定义：

定义 设 $f: D \rightarrow G$ 是 \mathbb{C} 中的区域 D 到 G 的一个保向同胚. 若存在一个常数 $K \geq 1$, 使得 D 中的每一个拓扑四边形 $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\bar{Q} \subset D$, 都有

$$\text{Mod}(f(Q)) \leq K \text{Mod}(Q),$$

则称 f 是一个 K 拟共形映射 (K -quasiconformal mapping), 简记为 K -q. c. 映射.

更确切地说, 这里的 $f(Q)$ 表示下述拓扑四边形: $f(Q)(w_1, w_2, w_3, w_4)$, $w_j = f(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

令 $Q' = Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$, 那么 $\text{Mod}(Q')$ 及 $\text{Mod}(f(Q'))$ 分别是 $\text{Mod}(Q)$ 及 $\text{Mod}(f(Q))$ 的倒数. 于是, 定义中的 $\text{Mod}(f(Q)) \leq K \text{Mod}(Q)$ 蕴含着

$$\frac{1}{K} \text{Mod}(Q') \leq \text{Mod}(f(Q')).$$

因此, $f: D \rightarrow G$ 是 K -q. c. 映射的充要条件是

$$\frac{1}{K} \operatorname{Mod}(Q) \leqslant \operatorname{Mod}(f(Q)) \leqslant K \operatorname{Mod}(Q),$$

只要 $\overline{Q} \subset D$. 此不等式被称为共形模在拟共形映射的拟不变性.

显然, 1-q. c. 映射是保模映射. 而保模映射是共形映射 (第三章 § 5 定理 1). 因此, 1-q. c. 映射是共形映射. 反过来, 共形映射是 1-q. c. 映射.

在某些讨论中, 拟共形映射定义中的常数 K 的大小并不重要. 这时我们将所讨论的 K 拟共形映射泛称为拟共形映射.

在定义中常数 K 的存在性是本质的. 这意味着在拟共形映射下, 拓扑四边形的模不能无限制地变大或变小.

由定义立即推出:

(i) 若 $f: D \rightarrow G$ 是 K -q. c. 映射, 则 $f^{-1}: G \rightarrow D$ 也是 K -q. c. 映射;

(ii) 若 $f: D \rightarrow G$ 是 K_1 -q. c. 映射, $g: G \rightarrow W$ 是 K_2 -q. c. 映射, 则复合映射 $g \circ f: D \rightarrow W$ 是 $K_1 \cdot K_2$ -q. c. 映射.

容易证明下列定理:

定理 1 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的 K -q. c. 映射, 则对 D 中任意一个二连通域 $B, \overline{B} \subset D$, 都有

$$\frac{1}{K} \operatorname{Mod}(B) \leqslant \operatorname{Mod}(f(B)) \leqslant K \operatorname{Mod}(B).$$

定理的证明作为习题留给读者.

在假定 $f: D \rightarrow G$ 是保向同胚的条件下, 定理 1 的逆定理也成立. 但其证明稍微困难些, 可参见 Lehto 与 Virtanen 的著作^[36].

最后我们指出, 在拟共形映射的定义中没有包括映射光滑性的要求. 事实上, 以后会看到拟共形映射可以是不光滑的, 甚至在有些点处不可微.

§ 2 可微拟共形映射

本节中我们讨论连续可微的拟共形映射, 其目的是在较强的条件下看清它的几何意义以及它所满足的方程的特征.

现在我们先讨论**形式偏导数**.

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是区域 D 内的一个连续可微函数. 这里所谓连续可微是指 f 的实部 u 与虚部 v 作为实变量 (x, y) 的函数有一阶连续偏导数. 这时我们有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (4.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

我们记 $dz = dx + i dy$ 及 $d\bar{z} = dx - i dy$, 那么 (4.1) 式可以改写为

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

我们称 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 为 f 的两个**形式偏导数**.

很容易直接验证, 在展开式

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|)$$

中的两个常数 A 与 B 分别是 $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}$.

令 u 及 v 分别是 f 的实部与虚部, 这时我们有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

因此, 形式偏导数使 Cauchy-Riemann 方程有一个非常简单的形式:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

不难验证, 当 f 是解析函数时, $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$. 此外, 我们一般地有

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

另外,对于两个函数之乘积,形式偏导数与通常的偏导数有相同的计算规则. 同样地,复合函数求偏导数的链规则,对形式偏导数而言也成立. 事实上,若 $f \in C^1(D)$, $g \in C^1(G)$, $f(D) \subset G$, 则

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

这里从形式上看恰好相当于将 f 与 g 分别看作是 z, \bar{z} 及 w, \bar{w} 的函数. 当 f 是解析函数时,链规则有较简单的形式:

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot f',$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \bar{f}'.$$

当 g 是解析函数时,

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = g' \cdot \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f) = g' \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

定理 1 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的 K 拟共形映射,且 $f \in C^1(D)$, 则 f 在 D 内处处满足下列条件:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right).$$

证 设 $z_0 \in D$ 是任意取定的一点. 令

$$A = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0},$$

这时我们有

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|).$$

不失一般性,可以假定 A, B 是非负实数. 这是因为映射

$$z \mapsto e^{i\beta} f(z_0 + e^{i\gamma}(z - z_0))$$

的形式偏导数的模与 f 的形式偏导数的模相等,而通过适当选择 β 与 γ 可使 $e^{i\beta} f(z_0 + e^{i\gamma}(z - z_0))$ 的两个形式偏导数均为非负实数.

取正方形

$$R_\delta = \{x + iy: |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\},$$

使 $\bar{R}_\delta \subset D$. 指定 R_δ 的水平对边为第一组对边. 这时,

$$\text{Mod}(f(R_\delta)) \leq K \text{Mod}(R_\delta) = K.$$

另一方面, 从上述 f 在 z_0 点的展开式可以看出: $f(R_\delta)$ 的第二组对边(即 R_δ 的竖直边的像)之间的距离为

$$2\delta(A + B) + o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

而 $f(R_\delta)$ 的面积为

$$4\delta^2(A^2 - B^2) + o(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0.$$

由 Rengel 不等式有

$$\text{Mod}(f(R_\delta)) \geq \frac{A + B + o(1)}{A - B + o(1)}, \quad \delta \rightarrow 0;$$

也即有

$$\begin{aligned} A + B + o(1) &\leq \text{Mod}(f(R_\delta))(A - B + o(1)) \\ &\leq K(A - B + o(1)), \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 即得 $A + B \leq K(A - B)$. 证毕.

这个定理的逆定理也成立.

定理 2 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的一个同胚, 且连续可微. 若其偏导数在 D 内处处满足

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right), \quad K \geq 1,$$

则 f 是一个 K 拟共形映射.

证 在 D 内任意取一拓扑四边形 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, 使得 $\bar{Q} \subset D$. 只要证明 $\text{Mod}(f(Q)) \leq K \text{Mod}(Q)$ 即可. 设 $\varphi: Q \rightarrow R$ 及 $\psi: f(Q) \rightarrow R'$ 是共形映射, 分别将 Q 及 $f(Q)$ 映成矩形:

$$R = R(0, a, a + bi, bi),$$

$$R' = R(0, a', a' + b'i, b'i).$$

并保持顶点依次对应, 其中 a, b, a', b' 为正实数. 这时 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 $R \rightarrow R'$ 的同胚, 记之为 g . 由链规则有

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \psi'(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (\varphi^{-1})',$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} = \psi'(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \overline{(\varphi^{-1})'},$$

其中

$$w = f \circ \varphi^{-1}(\zeta), \quad z = \varphi^{-1}(\zeta).$$

根据定理的条件, 我们有

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| - \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right| \right).$$

设 $\zeta = \xi + i\eta$ ($\xi, \eta \in \mathbb{R}$), 并在 R 中考虑水平线段 $\eta = \text{常数}$. 这条线段在 g 映射下的像的长度 $\geq a'$, 也即

$$\int_0^a \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| d\xi \geq a' \quad (\eta = \text{常数}).$$

两边再对 η 积分即得

$$\int_0^b d\eta \int_0^a \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| d\xi \geq a'b.$$

由 Fubini 定理,

$$\iint_R \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| d\xi d\eta \geq a'b.$$

应用 Schwarz 不等式, 我们有

$$(a'b)^2 \leq \iint_R \left(\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right|^2 / J_g \right) d\xi d\eta \iint_R J_g d\xi d\eta, \quad (4.2)$$

其中 J_g 是 g 的 Jacobi 行列式.

注意到

$$J_g = \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right|^2 - \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right|^2$$

及

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right|^2 \leq \left(\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right| \right)^2,$$

由 (4.2) 式立即推出

$$\begin{aligned} (a'b)^2 &\leq a'b' \iint_R \left(\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right| \right) / \left(\left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| - \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}} \right| \right) d\xi d\eta \\ &\leq (a'b') \cdot (ab) \cdot K, \end{aligned}$$

于是得

$$\frac{a'}{b'} \leq K \frac{a}{b},$$

也即 $\text{Mod}(f(Q)) \leq K \text{Mod}(Q)$. 证毕.

由定理 1 及定理 2 可以看出, 一个连续可微的同胚 f 为 K 拟共形映射的充要条件是满足

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right).$$

仿射变换

$$z \mapsto az + b\bar{z} \quad (|a| > |b|)$$

是 K 拟共形映射, 其中

$$K = (|a| + |b|) / (|a| - |b|).$$

如果我们进一步假定所讨论的拟共形映射 $f: D \rightarrow G$ 是微分同胚, 那么其 Jacobi 行列式

$$J_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \neq 0.$$

这时, 条件

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right) \quad (4.3)$$

蕴含着 $J_f > 0$ 及 $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| > 0$. 令 $\mu(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$, 则 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

上述关于形式偏导数的不等式(4.3)等价于

$$|\mu(z)| \leq k, \quad k = \frac{K-1}{K+1}.$$

因此, 我们证明了:

定理 3 设 $f: D \rightarrow G$ 是微分同胚. 则 f 是 K 拟共形映射的充要条件是 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad |\mu(z)| \leq k,$$

其中 $k = (K-1)/(K+1)$.

方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z}$ 称为 **Beltrami 方程**.

为什么在拟共形映射的理论中,不限于只讨论可微拟共形映射呢?因为可微拟共形映射族不具有紧性.换句话说,可微 K 拟共形映射的极限可能不再是可微映射.但是,§1中所定义的一般 K 拟共形映射却具有紧性.

§3 K 拟共形映射的紧性

下面的定理可以看成是 Montel 正规性定则到 K -q. c. 映射族的一种推广.

定理 1 设 $\mathcal{F} = \{f_\alpha: \alpha \in A\}$ 是区域 D 上的 K 拟共形映射族. 若 f_α 在 D 内局部一致有界, 则 \mathcal{F} 是正规族, 即其任意一个序列都包含一个局部一致收敛的子序列.

证 显然, 只要证明 \mathcal{F} 的映射 f_α 局部等度连续就足够了.

设 $z_0 \in D$ 为任意一点, 取 $\delta_0 > 0$ 足够小使得

$$\{z: |z - z_0| \leq \delta_0\} \subset D.$$

这时根据假定, 存在一个常数 M , 使得

$$|f_\alpha(z)| \leq M, \quad \forall z: |z - z_0| \leq \delta_0 \text{ 及 } \forall \alpha \in A.$$

考虑环域 $B_\delta = \{z: \delta < |z - z_0| < \delta_0\}$, 其中 $\delta > 0$ 是一个充分小的数. 对于任意一个 $\alpha \in A$, f_α 是 K -q. c. 映射, 这意味着

$$\frac{1}{2\pi K} \ln \frac{\delta_0}{\delta} = \text{Mod}(B_\delta)/K \leq \text{Mod}(f_\alpha(B_\delta)).$$

设 $E_\alpha = \overline{f_\alpha(\Delta_\delta(z_0))}$, 其中 $\Delta_\delta(z_0) = \{z: |z - z_0| < \delta\}$. 又设 ϵ_α 是 E_α 的直径, 且 $w'_\alpha, w''_\alpha \in E_\alpha$ 使得 $|w'_\alpha - w''_\alpha| = \epsilon_\alpha$. 我们用直线段连结 w'_α 及 w''_α , 并在 w''_α 处向外延长该直线段使之与圆周 $\{w: |w| = M\}$ 相交于点 w_α (见图 4.1). 取

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{2}(w_\alpha + w''_\alpha), \quad \delta_\alpha = \frac{1}{2}|w_\alpha - w''_\alpha|,$$

并考虑环域

$$A_\alpha = \{w: \delta_\alpha < |w - \zeta_\alpha| < \delta_\alpha + \epsilon_\alpha\}.$$

设 $G_\alpha = \{w: |w| < M\} \setminus E_\alpha$, 则有

$$\text{Mod}(f_\alpha(B_\delta)) \leq \text{Mod}(G_\alpha),$$

也即有

$$\frac{1}{2\pi K} \ln \frac{\delta_0}{\delta} \leq \text{Mod}(G_\alpha).$$

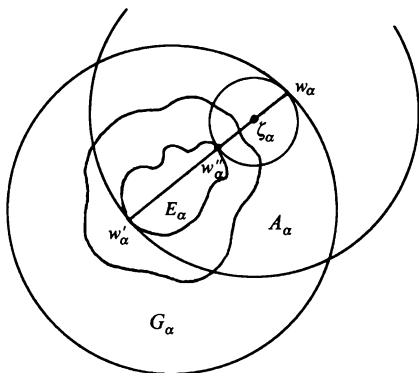


图 4.1

又设 $\Gamma_\alpha = \{\gamma\}$ 是隔离 G_α 的两个边界分支的全体局部可求长闭曲线族. 令 ρ_α 是定义在区域 G_α 上一个函数, 在 A_α 上定义为 $1/2\epsilon_\alpha$, 而在其他点定义为零. 这样, 注意到每一 $\gamma \in \Gamma_\alpha$ 都至少穿越 A_α 的两条边界各两次, 我们有

$$\int_\gamma \rho_\alpha |dw| \geq 1, \quad \forall \gamma \in \Gamma_\alpha.$$

这时, 我们由 $\text{Mod}(G_\alpha) = 1/\lambda(\Gamma_\alpha)$ 及极值长度的定义, 有

$$\begin{aligned} \text{Mod}(G_\alpha) &\leq m_{\rho_\alpha}(G_\alpha) = m_{\rho_\alpha}(A_\alpha) \\ &\leq \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2\delta_\alpha}{\epsilon_\alpha} \right) \leq \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2M}{\epsilon_\alpha} \right). \end{aligned}$$

于是推出

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{K} \ln \frac{\delta_0}{\delta} \leq \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2M}{\epsilon_\alpha} \right),$$

也即

$$\epsilon_\alpha \leq \pi^2 M \left(\frac{1}{K} \ln \frac{\delta_0}{\delta} - \frac{\pi^2}{2} \right)^{-1}.$$

这表明 δ 充分小时, ϵ_α 一致的小. 回顾 ϵ_α 的定义即可看出: 对于 $\Delta_\delta(z_0)$ 中任何两点 z_1 与 z_2 都有

$$|f_a(z_1) - f_a(z_2)| \leq \pi^2 M \left(\frac{1}{K} \ln \frac{\delta_0}{\delta} - \frac{\pi^2}{2} \right)^{-1},$$

也即 f_a 在 D 内局部等度连续. 定理证毕.

这个定理的证明显示了极值长度概念用来估计共形模的作用.

下面的定理表明了 K -q. c. 映射的紧性, 它是第一章 § 2 定理 2 的推广.

定理 2 设 f_n 是区域 D 上的 K -q. c. 映射, $n=1, 2, \dots$. 若 f_n 在 D 内局部一致收敛于 f , 则 f 要么是 D 上的 K -q. c. 映射, 要么是常数.

证 设 f 不是常数. 我们要证明它是 K -q. c. 映射. 首先, 我们证明它是同胚, 用反证法. 设 f 不是同胚, 这时存在三点 z_1, z_2, z_3 使得

$$f(z_1) \neq f(z_2) = f(z_3),$$

而 z_1, z_2, z_3 彼此不同. 用下面的办法导出矛盾: 取一个 Jordan 区域 G , 使得 $\overline{G} \subset D$, 且 G 包含 z_1, z_2, z_3 . 用弧 α 将 z_1 与 z_2 连结起来并使 α 落在 G 内, 再用弧 β 将 z_3 与 ∂G 连结起来, 使 β 在 G 内但不与 α 相交. 这时 $G \setminus \{\alpha \cup \beta\}$ 形成一个二连通域, 记之为 B . 设 $B_n = f_n(B)$, $\alpha_n = f_n(\alpha)$, $\beta_n = f_n(\beta)$. 因为 f_n 为 K -q. c. 映射, 故有

$$\text{Mod}(B) \leq K \text{Mod}(B_n), \quad n = 1, 2, \dots.$$

从直观上, 由于 $f(z_2) = f(z_3)$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, α_n 的一个端点与 β_n 的一个端点距离趋于零. 这时应该导致 $\text{Mod}(B_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 这与上述不等式矛盾. 这里 $\text{Mod}(B_n)$ 趋于零的证明与定理 1 类似, 略去. 读者可以作为习题自行证明.

下面我们证明, 如果 f 是同胚, 则一定是 K -q. c. 映射. 这主要基于拓扑四边形模的连续性.

任意取一个拓扑四边形 Q , $\overline{Q} \subset D$. 在 Q 中取一串拓扑四边形 Q_m ($m=1, 2, \dots$), 使得 Q_m 从 Q 的内部趋向于 Q . 由于 f_n 在 \overline{Q} 上一致趋于 f , 故很容易看出, 对每一个固定的 m , 可以找到一个 n_m 使得 $f_{n_m}(Q_m)$ 的边界上每一点到 $f(Q)$ 的边界的距离 $< 1/m$, 且使得 $f_{n_m}(Q_m)$ 的每个端点到对应顶点的距离也 $< 1/m$. 这样, $f_{n_m}(Q_m)$ 从 $f(Q)$ 的内部趋向于 $f(Q)$. 于是由

$$\text{Mod}(Q_m) \leq K \text{Mod}(f_{n_m}(Q_m)),$$

有 $\text{Mod}(Q) \leq K \text{Mod}(f(Q))$. 证毕.

§ 4 广义导数

并非所有拟共形映射都有经典偏导数,但在下一节中我们将看到,它总有广义偏导数.

为此我们先来讨论广义导数.

设 f, g, h 是区域 D 内定义的复值函数,并假定 $f \in C(D)$, 而 g, h 在 D 内局部 $L_p (p \geq 1)$ 可积. 若存在 $f_n \in C^1(D), n=1, 2, \dots$, 使得 f_n 在 D 内局部一致收敛于 f , 而

$$\left\| \frac{\partial f_n}{\partial z} - g \right\|_{L_p(E)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\left\| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} - h \right\|_{L_p(E)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

其中 E 是 D 中任意一个可测紧子集, 则称 g 与 h 是 f 的 L_p 广义(偏)导数, 并分别将它们记之为 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

显然, 具有连续的经典偏导数的函数一定有 L_p 广义偏导数, 其中 p 是任意大的正数. 但反之不然.

我们将区域 D 内全体具有 L_p 广义偏导数的函数集合记为 $W_p^1(D)$.

许多经典公式可以推广到广义导数的情形.

设 $f \in C^1(D)$, 而 $\bar{G} \subset D$, ∂G 由若干个逐段光滑的 Jordan 闭曲线组成, 记之为 Γ . 我们赋予 Γ 以正的定向(即使 G 落在左侧的定向). 这时, Green 公式的复形式是

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

设 $z_0 \in G$ 是任意给定的一点. 又设 ε 为充分小的正数. 将 Green 公式应用于区域 $G \setminus \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ 及函数 $f(z)/(z - z_0)$, 即得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{G \setminus \{|z-z_0| \leq \epsilon\}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - z_0} dx dy.$$

这里用到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - z_0}, \quad \forall z \in G \setminus \{z_0\}.$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 即得到所谓 **Pompeiu 公式**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - z_0} dx dy,$$

其中 $z_0 \in G$.

现在将 Pompeiu 公式推广到广义导数的情形. 设 $f \in W_p^1(D)$, $p > 2$, 而 Γ 与 G 同前. 则前述的 Pompeiu 公式依然成立.

事实上, 这时存在 $f_n \in C^1(D)$, 使得 f_n 在 \bar{G} 上一致收敛于 f , 且有

$$\left\| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right\|_{L_p(G)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

另一方面

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_n(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}}{z - z_0} dx dy.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 立即推得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - z_0} dx dy.$$

这里我们用到下列事实:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_G \left(\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \cdot (z - z_0)^{-1} dx dy \right| \\ & \leq \left\| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right\|_{L_p(G)} \cdot \| (z - z_0)^{-1} \|_{L_q(G)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 q 使得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 注意到 $p > 2$, 则 $q < 2$, 从而

$$(z - z_0)^{-1} \in L_q(G).$$

作为 Pompeiu 公式的推论, 我们有

命题 若 $f \in W_p^1(D)$, $p > 2$, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 则 f 在 D 内解析.

§ 5 拟共形映射的分析性质

首先, 我们证明拟共形映射线段上的绝对连续性.

设 f 是定义在区域 D 内的复值连续函数. 如果对任意一个矩形

$$R = \{x + iy: a < x < b, c < y < d\}, \quad \bar{R} \subset D,$$

若函数 $f(x + iy)$ 对几乎所有固定的 $x \in (a, b)$ 是 y 的绝对连续函数, 而对几乎所有固定的 $y \in (c, d)$ 又是 x 的绝对连续函数, 则我们称 f 在 D 内**线段上绝对连续**(absolutely continuous on lines), 简称为 f 具有 **ACL 性质**.

我们先回顾函数 $\varphi(t)$ 在区间 (a, b) 上绝对连续的定义: 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在一个 $\delta > 0$, 使得 (a, b) 中任意有限个互不重叠的小区间 (t'_k, t''_k) ($k = 1, \dots, n$), 只要 $\sum_{k=1}^n |t''_k - t'_k| < \delta$, 都有

$$\sum_{k=1}^n |\varphi(t''_k) - \varphi(t'_k)| < \varepsilon,$$

则称 $\varphi(t)$ 在 (a, b) 上**绝对连续**. $\varphi(t)$ 在 (a, b) 上绝对连续的充要条件是 φ 在 (a, b) 内几乎处处可微且对任意 $x, y \in (a, b)$ 都有

$$\int_x^y \varphi'(t) dt = \varphi(y) - \varphi(x).$$

定理 1 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的 K 拟共形映射, 则 f 在 D 内线段上绝对连续.

证 设 $R = \{x + iy: a < x < b, c < y < d\}$ 是任意一个矩形, $\bar{R} \subset D$. 又设

$$R_t = \{x + iy: a < x < b, c < y < t\},$$

并令 $g(t) = \text{mes}(f(R_t))$ (即 $f(R_t)$ 的测度). 显然, $g(t)$ 是递增函数. 所以, 对于几乎所有的 $t \in (c, d)$, g 是可微的. 设 $g'(t_0)$ 存在, $t_0 \in (c, d)$. 下面我们证明 $f(x + it_0)$ 对 x 而言在 (a, b) 上是绝对连续

的.

取 $\delta > 0$, 使得 $t_0 + \delta < d$. 在 (a, b) 中考虑一组互不重叠的小区间 (x'_k, x''_k) ($k=1, \dots, n$). 令

$$R_\delta^{(k)} = \{x + iy: x'_k < x < x''_k, t_0 < y < t_0 + \delta\},$$

并把两条水平边选作第一组对边. 这时,

$$\text{Mod}(R_\delta^{(k)}) = (x''_k - x'_k)/\delta, \quad k = 1, \dots, n.$$

用 $d_\delta^{(k)}$ 表示 $R_\delta^{(k)}$ 的第二组对边所对应的 $f(R_\delta^{(k)})$ 的两边之间的距离. 这时由 Rengel 不等式有

$$\text{Mod}(f(R_\delta^{(k)})) \geq (d_\delta^{(k)})^2 / \text{mes}(f(R_\delta^{(k)})).$$

这样, 由 f 的 K 拟共形性推出

$$\frac{(d_\delta^{(k)})^2}{\text{mes}(f(R_\delta^{(k)}))} \leq K \frac{x''_k - x'_k}{\delta}, \quad k = 1, \dots, n.$$

对 k 求和即有

$$\sum_{k=1}^n \frac{(d_\delta^{(k)})^2}{\text{mes}(f(R_\delta^{(k)}))} \leq \frac{K}{\delta} \sum_{k=1}^n |x''_k - x'_k|.$$

由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n d_\delta^{(k)} \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{(d_\delta^{(k)})^2}{\text{mes}(f(R_\delta^{(k)}))} \sum_{k=1}^n \text{mes}(f(R_\delta^{(k)})) \\ &\leq \frac{K}{\delta} \sum_{k=1}^n |x''_k - x'_k| \cdot [g(t_0 + \delta) - g(t_0)]. \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 并注意到 g 在 t_0 的可微性, 我们有

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^n |f(x''_k + it_0) - f(x'_k + it_0)| \right)^2 \\ &\leq K g'(t_0) \sum_{k=1}^n |x''_k - x'_k|. \end{aligned}$$

这即表明 $f(x + it_0)$ 在 (a, b) 上的绝对连续性.

类似地可以证明 $f(x + iy)$ 对于几乎所有固定的 $x \in (a, b)$ 是 y 的绝对连续函数. 证毕.

由此立即推出

定理 2 拟共形映射几乎处处有偏导数.

拟共形映射作为实变量的二元函数,不仅几乎处处有偏导数,而且几乎处处是可微的.

事实上,任何一个几乎处处有偏导数的同胚都必定是几乎处处可微的.这个定理最早是由 Menchoff 证明的(见文献[45]).这里我们略去这个定理的证明.承认这一结果即得到下列定理.

定理 3 拟共形映射在其定义域内几乎处处可微.

现在我们进一步证明拟共形映射有 L_p 广义偏导数.

引理 1 函数 f 在区域 D 内有 $L_p(p \geq 1)$ 广义偏导数的充要条件是:

- (i) f 具有 ACL 性质,且
- (ii) f 的偏导数局部 L_p 可积.

注 条件(ii)中的偏导数是经典意义下的.从条件(i)中可以看出 f 几乎处处有经典偏导数.

证 必要性 设 f 有 L_p 广义偏导数,要证明 f 满足条件(i)及(ii).记 $g=f_x, h=f_y$ 为 f 的广义偏导数.这时存在 $f_n \in C^1(D)$,使得 f_n 在 D 内局部一致收敛于 f ,且 $(f_n)'_x$ 及 $(f_n)'_y$ 局部依 L_p 范数分别收敛于 g 与 h .在 D 中取一个矩形

$$R = \{x + iy; a < x < b, c < y < d\},$$

$\bar{R} \subset D$.由经典的 Green 公式有

$$\int_{\partial R} f_n(x + iy)dx = - \iint_R (f_n)'_y(x + iy)dx dy.$$

令 $n \rightarrow \infty$,即得

$$\int_{\partial R} f(x + iy)dx = - \iint_R h(x + iy)dx dy.$$

由 Fubini 定理,可将上述重积分化为累次积分.因此,我们有

$$\int_a^b [f(x + ic) - f(x + id)]dx = - \int_a^b dx \int_c^d h(x + iy)dy.$$

这个公式对 D 中一切矩形 R 都成立,特别地,

$$\int_a^\xi [f(x + ic) - f(x + i\eta)]dx = - \int_a^\xi dx \int_c^\eta h(x + iy)dy,$$

其中 $\xi \in (a, b), \eta \in (c, d)$.

在 (c, d) 中任取一个稠密的点序列 $\{\eta_n\}$. 由变上限积分的绝对连续性 & 绝对连续的充要条件可知, 对于每一个 η_n 有一个集合 $E_n \subset [a, b]$, $\text{mes} E_n = b - a$, 且使得

$$f(\xi + i\eta_n) - f(\xi + ic) = \int_c^{\eta_n} h(\xi + iy) dy, \quad \forall \xi \in E_n.$$

命 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, 这时 $\text{mes} E = b - a$, 而对一切 n 都有

$$f(\xi + i\eta_n) - f(\xi + ic) = \int_c^{\eta_n} h(\xi + iy) dy, \quad \forall \xi \in E.$$

由于 $\{\eta_n\}$ 在 (c, d) 上稠密, 所以由上式推出

$$f(\xi + i\eta) - f(\xi + ic) = \int_c^{\eta} h(\xi + iy) dy, \quad \forall \xi \in E,$$

对于一切 $\eta \in (c, d)$ 都成立. 这表明 f 对于几乎所有的 $\xi \in (a, b)$ 是 η 的绝对连续函数.

同理可证 f 对几乎所有的 $\eta \in (c, d)$ 是 ξ 的绝对连续函数. 因此, f 具有 ACL 性质.

从上述证明中还可以看出 f 对 x 或 y 的经典偏导数几乎处处等于 g 或 h , 而 g 与 h 局部 L_p 可积. 因此, f 的经典偏导数局部 L_p 可积.

充分性 假定条件 (i) 与 (ii) 成立, 要证明 $f \in W_p^1(D)$.

在 D 内任意取一个矩形

$$R = \{x + iy: a < x < b, c < y < d\}, \quad \bar{R} \subset D.$$

由 f 的 ACL 性质有

$$f(x + id) - f(x + ic) = \int_c^d f'_y(x + iy) dy, \quad \text{a. e. } x \in (a, b).$$

两边对 x 积分即有

$$\int_a^b [f(x + id) - f(x + ic)] dx = \int_a^b dx \int_c^d f'_y(x + iy) dy,$$

也即

$$\int_{\partial R} f(x + iy) dx = - \iint_R f'_y(x + iy) dx dy.$$

同理可以证明

$$\int_{\partial R} f(x+iy)dy = \iint_R f'_x(x+iy)dx dy.$$

这样,我们证明了当 f 有 ACL 性质时,我们可以使用 Green 公式,只要其经典偏导数局部 p 方可积, $p \geq 1$.

现在我们进一步证明 f 具有 L_p 广义导数. 令

$$\Omega_n(z) = \lambda_n \exp \left\{ 1 / \left(|z|^2 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) \right\}, \quad |z| < \frac{1}{n};$$

而 $|z| \geq 1/n$ 时 $\Omega_n(z) = 0$, 其中 λ_n 是常数, 使得

$$\iint_{\mathbb{C}} \Omega_n(z) dx dy = 1.$$

设 f_n 是 f 与 Ω_n 的卷积, 也即

$$f_n(z) = \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \Omega_n(z - \zeta) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

显然, $f_n \in C^\infty$, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f_n(z)) &= \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Omega_n(z - \zeta) d\xi d\eta \\ &= - \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_n(z - \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

我们考虑矩形

$$R_1 = \{x + iy: a - \delta < x < b + \delta, c - \delta < y < d + \delta\},$$

其中 $\delta > 0$ 并使得 $\bar{R}_1 \subset D$. 显然, $\bar{R} \subset R_1$, 并且当 z 限制在 \bar{R} 内而 $n > 1/\delta$ 时, $\Omega_n(z - \zeta) = 0$ 对于一切 $\zeta \in \partial R_1$. 另外, $f(\zeta) \Omega_n(z - \zeta)$ 对 ζ 而言也具有 ACL 性质, 因而可以应用 Green 公式. 于是有: 当 $n > 1/\delta$ 时,

$$\iint_{R_1} [f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_n(z - \zeta) + f'_\xi(\zeta) \Omega_n(z - \zeta)] d\xi d\eta = 0,$$

其中 $z \in R$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_n(z) &= - \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_n(z - \zeta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\mathbb{C}} f'_\xi(\zeta) \Omega_n(z - \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

由卷积的性质及 $f'_\xi \in L_p(R)$ 可以推出

$$\|(f_n)'_x - f'_x\|_{L_p(R)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

同理可证

$$\|(f_n)'_y - f'_y\|_{L_p(R)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

又由于 f 是连续的(这一点已包含于 ACL 的定义之中),故其卷积分 f_n 局部一致收敛于 f .

这样我们证明了 f 有 L_p 广义导数. 证毕.

现在我们要应用这个引理证明拟共形映射具有 L_2 广义偏导数. 我们已经知道拟共形映射具有 ACL 性质. 因此只要说明其偏导数局部平方可积就够了.

设 f 是区域 D 中的一个 K 拟共形映射,那么它在 D 内是几乎处处可微的. 根据 §2 定理 1 的证明,在可微点偏导数满足不等式

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right).$$

(注 在定理 1 中假定 $f \in C^1(D)$. 但检查整个证明可以发现,不要求 $f \in C^1(D)$,而只要求 f 在一点可微,则在可微点满足上述不等式.) 这样一来, f 的偏导数在 D 内几乎处处满足

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right)^2 \leq K J_f,$$

其中 J_f 是 f 的 Jacobi 行列式;特别地,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 \leq K J_f, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \leq K J_f.$$

因此,只要证明 J_f 局部 L_1 可积即可.

因为我们的讨论是局部的,故不失一般性,可以假定 $f(D)$ 不包含点 ∞ . 根据一个已知结果(见文献[41]),一个几乎处处可微的同胚 f 有下列不等式:

$$\iint_R J_f(z) dx dy \leq \text{mes}(f(R)),$$

其中 R 是区域 D 中的任意一个闭矩形. 但是, $\text{mes}(f(R)) < \infty$. 于是 J_f 是局部 L_1 可积的.

总之,我们证明了

定理 4 K 拟共形映射具有 L_2 广义偏导数,并满足不等式:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right).$$

在上述讨论中,我们用到关于几乎处处可微的同胚 f 的一个不等式

$$\iint_R J_f(z) dx dy \leq \text{mes}(f(R)),$$

其中 R 是 f 定义域中的任意一个矩形. 我们可以进一步证明这个不等式对于拟共形映射而言成立等号.

定理 5 设 $f: D \rightarrow G$ 是拟共形映射, 则对 D 中任意一个可测集 E , 成立等式

$$\iint_E J_f(z) dx dy = \text{mes}(f(E)).$$

这就是说, 对于拟共形映射而言, 可以用 Jacobi 行列式的积分来计算其像集合的测度.

定理表明拟共形映射是二维绝对连续的, 也即它总是将二维零测集变成二维零测集.

证 根据定理 4, f 在 D 中有 L_2 广义偏导数. 于是存在 $f_n \in C^1(D)$ 使 f_n 在 D 中内闭一致趋于 f , 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对任意矩形 $R (\bar{R} \subset D)$ 都有

$$\left\| \frac{\partial f_n}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \right\|_{L^2(R)} \rightarrow 0 \quad \text{且} \quad \left\| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^2(R)} \rightarrow 0.$$

由此推出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\iint_R \left(\left| \frac{\partial f_n}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) dx dy \rightarrow \iint_R J_f(z) dx dy.$$

另外一方面, 由 Green 公式有

$$\int_{\partial R} u_n dv_n = \iint_R \left(\left| \frac{\partial f_n}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) dx dy,$$

其中 u_n 及 v_n 分别是 f_n 的实部与虚部.

现在我们暂时假定 f 在矩形 R 的四条边上作为一元函数是绝对连续的 (后面将根据 f 的 ACL 性质去掉这一假定). 在这一假定之下, 我们可以证明

$$\int_{\partial R} u_n dv_n \rightarrow \int_{\partial R} u dv \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中 u 及 v 分别为 f 的实部和虚部. 事实上, 我们有

$$\int_{\partial R} u_n dv_n - \int_{\partial R} u dv = \int_{\partial R} (u_n - u) dv + \int_{\partial R} u_n d(v_n - v).$$

由于 f_n 在 \bar{R} 上一致趋于 f , 故上述等式右端第一个积分显然趋于零. 对等式右端第二个积分, 我们有估计式

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} u_n d(v_n - v) \right| &= \left| \int_{\partial R} (v - v_n) du_n \right| \\ &\leq \max_{\partial R} |v - v_n| \int_{\partial R} |du_n|. \end{aligned}$$

注意到 u_n 在 ∂R 上一致收敛于 u , 而 u 在 ∂R 上作为一元函数是绝对连续, 立即看出 u_n 在 ∂R 上的全变差是有界的, 从而 $\int_{\partial R} |du_n|$ 是有界的. 这样, 由估计式推出第二个积分也是趋于零的.

于是, 在上述假定下, 我们证明了

$$\int_{\partial R} u dv = \iint_R J_f(z) dx dy,$$

也即

$$\text{mes}(f(R)) = \iint_R J_f(z) dx dy.$$

最后指出, 由 f 的 ACL 性质立即推出最后一个等式对于一切矩形 $R(\bar{R} \subset D)$ 成立, 而无须假定 f 在 ∂R 上的绝对连续性.

显然, 最后等式中的 R 可以换成任意可测集合 E . 证毕.

推论 设 $f: D \rightarrow G$ 是拟共形映射, 则使得 f 的 Jacobi 行列式 $J_f(z) = 0$ 的点 z 的集合测度为零.

证 设 $F = \{z \in D: J_f(z) = 0\}$, 这时

$$\text{mes}(f(F)) = \iint_F J_f(z) dx dy = 0.$$

因为 f^{-1} 也是 K 拟共形映射, 故它将零测集 $f(F)$ 变成零测集, 也即 $\text{mes}(F) = 0$. 证毕.

设 $f: D \rightarrow G$ 是拟共形映射. 由条件

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right)^2 \leqslant K J_f$$

可以看出 $J_f = 0$ 的充要条件是: $\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = 0$. 因此, 上述推论证实了

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0, \quad \text{a. e. } z \in D.$$

令 $\mu(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$, 那么 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

其中 μ 是 D 内的一个可测函数. 由上述不等式推出

$$|\mu(z)| \leqslant k, \quad k = (K - 1)/(K + 1).$$

这样, 我们证明了一个拟共形映射总是 Beltrami 方程的一个 L_2 广义解.

这个命题的逆命题也成立. 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的同胚, 且有 L_2 广义导数, 并满足 Beltrami 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (|\mu| \leqslant k < 1),$$

则 $f: D \rightarrow G$ 是 K 拟共形映射, 其中 $K = (1+k)/(1-k)$.

事实上, 根据引理 1, f 具有 L_2 广义导数意味着它具有 ACL 性质, 且其经典偏导数局部 L_2 可积. 而 f 满足 Beltrami 方程又进一步表明其偏导数几乎处处满足

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leqslant K \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right).$$

注意到 f 的这些性质, 重复 § 2 定理 2 的所有步骤, 即可证明 f 是 K 拟共形映射. 在这个证明中关键的一步是

$$\int_0^a \left| \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi + i\eta) \right| d\xi \geqslant a' \quad (\eta = \text{常数}).$$

现在这个不等式不是对所有 $\eta \in (0, b)$ 成立, 而是对几乎所有的 $\eta \in (0, b)$ 成立; 这由 g 具有 ACL 性质所保证. 证明中的其他步骤则明显依旧成立.

总结前面的讨论, 我们证明了

定理 6 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的同胚, 则 f 是 K 拟共形

映射的充要条件是: f 具有 L_2 广义导数并满足 Beltrami 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (|\mu(z)| \leq k),$$

其中 $k = (K-1)/(K+1)$.

定理 6 为拟共形映射提供了一个与几何定义等价的分析定义: 很多文献中将 Beltrami 方程的 L_2 广义同胚解定义为拟共形映射.

定理 6 中的可测函数 $\mu(z)$ 被称为拟共形映射 f 的复特征 (complex dilatation) 或 Beltrami 系数, 通常用 μ_f 表示. 量

$$K[f] = \frac{1 + \|\mu_f\|}{1 - \|\mu_f\|}$$

称为拟共形映射 f 的最大伸缩商, 其中 $\|\mu_f\|$ 表示 f 的 Beltrami 系数 μ_f 在 $L^\infty(D)$ 中的范数. 而量 $D_f(z) = [1 + |\mu_f(z)|]/[1 - |\mu_f(z)|]$ 称为 f 在 z 点的局部伸缩商.

显然, f 是共形映射的充要条件是 $K[f] = 1$.

设 $f: D \rightarrow G$ 与 $g: D_1 \rightarrow G_1$ 是两个拟共形映射, 且 $G \subset D_1$, 这时由链规则

$$(g \circ f)_z = (g_w \circ f)f_z + (g_{\bar{w}} \circ f)\bar{f}_z,$$

$$(g \circ f)_{\bar{z}} = (g_w \circ f)f_{\bar{z}} + (g_{\bar{w}} \circ f)\bar{f}_{\bar{z}}$$

立即推出, 复合映射 $g \circ f$ 的复特征

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + (\mu_g \circ f)\tau}{1 + \bar{\mu}_f \cdot (\mu_g \circ f)\tau}, \quad \tau = \bar{f}_z/f_z.$$

由上述链规则还可以推出

$$\begin{aligned} & (|(g \circ f)_z| + |(g \circ f)_{\bar{z}}|)^2 \\ & \leq (|g_w \circ f| + |g_{\bar{w}} \circ f|)^2 (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)^2. \end{aligned}$$

再注意到 $J_{g \circ f} = J_g \circ f \cdot J_f$, 于是由上式推出

$$K[g \circ f] \leq K[g] \cdot K[f].$$

设 $f: D \rightarrow G$ 与 $g: D \rightarrow G'$ 是拟共形映射, 其复特征分别是 μ_f 与 μ_g . 有时我们需要知道 $g \circ f^{-1}: G \rightarrow G'$ 的复特征. 直接的计算表明 $g \circ f^{-1}$ 的复特征有下列公式

$$\mu_{g \circ f^{-1}}(f) = \frac{\mu_g - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_g} \cdot \tau^{-1}, \quad \tau = \bar{f}_z/f_z.$$

由此推出

$$\|\mu_{g \circ f^{-1}}\| = \left\| \frac{\mu_g - \mu_f}{1 - \bar{\mu}_f \mu_g} \right\|.$$

后者在 Teichmüller 理论中有特殊意义.

§ 6 存在性定理及其推论

在上节中,我们将拟共形映射归结为 Beltrami 方程的 L_2 广义同胚解. 现在我们面临着一个基本问题是,在任意给定一个复特征 μ 之后,是否总有一个拟共形映射以它为其复特征? 这相当于问 Beltrami 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z}$ 是否总有 L_2 广义同胚解?

为了讨论这个问题,我们需要两个积分算子.

设 ω 是定义在复平面上的复值函数,并有紧致支集,且 L_p 可积, $p > 2$. 我们引入算子

$$T(\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

有时为强调 $T(\omega)$ 在点 z 处的值,我们也把它记做 $T_\omega(z)$.

显然, $T_\omega(z)$ 可以写成

$$T_\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \omega(\zeta + z) \zeta^{-1} d\xi d\eta.$$

因此,当 $\omega \in C_0^\infty$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_\omega(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \omega(\zeta + z) \zeta^{-1} d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \zeta^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta + z) d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} (\zeta - z)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

令 $\Delta_\varepsilon(z)$ 是以 z 为中心、以 ε 为半径的圆盘. 这时在 $\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)$ 上应用 Green 公式于函数

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z},$$

立即推出

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) (\zeta - z)^{-1} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} (\zeta - z)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\omega(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_\omega(z).$$

现在我们计算 $\frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z)$. 类似于前面的推导,

$$\frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} (\zeta - z)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) d\xi d\eta.$$

在 $\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)$ 上应用 Green 公式于函数 $\omega(\zeta)/2\pi i(\zeta - z)$, 我们得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [\omega(\zeta) (\zeta - z)^{-1}] d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} \left[(\zeta - z)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) - \omega(\zeta) (\zeta - z)^{-2} \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 并注意到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

即推出

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} (\zeta - z)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \omega(\zeta) d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,$$

也即

$$\frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\varepsilon(z)} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.$$

我们将上式右端的极限记为

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.$$

这是 Cauchy 主值意义下的奇异积分,即在下述意义的积分:它是在挖去以奇点为心的小圆盘后的积分值在小圆盘半径趋于零时的极限.

上述讨论表明,当 $\omega \in C_0^\infty$ 时上述奇异积分总是存在的,并且

$$\frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi d\eta.$$

令

$$S_\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi d\eta,$$

其中积分是在 Cauchy 主值意义下的奇异积分.综上所述,我们有

引理 1 设 $\omega \in C_0^\infty$, 则对每一点 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_\omega(z) = \omega(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z) = S_\omega(z).$$

作为一个积分算子,有时我们将 $S_\omega(z)$ 记做 $S(\omega)$. 在某些文献中将奇异积分算子 $S(\omega)$ 称为 ω 的 **Hilbert 变换**.

关于算子 $T(\omega)$ 及 $S(\omega)$, 很多书中作了详细的讨论,例如维库阿的《广义解析函数》(人民教育出版社出版,1960). 下面我们只举出一些基本性质,而不加证明.

引理 2 设 ω 在圆 $\{z: |z| < R\}$ 外为零, 且 $\omega \in L_p(\mathbb{C})$, $p > 2$. 则

(i) $|T_\omega(z)| \leq M_1 \|\omega\|_{L_p}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, 其中 M_1 是一常数, 只依赖于 R 及 p .

(ii) $T_\omega(z) = O(1/|z|)$, 当 $z \rightarrow \infty$.

(iii) $|T_\omega(z_1) - T_\omega(z_2)| \leq M_2 \|\omega\|_{L_p} |z_1 - z_2|^\alpha$, 其中 $\alpha = 1 - 2/p$, M_2 是一常数, 只依赖于 p .

引理 3 $S(\omega)$ 是 $L_p(\mathbb{C})$ ($p > 1$) 到自身的有界线性算子, 且其范数

$$\Lambda_p = \sup_{\|\omega\|_{L_p}=1} \{\|S(\omega)\|_{L_p}\}$$

的对数是 $1/p$ 的凸函数, 并且 $\Lambda_2 = 1$.

这里引理 2 的证明是初等的. 而引理 3 的证明是复杂的, 要用到关于奇异积分的 Zygmund-Calderon 的著名不等式及 Riesz-Thorin

凸性定理.

由这些引理很容易推出下面的引理:

引理 4 设 $\omega \in L_p(\mathbb{C})$, $p > 2$, 且有紧致的支集. 则 $T_\omega(z) \in W_p^1$, 且几乎处处有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_\omega(z) = \omega(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} T_\omega(z) = S_\omega(z).$$

证 注意到 $\omega \in L_p(\mathbb{C})$ 且有紧支集的假定, 可知存在 $\omega_n \in C_0^\infty$ 使得

$$\|\omega_n - \omega\|_{L_p} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这样, 由引理 2 有

$$\begin{aligned} |T_{\omega_n}(z) - T_\omega(z)| &= |T_{\omega_n - \omega}(z)| \\ &\leq M_1 \|\omega_n - \omega\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

其中 M_1 为常数, 这表明 $T_{\omega_n}(z)$ 一致收敛于 $T_\omega(z)$.

另一方面, 由引理 3 有

$$\|S_{\omega_n}(z) - S_\omega(z)\|_{L_p} \leq \Lambda_p \|\omega_n - \omega\|_{L_p} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

回顾引理 1, 即又看出

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{\omega_n}(z) - \omega \right\|_{L_p} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \left\| \frac{\partial}{\partial z} T_{\omega_n}(z) - S_\omega(z) \right\|_{L_p} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

这表明 $T_\omega(z) \in W_p^1$, 且

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_\omega = \omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} T_\omega = S_\omega.$$

证毕.

现在我们来讨论 Beltrami 方程 L_2 广义同胚解的存在性问题.

定理 1 设 $\mu(z)$ 是在全平面上有定义的一个有界可测函数, 具有紧的支集 $\text{supp}(\mu)$, 且 $\|\mu\|_\infty < 1$. 则存在一个常数 $p > 2$ 及全平面的一个同胚 $w = f(z) \in W_p^1$, 满足 Beltrami 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

且有

$$\frac{f(z)}{z} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty).$$

证 首先,我们考虑奇异积分方程:

$$\omega - \mu(z)S(\omega) = \mu(z).$$

将算子 $S(\omega)$ 在 L_p 空间中的范数记做 Λ_p . 那么,引理 3 告诉我们, $\ln \Lambda_p$ 是 $1/p$ 的凸函数且 $\Lambda_2 = 1$. 因此,存在某个 $p > 2$ 使得 $\Lambda_p \|\mu\|_\infty < 1$. 取定这样的 p , 对于这个 p 而言 $\omega \mapsto \mu S(\omega) + \mu$ 是 L_p 中的压缩映射. 根据压缩映射原理, 积分方程 $\omega - \mu S(\omega) = \mu$ 在 L_p 中有惟一解.

设 ω 是上述奇异积分方程的解, 并令

$$f(z) = z + T_\omega(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

由引理 4, $f \in W_p^1$, 且 $w = f(z)$ 满足 Beltrami 方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial w}{\partial z}.$$

由于 $T_\omega(z) = O(|z|^{-1})$ ($z \rightarrow \infty$), 故 $f(z)/z = 1 + O(|z|^{-2})$ ($z \rightarrow \infty$), 也即有 $f(z)/z \rightarrow 1$ ($z \rightarrow \infty$).

现在, 我们进一步证明这个解 $w = f(z)$ 是 \mathbb{C} 到自身的一个同胚.

我们先假定 $\mu \in C_0^\infty$. 这时我们考虑方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}(\mu w),$$

也即

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} w.$$

首先, 我们证明这个方程有形如 $w = \exp\{T(\tilde{w})\}$ 的解, 其中 $\tilde{w} \in L_p, p > 2$. 事实上, 奇异积分方程

$$\tilde{w} = \mu S(\tilde{w}) + \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

在 L_p ($p > 2$) 中有解, 其证明完全类似于前面的步骤. 设 \tilde{w} 是上述积分方程的解, 并记 $g(z) = \exp\{T(\tilde{w})\}$. 很容易验证 $w = g(z)$ 满足方程: $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}(\mu w)$. 应用 Green 公式, 我们有

$$\oint_{\Gamma} g(z)(dz + \mu d\bar{z}) = 2i \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z} \mu g \right) dx dy = 0,$$

其中 Γ 为 \mathbb{C} 上任意一条逐段光滑的曲线, 而 D 是它所围的区域. 由此可见积分

$$\int_0^z g(\zeta)(d\zeta + \mu d\bar{\zeta})$$

与路径无关, 并定义一个函数 $\tilde{f}(z)$. 显而易见, $\tilde{f} \in C^1$ 且 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = g$,

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \mu g$, 从而 $w = \tilde{f}(z)$ 是 Beltrami 方程 $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$ 的一个经典解.

下面我们讨论 Beltrami 方程 $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$ 的两个解 $w = f(z)$ 与 $w = \tilde{f}(z)$ 之间的关系. 令 $\omega^* = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}$, 这时 $T(\omega^*)$ 有 L_p 广义导数, 且有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\tilde{f} - T(\omega^*)) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

也即 $\tilde{f} - T(\omega^*)$ 是全平面上的一个全纯函数, 记为 φ . 这样, $\tilde{f} = \varphi + T(\omega^*)$. 注意到 $\mu \in C_0^\infty$, 可知 ω^* 有一个紧的支集. 再由引理 2 不难看出:

$$T(\omega^*) = O(|z|^{-1}) \quad (z \rightarrow \infty),$$

从而有

$$\tilde{f}(z) = \varphi(z) + O(|z|^{-1}) \quad (z \rightarrow \infty).$$

回顾 \tilde{f} 的定义, 并注意到 $g(z) = \exp\{T(\tilde{\omega})\}$ 及 $\tilde{\omega}$ 具有紧支集, 容易看出

$$g(z) = 1 + O(|z|^{-1}) \quad (z \rightarrow \infty),$$

及

$$\tilde{f}(z) = z + O(1) \quad (z \rightarrow \infty).$$

由 \tilde{f} 的两个渐近展开式立即推出

$$\frac{\varphi(z)}{z} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty),$$

也即

$$\varphi(z) = a + z,$$

其中 a 为常数. 总之, 我们证明了

$$\tilde{f}(z) = z + a + T(\omega^*),$$

其中

$$\omega^* \in L_p, \quad p > 2.$$

再将 \tilde{f} 代入 Beltrami 方程, 即得到 ω^* 满足奇异积分方程:

$$\omega^* - \mu S(\omega^*) = \mu.$$

然而由压缩映射原理可知, 这个奇异积分方程的解是惟一的. 因此, ω^* 与 $f = z + T(\omega)$ 中的 ω 是相同的; 也就是说,

$$\tilde{f}(z) = f(z) + a.$$

因此, 我们证明了当 $\mu \in C_0^\infty$ 时, 解 $w = f(z)$ 是经典解, 并且其 Jacobi 行列式

$$\begin{aligned} J_f = J_{\tilde{f}} &= \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} \right|^2 = |g|^2(1 - |\mu|^2) \\ &= |\exp\{T(\tilde{\omega})\}|^2(1 - |\mu|^2) > 0. \end{aligned}$$

换句话说 $w = f(z)$ 在 \mathbb{C} 上是局部单射.

对于光滑的局部单射, 辐角原理成立(请读者作为习题). 对任意一个数 w_0 , 我们考虑一个充分大的圆周 $\Gamma = \{z: |z| = R\}$, 使得 $w = f(z)$ 在 Γ 上及 Γ 外部均取不到 w_0 . 这时在 Γ 内取到 w_0 的次数是

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \text{darg}(f(z) - w_0).$$

取 R 充分大, 使得

$$\frac{|T(\omega)(z)|}{|z - w_0|} < 1, \quad \forall z \in \Gamma.$$

这时, 我们有

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \text{darg}(z - w_0 + T(\omega)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \text{darg}(z - w_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \text{darg}\left(1 + \frac{T(\omega)}{z - w_0}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \text{darg}(z - w_0) = 1. \end{aligned}$$

这就证明了 $f(z)$ 取到 w_0 且仅取一次, 也就是说 $w=f(z)$ 是 \mathbb{C} 到自身的一一映射.

最后我们讨论一般情况, 即假定 μ 为有界可测函数, 有一个紧的支集, 且 $\|\mu\|_\infty < 1$. 这时我们可以用卷积取到 $\mu_n \in C_0^\infty$ 使得

$$\|\mu_n\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty,$$

且对几乎所有的 z ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(z) = \mu(z).$$

设 ω_n 是奇异积分方程

$$\omega_n - \mu_n S(\omega_n) = \mu_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

在 L_p 中的解, 其中 $p > 2$, 使得 $\|\mu\|_\infty \Lambda_p < 1$. 令

$$f_n(z) = z + T(\omega_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

那么 $w=f_n(z)$ 是以 μ_n 为 Beltrami 系数的拟共形映射, 其最大伸缩商为

$$K[f_n] = \frac{1 + \|\mu_n\|_\infty}{1 - \|\mu_n\|_\infty} \leq \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}.$$

这表明每个 f_n 是 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的 K 拟共形映射, 其中

$$K = (1 + \|\mu\|_\infty)/(1 - \|\mu\|_\infty).$$

设 $f=z+T(\omega)$, 其中 ω 是奇异积分方程

$$\omega - \mu S(\omega) = \mu$$

在 $L_p(p > 2)$ 中的解. 我们要证明 f_n 局部一致收敛于 f . 事实上, 我们有

$$\omega_n - \omega = \mu_n S(\omega_n - \omega) + (\mu_n - \mu)[1 + S(\omega)],$$

从而

$$\begin{aligned} \|\omega_n - \omega\|_{L_p} &\leq \|\mu\|_\infty \Lambda_p \|\omega_n - \omega\|_{L_p} \\ &\quad + \|(\mu_n - \mu)[1 + S(\omega)]\|_{L_p}, \end{aligned}$$

或

$$\|\omega_n - \omega\|_{L_p} \leq \|(\mu_n - \mu)[1 + S(\omega)]\|_{L_p} / (1 - \|\mu\|_\infty \Lambda_p).$$

显然, $\|\omega_n - \omega\|_{L_p} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 这蕴含着 f_n 局部一致收敛于 f . 因此, f 要么是 K 拟共形映射, 要么是常数. 但 f 不是常数, 这就证明了 f 是 K 拟共形映射. 定理证毕.

历史的注记 很多人对 Beltrami 方程的同胚解的存在性作过研究. 最早要追溯到 Gauss, 他研究了具有解析系数的 Beltrami 方程. 最早研究具有可测系数的 Beltrami 方程的是 Morrey. 后来 L. Bers, E. N. Bekya, L. V. Ahlfors, 以及 B. Boyarski 等人, 把具有可测系数的 Beltrami 方程与拟共形映射联系在一起, 作了进一步研究.

Beltrami 方程全平面的同胚解的存在性定理为研究拟共形映射的性质提供了重要的基础. 下面, 我们首先证明任意一个拟共形映射可以表示为一个共形映射复合以一个 Beltrami 方程全平面的同胚解.

定理 2 设 $w=g(z)$ 是有界区域 D 上的一个拟共形映射, 其复特征为 $\mu(z)$, 则 $w=g(z)$ 可以表示成 $g(z)=\varphi(f(z))$, 其中 f 是 Beltrami 方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \tilde{\mu}(z) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

的形如 $f=z+T_{\omega}(z)$ 的解 ($\omega \in L_p, p>2$), 而

$$\tilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus D, \end{cases}$$

这里的 $\varphi(w)$ 是 $f(D)$ 上的一个共形映射.

证 首先, 我们要指出形式偏导数的链规则关于广义导数也成立. 更确切地说, 若 f 是区域 D 到 D' 的同胚, 且有 L_2 广义偏导数; 又设 g 是区域 $G \supset D'$ 内的函数, 有 L_2 广义偏导数, 则 $g \circ f$ 在 D 内有 L_1 广义偏导数, 且有

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

这个结论的证明是容易的, 只要依据广义偏导数的定义, 用光滑函数逼近 f 与 g 即可.

在上述公式中当 $g=f^{-1}$ 时, 我们有

$$1 = \frac{\partial f^{-1}}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z},$$

$$0 = \frac{\partial f^{-1}}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

由此推得

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial w} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} / J_f, \quad \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}} = - \frac{\partial f}{\partial z} / J_f,$$

其中 J_f 是 f 的 Jacobi 行列式.

现在我们假定 f 与 g 就是定理给定的映射. 那么, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(g \circ f^{-1}) &= \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial \bar{w}} \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \left[\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}} + \mu(z) \frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial \bar{w}} \right], \end{aligned}$$

其中 $z = f^{-1}(w)$. 由前面关于 $\frac{\partial f^{-1}}{\partial w}$ 及 $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{w}}$ 的计算公式及 f 所满足的 Beltrami 方程立即推出

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(g \circ f^{-1}) \equiv 0, \quad \forall w \in f(D).$$

可见 $g \circ f^{-1}$ 是 $f(D)$ 内的解析函数^①. 再注意到 f 与 g 均为一一映射, 可知 $g \circ f^{-1}$ 是 $f(D)$ 上的一个共形映射. 证毕.

由定理 2 立即推出下列定理:

定理 3 设 $g: D \rightarrow G$ 及 $h: D \rightarrow G'$ 是两个拟共形映射, 且有相同的复特征 $\mu(z)$, 则 $g \circ h^{-1}$ 是一个共形映射.

由定理 1 与定理 2 还可以进一步推出拟共形映射的许多其他性质.

我们知道, 在拟共形映射的分析定义中, 要求一个拟共形映射是某个 Beltrami 方程的 L_2 广义解. 但定理 1 及定理 2 进一步告诉我们, 一个拟共形映射事实上总有 L_p (某个 $p > 2$) 的广义导数.

定理 4 设 $g: D \rightarrow G$ 是区域 D 上的 K 拟共形映射, 则 $g \in$

① 虽然这里 $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(g \circ f^{-1})$ 是广义导数, 但 $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(g \circ f^{-1}) \equiv 0$ 仍蕴含着 $g \circ f^{-1}$ 的解析

性. 事实上, 由 Green 公式可知 $\int g \circ f^{-1} dw$ 与路径无关, 而使用 Green 公式的合理性由被积函数的 ACL 性质所保证.

$W_p^1(D)$, 其中 p 是某个大于 2 的数, 只依赖于 K .

证 本定理结论只涉及 g 的局部性质, 故不失一般性假定 D 为有界域. 又设 $w=g(z)$ 满足 Beltrami 方程:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad |\mu(z)| \leq k < 1,$$

其中 $k=(K-1)/(K+1)$. 我们根据 k 可以取到 $p>2$ 使得 $k\Lambda_p<1$, 其中 Λ_p 为算子 $S(\omega)$ 在 L_p 中的范数. 这样, 由定理 2 可知 $g(z)$ 能表成

$$g(z) = \varphi(f(z)), \quad f(z) = z + T_\omega(z),$$

其中 φ 是解析函数, 而 $\omega \in L_p, p>2$. 由此立即推出 $g \in W_p^1(D), p>2$. 证毕.

根据上述的讨论, 并注意到 $T_\omega(z)$ 的 Hölder 连续性(本节引理 2), 我们很容易推出拟共形映射的 Hölder 连续性.

定理 5 设 $g: D \rightarrow G$ 是区域 D 上的 K 拟共形映射. 则在区域 D 内的任意一个紧子集 E 内, g 满足下列不等式:

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^\alpha, \quad \forall z_1, z_2 \in E,$$

其中 M 与 α 为常数, $0 < \alpha < 1$, α 只依赖于 K .

这个定理不仅可以通过上述方式证明, 而且还可以通过讨论二连通域的共形模在拟共形映射下的拟不变性(§ 1 定理 1)证明, 并且可进一步说明可取 $\alpha=1/K$.

定理 2 告诉我们: 任何一个拟共形映射都可以表成一个全平面的拟共形同胚复合以适当的共形映射. 这一点使得我们可以将共形映射的某些性质, 如 Jordan 区域间的共形映射可以同胚延拓至边界以及 Jordan 区域间的共形映射由三个不同边界点的边界值惟一确定等, 推广到拟共形映射(见本章末习题).

§ 7 拟共形映射的 Riemann 映射定理

在证明本节主要定理之前, 我们先指出下列引理, 它可以由形式导数的链规则直接计算证实.

引理 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 上的拟共形映射. 若 φ 是 $f(D)$ 上

的共形映射, 则 $g = \varphi \circ f$ 的复特征与 f 的复特征相等; 若 ψ 是某区域 D' 到区域 D 的共形映射, 则 $g = f \circ \psi$ 在 D' 中的复特征为 $\mu(\psi(\zeta))\overline{\psi'(\zeta)}/\psi'(\zeta)$, 其中 μ 是 f 的复特征.

定理 1 设 D 为 \mathbb{C} 中的一个单连通域, 其边界点多于一点. 又设 $\mu(z)$ 为 D 内有界可测函数, 且 $\|\mu\|_{\infty} < 1$. 则存在一个拟共形映射 $g: D \rightarrow \Delta$ 将区域 D 变成单位圆 Δ , 且以 μ 为其复特征.

证 根据 Riemann 映射定理, 存在一个共形映射 ψ 将 Δ 映为 D . 令

$$\mu^*(\zeta) = \mu(\psi(\zeta)) \overline{\psi'(\zeta)}/\psi'(\zeta), \quad \zeta \in \Delta,$$

则 μ^* 为 Δ 内有界可测函数, 且 $\|\mu^*\|_{\infty} < 1$. 根据 § 6 定理 1, 存在一个拟共形映射 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 在 Δ 内的复特征为 μ^* , 而在 Δ 外的复特征为零, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 1$. 注意到 $f(\Delta)$ 为一个 Jordan 区域, 存在一个共形映射 $\varphi: f(\Delta) \rightarrow \Delta$. 那么, $g = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ 是一拟共形映射, 将 D 映成 Δ . 根据前面的引理, g 与 $f \circ \psi^{-1}$ 有相同的复特征, 而 $f \circ \psi^{-1}$ 的复特征是

$$\mu^*(\psi^{-1}(z)) \overline{(\psi^{-1})'(z)}/(\psi^{-1})'(z), \quad z \in D.$$

回顾 μ^* 的定义, 立即看出 $f \circ \psi^{-1}$ 的复特征是 $\mu(z)$, 从而 g 的复特征也是如此. 证毕.

上述定理可以推广到全平面的情况.

定理 2 设 $\mu(z)$ 为复平面 \mathbb{C} 上的有界可测函数, 且 $\|\mu\|_{\infty} < 1$, 则存在一个拟共形映射 $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 以 $\mu(z)$ 为其复特征.

证 令 $\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$, 其中

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \begin{cases} \mu(z), & z \in \Delta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \mu_2(z) &= \begin{cases} 0, & z \in \Delta, \\ \mu(z), & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

作变换 $\zeta = 1/z$, 并考虑

$$\tilde{\mu}_2(\zeta) = \mu_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) \zeta^2 / \bar{\zeta}^2, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

根据 § 6 定理 1, 存在一个拟共形映射 $\tilde{f}_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 以 $\tilde{\mu}_2(\zeta)$ 为其复特

征, 且有 $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{f}_2(\zeta)/\zeta = 1$. 不失一般性, 我们可以假定 $\tilde{f}_2(0) = 0$. 令 $f_2(z) = \tilde{f}_2\left(\frac{1}{z}\right)$, 那么 $f_2(z)$ 是 \mathbb{C} 上的拟共形映射, 并且其复特征为 $\mu_2(z)$. 注意到 $\mu_2(z)$ 在 Δ 内为 0, 可知 $f_2(z)$ 在 Δ 内是共形映射. 令 $D = f_2(\Delta)$, $\phi(\zeta) = f_2^{-1}(\zeta)$, 并考虑

$$\tilde{\mu}_1(\zeta) = \begin{cases} \mu_1(\phi(\zeta)) \overline{\psi'(\zeta)}/\psi'(\zeta), & \zeta \in D, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

这时根据 § 6 定理 1, 存在一个拟共形映射 $f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 以 $\tilde{\mu}_1$ 为其复特征, 且 $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f_1(\zeta)/\zeta = 1$.

最后, 复合映射 $f_1 \circ f_2$ 就是我们所要的映射. 事实上, f_1 在 D 外是共形映射, 因而 $f_1 \circ f_2$ 在 $f_2^{-1}(D) = \Delta$ 外与 f_2 有相同的复特征, 而 f_2 的复特征在 Δ 外恰好是 $\mu(z)$. 再注意到 $f_2(z)$ 在 Δ 内是共形映射, 而 $f_1(\zeta)$ 在 $D = f_2(\Delta)$ 内的复特征为 $\tilde{\mu}_1(\zeta)$, 故 $f_1 \circ f_2$ 的复特征在 Δ 内为

$$\tilde{\mu}_1(f_2(z)) \overline{f_2'(z)}/f_2'(z).$$

很容易根据 $\tilde{\mu}_1$ 的定义推出上式等于 $\mu_1(z)$, 也即 $f_1 \circ f_2$ 在 Δ 内的复特征为 $\mu(z)$. 证毕.

应当指出, 具有指定复特征的全平面到自身的拟共形映射在限定保持 $0, 1, \infty$ 不动的条件下是惟一的.

在 Teichmüller 理论中, 拟共形映射对参数的连续依赖性定理有重要价值. 下面的定理属于 L. V. Ahlfors 与 L. Bers.

定理 3 设 $\mu = \mu(z, t)$ 是定义在 $\mathbb{C} \times \Delta$ 上 (或 $\mathbb{C} \times [0, 1]$ 上) 的有界可测函数, 且

$$|\mu(z, t)| \leq k < 1, \quad \text{a.e. } z \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \Delta (\text{或 } [0, 1]),$$

其中 k 为常数. 此外, 假定对几乎所有固定的 $z \in \mathbb{C}$, $\mu(z, t)$ 是 $t \in \Delta$ 的全纯函数 (或 $[0, 1]$ 上连续函数). 又设对于任意固定的 t , $w = f(z, t)$ 是 \mathbb{C} 到自身的拟共形映射, 其复特征为 $\mu(z, t)$, 且保持 $0, 1$ 与 ∞ 不动. 则对于任意固定的 $z \in \mathbb{C}$, $w = f(z, t)$ 是 $t \in \Delta$ 的全纯函数 (或 $[0, 1]$ 上的连续函数).

证明从略.

§ 8 等温坐标的存在性

本节讲述拟共形映射的一个应用：等温坐标的存在性问题。

设 S 是一个光滑可定向二维流形, S 上有一个光滑度量 ds^2 , 其局部表示为

$$ds^2 = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2, \\ (E > 0, EG - F^2 > 0). \quad (4.4)$$

我们寻求一种新的参数 (u, v) 使得这个度量在该参数表示下成为保角度量:

$$ds^2 = \rho(u, v)(du^2 + dv^2),$$

此种参数称做**等温坐标**. 等温坐标的存在性问题本质上就是 Beltrami 方程同胚解的存在性问题.

假定上述局部表示在区域 D 内成立. 由于度量的光滑性, 不失一般性可假定在 D 内有

$$E(x, y) \geq c > 0, \quad (EG - F^2)|_{(x, y)} \geq d > 0, \quad (4.5)$$

其中 c 与 d 为常数.

令 $dx + idy = dz$, 那么上述度量可以写成下列形式:

$$ds^2 = \tilde{E}(z) |dz + \mu \bar{dz}|^2, \quad (4.6)$$

其中 $\mu = \mu(z)$; 条件 (4.5) 蕴含着 $|\mu(z)| \leq k < 1$, 这里 k 是由 (4.5) 式中 c 与 d 决定的常数.

根据 Beltrami 方程同胚解的存在性定理, 存在 $w = f(z)$ ($z \in D$) 将区域 D 同胚映为区域 G , 且满足

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad z \in D.$$

这样, $|dw|^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 |dz + \mu \bar{dz}|^2$. 从 § 6 定理 1 的证明中, 可以看出当 μ 光滑时, Beltrami 方程的广义同胚解是经典解, 并且使得

$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \neq 0$. 这样由 (4.6) 式立即推出度量 ds^2 可表示成:

$$ds^2 = \rho(w) |dw|^2.$$

设 w 的实部为 u , 虚部为 v , 那么 G 中 (u, v) 即为 ds^2 的等温坐标.

习 题

1. 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到 G 的 K -q. c. 映射. 证明对于任意一个二连通域 $B, \bar{B} \subset D$, 都有

$$\frac{1}{K} \text{Mod}(B) \leq \text{Mod}(f(B)) \leq K \text{Mod}(B).$$

2. 利用第 1 题的结果证明 K 拟共形映射的 Hölder 连续性, 其 Hölder 指数 $\alpha = 1/K$.

3. 利用形式偏导数的链规则, 证明 § 7 中的引理.

4. 设 $f_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是拟共形映射, $j=1, 2$. 又设 f_1 与 f_2 有相同的复特征, 且 $f_1(0)=f_2(0), f_1(1)=f_2(1)$. 那么, $f_1 \equiv f_2$.

5. 设 $f: D \rightarrow G$ 是两个 Jordan 区域之间的拟共形映射, 证明 f 可以同胚延拓至区域的边界. (此命题告诉我们: Jordan 区域间的拟共形映射可以谈论其边界值.)

6. 设 $f_j: D \rightarrow G$ 是两个 Jordan 区域之间的拟共形映射, $j=1, 2$. 又设 f_1 与 f_2 在 D 内有相同复特征, 且在三个边界点上取相同边界值, 则 $f_1 \equiv f_2$.

7. 证明不存在拟共形映射将单位圆 Δ 变成全平面.

* 8. 设 $\mu(z)$ 是单位圆 Δ 内给定的有界可测函数, 且在 Δ 的任意紧子集 E 内满足

$$|\mu(z)| \leq k_E < 1, \quad \forall z \in E,$$

其中 k_E 是依赖于 E 的常数. 证明存在一个映射 $f: \Delta \rightarrow f(\Delta)$, 在 Δ 的任意一个相对紧的子区域 D 内是拟共形映射, 且以给定的 $\mu(z)$ 为其复特征.

9. 设 $\mu(z)$ 为上半平面 \mathbb{H} 内的有界可测函数, 且 $\|\mu\|_\infty < 1$. 将 μ 按下列方式延拓至全平面有定义:

$$\tilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{H}, \\ \overline{\mu(\bar{z})}, & z \in \mathbb{H}^*. \end{cases}$$

令 $f_\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是拟共形映射, 其复特征为 $\tilde{\mu}$, 且保持 0 与 1 不动, 则 f_μ 保持实轴不动, 且将 \mathbb{H} 变成自身.

10. 设 μ 为上半平面 \mathbb{H} 内的有界可测函数, 且 $\|\mu\|_\infty < 1$. 将 μ 按下列方式延拓到全平面有定义:

$$\tilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{H}, \\ 0, & z \in \mathbb{H}^*. \end{cases}$$

令 $f^\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是拟共形映射, 其复特征为 $\tilde{\mu}$, 且保持 0 与 1 不动, 则 f^μ 在 \mathbb{H} 中复特征为 μ , 而在 \mathbb{H}^* 为共形映射. 试证明:

(i) 存在一共形映射 $\varphi: f^\mu(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}$ 使得 $f_\mu(z) = \varphi \circ f^\mu(z)$, $z \in \mathbb{H}$.

(ii) $f_\mu(z) = \varphi \circ \psi^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, 其中 ψ 是 $f^\mu(\mathbb{H}^*)$ 到 \mathbb{H} 的共形映射.

11. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是局部微分同胚. 记 Γ_R 为 $\Delta_R = \{z: |z| < R\}$ 的边界, 并假定在 Γ_R 上 $f(z) \neq w_0$. 试证明 f 在 Δ_R 内取到 w_0 的次数为

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \text{darg}(f(z) - w_0).$$

12. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续可微函数, 并假定 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 在 \mathbb{C} 中有紧的支集, 且有渐近式:

$$\begin{aligned} f(z) &= O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (z \rightarrow \infty), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) &= O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad (z \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

试证明

$$\iint_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 dx dy = \iint_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dx dy.$$

(提示: 利用

$$\iint_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{|z| \leq R} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 dx dy$$

和 Green 公式, 并将 $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2$ 写成 $\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)}$.)

13. 由上题推出 $\Lambda_2 = 1$, 其中 Λ_2 是算子 $S(w)$ 在 L_2 中的范数.

14. 令

$$\tilde{T}_w(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{z \omega(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

证明: $\tilde{T}_w(z) = T_w(z) - T_w(0)$, 并证明 Beltrami 方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\|\mu\|_\infty < 1), \quad z \in \Delta$$

有形如 $w = z + \tilde{T}_w(z)$ 的解.

第五章 Riemann 曲面的基本概念

在这一章中,我们将给出 Riemann 曲面的定义,并讨论 Riemann 曲面上解析函数与全纯映射的一般性质,讨论调和微分与半纯微分以及它们之间的关系,证明半纯函数和半纯微分的存在性.

§ 1 Riemann 曲面的定义

粗略地说,Riemann 曲面是这样一种曲面,它所附加的某种数学结构,使得我们得以在它上面谈论解析函数和全纯映射.因此,我们可以认为 Riemann 曲面是复平面上的区域的某种推广.

Riemann 曲面的定义如下:

定义 1 设 S 是一个连通的 Hausdorff 空间,且具有一个满足下列要求的集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$:

(i) 每个 U_α 是 S 的一个开集,且全体 U_α 形成 S 的一个覆盖,即

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha;$$

(ii) 每个 φ_α 是 U_α 到复平面中某开集 D_α 的一个同胚;

(iii) 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则

$$f_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是一个解析映射(见图 5.1).

这时我们称 S 是一个 **Riemann 曲面**,并称 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为 S 的一个 **局部坐标卡**(或**参数卡**);称 $z = \varphi_\alpha(p)$ ($p \in U_\alpha$) 为 p 点的**局部坐标**,或**局部(单值化)参数**;称 $f_{\alpha\beta}$ 为**参数转换函数**.

显然,与一般流形不同,对于 Riemann 曲面而言,参数转换函数总是共形的.

熟悉流形概念的读者会立即看出:一个 Riemann 曲面总是一个实二维解析流形.然而,参数转换函数的共形性又使得 Riemann 曲

面强于一般实二维解析流形.

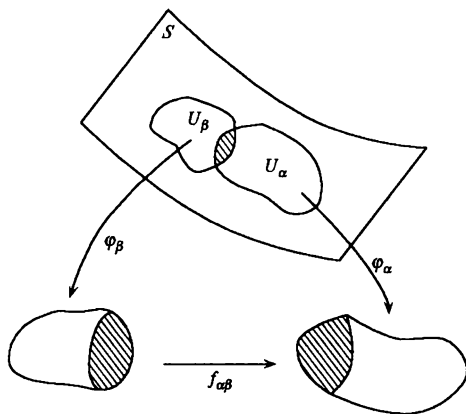


图 5.1

由参数转换函数 $f_{\alpha\beta}$ 的共形性可知, 它的 Jacobi 行列式

$$J_{f_{\alpha\beta}} = |f'_{\alpha\beta}|^2 > 0.$$

由此可见, 一个 Riemann 曲面总是可定向的. Riemann 曲面的局部单值化参数为曲面提供了一个自然定向.

例 1 复平面 \mathbb{C} 中的任何一个区域 D 都是一个 Riemann 曲面, 其坐标卡集合可以取成

$$\{(D, \text{id})\},$$

其中 id 是区域 D 的恒同映射.

例 2 Riemann 球面 (扩充复平面) $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是一个 Riemann 曲面, 其坐标卡集合可取为

$$\{(\mathbb{C}, \varphi_1), (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi_2)\},$$

其中 φ_1 是 \mathbb{C} 的恒同映射, 而 φ_2 是 $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上的倒数映射: $z \mapsto 1/z$.

这时很容易验证, 参数转换函数

$$f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} \quad (\alpha \neq \beta)$$

是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 到自身的共形映射: $z \mapsto 1/z$.

例 3 一维复射影空间 $p_1\mathbb{C}$.

根据定义, $p_1\mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim$, 其中等价关系 \sim 定义如下: \mathbb{C}^2

中两个非零元素 (z_1, z_2) 与 (z'_1, z'_2) 被称为等价的, 当且仅当存在一个数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得

$$z_1 = \lambda z'_1, \quad z_2 = \lambda z'_2.$$

跟通常一样, 将 (z_1, z_2) 的等价类记为 $[z_1, z_2]$. 现在, 我们来证明 $p_1\mathbb{C}$ 是一个 Riemann 曲面.

令

$$U_1 = \{[1, z_2]: z_2 \in \mathbb{C}\},$$

$$U_2 = \{[z_1, 1]: z_1 \in \mathbb{C}\};$$

并定义

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}, [1, z_2] \mapsto z_2,$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}, [z_1, 1] \mapsto z_1.$$

这时 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha=1, 2\}$ 就形成了 $p_1\mathbb{C}$ 的一个局部坐标卡集合.

显然, 我们有

$$U_1 \cap U_2 = \{[z, 1]: z \neq 0\}.$$

那么, $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 根据定义, 对于任意一点 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi_2^{-1}(z) = [z, 1]$. 但是

$$[z, 1] = \left[1, \frac{1}{z}\right],$$

故有

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

即 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 在 $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 上是共形映射. 同理可以证明 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 在 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 也是共形映射.

总之, $p_1\mathbb{C}$ 在上述参数卡集合下是一个 Riemann 曲面.

例 4 环面.

设有两个非零复数 ω_1 与 ω_2 , 且满足

$$\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

这就是说, ω_1 与 ω_2 作为向量在复平面上不共线(图 5.2). 我们考虑一切平移变换

$$z \mapsto z + m\omega_1 + n\omega_2, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

所形成的群 Λ . 我们称 \mathbb{C} 中两点 z_1 与 z_2 是关于 Λ 等价的, 如果存在

一个变换 $\gamma \in \Delta$ 使得 $z_2 = \gamma(z_1)$, 也就是说, 存在 $m \in \mathbb{Z}$ 及 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $z_2 = z_1 + m\omega_1 + n\omega_2$. 我们将这种等价关系记做 \sim . 那么商空间

$$\mathbb{C} / \sim = \mathbb{C} / \Delta$$

就是一个环面, 而这个环面在从 \mathbb{C} 中获得局部参数下形成一个 Riemann 曲面.

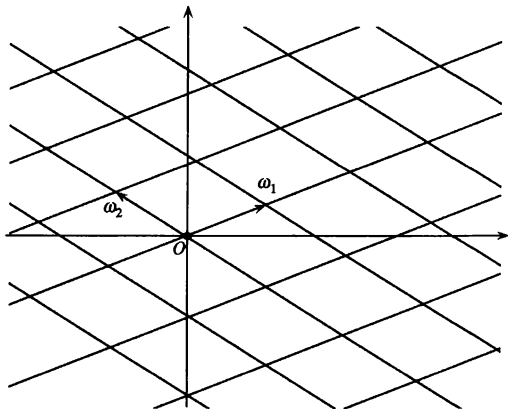


图 5.2

我们将点 z 的等价类记做 $[z]$, 并将投影映射 $z \mapsto [z]$ 记做 $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / \sim$. 考虑平行四边形

$$D = \{z = s\omega_1 + t\omega_2; 0 \leq s < 1, 0 \leq t < 1\}.$$

那么, D 具有下列性质:

- (i) π 在 D 上是一单射;
- (ii) π 在 \bar{D} 上是一满射.

这就是说, \mathbb{C} / \sim 的每一点都可在 \bar{D} 中找到代表元, 而 D 中任意两点均关于群 Δ 不等价. 而在 D 的边界上可能有多个点等价. 我们把 D 称为 Δ 的一个基本域.

从拓扑上看, \mathbb{C} / \sim 可以看作是由基本域 D 的每一边界点与其对边的等价点粘合的结果. 因而, \mathbb{C} / \sim 是一个环面.

另外, 很容易看出, π 是局部一一映射. 更确切地说, 存在一个正数 δ , 使得投影映射 π 在任意一点 $w \in \mathbb{C}$ 的 δ 邻域:

$$V_w = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \delta\}$$

内是一一映射.

令 $U_w = \pi(V_w)$, $\varphi_w = (\pi|_{V_w})^{-1}$. 那么 $\{(U_w, \varphi_w)\}_{w \in \mathbb{C}}$ 构成 \mathbb{C}/\sim 的一个局部坐标卡集合, 而其参数转换函数显然是平移变换, 因而是共形映射. 这就证明了 \mathbb{C}/\sim 是一个 Riemann 曲面.

例 5 设 S 为一光滑可定向二维流形, 具有光滑 Riemann 度量 $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$. 若 ds^2 有等温坐标, 则 S 在 ds^2 的等温坐标下构成 Riemann 曲面. 证明留给读者.

回顾上一章 § 8 中关于等温坐标的结果可知, 具有光滑 Riemann 度量的可定向二维流形一般可‘做成’Riemann 曲面.

定义 2 设 S 上有两个局部坐标卡集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 及 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 分别满足定义 1 中的要求. 如果它们满足下列条件, 则称它们彼此等价: 若 $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, 则

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$$

是共形映射.

我们认为两个彼此等价的局部坐标卡集合定义的 Riemann 曲面是同一 Riemann 曲面.

显然, 我们可以从 S 上的一个局部坐标卡集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 出发, 将一切与之等价的局部坐标卡集合合并在一起就形成了一个极大的局部坐标卡集合.

我们称 S 上的一个极大的局部坐标卡集合为 S 上的一个复结构.

不同的复结构在 S 上定义了不同的 Riemann 曲面.

§ 2 Riemann 曲面上的解析函数与映射

Riemann 曲面上的复结构使得我们在 Riemann 曲面上定义解析函数成为可能.

定义 1 设 S 是一个 Riemann 曲面, 其局部坐标卡集合是 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. 我们称

$$f: S \rightarrow \mathbb{C}$$

是一个全纯函数, 如果对于每一个局部坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 都是 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上的一个全纯函数 (见图 5.3).

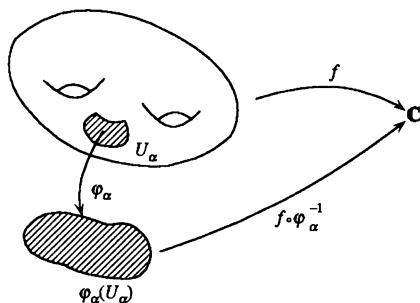


图 5.3

这里 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为 f 的一个局部表示.

若函数 $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ 在 S 的一个局部坐标卡集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 下, 其每一个局部表示都是解析的, 那么在与之等价的任何一个局部坐标卡集合下, 其每一个局部表示也是解析的. 因此, 函数的解析性只取决于 S 上的复结构, 而与局部坐标卡集合的选取无关.

类似于定义 1, 我们可以定义 Riemann 曲面 S 上的半纯函数 $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, 只要 f 的每个局部表示 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上是半纯函数即可.

这里我们应当提醒初学的读者: 在一般 Riemann 曲面上谈论解析函数的导数是毫无意义的. 这是因为一个解析函数的局部表示的导数的值依赖于局部参数的选取. 一般说来, 我们无法定义 Riemann 曲面上解析函数导数的值.

很容易直接验证, 一个半纯函数的局部表示中, 零点及极点的阶不依赖于局部坐标的选择. 因此, 我们谈论 Riemann 曲面上半纯函数零点及极点的阶是有意义的.

定义 2 设 S 及 S^1 是两个 Riemann 曲面, 分别以 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 及 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 为其局部坐标卡集合. 我们称 $f: S \rightarrow S^1$ 为全纯映射, 如果对于每一对局部坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (V_β, ψ_β) , 只要

$$U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset,$$

映射

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \textcircled{1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \mathbb{C}$$

是全纯的.

这里 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 称为 f 的局部表示.

很容易看出, S 上的半纯函数就是一个 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射.

我们知道, 区域间非常数的解析映射总是一个开映射, 即将开集映为开集. 这一特征对 Riemann 曲面间的全纯映射也成立.

今后我们把常值映射称为平凡映射.

命题 1 Riemann 曲面间非平凡的全纯映射是开映射.

证 设 $f: S \rightarrow S^1$ 是 Riemann 曲面 S 到 S^1 的非平凡全纯映射. 首先, 我们证明 f 在 S 的任何一个开的邻域内都是非平凡的. 用反证法. 假定 f 在一点 p_0 的邻域 U_0 内是平凡映射, 即

$$f(p) \equiv q_0, \quad \forall p \in U_0.$$

在 S 上取一点 $p_1, f(p_1) \neq q_0$. 由 S 的连通性可知, 存在一条曲线弧 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$, 使得 $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1$. 因为 f 在 p_0 的一个邻域内是常值的, 故存在一个 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(\gamma(t)) \equiv q_0, \quad \forall t \in [0, \delta_0].$$

令

$$\eta = \sup\{\delta \in [0, 1]: f(\gamma(t)) \equiv q_0, \quad \forall t \in [0, \delta]\},$$

则 $\delta_0 \leq \eta < 1$. 设 $p_* = \gamma(\eta)$, 并取适当坐标卡 (U, φ) 及 (V, ψ) 使得 $p_* \in U, q_0 \in V$. 不失一般性, 可以假定 U 是连通的且充分小, 使得 $f(U) \subset V$. 这样, f 的局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 到 $\psi(V)$ 的一个全纯映射. 这个映射在 $\varphi(U)$ 的一条弧上取常值 $\psi(q_0)$, 由解析函数的惟一性定理, 它在 $\varphi(U)$ 上是常值的. 这样, 我们证明了 f 在 U 内是常值映射. 这与 η 的定义矛盾.

以上我们证明了 f 在每一个局部邻域都是非平凡的. 因此, f 的任意一个局部表示都是非平凡的, 从而是局部开映射. 局部开映射整体上自然也是开映射. 证毕.

基于非平凡全纯映射是开映射这一命题, 我们给出下面的定理 1,

① 更加确切地说, 这里应该是 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))$ 上的限制.

它包含代数基本定理为其特例:

定理 1 设 $f: S \rightarrow S^1$ 是 Riemann 曲面 S 到 S^1 的非平凡的全纯映射. 若 S 是紧的, 则 f 必为满射, 且 S^1 也是紧的.

证 因为 S 是开集而 f 是开映射, 故 $f(S)$ 是开集. 若 S 是紧的, 则由 f 的连续性可知 $f(S)$ 也是紧的. 但 S^1 是 Hausdorff 空间, 故紧集 $f(S)$ 是 S^1 中的闭集. 这样, S^1 是两个不交开集之并:

$$S^1 = f(S) \cup \{S^1 \setminus f(S)\}.$$

由 S^1 的连通性可知, $f(S)$ 及 $S^1 \setminus f(S)$ 中必有一个是空集. 但 $f(S)$ 是非空的, 因此只有 $S^1 \setminus f(S)$ 为空集, 也即 $S^1 = f(S)$. 这样, 我们就证明了 f 的映满性. 前面我们已证明了 $f(S)$ 是紧的, 故 S^1 是紧的. 定理证毕.

推论 紧 Riemann 曲面上的全纯函数必为常数函数.

假定 $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ 是一个多项式, $n \geq 1, a_0 \neq 0$. 很容易验证, $P_n(z)$ 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 到自身的一个全纯映射. 显然, 它不是一个常值映射. 根据定理 1, 我们有 $P_n(\bar{\mathbb{C}}) = \bar{\mathbb{C}}$. 另外, 当且仅当 $z = \infty$ 时, $P_n(z) = \infty$. 故又有

$$P_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.$$

特别地, 多项式 $P_n(z)$ 至少有一个根.

这便导出了著名的代数基本定理.

若两个 Riemann 曲面之间存在一个双方全纯的映射, 则称它们为**同构**. 而 Riemann 曲面之间双方全纯的映射被称为**共形映射**, 因此有时也把共形映射称做同构映射.

在 Riemann 曲面论中, 两个同构的 Riemann 曲面, 常可以等同一个 Riemann 曲面, 因为它们在基本性质上是相同的.

最后, 我们指出一维复射影空间与 $\bar{\mathbb{C}}$ 同构.

命题 2 $p_1\mathbb{C}$ 与 $\bar{\mathbb{C}}$ 同构.

证 我们定义映射 $f: p_1\mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 如下:

$$[1, z] \mapsto z, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad [0, 1] \mapsto \infty.$$

利用我们 § 1 中给出的 $p_1\mathbb{C}$ 及 $\bar{\mathbb{C}}$ 的局部坐标卡集合, 很容易验证 f 及 f^{-1} 都是全纯映射. 证毕.

§ 3 紧 Riemann 曲面间的全纯映射

现在,我们进一步讨论 Riemann 曲面间的全纯映射.我们将首先考察全纯映射的局部特征,并引入全纯映射在一点的重数及分支数的概念.然后,我们证明两条有关紧 Riemann 曲面间非平凡全纯映射的定理,其中包含 Riemann-Hurwitz 定理.

命题 1 设 $f: S \rightarrow S^1$ 是 Riemann 曲面 S 到 S^1 的一个非平凡全纯映射. 则对任意一点 $p_0 \in S$, 通过适当选取局部参数, 使得 f 在 p_0 附近的局部表示为

$$\zeta \mapsto w = \zeta^n,$$

其中 $\zeta = \zeta(p)$ 是 p_0 点附近的一个局部参数, $\zeta(p_0) = 0$; 而 $w = w(q)$ 是 $q_0 = f(p_0)$ 附近的一个局部参数, 且 $w(q_0) = 0$, 这里的 n 为自然数, 只依赖于 f 及 p_0 .

证 取 $z = z(p)$ 为 p_0 附近的一个局部参数, 而 $w = w(q)$ 为 $q_0 = f(p_0)$ 附近的一个局部参数. 不失一般性, 我们可以假定 $z(p_0) = 0$ 且 $w(q_0) = 0$. 这时, f 在 p_0 附近的局部表示可以写成

$$w = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \quad (a_n \neq 0),$$

其中 n 为自然数. 此式可改写为

$$w = z^n g(z), \quad g(0) \neq 0,$$

其中 $g(z)$ 为 z 在 origin 附近的一解析函数. 由于 $g(0) \neq 0$, 故当 $|z|$ 充分小时, 函数

$$h(z) = [g(z)]^{\frac{1}{n}}$$

可以取到一个单值解析分支. 这时, 我们有

$$w = [zh(z)]^n, \quad h(0) \neq 0.$$

令 $\zeta = zh(z)$, 则 $\zeta'(0) = h(0)$. 故当 $|z|$ 充分小时, $z \mapsto \zeta = zh(z)$ 是一个共形映射. 因此, 我们可以将

$$\zeta = \zeta(p) \stackrel{\text{def}}{=} z(p)h(z(p))$$

取作 p_0 点附近的一个局部参数. 用这个参数, f 的局部表示是

$$\zeta \mapsto w = \zeta^n.$$

这个局部表示告诉我们,在 q_0 的一个充分小的邻域内,每一点 $q (\neq q_0)$ 在 p_0 附近都有 n 个不同逆像.

这一性质是 f 的局部拓扑性质,与局部参数的选取无关.故自然数 n 只依赖 f 与 p_0 . 证毕.

定义 1 上述命题中的自然数 n 称为映射 f 在 p_0 点的**重数**,而数 $n-1$ 称为 f 在 p_0 点的**分歧数**,记做 $b_f(p_0)$. 若

$$b_f(p_0) > 0,$$

则称 p_0 为 f 的**分歧点**.

这里全纯映射在一点的重数的概念实际上是代数方程的重根概念的推广.

显然,非平凡的全纯映射的分歧点是孤立的.

定理 1 设 $f: S \rightarrow S^1$ 是两个紧致 Riemann 曲面 S 及 S^1 之间的非平凡全纯映射. 则存在一个自然数 m , 使得 S^1 上的每一点 q 均被 f 取了 m 次(将重数计算在内), 也即

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} (b_f(p) + 1) = m, \quad \forall q \in S^1.$$

证 设 k 是任意一自然数. 又设

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in S^1: \sum_{p \in f^{-1}(q)} (b_f(p) + 1) = k\}.$$

因为 f 是非平凡的, 而 S 是紧的, 故对每一 $q \in S^1$, $f^{-1}(q)$ 是一有穷集. 再注意到 f 的映满性(回顾 § 2 定理 1), 我们有

$$S^1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

现在, 我们证明每个 E_k 都是开集. 若 E_k 为空集 \emptyset , E_k 自然为开集. 若 $E_k \neq \emptyset$, 则对任一点 $q \in E_k$, 都存在 q 的一个邻域 $V \subset E_k$. 事实上, 若

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\},$$

则

$$\sum_{i=1}^n (b_f(p_i) + 1) = k.$$

根据命题 1 的证明, 每一点 p_i 都有一个邻域 U_i , 使得 $f(U_i) \setminus \{q\}$ 中的每一点在 U_i 中有 $(b_f(p_i) + 1)$ 个逆像. 我们将每个 U_i

取得充分小使得

$$U_i \cap U_j = \emptyset, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

取 q 的一个邻域 V , 使得 V 是连通的且

$$V \subset \bigcap_{i=1}^n f(U_i).$$

这时, $V \setminus \{q\}$ 中每一点在 U_i 中恰有 $b_f(p_i) + 1$ 个逆像, 从而在 S 上至少有

$$\sum_{i=1}^n (b_f(p_i) + 1) = k$$

个逆像. 下面我们说明, $V \setminus \{q\}$ 中每一点的逆像(以重数计算)不超过 k . 如若不然, 则至少存在一个 $q^* \in V$, 使得其逆像个数 $> k$. 也就是说, 一定存在 p^* 不属于每一个 U_i , 而 $f(p^*) = q^*$. 我们考虑 $f^{-1}(V)$ 的连通分支(最大的连通子集合). 设 p^* 所在连通分支为 D . 由 V 的连通性可知 $f: D \rightarrow V$ 是满射. 因此, 存在一点 $\tilde{p} \in D$ 使得 $f(\tilde{p}) = q$. 根据前面之假定, \tilde{p} 一定是 p_1, \dots, p_n 中之一. 这样一来, D 必然与 $f^{-1}(V)$ 中含某个 p_i 的连通分支重合. 但这是不可能的, 因为这样的分支必包含于 U_i 之内, 而 p^* 在 U_i 之外. 这一矛盾说明了 $V \setminus \{q\}$ 中每一点的逆像个数(将重数计算在内)不超过 k .

总之, 我们证明了 E_k 是一个开集.

在 S^1 中任意取一点 q_0 . 设

$$\sum_{p \in f^{-1}(q_0)} (b_f(p) + 1) = m.$$

那么, 我们可以将 S^1 分解为两个不相交开集之并:

$$S^1 = E_m \cup \left\{ \bigcup_{k \neq m} E_k \right\}.$$

因为 $q_0 \in E_m$, 故 E_m 非空. S^1 的连通性导致

$$\bigcup_{k \neq m} E_k = \emptyset.$$

由此推出 $S^1 = E_m$. 定理证毕.

推论 紧 Riemann 曲面上的一个半纯函数的零点与极点有相同的个数(均按重数计算).

利用这个定理还可以推出, n 阶代数多项式恰有 n 个根($n \geq 1$), 这里根的个数以重数计算.

定理 1 中的数 m 称为 f 的**覆盖层数**或**度**(degree).

根据拓扑学中的定理,任意一个二维可定向的紧流形都拓扑等价于带有若干个环柄的球面.这里环柄的个数称做**亏格**(genus).

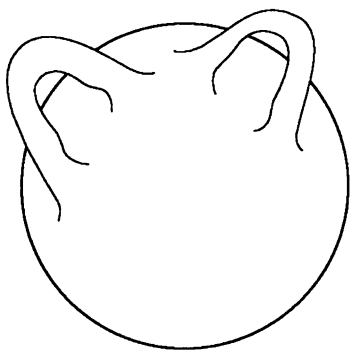


图 5.4

根据这一说法,球面的亏格为 0,而环面的亏格为 1.图 5.4 所画的曲面的亏格为 2.

亏格是可定向紧曲面的一个重要拓扑不变量.它对可定向紧曲面进行了拓扑分类.

紧 Riemann 曲面是实二维可定向紧流形.我们自然可以谈论紧 Riemann 曲面的亏格.

设 S 及 S^1 是两个紧 Riemann 曲面,其亏格分别是 $g(S)$ 及 $g(S^1)$.

又设 $f: S \rightarrow S^1$ 是一个非平凡的全纯映射,其覆盖层数为 m .现在要问 $g(S)$, $g(S^1)$ 及 m 之间有何关系?

定理 2(Riemann-Hurwitz) 在上述假定下,我们有

$$g(S) = m(g(S^1) - 1) + 1 + \frac{B}{2},$$

其中

$$B = \sum_{p \in S} b_f(p)$$

(B 称为 f 的总分歧数).

证 对于曲面 S^1 取一个三角剖分,使得 S 上的所有分歧点的像点都是这个剖分之顶点.将此剖分根据映射 f 拉回到 S 上,就形成了 S 上的一个三角剖分.

S^1 的每一个三角形拉回到 S 上变成了 m 个三角形.这一结论可以由下列观察得到: S^1 的每一个三角形中的一点,在 S 上有 m 个不同逆像.同样的道理, S^1 的三角剖分中的每条边拉到 S 上变成 m 条边. S^1 的三角剖分中任意一顶点 q ,在依 f 拉回到 S 上变成了 $m - B_q$ 个点,其中

$$B_q = \sum_{p \in f^{-1}(q)} b_f(p).$$

由于 S^1 的顶点中包含了一切可能的分歧点的像, 因此, 当 q 取遍一切顶点时,

$$\sum_q B_q = B.$$

设在 S^1 上的三角剖分中有 V 个顶点, E 条边和 F 个三角形. 那么 S 上则有 $mV - B$ 个顶点, mE 条边和 mF 个三角形. 于是由 Euler 公式, 我们有

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2g(S^1), \\ m(F - E + V) - B &= 2 - 2g(S). \end{aligned}$$

由这两个等式即推出我们所要的公式. 证毕.

由这个定理立即推出下列推论:

推论 1 紧 Riemann 曲面之间的非平凡全纯映射的总分歧数 B 总是偶数.

推论 2 紧 Riemann 曲面 S 及 S^1 之间具有非平凡全纯映射 $f: S \rightarrow S^1$ 的必要条件是

$$g(S) \geq g(S^1).$$

推论 3 紧 Riemann 曲面 S 到自身的非平凡全纯映射, 在 $g(S) > 1$ 的条件下, 必为共形映射.

事实上, 若 $f: S \rightarrow S$ 是一个非平凡全纯映射, 应用定理 2 于 f , 即得 $m=1, B=0$. 这就是说, f 是无分歧的且覆盖层数 $m=1$ 的全纯映射, 也即 f 是一一的全纯映射. 这样 f 是共形映射.

推论 4 当 $g(S^1) > 1$ 时, 非平凡全纯映射 $f: S \rightarrow S^1$ 的覆盖层数

$$m \leq [g(S) - 1] / [g(S^1) - 1].$$

§ 4 微分形式

设 S 是一个 Riemann 曲面, 其局部坐标卡集合是 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

我们将平面上的点 (x, y) 与复平面上的点 $z = x + iy$ 相等同, 并认为

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy.$$

这时 S 上的任何一个实的微分形式

$$\omega = f dx + g dy$$

都可以改写为复形式

$$\omega = u dz + v d\bar{z},$$

其中 $u = (f - ig)/2, v = (f + ig)/2$. 这就是 Riemann 曲面上的一阶微分形式的一般形式. 今后, 我们把一阶微分形式简称为 1-形式.

现在, 我们给出其正式定义.

定义 1 设 S 是一个 Riemann 曲面, 其局部坐标卡集合为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. 若对每一个局部坐标 $z_\alpha = \varphi_\alpha(p)$, 都在 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上指定了两个光滑复值函数 u_α 及 v_α , 使得

$$u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha$$

在参数变换下不变, 那么就把它称做 S 上的一个一阶光滑微分形式.

这里所谓在参数变换下不变是指, 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中有

$$u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha = u_\beta dz_\beta + v_\beta d\bar{z}_\beta,$$

其中 $z_\alpha = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z_\beta)$.

根据 Riemann 曲面定义, 参数转换函数 $f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是共形映射. 因此,

$$dz_\alpha = f'_{\alpha\beta} dz_\beta, \quad d\bar{z}_\alpha = \bar{f}'_{\alpha\beta} d\bar{z}_\beta.$$

这样, 我们得到, 在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中

$$u_\alpha \circ f_{\alpha\beta} f'_{\alpha\beta} dz_\beta + v_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \bar{f}'_{\alpha\beta} d\bar{z}_\beta = u_\beta dz_\beta + v_\beta d\bar{z}_\beta,$$

也即

$$u_\alpha \circ f_{\alpha\beta} f'_{\alpha\beta} = u_\beta, \quad v_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \bar{f}'_{\alpha\beta} = v_\beta.$$

由此可见, 要构成一个微分形式, 所指定的 u_α 及 v_α 在变换参数时必须满足上述关系才成. 上述条件称做**相容性条件**.

上述条件还告诉我们, 若 $\omega = u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha$ 是 S 上的一阶微分形式, 则 $\omega_1 = u_\alpha dz_\alpha$ 及 $\omega_2 = v_\alpha d\bar{z}_\alpha$ 也是一阶微分形式. 也就是说, 在 Riemann 曲面上的一阶微分形式总可以分解为两个一阶微分形式之

和: 一个只包含 dz , 另一个只包含 $d\bar{z}$. 应当提醒读者在一般二维光滑流形上, 当我们把一阶微分形式写成复形式时, 并不具有这样性质. 可见, Riemann 曲面上的一阶微分形式的这种性质是由 Riemann 曲面的特殊结构所决定的.

对于上述的一阶微分形式 ω , 表达式 $u_a dz_a + v_a d\bar{z}_a$ 称做 ω 的局部表示. 通常为了简单起见, 我们可以将 ω 的局部表示写成 $u dz + v d\bar{z}$; 这里的 u 及 v 一般说来不是曲面上的函数而应当理解为关于局部参数 z 的函数.

命题 1 设 $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Riemann 曲面 S 上的一个光滑函数, 则其局部表示的微分构成一个一阶微分形式.

此微分形式记做 df .

证 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是 S 的局部坐标卡集合. 对每一个 $\alpha \in A$, f 的局部表示是

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1}(z_\alpha), \quad \forall z_\alpha \in \varphi_\alpha(U_\alpha).$$

令 $u_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})$, $v_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})$, 那么

$$d(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) = u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha.$$

当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, f 的局部表示之间有下列关系: 在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 内,

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ f_{\alpha\beta} = f \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

注意到 $f_{\alpha\beta}$ 的共形性, 由此立即推出 u_α, v_α 与 u_β, v_β 满足相容性条件. 证毕.

记

$$\partial f = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) dz_\alpha, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) d\bar{z}_\alpha.$$

那么, ∂f 与 $\bar{\partial} f$ 同样是一阶微分形式, 并有

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

容易验证

$$dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0,$$

$$dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz = -2i dx \wedge dy.$$

因此, 局部表示为 $F dx \wedge dy$ 的二阶微分形式总可以表示成复形式

$$Gdz \wedge d\bar{z} \quad (G = iF/2).$$

在 Riemann 曲面上, 二阶微分形式的确切定义如下:

定义 2 设 S 是一个 Riemann 曲面, 其局部坐标卡集合为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. 若对每一个 $\alpha \in A$, 均指定一个 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 中的光滑函数 G_α 使得表达式

$$G_\alpha dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

在参数变换下不变, 则称它为 S 上的一个二阶微分形式, 简称为 2-形式.

这里所谓在参数变换下表达式 $G_\alpha dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$ 不变是指, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中有

$$G_\alpha dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha = G_\beta dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta,$$

其中 $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta)$. 这样

$$G_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \cdot f'_{\alpha\beta} dz_\beta \wedge \bar{f}'_{\alpha\beta} d\bar{z}_\beta = G_\alpha \circ f_{\alpha\beta} |f'_{\alpha\beta}|^2 dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta.$$

可见, G_α 与 G_β 满足下列关系:

$$G_\alpha \circ f_{\alpha\beta} |f'_{\alpha\beta}|^2 = G_\beta \quad (\text{在 } \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

我们约定 Riemann 曲面上的 0 阶微分形式是定义在该 Riemann 曲面上光滑的函数. 今后将 0 阶微分形式简称为 0-形式.

因为 Riemann 曲面是实二维流形, 所以它没有二阶以上的非平凡微分形式.

现在, 我们来定义微分形式的外微分运算:

定义 3 设 f 是 Riemann 曲面 S 上的一个 0 阶微分形式. 我们定义 f 的外微分 $d \wedge f$ 就是由 f 的微分所确定的一阶微分形式 df .

又设 $\omega = u dz + v d\bar{z}$ 是一个一阶光滑微分形式. 我们定义

$$d \wedge \omega = du \wedge dz + dv \wedge d\bar{z}.$$

为了保证定义 $d \wedge \omega$ 的合理性, 我们应当说明上式右端是一个二阶微分形式.

设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是 S 的局部坐标卡集合. 假定 ω 的局部表示是

$$\omega = u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha,$$

那么

$$d \wedge \omega = du_\alpha \wedge dz_\alpha + dv_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} \right) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

为了说明 $d \wedge \omega$ 是一个二阶微分形式, 应当验证, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 内有

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{z}_\alpha} \right) \circ f'_{\alpha\beta} \cdot |f'_{\alpha\beta}|^2 = \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial z_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{z}_\beta} \right).$$

这很容易由相容性条件

$$u_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \cdot f'_{\alpha\beta} = u_\beta, \quad v_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \cdot \bar{f}'_{\alpha\beta} = v_\beta$$

分别求偏导数得出.

为了简单起见, 通常将 $d \wedge f$ 及 $d \wedge \omega$ 分别写成 df 及 $d\omega$, 并用它们来分别表示 0 阶微分形式与一阶微分形式的外微分运算.

二阶及二阶以上的微分形式的外微分定义为 0.

算子 ∂ 及 $\bar{\partial}$ 同样可以定义在 1-形式上.

若 $\omega = u dz + v d\bar{z}$ 是 Riemann 曲面 S 上的一个一阶微分形式, 我们定义

$$\partial\omega = \partial u \wedge dz + \partial v \wedge d\bar{z} = \frac{\partial v}{\partial z} dz \wedge d\bar{z},$$

$$\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}u \wedge dz + \bar{\partial}v \wedge d\bar{z} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

对于二阶微分形式或二阶以上的微分形式的 ∂ 及 $\bar{\partial}$ 运算的结果一律定义为 0.

不难看出, 无论对哪阶的微分形式, 我们总有

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

因为是在实二维流形上讨论问题, 故总有

$$d^2 = 0.$$

这意味着 $(\partial + \bar{\partial})^2 = 0$. 容易证实, $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$. 故有

$$\partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial = 0.$$

我们令

$$\Delta = 2i\partial\bar{\partial}.$$

那么, 不难验证, Δ 作用于 0-形式 f 上得到

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy.$$

请读者注意, 这里 Δ 有别于平面区域上的 Laplace 算子, 在这里 Δf

是一个二阶外微分形式,而不是一个函数.

在结束本节时,我们指出像在一般微分流形上一样,在 Riemann 曲面上也可以谈论恰当微分形式与闭微分形式.

若一个微分形式的外微分为 0,则称其为**闭**的微分形式.若对一个微分形式而言,存在一个低一阶的微分形式使其外微分恰好等于给定的微分形式,则称给定的微分形式为**恰当**微分形式.

因为 $d^2=0$,故**恰当微分形式总是闭的**.但是,反过来不一定成立.

§ 5 调和微分与半纯微分

我们先来定义调和函数,然后再定义调和微分.

定义 1 Riemann 曲面 S 上的一个复值函数 $f \in C^2$ 称为**调和函数**,如果 $\partial \bar{\partial} f = 0$.

定义 2 Riemann 曲面 S 上的一个一阶微分形式 $\omega \in C^1$ 称做**调和微分**,如果对每一点 $p \in S$,都存在一个 p 的邻域 U ,并在 U 上有一个调和函数 f 使得 $\omega = df$.

显然,调和微分都是闭的.

为了进一步研究调和微分,我们引入一个算子 $*$.

定义 3 设 $\omega = u dz + v d\bar{z}$ 是 Riemann 曲面 S 上的一个一阶微分形式.我们定义 $*\omega$ 是一个新的一阶微分形式:

$$*\omega = -i u dz + i v d\bar{z}.$$

定义的合理性是显而易见的.前面我们已经指出 $u dz$ 及 $v d\bar{z}$ 都构成一阶微分形式.因此它们的线性组合也是一个一阶微分形式.

如果将 ω 写成 $\omega = f dx + g dy$,那么, $*\omega$ 有更明显的形式

$$*\omega = -g dx + f dy.$$

即 f 与 g 变换位置,而 g 改变符号.

设 ω 是一个调和微分,也即它局部地可以表示成某个调和函数 f 的微分:

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

这时有

$$*\omega = -i \frac{\partial f}{\partial z} dz + i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

注意到 f 为调和函数, 故又有

$$d^*\omega = i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

由此可见, 对于调和微分 ω 而言, 不仅它本身是闭的, 而且 $*\omega$ 也是闭的.

这一观察是重要的, 而且其逆命题也成立.

命题 1 Riemann 曲面 S 上的一阶微分形式 ω 是调和微分的充要条件是

$$d\omega = 0 \quad \text{且} \quad d^*\omega = 0.$$

证 前面已经证明了条件的必要性. 现在只要证明其充分性就够了.

设 ω 满足上述条件. 因为 ω 是闭的, 故 ω 是局部恰当的, 也即每一个局部邻域内都有一个函数 f , 使得

$$\omega = df = f_x dx + f_y dy.$$

而 $d^*\omega = 0$ 意味着

$$d^*\omega = (f_{xx} + f_{yy}) dx \wedge dy = 0,$$

即表明 f 是一个调和函数. 证毕.

定义 4 Riemann 曲面上的一阶微分形式 ω 称做上闭的 (co-closed), 如果 $d^*\omega = 0$.

有了这个定义之后, 命题 1 可叙述成下列形式: ω 是调和微分当且仅当它是闭的且上闭的.

现在, 我们来讨论 Riemann 曲面上的全纯微分.

定义 5 Riemann 曲面上的一阶微分形式 ω 称为全纯微分, 如果 ω 的每一个局部表示都有下列形式

$$\omega = u dz,$$

且 u 是相应的局部参数 z 的全纯函数.

显然, 每一个全纯微分都是调和微分. 事实上, 每个全纯微分局部可表成某全纯函数的微分, 而全纯函数是调和函数.

研究调和微分或调和函数不是我们的目的. 我们的目的是通过调和微分或调和函数来研究 Riemann 曲面上的全纯微分乃至更一般的半纯微分. 因此, 调和函数或调和微分与全纯微分之间的关系是重要的.

首先, 若在一个 Riemann 曲面上知道一个调和函数, 则立即得到了一个全纯微分.

命题 2 设 f 是 Riemann 曲面 S 上的一个调和函数, 则

$$\omega = \partial f$$

是 S 上的一个全纯微分.

证 因为 f 是调和函数, 故有

$$\Delta f = 2i\partial\bar{\partial}f = 0.$$

但 $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$, 故又有 $\bar{\partial}\partial f = 0$, 也即

$$\bar{\partial}\omega = 0.$$

另一方面, 我们可设 $\omega = \partial f$ 的局部表示为 udz , 那么 $\bar{\partial}\omega = 0$ 意味着

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0.$$

这就证明了 ω 是全纯微分. 证毕.

下面的命题进一步告诉我们, 由一个调和微分也可以得到一个全纯微分.

命题 3 设 ω 是 Riemann 曲面 S 上的一个一阶微分形式. ω 是一个全纯微分, 当且仅当 ω 可表成

$$\omega = h + i^*h,$$

其中 h 是一调和微分.

证 假定 h 是一个调和微分, 且 $\omega = h + i^*h$, 则 ω 必定是一全纯微分. 事实上, h 可局部表成 $h = df$, 其中 f 是一个局部调和函数, 这时

$$\omega = df + i^*df = 2\partial f.$$

由命题 2, ω 是全纯的.

反过来, 若 ω 是一全纯微分, 则 ω 及 $\bar{\omega}$ 均为调和微分. 令

$$h = \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega}),$$

则 h 是一调和微分. 这时, 我们有

$$*h = -\frac{i}{2}\omega - \frac{i}{2}\bar{\omega},$$

于是 $h + i^*h = \omega$. 证毕.

定义 6 若 ω 是 Riemann 曲面上的一个一阶微分形式, 且其局部表示形如 $\omega = u dz$, 其中 u 是一个半纯函数, 则 ω 被称为一个**半纯微分**.

半纯微分的极点及极点的阶可以依据其局部表示来定义.

前面关于全纯微分的各命题, 对半纯微分也成立, 只要允许其中涉及的调和函数及调和微分有某种奇性即可.

半纯微分也称为 **Abel 微分**.

§ 6 Stokes 公式

像在一般光滑流形上一样, 在 Riemann 曲面上可以定义一个微分形式的积分.

设 $\omega = u dz + v d\bar{z}$ 是 Riemann 曲面 S 上的一个一阶光滑微分形式. 又设 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ 是 S 上的一条逐段光滑的弧. 这里所谓 γ 是逐段光滑是指它在局部参数表示下是逐段光滑的.

设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是 S 的局部坐标卡集合. 将弧 γ 分割成有穷个子弧 γ_j 之并:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m,$$

其中

$$\gamma_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow S, \quad t \mapsto \gamma(t),$$

而 $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$. 当这种分割足够细时, 可使得其中每段子弧落入某个局部参数盘之中. 假定 γ_j 落入 U_α 之中, 且 ω 在 U_α 的局部表示为 $\omega = u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha$. 我们定义

$$\int_{\gamma_j} \omega = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[u_\alpha(\varphi_\alpha \circ \gamma) \frac{d\varphi_\alpha \circ \gamma}{dt} + v_\alpha(\varphi_\alpha \circ \gamma) \frac{d\overline{\varphi_\alpha \circ \gamma}}{dt} \right] dt.$$

这样定义是合理的, 即它与参数的选取无关. 假如另有一个局部参数盘 U_β 也能覆盖住 γ_j , 那么由于

$$u_\alpha dz_\alpha + v_\alpha d\bar{z}_\alpha = u_\beta dz_\beta + v_\beta d\bar{z}_\beta,$$

可以看出上述定义中的被积函数没有改变.

我们定义

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \omega.$$

应当说明,这样定义的积分值不依赖于子弧的选择.事实上,如果有另一种 γ 的分割

$$\gamma = \gamma'_1 \cup \dots \cup \gamma'_l$$

使得每个 γ'_j 落入某个局部参数盘.这时,我们把两种分割的分点合并而形成一种新的分割.很容易看出,前两种分割所定义的积分值都等于第三种分割所定义的积分值.

类似地,可以定义 S 上的一个二阶微分形式在一个区域 $D \subset S$ 上的积分.

设 Ω 为 S 上的一个 2-形式,它在 U_α 中的局部表示为

$$\Omega = G_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

假若区域 D 可以被某个 U_α 所覆盖,我们定义

$$\int_D \Omega = \iint_{\varphi_\alpha(D)} G_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

这样的定义不依赖于局部参数之选择.事实上,若另有一局部坐标卡 (U_β, φ_β) 使得 $D \subset U_\beta$, 那么

$$G_\beta(z_\beta) = G_\alpha(f_{\alpha\beta}) |f'_{\alpha\beta}|^2,$$

其中 $f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 为参数转换函数.这时

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_\alpha(D)} G_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha &= \iint_{\varphi_\beta(D)} G_\alpha(f_{\alpha\beta}) |f'_{\alpha\beta}|^2 dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta \\ &= \iint_{\varphi_\beta(D)} G_\beta(z_\beta) dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta, \end{aligned}$$

这里 $|f'_{\alpha\beta}|^2$ 恰好是参数变换的 Jacobi 行列式.

有了上述讨论,自然就可以将积分的定义推广到 D 由有限个局部参数盘覆盖的情况.

定理 1 (Stokes 公式) 设 ω 是 Riemann 曲面 S 上的一个一阶

光滑微分形式. D 是 S 中的一个闭区域, 其边缘由有限条逐段光滑闭曲线组成, 则我们有

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

这里 ∂D 的定向是通常意义下的正向.

我们略去这个定理的证明.

作为 Stokes 公式的一个应用, 我们将给出一个有关半纯微分留数的定理.

设 $\omega = u dz$ 是一个半纯微分. 假定 ω 在一点 p_0 为极点. 设 $z = \varphi(p)$ 是 p_0 附近的一个局部参数, $\varphi(p_0) = 0$. 那么 $u(z)$ 可在 $z=0$ 附近表示成

$$u(z) = \sum_{k \geq -n}^{+\infty} a_k z^k.$$

可以验证, a_{-1} 是不依赖局部参数的选择的. 我们称之为 ω 在 p_0 点的留数, 记之为 $\text{res}_{p_0} \omega$.

假定 $D \subset S$ 是一个充分小的盘, $p_0 \in D$. 很容易看出

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = \text{res}_{p_0} \omega,$$

其中 ∂D 的定向是正向.

定理 2 设 S 是一个紧 Riemann 曲面, 而 ω 是 S 上的一个半纯微分, 则 ω 在 S 上的留数和为零.

证 设 p_1, \dots, p_m 为 ω 的极点. 在每一个极点 p_i 处选取一个充分小的盘 Δ_j , 使得 $p_i \in \Delta_j$, 且 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ 两两不相交, 并使其边界 $\partial \Delta_j$ 光滑.

记 $D = S \setminus \{\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m\}$, 那么 ω 在 D 内是全纯微分. 因此,

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega = 0.$$

但另一方面, 如果认为 D 的边缘 ∂D 有一个自然定向, 那么

$$\partial D = - \bigcup_{j=1}^m \partial \Delta_j.$$

故有

$$\sum_{j=1}^m \text{res}_{p_j} \omega = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_j} \omega = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = 0.$$

证毕.

下面几节的主要目的是证明 Riemann 曲面上非平凡的半纯函数与半纯微分的存在性定理,而这需要 Weyl 引理.

§ 7 Weyl 引理

引理 1 (Weyl 引理) 设 D 是复平面上的圆 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ 且函数 $\varphi \in L^2(D)$, 则 φ 是调和函数的充要条件是

$$\int_D \varphi \Delta \eta = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(D). \quad (5.1)$$

应该指出: 在 L^2 中两个几乎处处相等的函数视作同一函数. 因此 L^2 中的每一个元素本质上都代表着一个等价类. 这里所谓 φ 是调和函数是指其等价类中有调和函数.

这里条件的必要性是容易证明的. 事实上, 由 η 有紧支集推出

$$\int_D d(\varphi^* d\eta) = 0$$

及

$$\int_D d(\eta^* d\varphi) = 0.$$

两式相减并注意到 $d\eta \wedge \eta^* d\varphi = d\varphi \wedge d\eta$, 立即推出

$$\int_D \varphi \Delta \eta - \eta \Delta \varphi = 0. \quad (5.2)$$

而 φ 是调和函数, 故 $\Delta \varphi = 0$. 这就得到等式 (5.1).

在 $\varphi \in C^2$ 的条件下, 证明 (5.1) 式的充分性也是不难的. 假定 $\varphi \in C^2$, 这时对于 $\eta \in C_0^\infty(D)$, (5.2) 式依然成立. 这样, 当 (5.1) 式成立时, 我们有

$$\int_D \eta \Delta \varphi = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(D).$$

由 η 的任意性及 $\Delta \varphi$ 的连续性, 即推出 $\Delta \varphi = 0$.

由以上的分析可知, Weyl 引理重要之处在于断言, 无须事先假定 $\varphi \in C^2$ 而仅在 $\varphi \in L^2(D)$ 的情况下, 条件 (5.1) 依然保证 φ 的调和性.

为了证明 Weyl 引理, 我们需要一些公式:

首先是一个已知公式. 设 $f \in C^1(\bar{G})$, 其中 $G = \{z: |z-a| < R\}$. 则函数

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

在任意一点 $z \in G$, 都有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi(z) = f(z).$$

这是上一章 § 6 中已证明了的公式. 由此又立即推出下列公式:
若 $f \in C^1(\bar{G})$ 且令

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i} \iint_G f(\zeta) \ln |\zeta - z| d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

则

$$\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial \bar{z} \partial z} = f(z).$$

证明是容易的, 只要注意到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln |\zeta - z| = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln |\zeta - z|^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta - z} \quad (\zeta \neq z)$$

就足够了.

现在我们来完成 Weyl 引理的最终证明, 即在 $\varphi \in L^2(D)$ 的条件下, 由 (5.1) 式推出 φ 是调和函数.

引理 1 的证明 适当选取一个 C^∞ 的实值函数 $\rho_\epsilon(r)$, 其中 r 在 $[0, +\infty)$ 中变动, 当 $0 \leq r < \epsilon/2$ 时, $\rho_\epsilon(r) \equiv 1$, 而当 $r > \epsilon$ 时 $\rho_\epsilon(r) \equiv 0$, 且当 r 在 $[\epsilon/2, \epsilon]$ 时, $0 \leq \rho_\epsilon(r) \leq 1$ (见图 5.5).

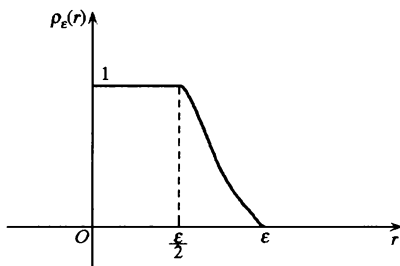


图 5.5

令

$$\Omega_\epsilon(r) = \frac{1}{\pi i} \rho_\epsilon(r) \ln r.$$

对于任意的 $\mu \in C_0^\infty(D)$, 我们考虑函数

$$\eta_\epsilon(\zeta) = \iint_C \Omega_\epsilon(|z - \zeta|) \mu(z) dz \wedge d\bar{z}.$$

当 ϵ 充分小时, $\eta_\epsilon(\zeta)$ 在 D 内有紧支集. 另外 η_ϵ 又可表成

$$\eta_\epsilon(\zeta) = \iint_C \Omega_\epsilon(|z|) \mu(z + \zeta) dz \wedge d\bar{z}.$$

由此可推出, $\eta_\epsilon(\zeta) \in C^\infty$ 且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \eta_\epsilon(\zeta) &= \iint_C \Omega_\epsilon(|z - \zeta|) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mu(z) dz \wedge d\bar{z}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \eta_\epsilon(\zeta) &= \iint_C \Omega_\epsilon(|z - \zeta|) \frac{\partial}{\partial z} \mu(z) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

下面我们证明

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \eta_\epsilon(\zeta) = -\mu(\zeta) + \iint_C \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Omega_\epsilon(|z - \zeta|) \mu(z) dz \wedge d\bar{z}. \quad (5.3)$$

我们考虑一固定点 $\zeta_0 \in D$, 并将 η_ϵ 表成

$$\eta_\epsilon(\zeta) \equiv f(\zeta) + g(\zeta),$$

其中 ζ 满足 $|\zeta - \zeta_0| < \epsilon/4$, 而

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{\pi i} \iint_{|z - \zeta_0| < \epsilon/4} \mu(z) \ln |z - \zeta| dz \wedge d\bar{z}, \\ g(\zeta) &= \iint_{|z - \zeta_0| > \epsilon/4} \Omega_\epsilon(|z - \zeta|) \mu(z) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

显然, 由前面提及的公式, 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = -\mu(\zeta). \quad (5.4)$$

当 $|\zeta - \zeta_0| < \epsilon/4$ 且 $|z - \zeta_0| < \epsilon/4$ 时, $|\zeta - z| < \epsilon/2$. 故

$$\Omega_\epsilon(|z - \zeta|) = \ln |z - \zeta| \quad (z \neq \zeta),$$

且是关于 ζ 的调和函数. 注意到这一点, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} &= \iint_{|z-\zeta_0| > \frac{\epsilon}{4}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Omega_\epsilon(|z-\zeta|) \mu(z) dz \wedge d\bar{z} \\
&= \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Omega_\epsilon(|z-\zeta|) \mu(z) dz \wedge d\bar{z}. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

由(5.4)及(5.5)式即得到(5.3)式.

将 $\eta = \eta_\epsilon$ 代入(5.1)式, 我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2i} \iint_D \varphi \Delta \eta_\epsilon \\
&= - \iint_D \mu(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\
&\quad + \iint_D \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2 \Omega_\epsilon(|z-\zeta|)}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \mu(z) dz \wedge d\bar{z} \\
&= - \iint_{\mathbb{C}} \mu(\zeta) \left[\varphi(\zeta) - \iint_D \varphi(z) \frac{\partial^2 \Omega_\epsilon(|z-\zeta|)}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \right] d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

由 μ 的任意性推出

$$\varphi(\zeta) = \iint_D \varphi(z) \frac{\partial^2 \Omega_\epsilon(|z-\zeta|)}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

但当 $|\zeta - z| < \epsilon/2$ 时,

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \Omega_\epsilon(|z-\zeta|) = 0,$$

故有

$$\varphi(\zeta) = \iint_{D \setminus \Delta_{\frac{\epsilon}{2}}(\zeta)} \varphi(z) \frac{\partial^2 \Omega_\epsilon(|z-\zeta|)}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

这样, $\varphi(\zeta)$ 是 ζ 的光滑函数. 而在前面我们已经证明了当 φ 是光滑函数时(5.1)式蕴含着 φ 的调和性. 这就最终证明了 Weyl 引理.

§ 8 一阶微分形式的 Hilbert 空间

这节中我们将讨论 Riemann 曲面上—阶微分形式所组成的 Hilbert 空间, 并给出 Weyl 引理的几何解释.

设 S 是一个 Riemann 曲面. 我们称 S 上的一个 1-形式 ω 是可测的, 如果其局部表示 $\omega = u dz + v d\bar{z}$ 中 u 与 v 是可测函数.

我们称 ω 在 S 上平方可积, 如果

$$\|\omega\|^2 = \int_S \omega \wedge \bar{\omega} < +\infty.$$

全体在 S 上平方可积的可测一阶微分形式构成的集合记做 $L^2(S)$. 这里 $\omega \wedge \bar{\omega}$ 的局部表示为

$$\omega \wedge \bar{\omega} = i(|u|^2 + |v|^2) dz \wedge d\bar{z} = 2(|u|^2 + |v|^2) dx \wedge dy.$$

可见在形式上 $\|\omega\|$ 与通常的 L^2 空间中的范数相似.

我们在 $L^2(S)$ 上引入内积:

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_S \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2,$$

那么, 当 $\omega_1 = u_1 dz + v_1 d\bar{z}$, $\omega_2 = u_2 dz + v_2 d\bar{z}$ 时, $\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2$ 的局部表示是

$$\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 = i(u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2) dz \wedge d\bar{z}.$$

由此推出

$$(\omega_2, \omega_1) = \overline{(\omega_1, \omega_2)}.$$

因此, $L^2(S)$ 在上述内积下构成 Hilbert 空间.

我们定义 $L^2(S)$ 中的两个子空间 E 与 E^* : E 是集合

$$\{df: f \in C_0^\infty(S)\}$$

在 $L^2(S)$ 中的闭包, 而 E^* 是

$$\{*\!df: f \in C_0^\infty(S)\}$$

在 $L^2(S)$ 中的闭包.

对应于 E 与 E^* , $L^2(S)$ 有相应的正交分解:

$$L^2(S) = E \oplus E^\perp = E^* \oplus E^{*\perp},$$

其中 E^\perp 与 $E^{*\perp}$ 分别是 E 与 E^* 之正交补.

不难验证

$$E^\perp = \{\omega \in L^2(S): (\omega, df) = 0, f \in C_0^\infty(S)\},$$

$$E^{*\perp} = \{\omega \in L^2(S): (\omega, *\!df) = 0, f \in C_0^\infty(S)\}.$$

命题 1 设 $\omega \in L^2(S) \cap C^1(S)$, 则

(i) $\omega \in E^{*\perp} \iff \omega$ 是闭的;

(ii) $\omega \in E^\perp \iff \omega$ 是上闭的.

证 设 $\omega \in E^{*\perp}$, 则对 $\forall f \in C_0^\infty(S)$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega, *df) = - \int_S \omega \wedge d\bar{f} \\ &= - \int_S [d(\omega \wedge \bar{f}) - d\omega \wedge \bar{f}] = \int_S d\omega \wedge \bar{f}. \end{aligned}$$

由 f 的任意性即推出 $d\omega = 0$. 反之, 若 ω 是闭的, 则对任意的 $f \in C_0^\infty(S)$, 由上式推导过程可知, $(\omega, *df) = 0$.

以上证明了 (i). 而 (ii) 的证明完全类似. 证毕.

由命题 1 推出下列推论:

推论 在 ω 光滑的条件下, $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$ 当且仅当 ω 是调和微分.

Weyl 引理使我们得以在此推论中去掉 ω 光滑性的要求.

定理 1 $E^\perp \cap E^{*\perp}$ 是 $L^2(S)$ 中全体调和微分的集合.

证 若 $\omega \in L^2(S)$ 是一个调和微分, 则 $\omega \in C^1$. 由命题 1 推出 $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$. 现在我们证明, $E^\perp \cap E^{*\perp}$ 中每一元素 ω 都是调和的.

设 $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$, 则对任意 $f \in C_0^\infty(S)$, 有

$$(\omega, df) = (\omega, *df) = 0.$$

取 S 的任一坐标卡 (U, φ) , 并假定 ω 在 U 中的局部表示为

$$\omega = u(z)dz + v(z)d\bar{z}.$$

在 $C_0^\infty(U)$ 中任取一个函数, 其局部表示为

$$\eta = \eta(z), \quad z \in \varphi(U).$$

令 $f = \frac{\partial}{\partial z} \eta \stackrel{\text{def}}{=} \eta_z$, 则由

$$(\omega, df) = (\omega, *df) = 0$$

推出

$$(\omega, *df + \text{id}f) = 0,$$

也即

$$- \int_{\varphi(U)} (udz + v d\bar{z}) \wedge \eta_{z\bar{z}} dz = \int_{\varphi(U)} v \eta_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

由 Weyl 引理可知, v 在 $\varphi(U)$ 中为调和函数; 特别地, v 是 $\varphi(U)$ 中的光滑函数.

令 $g = \bar{\eta}_z$, 则由 $(\omega, *dg - idg) = 0$ 又可推出 u 是光滑的. 总之, ω 是光滑微分. 由命题 1 的推论可知, ω 是调和微分. 证毕.

由 E 及 E^* 的定义, 我们立即推出

$$E \subset E^{*\perp}, \quad E^* \subset E^\perp.$$

可见, E 与 E^* 中的元素相互正交. 于是有

$$L^2(S) = E \oplus E^* \oplus (E \oplus E^*)^\perp = E \oplus E^* \oplus (E^\perp \cap E^{*\perp}).$$

定理 2 令 $H = E^\perp \cap E^{*\perp}$, 则有

$$L^2(S) = E \oplus E^* \oplus H.$$

定理 1 及定理 2 是 Weyl 引理所导出的基本结论.

§ 9 光滑微分的分解定理

上节中证明的分解式

$$L^2(S) = E \oplus E^* \oplus H$$

使我们得以将任意一个 $\omega \in L^2(S)$ 分解成

$$\omega = \alpha + \beta + h, \quad \alpha \in E, \quad \beta \in E^*, \quad h \in H.$$

对于 E 及 E^* , 除定义之外我们还了解甚少. 所以, 目前还不可能提供关于 α 及 β 的更多信息.

本节将证明, 当 ω 是 C^1 光滑微分时, α 是恰当的, 而 β 是上恰当的; 确切地说, 存在 C^2 光滑函数 f 及 g , 使得

$$\alpha = df, \quad \beta = *dg.$$

这一分解定理是讨论非平凡调和微分存在性的基础.

现在我们先来证明

命题 1 若 $\omega \in E \cap C^1$, 则 ω 是恰当的. 若 $\omega \in E^* \cap C^1$, 则 ω 是上恰当的.

证 我们只证明命题中第一个结论. 另一结论的证明完全类似.

设 C 是任意一条逐段光滑闭曲线. 考虑 C 的一个充分小邻域 Ω , 使其可用有穷个局部参数盘所覆盖. 取定 C 的一个方向, 并将 $\Omega \setminus C$ 的右、左两个连通分支分别记为 Ω_+ 与 Ω_- . 再在 Ω_- 中取一个更窄的 C 的邻域 Ω_0 使之与 Ω_- 有共同边界 C (见图 5.6).

现在, 我们造一个实值函数 $f \in C^\infty(S \setminus C)$, 使得 $\Omega_0 \cup C$ 上值为

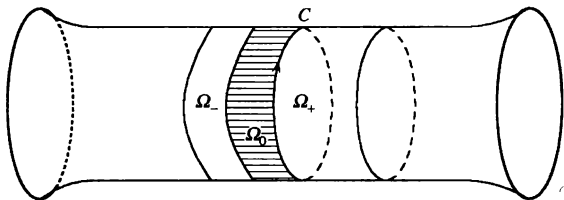


图 5.6

1,而在 $S \setminus \Omega_- \cup C$ 上定义为零. 现在定义一个微分

$$\eta_C = \begin{cases} df, & \text{在 } \Omega_- \text{ 中,} \\ 0, & \text{在 } S \setminus \Omega_- \text{ 中.} \end{cases}$$

显然 η_C 是一个闭的光滑微分,并具有紧支集.

设 $\omega \in E \cap C^1$, 那么 $\omega \in E^* \cap C^1$. 注意到 η_C 是实的, 我们有

$$0 = (\omega, * \eta_C) = - \int_S \omega \wedge \eta_C = - \int_{\Omega_-} \omega \wedge df.$$

由 § 8 命题 1 可知, ω 是闭的. 于是又有

$$0 = - \int_{\Omega_-} \omega \wedge df = \int_{\Omega_-} d(f\omega) = \int_{\partial\Omega_-} f\omega = \int_C \omega.$$

这就证明了 ω 沿任意逐段光滑闭曲线积分为零, 从而 ω 是恰当的. 证毕.

微分 η_C 在今后讨论中扮演着重要角色, 后面还要用到它. 我们称之为曲线 C 的**特征微分**.

定理 1 设 $\omega \in L^2(S)$ 是 C^1 光滑的微分, 则存在 C^2 光滑函数 f 及 g , 使得

$$\omega = df + *dg + h, \quad df \in E, \quad *dg \in E^*, \quad h \in H.$$

证 设 ω 有下列分解式

$$\omega = \alpha + \beta + h, \quad \alpha \in E, \quad \beta \in E^*, \quad h \in H.$$

根据命题 1, 只要证明 α 与 β 是 C^1 光滑的即可.

设 $p_0 \in S$ 为任意一点. 取一局部坐标卡 (U, φ) 使 $p_0 \in U$. 不失一般性, 可设 $\varphi(U)$ 是单位圆 Δ , 且 $\varphi(p_0) = 0$. 假定 ω 在这样的参数 $z = \varphi(p)$ 下的局部表示为

$$\omega = p dx + q dy \quad (z = x + iy),$$

那么 $d^*\omega = (p_x + q_y)dx \wedge dy$. 令

$$G(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta} (p_{\xi} + q_{\eta}) \ln |\zeta - z| d\xi \wedge d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

于是有

$$d^*dG = 4 \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} dx \wedge dy = (p_x + q_y)dx \wedge dy = d^*\omega.$$

因此, $d^*(\omega - dG) = 0$, 也即 $\omega - dG$ 在 Δ 中是上闭的. 这样, 由 § 8 命题 1 可知 $\omega - dG \perp E(U)$, 其中 $E(U) \stackrel{\text{def}}{=} \text{closure}\{df: f \in C_0^\infty(U)\}$. 于是由 § 8 定理 2 又有

$$\omega - dG = \beta' + h',$$

其中 $\beta' \in E^*(U) \stackrel{\text{def}}{=} \text{closure}\{^*df: f \in C_0^\infty(U)\}$, 而 h' 为 U 上调和微分. 由 ω, dG 及 h' 的 C^1 光滑性, 即可导出 β' 的光滑性. 再由 $\omega = \alpha + \beta + h$ 即得 $\beta - \beta' = dG - \alpha + h' - h$. 注意到 $\alpha \perp E^*(U)$ 及 $dG \perp E^*(U)$, 可知 $\beta - \beta' \perp E^*(U)$. 另外一方面, $\beta - \beta' \perp E(U)$. 这样, $\beta - \beta'$ 是 U 上调和微分. 因此, 由 β' 的光滑性即推出 β 的光滑性. 由此又进一步可推出 α 的光滑性. 由命题 1 即证得本定理的结论. 证毕.

这里应当提醒读者, 子空间 E (或 E^*) 并不包含 $L^2(S)$ 中全部恰当 (或上恰当) 的微分. 比如, 取 S 为单位圆, φ 是单位圆上的非平凡全纯函数, 且 $d\varphi \in L^2(S)$. 这时, $d\varphi$ 是一恰当微分, 并且是非平凡的调和微分. $d\varphi$ 属于 H , 但不属于 E .

§ 10 调和微分的存在性

上一节中关于光滑微分的分解定理为构造非平凡的调和微分提供了途径. 直接构造一个非平凡的调和微分是不容易的. 但是构造一个 C^1 闭微分是容易的. 只要这个微分不是恰当的, 那么它在 H 中的投影便是一个非平凡的调和微分.

更详细点说, 假如 ω 是一个 C^1 闭微分且 $\omega \in L^2(S)$, 但 ω 不是恰当的, 那么 $\omega \perp E^*$, 且有分解式

$$\omega = \alpha + h, \quad \alpha \in E, h \in H.$$

这里 h 一定是非平凡的. 如其不然, $\omega \in E$, 而 ω 又是光滑的, 则由上

节中的命题 1 可知, ω 是恰当的, 导致矛盾.

下面我们就用这个想法来构造调和微分.

设 C 是给定 Riemann 曲面 S 上的一条逐段光滑简单闭曲线. 又设 η_C 是 C 的一个特征微分, 则 η_C 是 C^1 闭微分.

假定 Riemann 曲面 S 具有下列性质: $S \setminus C$ 是连通的, 则 η_C 一定是非恰当的. 事实上, 这时总可以在 S 上选取到一条逐段光滑曲线 Γ 使其穿越 C 只一次, 并且给 Γ 以适当定向使其穿越 C 时从左至右. 这时不难看出

$$\int_{\Gamma} \eta_C = 1.$$

这就表明 η_C 不是恰当的. 总之, 我们证明了下列定理 1:

定理 1 若 Riemann 曲面 S 上有一条简单闭曲线 C 使得 $S \setminus C$ 是连通的, 则 S 上有非平凡的调和微分.

是否所有 Riemann 曲面 S 都具有定理中所说的曲线 C 呢? 显然不是. 比如, Riemann 球面 $\bar{\mathbb{C}}$ 就没有这样的简单闭曲线 C , 而且复平面中的任意区域也是如此.

如果一个 Riemann 曲面 S 上的任意一条简单闭曲线总将 S 分割为两个互不连通的部分, 则称 S 为**单叶的**(Schlicht) Riemann 曲面.

可以证明单叶 Riemann 曲面解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$ 中的某一区域.

单叶的 Riemann 曲面上是否有非平凡的调和微分呢?

$\bar{\mathbb{C}}$ 上没有非平凡的调和微分.

事实上, 若 ω 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的一个调和微分, 则 ω 是闭的. 另一方面, $\bar{\mathbb{C}}$ 中的任意一条简单闭曲线都是 $\bar{\mathbb{C}}$ 上某区域之边缘. 故由 Stokes 公式可知, ω 沿 $\bar{\mathbb{C}}$ 中任意简单曲线之积分等于零. 这样, ω 必为恰当的, 也即存在一个函数 $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $df = \omega$. 但 ω 是调和微分, 故 f 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的调和函数. 由 $\bar{\mathbb{C}}$ 的紧性可推出 f 是常值函数, 即 $df = 0$.

显然, $\bar{\mathbb{C}}$ 中的其他区域存在非平凡调和微分, 比如 $\omega = dz$.

下面我们讨论调和函数的存在性.

因为紧 Riemann 曲面上的调和函数总是平凡的, 故我们讨论带有某种奇性的调和函数的存在性.

设 $p_0 \in S$ 是任意给定的一点. 取一坐标卡 (U, φ) , 使得 $p_0 \in U$.

不失一般性,假定 $\varphi(U)$ 是单位圆,且 $\varphi(p_0)=0$.

我们定义一个函数 $\eta(z) \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\})$,使得

$$\eta(z) = \begin{cases} z^{-n}, & \forall z: |z| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \forall z: |z| \geq 1, \end{cases}$$

其中 n 为指定的自然数. 又令

$$w(p) = \begin{cases} \eta(\varphi(p)), & \forall p \in U, \\ 0, & \forall p \in S \setminus \overline{U}, \end{cases}$$

并考虑 $\psi = dw$.

设 $U_1 = \varphi^{-1}(\{z: |z| < 1/2\})$. 那么, ψ 限制在 U_1 内是半纯微分. 因而有

$$\psi - i^* \psi = 0, \quad p \in U_1 \setminus \{p_0\}.$$

在 p_0 点补充定义 $\psi - i^* \psi$ 为零. 这样, 虽然 ψ 在 p_0 处有奇性, 但是 $\omega = \psi - i^* \psi$ 在 S 上却是 C^∞ 光滑的且有紧的支集.

根据 § 9 定理 1, 在 S 上存在两个 C^2 的函数 f 与 g , 使得

$$\psi - i^* \psi = df + *dg + h,$$

其中 $df \in E, *dg \in E^*, h \in H$. 上式又可写成

$$dw - i^* dw = df + *dg + h,$$

也即

$$dw - df = *dg + i^* dw + h.$$

上式的左端是 $S \setminus \{p_0\}$ 上的闭微分, 而其右端是 $S \setminus \{p_0\}$ 上的上闭微分. 因此, $d(w-f)$ 是 $S \setminus \{p_0\}$ 上的调和微分, 也即 $w-f$ 是 $S \setminus \{p_0\}$ 上的一个调和函数.

这样, 我们证明了下面的定理 2:

定理 2 设 S 是任意一个 Riemann 曲面, 而 p_0 是 S 上任意的一点. 假定 p_0 附近有局部参数 z , 使得 p_0 对应于 $z=0$. 则对任意指定的自然数 n , 在 $S \setminus \{p_0\}$ 存在一个调和函数 u , 它在 p_0 附近的局部表示为

$$u = z^{-n} + u_1(z), \quad u_1 \in C^\infty,$$

并且 $du \in L^2(S \setminus \overline{U})$, 其中 U 是 p_0 点的任意一个邻域.

除了上述奇性之外, 我们还可以考虑在指定的点要求调和函数

具有对数奇性.

我们自然希望能仿照前面的办法. 但是, 这时不能考虑函数 $\eta = \ln z$, 因为它是一个多值解析函数. 如果考虑 $\eta = \ln |z|$, 虽避免了多值性, 但是 $d\eta$ 不是半纯微分, 影响后面的步骤.

为了克服这一困难, 我们考虑两个点具有对数奇性, 并将辅助函数 η 取为

$$\eta(z) = \ln \left\{ \frac{(z - z_1)}{(z - z_2)} \right\}, \quad |z| < \frac{1}{2},$$

其中 z_1 及 z_2 是圆 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$ 中的两个不同点. 记 $\widehat{z_1 z_2}$ 是圆 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$ 内 z_1 至 z_2 的一条连线. 那么 $\eta(z)$ 在圆 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$ 内以 $\widehat{z_1 z_2}$ 为割线可取一单值分支, 并仍记之为 η . 这时 η 在 $\widehat{z_1 z_2}$ 上任一点的“两侧”的值不同, 相差 $2\pi i$. 将 η 光滑延拓到全平面, 且使其单位圆外的值恒等于零.

容易看出, $d\eta$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ 中是一个光滑微分, 而在 z_1 及 z_2 点有对数奇性.

假定 Riemann 曲面 S 上有一局部坐标卡 (U, φ) , 其中 $\varphi(U)$ 是单位圆. 这时, 在 U 内定义了一个函数 $w = \eta(\varphi(p))$, 并在 $S \setminus \bar{U}$ 上将它定义为 0, 则 dw 在 $U_1 = \varphi^{-1}(\{z : |z| < 1/2\})$ 是半纯微分, 其极点为 $p_1 = \varphi^{-1}(z_1)$, $p_2 = \varphi^{-1}(z_2)$, 并在 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 是 C^∞ 光滑的. 重复前面的讨论, 即证明了: 在 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 存在一个调和函数. 令其实部为 u , 则 u 在 p_1 及 p_2 有局部表示

$$\begin{aligned} u &= \ln |z - z_1| + u_1(z), \\ u &= -\ln |z - z_2| + u_2(z), \end{aligned}$$

其中 u_1 及 u_2 是 U 中有界函数.

以上我们讨论了奇点 p_1 与 p_2 包含于同一参数盘的情况. 当 p_1 与 p_2 不在同一参数盘时, 上述结论在作一点形式上的修改后依然成立.

我们先来说明一个有奇点的调和函数的局部表示问题.

设 u 是 $S \setminus \{p_0\}$ 上的一个调和函数. 假定 p_0 点有一个局部坐标邻域 U 及局部参数 $z = \varphi(p)$, $\varphi(p_0) = 0$. 若 u 在 U 内有局部表示

$$u = a \ln |z| + u_1(z),$$

其中 a 为常数, $u_1(z)$ 是 $\varphi(U)$ 内的连续函数. 那么 a 在局部参数更换时不变.

事实上, 若 p_0 点另有一个局部坐标邻域 V 及参数 $\zeta = \psi(p)$, $\psi(p_0) = 0$. 这时参数 z 与 ζ 之间有转换函数 $f = \varphi \circ \psi^{-1}$. 那么, u 借助于 ζ 的局部表示应为

$$u = a \ln |f(\zeta)| + u_1 \circ f = a \ln |\zeta| + u_2(\zeta),$$

其中 $u_2 = u_1 \circ f + a \ln |f(\zeta)/\zeta|$. 显然, u_2 可以通过补充在 $\zeta = 0$ 的定义而成为在 $\zeta = 0$ 附近的连续函数.

现在, 我们证明下列定理:

定理 3 设 S 是任意一个 Riemann 曲面, p_1 与 p_2 是 S 上任意指定的两个不同点, 则在 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 上有一个调和函数 u , 在 p_1 及 p_2 分别有局部表示

$$u = \ln |z| + u_1(z), \quad u = -\ln |\zeta| + u_2(\zeta),$$

其中 z 是 p_1 附近的一个局部参数, p_1 对应于 $z = 0$; 而 ζ 是 p_2 附近的局部参数, p_2 对应于 $\zeta = 0$. 此外, u_1 及 u_2 是原点附近的连续函数.

证 当 p_1 与 p_2 充分靠近足以保证在同一参数盘内时, 定理的结论已经证明. 当 p_1 及 p_2 不在同一参数盘时, 我们考虑一串点列

$$q_0 = p_1, q_1, \dots, q_m = p_2,$$

使得每相邻两点 q_j 及 q_{j+1} 落入同一参数盘. 这样, 对于每一个 j , 都有一个在 $S \setminus \{q_j, q_{j+1}\}$ 上的调和函数 u_j , 在 q_j 及 q_{j+1} 的局部表示是

$$u_j = \ln |z_j| + u_j(z_j), \quad u_j = -\ln |\zeta_j| + \tilde{u}_j(\zeta_j),$$

其中 z_j 及 ζ_j 分别是 q_j 及 q_{j+1} 的局部参数, 使得 z_j 及 ζ_j 均对应于 0, 而 u_j 及 \tilde{u}_j 是原点附近之连续函数.

那么, 函数

$$u = u_0 + \dots + u_{m-1}$$

是 $S \setminus \{q_0, \dots, q_m\}$ 上的调和函数. 注意到在每一点 q_j ($0 < j < m$), u_j 及 u_{j+1} 在该点处的奇性相互抵消. 不难看出, u 是 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 上的调和函数, 并满足定理的全部要求, 定理证毕.

在考虑具有对数奇性的调和函数存在性问题时, 我们将奇点考虑为两个, 而不是一个. 这不仅是证明方法上的要求, 而且也是实质性的. 事实上, 当 Riemann 曲面是紧曲面时, 一个调和函数只在一点

有对数奇性是不可能的. 因为这样的调和函数都对应于一个半纯微分, 而其对数奇点对应于半纯微分的一阶极点. 我们知道紧曲面上半纯微分的留数之和为零. 所以, 这就要求有对数奇性的调和函数至少有两个奇点, 以保证对应的半纯微分的留数相互抵消.

§ 11 半纯微分与半纯函数的存在性

根据 § 5 中的讨论, 若 h 是 Riemann 曲面 S 上的调和微分, 则

$$\omega = h + i^*h$$

是全纯微分.

另外, 若 u 是 § 10 定理 2 中的调和函数, 在 p_0 点是 n 阶奇点, 那么

$$\omega = du + i^*du$$

在 $S \setminus \{p_0\}$ 上是全纯微分, 在 p_0 点是 $n+1$ 阶极点.

因此, 我们有下列定理:

定理 1 设 p_0 是 Riemann 曲面 S 上任意一点, 则对任意一个自然数 n , 都存在一个半纯微分 ω , 它在 $S \setminus \{p_0\}$ 上全纯, 而在 p_0 是 $n+1$ 阶极点.

另外, 我们完全类似地可以由 § 10 定理 3 得到下列定理:

定理 2 设 p_1 与 p_2 是 Riemann 曲面 S 上的任意两个不同点, 则 S 上有一个半纯微分 ω , 它在 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 上全纯, 而在 p_1 与 p_2 是一阶极点, 其留数分别为 1 与 -1 .

由这一定理立即推出

定理 3 任意一个 Riemann 曲面 S 上总有一个非平凡的半纯函数.

证 在 S 上取定三个不同点 p_1, p_2 及 p_3 . 由定理 2 可知, 存在一个半纯微分 ω_1 , 在 $S \setminus \{p_1, p_2\}$ 上全纯, 而在 p_1 及 p_2 为一阶极点, 并且还存在一个半纯微分 ω_2 , 在 $S \setminus \{p_2, p_3\}$ 上全纯, 而以 p_2 及 p_3 为其一阶极点. 这样, ω_1/ω_2 在 S 上定义了一个半纯函数, 它在 p_1 为极点, 而在 p_3 为零点, 因而是非平凡的. 证毕.

推论 紧 Riemann 曲面是可三角剖分的.

证 设 S 是一个紧 Riemann 曲面. 又设 $f: S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 是 S 上的一个非平凡的半纯函数. 那么, f 是 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的一个满射. 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上作一个三角剖分, 其三角形为 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, 并假定 f 的分歧点的像点均是顶点. 这时, 对于每个 j , f 在 $f^{-1}(\Delta_j)$ 的每个分支上都是一一映射. $\bar{\mathbb{C}}$ 的三角剖分可根据 f 拉回到 S 上, 从而形成了 S 的一个三角剖分. 证毕.

作为半纯微分存在性定理的一个应用, 我们证明下列定理:

定理 4 任何亏格为 0 的紧 Riemann 曲面均同构于 Riemann 球面 $\bar{\mathbb{C}}$.

证 设 S 是一个亏格为 0 的紧 Riemann 曲面. 根据定理 1, S 上存在一个半纯微分 ω , 在指定的一点 $p_0 \in S$ 为二阶极点, 而在 $S \setminus \{p_0\}$ 上全纯. 由于 $S \setminus \{p_0\}$ 同胚于平面, 故 $S \setminus \{p_0\}$ 上的任意一条简单闭曲线都是 $S \setminus \{p_0\}$ 中某区域的边缘. 因而 ω 沿任意一条简单闭曲线积分为零. 因此, 积分

$$f(p) = \int_{p_*}^p \omega$$

与路径无关, 其中 p_* 是在 $S \setminus \{p_0\}$ 中取定的一点.

函数 f 在 $S \setminus \{p_0\}$ 是全纯函数. 注意到 ω 在 p_0 处为二阶极点, 容易验证 f 在 p_0 处为一阶极点. 换句话说, f 是 S 上的一个半纯函数, 仅在 p_0 点是一阶极点.

这样, f 实现了 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的一个满射, 而且 $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ 的逆像只有一点. 由此推出, 作为 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射, f 覆盖 $\bar{\mathbb{C}}$ 的层数 $m=1$, 即 f 是共形映射. 证毕.

习 题

1. 设 Γ 是一切下列形式的平移变换组成的群:

$$z \mapsto z + m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

证明 \mathbb{C}/Γ 是一个 Riemann 曲面, 并证明 \mathbb{C}/Γ 同构于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. 证明 Riemann 曲面 S 上任意一个半纯函数都是 $S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射.

3. 证明任意一个 $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射一定是一个有理函数 $R(z) = P(z)/Q(z)$, 其中 P 与 Q 是多项式.

4. 设

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (P, Q) = 1$$

是一有理式, 其中 P 与 Q 为多项式, 则 R 作为 $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射, 其覆盖层数

$$m = \max\{\deg P, \deg Q\},$$

其中 \deg 表示多项式的次数.

5. 假定 ω 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的一个半纯微分, 并在 \mathbb{C} 上有局部表示 $\omega = dz$. 试求出它在 ∞ 附近的局部表示, 并说明 ω 在 ∞ 是极点还是零点.

6. 设 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是 Riemann 曲面 S_1 到 S_2 的共形映射. 试证明 S_1 与 S_2 上半纯微分所组成的线性空间同构.

7. 设 ω_1 与 ω_2 是 Riemann 曲面 S 上的两个半纯微分, 且 ω_2 是非平凡的. 试证明 ω_1/ω_2 在 S 上定义了一个半纯函数.

8. 设 S 是一个紧 Riemann 曲面, 则 S 上的任意一个半纯微分的零点个数与极点个数之差是一个只依赖于 S 的一个常数. 证明此结论并试就 $S = \bar{\mathbb{C}}$ 的情况定出此常数.

(提示: 利用第 7 题及第 5 题.)

9. 证明 $\bar{\mathbb{C}}$ 上没有非平凡的全纯微分.

10. 证明非平凡的全纯微分的零点是孤立的.

11. 设 ω 是 Riemann 曲面上的一个全纯微分, 且 $\omega = \bar{\omega}$. 证明 ω 必为平凡微分.

12. 设 S 是一个 Riemann 曲面, $\omega \in L^2(S)$. 试证明分解式

$$\omega = \alpha + \beta + h, \quad \alpha \in E, \beta \in E^*, h \in H$$

是惟一的.

13. 在上题分解式中, 若 ω 是实的, 试证明 α, β, h 都是实的.

14. 证明: $E^\perp = \{\omega \in L^2(S); (\omega, df) = 0, f \in C_0^\infty(S)\}$.

15. 设 D 为单位圆, $\varphi \in L^2(D)$. 证明 φ 是 D 中全纯函数的充要条件是

$$\iint_D \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(D).$$

(提示: 应用 Weyl 引理.)

16. 设 S 是一个 Riemann 曲面, p_1, \dots, p_m 是 S 上的 m 个点. 又设 C_1, \dots, C_m 为 m 个复数, $C_1 + \dots + C_m = 0$. 试证明在 S 上有一个半纯微分 ω , 它在 $S \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 上全纯, 在 p_1, \dots, p_m 上是一阶极点, 其留数分别是 C_1, \dots, C_m .

17. 在本章讨论中用到下列事实: 紧 Riemann 曲面上的调和函数必为常数. 试证明这一结论.

18. 设 h_0 是 $L^2(S)$ 中的一个恰当调和微分. 又设 $\omega \in C_0^\infty(S)$ 是一个一阶微分形式. 证明: $(\omega, h_0) = 0$.

第六章 Riemann-Roch 定理

本章的主要内容是证明著名的 Riemann-Roch 定理,并介绍它的若干重要应用,其中包含 Weierstrass 空隙定理与 Abel 定理.

§ 1 曲面的拓扑

我们需要有关曲面拓扑的基础知识,特别是基本群,同调群,典型剖分,覆盖曲面及同伦提升等概念.已经熟悉这些语言的读者,可以跳过这一节,直接阅读下一节.

设 S 是一个 Riemann 曲面.我们称 $\gamma: [0,1] \rightarrow S$ 是 S 上的一条曲线,如果 γ 是 $[0,1]$ 到 S 的一个连续映射.点 $p_0 = \gamma(0)$ 称做 γ 的始点,而点 $p_1 = \gamma(1)$ 称做 γ 的终点.

当始点与终点是同一点时, γ 称做**闭曲线**.当 γ 在 $(0,1]$ 上是一一映射且 $\gamma(0) = \gamma(1)$ 时, γ 称做**简单闭曲线**,或 **Jordan 曲线**.

设 p_0 与 p_1 是 S 上两个给定点.又设曲线 γ_0 与 γ_1 均以 p_0 为始点,以 p_1 为终点.我们称曲线 γ_0 与 γ_1 在 S 上关于 p_0 与 p_1 **定端同伦**,记为 $\gamma_0 \sim \gamma_1$,如果存在一个连续映射

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow S,$$

使得

$$F(0,t) = \gamma_0(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

$$F(1,t) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

且对 $\forall s \in [0,1]$,有

$$F(s,0) = p_0, \quad F(s,1) = p_1.$$

直观上, $\gamma_0 \sim \gamma_1$ 就是指 γ_0 可以连续地在 S 上变动而形变成 γ_1 ,并在变动的过程中始点与终点保持不动.

我们对同伦的闭曲线有特殊的兴趣.设有两条闭曲线 α 与 β ,它

们的始点与终点都是点 p_0 . 若它们关于始点及终点彼此同伦, 则称它们是关于 p_0 同伦的. 我们将一切关于 p_0 点与 α 同伦的闭曲线的全体称为 α 的**同伦类**, 记做 $[\alpha]_{p_0}$ 或 $[\alpha]$.

现在, 我们定义**曲线的乘法**. 我们定义以 p_0 为始点及终点的两条闭曲线 α 及 β 之积 $\alpha \cdot \beta$ 是一条曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$, 其定义如下:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \beta\left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right], & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

我们还可以定义一条闭曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ 的**逆** γ^{-1} :

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

此外, 若曲线 $e_{p_0}: [0, 1] \rightarrow S$ 作为映射是常值的, 即

$$e_{p_0}(t) \equiv p_0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

则称之为**平凡曲线**.

容易直接验证, 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$. 若 $\alpha \sim \alpha'$, 则有

$$\alpha^{-1} \sim \alpha'^{-1}, \quad e_{p_0} \cdot \alpha \sim e_{p_0} \cdot \alpha'; \quad \alpha \cdot e_{p_0} \sim \alpha' \cdot e_{p_0}.$$

这样, 下面的定义是合理的:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta], \quad [\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}];$$

也就是说, 上述定义与代表元素的选择无关.

在上述定义下, 全体以 p_0 点为始点与终点的闭曲线同伦类组成了一个群. 我们称之为 S 关于 p_0 的**基本群**, 记为 $\pi_1(S, p_0)$.

很容易看出, $[e_{p_0}]$ 是 $\pi_1(S, p_0)$ 的单位元, 其中 e_{p_0} 是平凡曲线.

设 p_1 是 S 上的另外一点. 那么 $\pi_1(S, p_0)$ 与 $\pi_1(S, p_1)$ 同构. 事实上, 可以取一曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$, 使得 $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1$. 这时, 任意一条以 p_0 为始点与终点的闭曲线 α , 都对应一条以 p_1 为始点与终点的闭曲线 $\beta = \gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma$. 不难验证

$$[\alpha]_{p_0} \mapsto [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma]_{p_1}$$

是 $\pi_1(S, p_0)$ 到 $\pi_1(S, p_1)$ 的一个同构.

由于基点不同的基本群彼此同构, 所以我们可以一定的意义下来谈论一个曲面 S 的抽象基本群, 或简称为基本群, 记为 $\pi_1(S)$.

例 环 $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$ 的基本群同构于 \mathbb{Z} ; 而 $\bar{\mathbb{C}}$ 与 \mathbb{C} 的基本群是平凡的 (即只有一个元素).

今后, 我们称 Riemann 曲面为**单连通的**, 如果它的基本群是平凡的.

设 $f: S \rightarrow S'$ 是两个曲面之间的一个连续映射, 则对任意一点 $p_0 \in S$,

$$[\alpha]_{p_0} \mapsto [f(\alpha)]_{f(p_0)}$$

是 $\pi_1(S, p_0)$ 到 $\pi_1(S', f(p_0))$ 的一个同态. 可见, f 诱导了一个 $\pi_1(S)$ 到 $\pi_1(S')$ 的同态.

因此, 当 $f: S \rightarrow S'$ 是 S 到 S' 的同胚时, $\pi_1(S)$ 与 $\pi_1(S')$ 同构.

此命题之逆命题不成立, 请读者自己举例说明. 可见, 基本群的概念仅在一定程度上刻画了曲面的拓扑性质.

现在, 我们讨论覆盖映射与同伦提升的概念.

设 \tilde{S} 与 S 是两个 Riemann 曲面. 假定 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是一个全纯映射, 并且是一个满射, 则对每一点 $p \in S$, \tilde{S} 上都有若干点 \tilde{p} 是 p 的逆像. 每一个 $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$ 都称为 p 的一个**上方点**, 而 p 称做 \tilde{p} 的**投影**.

设 S 上有一条曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$, 其始点为 p_0 . 若 \tilde{p}_0 是 p_0 的一个上方点, 且存在一条以 \tilde{p}_0 为始点之曲线 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$, 使得

$$\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma,$$

则我们称 $\tilde{\gamma}$ 是过 \tilde{p}_0 点 γ 的**提升**.

若对 S 上的每条曲线, 过其始点的每个上方点至少有一条提升曲线, 则称 (\tilde{S}, π) 是 S 的一个**非限覆盖**. 若 π 是无分歧全纯映射, 则称覆盖 (\tilde{S}, π) 是**光滑的**.

光滑的非限覆盖称做**正则覆盖**. 今后, 我们只讨论正则覆盖, 一般我们把正则覆盖简称为覆盖, 而正则覆盖中的映射称为覆盖映射.

这里所说的正则覆盖实际上就是拓扑学中的无歧覆盖. 在拓扑上, 它与第一章 § 5 中的定义等价. 但在 Riemann 曲面论中的覆盖映射要求是全纯映射.

设 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是一个覆盖映射. 根据定义, 它应当是无歧的满射. 因此, π 是一个局部一一的满射.

但是局部一一的满射未必是覆盖映射, 因为局部一一性及映满性不足以保证每条曲线过其始点的每个上方点都有提升. 第一章 § 5 已举过这样的例子.

下面的定理 1 是一个十分基本的定理:

定理 1 (单值性定理) 设 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是 S 的一个覆盖映射. 又设 α 与 β 是 S 上的两条曲线, 有共同的始点 p_0 及终点 p_1 , 并在 S 上定端同伦. 假定 \tilde{p}_0 是 p_0 的一个上方点, $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 分别是 α 与 β 过 \tilde{p}_0 的提升曲线, 则 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 有相同的终点, 并且在 \tilde{S} 上 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 定端同伦.

这是一个纯拓扑学的定理, 其证明可在一般的拓扑学教程中找到.

设 (\tilde{S}, π) 是 S 的一个正则覆盖. 当 \tilde{S} 是一个单连通曲面时, 我们称 (\tilde{S}, π) 是 S 的万有覆盖.

定理 2 设 S_1 及 S_2 是两个 Riemann 曲面, 而 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是一个连续映射. 又假定 (\tilde{S}_1, π_1) 及 (\tilde{S}_2, π_2) 分别是 S_1 与 S_2 的万有覆盖. 那么, 存在一个连续映射

$$\tilde{f}: \tilde{S}_1 \rightarrow \tilde{S}_2$$

使得下列交换图成立:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \end{array}$$

即 $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$. 当 f 是全纯映射时, \tilde{f} 也是全纯的.

这里的 \tilde{f} 称为 f 的提升.

证 在 \tilde{S}_1 上取定一点 \tilde{p}_0 , 它是 $p_0 = \pi_1(\tilde{p}_0)$ 的上方点. 令 $q_0 = f(p_0)$, 并取定 \tilde{q}_0 为 q_0 的一个上方点.

我们定义

$$\tilde{f}(\tilde{p}_0) = \tilde{q}_0.$$

以下我们定义 \tilde{f} 在任意一点 $\tilde{p} \in \tilde{S}_1$ 的值.

对于任意一点 $\tilde{p} \in \tilde{S}_1$, 取一曲线 α 连结 \tilde{p}_0 及 \tilde{p} , 使 \tilde{p}_0 为始点而 \tilde{p} 为终点. 这样, 我们得到 S_1 上的一条曲线

$$\beta = f \circ \pi_1 \circ \alpha.$$

它以 q_0 为始点, 而以 $f(\pi_1(\tilde{p}))$ 为终点. 过点 \tilde{q}_0 提升 β 得到 $\tilde{\beta}$. 设 $\tilde{\beta}$ 的终点为 \tilde{q} . 我们定义

$$\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}.$$

单值性定理保证了这样的定义结果与曲线 α 的选择无关. 事实上, 若另取一条曲线 α' 也同样满足要求. 那么, 由 \tilde{S}_1 的单连通性, $\alpha \sim \alpha'$. 由此推出, $\beta \sim \beta' (= f \circ \pi_1 \circ \alpha')$. 设 $\tilde{\beta}'$ 是 β' 过 \tilde{q}_0 的提升, 那么, 由单值性定理可知, $\tilde{\beta}$ 与 $\tilde{\beta}'$ 有相同的终点. 证毕.

一般说来, \tilde{f} 不是惟一确定的, 它取决于 \tilde{p}_0 与 \tilde{q}_0 的选取.

以后证明的单值化定理将告诉我们, 单连通的 Riemann 曲面解析同构于 \mathbb{C} , \mathbb{C} 或单位圆. 而任意一个 Riemann 曲面都有一个单连通的覆盖曲面. 这样, 通过同伦提升, 可以将两个 Riemann 曲面之间的映射提升到上述三种典型区域上处理. 这将为我们带来许多便利.

现在, 我们来讨论覆盖变换及覆盖变换群.

假定 S 及 \tilde{S} 为 Riemann 曲面, 并设 (\tilde{S}, π) 是 S 的一个正则覆盖. 若 $f: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ 是 \tilde{S} 的一个自同胚映射, 且满足

$$\pi \circ f = \pi,$$

则称 f 是 S 的一个**覆盖变换**. 因为 π 及 π^{-1} 是局部共形映射, 故覆盖变换是 \tilde{S} 的一个解析自同构.

全体覆盖变换组成一个群, 称做**覆盖变换群**.

定理 3 设 (\tilde{S}, π) 是 S 的一个覆盖. 又设 $g: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ 是一个非平凡的覆盖变换, 则 g 在 \tilde{S} 上没有不动点.

证 用反证法. 假定 g 有一个不动点 $\tilde{p}_0 \in \tilde{S}$, 也即 $g(\tilde{p}_0) = \tilde{p}_0$. 由于 g 是 \tilde{S} 上的非平凡解析映射, 故对 \tilde{p}_0 的任意一邻域 U 都有

$$(U \setminus \{\tilde{p}_0\}) \cap (\{g(U)\} \setminus \{\tilde{p}_0\}) \neq \emptyset.$$

这样, 存在 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in U \setminus \{\tilde{p}_0\}$, 使得 $\tilde{p}_1 = g(\tilde{p}_2)$ 且 $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$ (回顾 g 的非平凡性). 因此, $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$. 这与 π 的局部一一性矛盾. 证毕.

定理 4 设 (\tilde{S}, π) 是 S 的一个万有覆盖, 则其覆盖变换群同构于 S 的基本群.

证 设 $\pi: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ 的覆盖变换群为

$$G = \{g: \pi \circ g = \pi\},$$

在 \tilde{S} 上取定一点 \tilde{p}_0 , 并考虑集合

$$P = \{g(\tilde{p}_0): \forall g \in G\}.$$

那么, 映射

$$g \mapsto g(\tilde{p}_0), \quad \forall g \in G$$

是 G 到 P 的一一满射(基于非平凡的覆盖变换没有不动点).

对任意的 $g \in G$, 取一条曲线 $\alpha_g: [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$, 使 $\alpha_g(0) = \tilde{p}_0, \alpha_g(1) = g(\tilde{p}_0)$. 那么, 投影 $\pi(\alpha_g)$ 是一条以 $p_0 = \pi(\tilde{p}_0)$ 为其始点及终点的闭曲线. 我们考虑对应

$$\chi: g \mapsto [\pi(\alpha_g)]_{p_0}.$$

注意到 \tilde{S} 的单连通性, 由单值性定理可知这个对应不依赖于 α_g 的不同选择.

根据前面的讨论可以看出 χ 是一个单射. 此外, 不难验证 $\chi: G \rightarrow \pi_1(S, p_0)$ 是映满的, 且保持群的运算. 因此, χ 是 G 到 $\pi_1(S, p_0)$ 的一个同构. 证毕.

现在我们转入讨论同调群及曲面的典型剖分.

设 S 是一个紧 Riemann 曲面. 在 S 上取定一个三角剖分并取定一个定向. 三角剖分的顶点称做 0 维单形, 每个小三角形的边称做一维单形, 而每个小三角形称做二维单形. 不失一般性, 我们可以假定小三角形的边是逐段光滑的.

一个一维链是指形式表达式

$$\alpha = \sum_{j=1}^n m_j c_j,$$

其中 m_j 为整数, 而 c_j 是一维单形. 换句话说, 一个一维链是有限个一维单形关于整数的线性组合.

对于一个光滑的一阶微分形式 ω , 它在一维链 $\alpha = m_1 c_1 + \cdots + m_n c_n$ 上的积分定义为

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{j=1}^n m_j \int_{c_j} \omega.$$

类似地, 可以定义二维链. 它是有限个二维单形关于整数的线性组合:

$$D = \sum_{j=1}^l k_j \Delta_j, \quad k_j \in \mathbb{Z},$$

其中 Δ_j 是二维单形. 二阶微分形式 Ω 在二维链 D 上的积分是

$$\int_D \Omega = \sum_{j=1}^l k_j \int_{\Delta_j} \Omega.$$

此外, \odot 维链是指有限个 \odot 维单形关于整数的线性组合:

$$q = \sum_{j=1}^r n_j p_j, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

其中 p_j 为 \odot 维单形. 一个 \odot 阶形式 f (即函数) 在 \odot 维链上的积分定义为

$$\int_q f = \sum_{j=1}^r n_j f(p_j).$$

一个一维单形 c 的边缘定义为 $\partial c = p_1 - p_0$, 其中 p_0 为 c 的始点, 而 p_1 为 c 的终点. 一个一维链 $\alpha = m_1 c_1 + \cdots + m_n c_n$ 的边缘 $\partial \alpha$ 定义为

$$\partial \alpha = m_1 \partial c_1 + \cdots + m_n \partial c_n.$$

一个二维单形 Δ 的边缘 $\partial \Delta = c_1 + c_2 + c_3$, 这里 c_1, c_2 和 c_3 是 Δ 的三条边, 其定向由 S 的定向决定. 设 $D = k_1 \Delta_1 + \cdots + k_l \Delta_l$ 是一个二维链, 则其边缘定义为

$$\partial D = k_1 \partial \Delta_1 + \cdots + k_l \partial \Delta_l.$$

有了链的边缘运算之后, 在假定一维单形都是逐段光滑的条件下, 我们有

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

其中 D 是任意一个二维链, ω 是一个一阶光滑微分形式. 这就是关于一阶微分形式的一般 Stokes 公式.

设 α 是任意一个一维链, 而 F 是 S 上的一个光滑函数, 则有 Stokes 公式

$$\int_\alpha dF = \int_{\partial \alpha} F.$$

它是一元微积分中 Newton-Leibniz 公式的推广.

像对微分形式一样, 对于链也可以定义闭的与恰当的. 我们称一

条链为闭的, 如果它的边缘为 0. 我们称一条链为恰当的, 如果存在一条高维链使其边缘恰好是这条链.

两条同维的链可以进行加法运算, 只要把两个形式和自然合并为一个形式和即可.

S 上全体一维闭链的集合记做 C . C 中的两个元素 α 与 β 称做同调, 如果 $\alpha - \beta$ 是恰当的. 所有与 α 同调的链的集合称为 α 的同调类, 记做 $[\alpha]$.

同调类之间也可以定义加法运算:

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta].$$

这样的定义不依赖于代表元 α 与 β 的选取.

在这样的加法运算之下, 全体一维同调类组成了一个群, 我们称之为 **一维同调群**, 记之为 $H_1(S)$. 显然, 一维同调群是一个 Abel 群.

亏格为 g 的曲面上存在 $2g$ 条闭曲线:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g.$$

它们有共同的始点与终点 p_0 , 并且除去 p_0 之外, 彼此无其他交点 (见图 6.1). 此外,

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

在 S 上同伦于 1. 沿着这些曲线剪开, 曲面同胚于平面上的 $4g$ 边形 (见图 6.2).

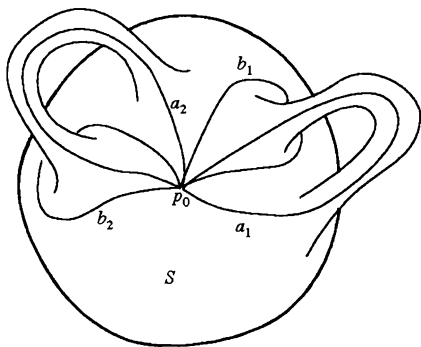


图 6.1

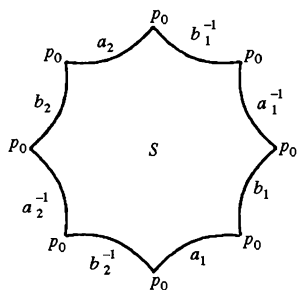


图 6.2

我们称满足上述要求的闭曲线组 $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ 为 S 的一个**典型剖分**.

如果将这组闭曲线视作一组闭的一维链, 那么

$$[a_1], [b_1], \dots, [a_g], [b_g]$$

构成了一维同调群 $H_1(S)$ 的一组基. 换句话说, $H_1(S)$ 是由上述 $2g$ 个元素自由生成的.

§ 2 de Rahm 上同调群

设 S 是紧 Riemann 曲面, 其亏格为 g . 又设 $H_1(S)$ 是 S 的一维同调群, 并假定

$$\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$$

是 S 上的一个典型剖分.

设 ω 是一个一阶光滑微分形式. 对于 S 上任意一条逐段光滑曲线 α , 我们定义

$$(\alpha, \omega) = \int_{\alpha} \omega.$$

若 α 与 β 是两条闭链, 且 $\alpha - \beta$ 是恰当的, 也即存在一个二维链 D , 使得 $\partial D = \alpha - \beta$, 则由 Stockes 公式有

$$(\alpha - \beta, \omega) = \int_{\alpha - \beta} \omega = \int_D d\omega.$$

由此推出, 若进一步假定 ω 是闭的, 则 $(\alpha - \beta, \omega) = 0$, 也即

$$(\alpha, \omega) = (\beta, \omega).$$

可见, 闭的一阶微分形式 ω 在同调类上可以定义积分:

$$\int_{[\alpha]} \omega = \int_{\alpha} \omega.$$

记 $\Lambda_1(S)$ 为 S 上全体一阶光滑闭的微分形式. $\Lambda_1(S)$ 中两个元素 ω_1 与 ω_2 称做等价并记做 $\omega_1 \sim \omega_2$, 如果 $\omega_1 - \omega_2$ 是恰当的. $\omega \in \Lambda_1(S)$ 的等价类记做 $[\omega]$. 全体这样的等价类组成的群称做 **de Rahm 上同调群**, 并记为 $H^1(S)$.

显然,两个等价的一阶闭的微分形式 ω_1 与 ω_2 沿任意一条一维闭链 α 的积分均相等,也即

$$\int_{\alpha} \omega_1 = \int_{\alpha} \omega_2.$$

这是因为存在一光滑函数 f 使得 $\omega_1 - \omega_2 = df$, 而 α 是闭的, 故有

$$\int_{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) = \int_{\alpha} df = 0.$$

这样,对于 de Rahm 上调群中的元素 $[\omega]$ 定义沿一维闭链 α 的积分

$$\int_{\alpha} [\omega] = \int_{\alpha} \omega$$

是合理的.

这样,偶 (α, ω) 诱导了 $H_1(S) \times H^1(S)$ 到 \mathbb{C} 的一个映射:

$$\Phi: ([\alpha], [\omega]) \mapsto (\alpha, \omega).$$

一个闭的光滑 1-形式乘以任意复数仍是一个闭的光滑 1-形式. 而且容易验证这种数乘可以扩充定义到 $H^1(S)$ 的元素中:

$$c[\omega] = [c\omega], \quad c \in \mathbb{C}.$$

这样一来 $H^1(S)$ 又是复数域 \mathbb{C} 上的一个线性空间.

现在,我们确定 $H^1(S)$ 的维数.

设 α 与 β 是两条闭的不自交的一维链, η_{α} 与 η_{β} 分别是 α 与 β 的特征微分. 那么由第五章 § 9 可知

$$(\alpha, \eta_{\beta}) = \int_{\alpha} \eta_{\beta} = \int_S \eta_{\alpha} \wedge \eta_{\beta}.$$

我们已经知道,特征微分是光滑的一阶闭形式. 故 (α, η_{β}) 只依赖于 $[\alpha]$, 而与其代表元 α 的选取无关.

另外,由上式可以看出

$$(\alpha, \eta_{\beta}) = -(\beta, \eta_{\alpha}).$$

由此又推出, (α, η_{β}) 只依赖于 $[\beta]$, 而与其代表元 β 的选取无关.

对于两条闭的一维链 α 与 β , 我们定义

$$\alpha \times \beta = (\alpha, \eta_{\beta}).$$

那么 $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$, 且 $\alpha \times \beta \in \mathbb{Z}$. 根据特征微分的定义, $\alpha \times \beta$ 实际上表示了 α 穿越 β 的次数: 每当 α 自左向右穿越 β 一次时记数为 $+1$, 而当 α 自右向左穿越 β 一次时记数为 -1 . (注: 两条闭链之间在某点相交, 不一定是彼此穿越的关系. 如果在一点处 α 与 β 不是彼此穿越的关系, 则该点对 $\alpha \times \beta$ 的贡献为零).

现在, 我们取 S 的一个典型剖分

$$\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}.$$

并令

$$\gamma_j = a_j, \quad j = 1, \dots, g;$$

$$\gamma_j = b_{j-g}, \quad j = g+1, \dots, 2g.$$

根据典型剖分的定义, 不难看出

$$\gamma_i \times \gamma_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq g,$$

$$\gamma_i \times \gamma_{g+j} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq g,$$

$$\gamma_{g+i} \times \gamma_j = -\delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq g,$$

$$\gamma_{g+i} \times \gamma_{g+j} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq g.$$

若设 E 是 $g \times g$ 的单位矩阵, 上述条件又可简单地写成

$$\left(\gamma_i \times \gamma_j \right)_{2g \times 2g} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

定义 1 若 $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ 满足条件 (6.1), 则称 $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ 为 $H_1(S)$ 的一组典型基.

紧曲面的一个典型剖分总对应于其同调群的一组典型基. 典型基在下面的讨论中有特殊作用.

定理 1 设 S 是亏格为 g 的紧 Riemann 曲面, 则 S 的 de Rham 上同调群 $H^1(S)$ 的复维数

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S) = 2g.$$

证 设

$$[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$$

是 $H_1(S)$ 的一组典型基. 我们考虑映射

$$\Psi: H^1(S) \rightarrow \mathbb{C}^{2g}; \quad [\omega] \mapsto \left(\int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_{2g}} \omega \right).$$

那么, Ψ 是一个线性映射.

若 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S) > 2g$, 则 Ψ 有非平凡核, 也即存在一个非恰当的光滑闭微分 ω , 使得

$$\int_{\gamma_j} \omega = 0, \quad j = 1, \dots, 2g. \quad (6.2)$$

然而, S 上的任意一条一维闭链 α 均可写成

$$\alpha = m_1 \gamma_1 + \dots + m_{2g} \gamma_{2g} + \beta,$$

其中 β 为一恰当链, 而 m_1, \dots, m_{2g} 为整数. 注意到 ω 是闭的, 从而它在 β 上积分为 0. 再由 (6.2) 式有

$$\int_{\alpha} \omega = 0.$$

然而这意味着 ω 是恰当的, 与假定矛盾. 这就证明了

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S) \leq 2g.$$

为了证明 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S) = 2g$, 只要证明 Ψ 是一个满射即可. 令

$$\omega_j = \eta_{\gamma_{g+j}}, \quad \omega_{g+j} = -\eta_{\gamma_j} \quad (j = 1, \dots, g),$$

其中 η_{γ} 表示 γ 的特征微分. 根据条件 (6.1), 我们有

$$\int_{\gamma_j} \omega_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, 2g. \quad (6.3)$$

于是

$$\Psi([\omega_j]) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } j \text{ 位}}}{1}, 0, \dots, 0).$$

这样 $(\Psi([\omega_1]), \dots, \Psi([\omega_{2g}]))$ 是 \mathbb{C}^{2g} 的一组基. 因此, Ψ 是一个满射. 证毕.

容易验证, Ψ 也是单射. 因此, Ψ 实现了 $H^1(S)$ 到 \mathbb{C}^{2g} 的一个同构, 而 $[\omega_1], \dots, [\omega_{2g}]$ 是 $H^1(S)$ 的一组基.

定义 2 设 $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ 为 $H_1(S)$ 的一组基, 而 $[\omega_1], \dots, [\omega_{2g}]$ 为 $H^1(S)$ 的一组基. 若它们满足条件 (6.3), 则称它们为**对偶基**.

上述讨论表明, 通过取典型剖分曲线的特征微分, 即可得到 $H_1(S)$ 的典型基的一组对偶基.

定理 1 的一个重要应用就是推出下列定理:

定理 2 亏格为 g 的紧 Riemann 曲面 S 上的调和微分所组成的复线性空间的维数是 $2g$.

证 我们用 H 表示 S 上全体调和微分所组成的线性空间. 由于 S 是紧 Riemann 曲面, 故 S 上的每个光滑 1-形式都是平方可积的, 即属于 $L^2(S)$.

设 ω 是 S 上的一个光滑闭微分. 由第五章 § 9 中的定理 1 及 § 8 命题 1 可知

$$\omega = df + h, \quad h \in H.$$

由此可见, 每个 $[\omega] \in H^1(S)$ 都有一个调和微分 h . 而且不难看出, h 是惟一确定的. 反过来, 对于每一个 $h \in H$, 又都有一个元素 $[h] \in H^1(S)$ 与之对应.

总之, 我们建立了 $H^1(S)$ 到 H 的一个一一对应. 由光滑闭微分的分解定理, 不难看出这种对应还保持线性运算, 因而它是 $H^1(S)$ 到 H 的一个同构. 因此, 由定理 1 可知, $\dim_{\mathbb{C}} H = 2g$. 证毕.

§ 3 紧 Riemann 曲面上的全纯微分

我们用 $\mathcal{H}(S)$ (或 \mathcal{H}) 代表紧 Riemann 曲面 S 上全体全纯微分所组成的复线性空间.

很容易猜想到 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(S) = g$, 其中 g 是 S 的亏格.

定理 1 设 S 是一个亏格为 g 的紧 Riemann 曲面, 则 S 上的全体全纯微分所组成的复线性空间 $\mathcal{H}(S)$ 的维数为 g .

证 根据前一章的讨论,

$$\mathcal{H} = \{h + i^*h; h \in H\}.$$

另外, 我们考虑

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{h - i^*h; h \in H\}.$$

H 中的每一个元素 $h \in H$, 我们可写成

$$h = \varphi + \tilde{\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \quad \tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

现在, 我们要进一步证明 $H = \mathcal{H} \oplus \tilde{\mathcal{H}}$. 为此, 应证明 $\mathcal{H} \cap \tilde{\mathcal{H}} = \{0\}$.

设 $h \in \mathcal{H} \cap \tilde{\mathcal{H}}$, 即存在 h_1 与 $h_2 \in H$ 使得

$$h = h_1 + i^*h_1 = h_2 - i^*h_2.$$

由此推出

$$h_1 - h_2 + i^*(h_1 + h_2) = 0.$$

这样, $2h_2 = h_1 + h_2 + i^*(h_1 + h_2)$ 是全纯微分, 从而 h_2 是全纯微分, 即有 $h_2 = i^*h_2$. 这就导致 $h = h_2 - i^*h_2 = 0$.

总之, 我们证明了: $H = \mathcal{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}$.

考虑映射

$$\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}, \quad h + i^*h \mapsto h - i^*h.$$

显然, Φ 实现了 \mathcal{H} 到 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 的一个实同构. 由此可见

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = \frac{1}{4} \dim_{\mathbb{R}} H = g.$$

证毕.

为了进一步研究紧 Riemann 曲面上的全纯微分, 我们将给出 \mathcal{H} 的一组特殊的基, 使得它们在 $H_1(S)$ 的典型基上的积分满足某种特殊要求.

设 $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ 是 S 的一个典型剖分. 任何一个光滑闭微分 ω 沿着 a_1, \dots, a_g 的积分值所形成的数组

$$\int_{a_1} \omega, \dots, \int_{a_g} \omega$$

称做 ω 的 a 周期. 完全类似地可以定义 ω 的 b 周期.

令

$$\alpha_j = \eta_{b_j}, \quad \beta_j = -\eta_{a_j} \quad (j = 1, \dots, g),$$

其中 η_c 代表关于 c 的特征微分. 那么

$$\int_{a_j} \alpha_k = \int_{b_j} \beta_k = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, g), \quad (6.4)$$

而

$$\int_{a_j} \beta_k = \int_{b_j} \alpha_k = 0 \quad (j, k = 1, \dots, g). \quad (6.5)$$

设光滑闭微分 ω 的 a 周期为 A_1, \dots, A_g , 而其 b 周期为 B_1, \dots, B_g , 则线性组合

$$\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^g (A_j \alpha_j + B_j \beta_j)$$

与 ω 有相同的 a 周期与 b 周期. 于是, $\omega - \tilde{\omega}$ 的 a 周期与 b 周期全部为 0. 由此推出 $\omega - \tilde{\omega}$ 是恰当的, 也即

$$\omega = \sum_{j=1}^g (A_j \alpha_j + B_j \beta_j) + df, \quad f \in C^2. \quad (6.6)$$

引理 1 设 ω 及 $\tilde{\omega}$ 是两个光滑闭微分, 则有

$$\int_S \omega \wedge \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^g (A_j \tilde{B}_j - B_j \tilde{A}_j), \quad (6.7)$$

其中 (A_1, \dots, A_g) 是 ω 的 a 周期, 而 (B_1, \dots, B_g) 是 ω 的 b 周期, $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_g)$ 是 $\tilde{\omega}$ 的 a 周期, 而 $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_g)$ 是 $\tilde{\omega}$ 的 b 周期.

证 由 (6.6) 式我们有

$$\omega = \sum_{j=1}^g (A_j \alpha_j + B_j \beta_j) + df, \quad f \in C^2;$$

$$\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^g (\tilde{A}_j \alpha_j + \tilde{B}_j \beta_j) + d\tilde{f}, \quad \tilde{f} \in C^2.$$

注意 S 的紧性, 由 Stokes 公式我们又有

$$\begin{aligned} \int_S \omega \wedge \tilde{\omega} &= \int_S (\omega - df) \wedge (\tilde{\omega} - d\tilde{f}) \\ &= \int_S \sum_{j=1}^g (A_j \alpha_j + B_j \beta_j) \wedge \sum_{j=1}^g (\tilde{A}_j \alpha_j + \tilde{B}_j \beta_j). \end{aligned}$$

注意到 (6.4) 及 (6.5) 式, 并回顾

$$\int_S \alpha_j \wedge \beta_k = \int_{b_j} \beta_k = \int_{a_k} \alpha_j,$$

立即推出结论 (6.7) 式. 证毕.

推论 若全纯微分 ω 的 a 周期全为零, 则 $\omega = 0$.

证 设 ω 的 a 周期为 A_1, \dots, A_g , 而其 b 周期为 B_1, \dots, B_g , 则

$$\|\omega\|^2 = i \int_S \omega \wedge \bar{\omega} = i \sum_{j=1}^g (A_j \bar{B}_j - B_j \bar{A}_j).$$

若 $A_1 = \dots = A_g = 0$, 则 $\|\omega\| = 0$. 证毕.

引理 2 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 的一组基, 则其 a 周期矩阵

$$\left(a_{ij} \right)_{g \times g} \equiv \left(\int_{a_i} \varphi_j \right)_{g \times g}$$

是满秩的.

证 设 $\det(a_{ij}) = 0$, 则存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_g$, 使得

$$\sum_{j=1}^g \lambda_j a_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, g.$$

令 $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_g \varphi_g$, 则上式表明 φ 的 a 周期全为零. 由引理 1 的推论可知, $\varphi = 0$, 也即

$$\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_g \varphi_g = 0.$$

这与 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 是一组基矛盾. 证毕.

设 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 的一组基, 其 a 周期矩阵为

$$A = \left(a_{ij} \right)_{g \times g}.$$

引理 2 告诉我们, A 的行列式不为零. 于是存在一个矩阵 C , 使得

$$AC = E,$$

这里 E 是 $g \times g$ 的单位矩阵. 设 $C = \left(c_{ij} \right)_{g \times g}$, 则有

$$\sum_{j=1}^g c_{jk} a_{lj} = \delta_{kl}.$$

令

$$\psi_k = \sum_{j=1}^g c_{jk} \varphi_j \quad (k = 1, \dots, g),$$

则 ψ_1, \dots, ψ_g 组成 $\mathcal{H}(S)$ 的一组新的基. 对这组基而言, 其 a 周期矩阵是单位矩阵.

定义 1 若 $\mathcal{H}(S)$ 的一组基的 a 周期矩阵是单位矩阵, 则称之为**一组典型基**.

在取定 S 的典型剖分之后, $\mathcal{H}(S)$ 的典型基总是存在的, 并且是惟一的.

设 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 的一组典型基, 则其 b 周期矩阵

$$B = \left(b_{ij} \right)_{g \times g} \equiv \left(\int_{b_i} \varphi_j \right)_{g \times g}$$

有某些特征.

首先, B 是对称矩阵. 事实上, 由引理 1 有

$$\int_S \varphi_j \wedge \varphi_k = \sum_{l=1}^g (\delta_{jl} b_{lk} - b_{lj} \delta_{kl}) = -b_{kj} + b_{jk}.$$

但 φ_j 与 φ_k 是全纯微分, 故 $\varphi_j \wedge \varphi_k = 0$. 由此推出 $b_{kj} = b_{jk}$.

其次, 矩阵 B 的虚部 $\text{Im} B$ 是正定的. 这同样是由引理 1 推出来

的. 事实上, 令

$$\omega = x_1 \varphi_1 + \cdots + x_g \varphi_g,$$

其中 x_1, \dots, x_g 为实数, 则有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\omega\|^2 = i \int_S \omega \wedge \bar{\omega} \\ &= i \int_S \left(\sum_{j=1}^g x_j \varphi_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^g x_k \bar{\varphi}_k \right) \\ &= i \sum_{j,k} x_j x_k \int_S \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_k. \end{aligned}$$

再次应用引理 1, 我们有

$$i \int_S \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_k = i \sum_{l=1}^g (\delta_{jl} \bar{b}_{lk} - b_{lj} \delta_{kl}) = 2 \operatorname{Im} b_{jk}.$$

即有

$$2 \sum_{j,k} (\operatorname{Im} b_{jk}) x_j x_k \geq 0.$$

很容易验证上述不等式中 等号成立的充要条件是 $x_1 = \cdots = x_g = 0$. 故 $\operatorname{Im} B$ 是正定的.

总之, 我们证明了下列定理 2.

定理 2 设 S 是亏格为 g 的紧 Riemann 曲面, $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ 是它的一个典型剖分. 又设 S 上的全纯微分的线性空间 $\mathcal{H}(S)$ 有一组典型基 $(\varphi_1, \dots, \varphi_g)$, 也即

$$\int_{a_j} \varphi_k = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, g),$$

则其 b 周期所形成的矩阵

$$B = \left(\int_{b_j} \varphi_k \right)_{g \times g}$$

是对称矩阵, 且其虚部 $\operatorname{Im} B$ 是正定的.

推论 设 c_1, \dots, c_g 是任意给定的一组复数, 则存在一个全纯微分 φ 使其 a 周期为 c_1, \dots, c_g .

满足怎样条件的矩阵才能成为某个 Riemann 曲面的周期矩阵 B , 这是一个尚未完全解决的问题.

L. Ahlfors 曾经证明过, 当亏格 $g > 1$ 时, B 的系数中有 $3g - 3$

个独立变量. 由此, 他给出了 Teichmüller 空间的自然复结构, 使之成为 $3g-3$ 维复流形.

§ 4 半纯微分的双线性关系

从上一节的讨论中, 我们已经看到其中引理 1 的重要性. 它的结论可以写成下列形式: 若 φ 与 $\tilde{\varphi}$ 是两个全纯微分, 而 $a_1, \dots, a_g; b_1, \dots, b_g$ 为紧 Riemann 曲面 S 的一个典型剖分, 则有

$$\sum_{j=1}^g \left(\int_{a_j} \varphi \int_{b_j} \tilde{\varphi} - \int_{b_j} \varphi \int_{a_j} \tilde{\varphi} \right) = \int_S \varphi \wedge \tilde{\varphi} = 0. \quad (6.8)$$

这一关系式也称为全纯微分的**双线性关系**. 本节的主要目的是将这种关系推广到半纯微分上, 而半纯微分的双线性关系是证明 Riemann-Roch 定理的基础.

假定 S 是亏格为 g 的紧 Riemann 曲面. 又设它有一个典型剖分 $a_1, \dots, a_g; b_1, \dots, b_g$. 我们沿这些闭曲线将 S 剪开就得到一个有 $4g$ 条边的多边形, 记之为 S_0 , 见图 6.3. 这时在这些剖分线上的任意一点变成 S_0 的两个边界点 p 与 p' . 今后我们称它们为等价点.

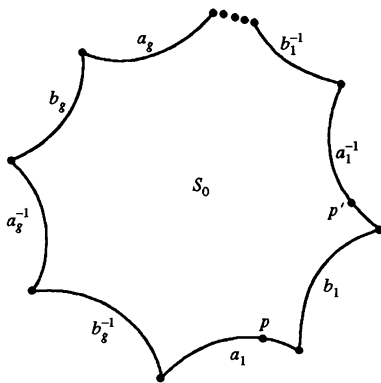


图 6.3

设 θ 与 $\tilde{\theta}$ 是 S 上的两个光滑闭微分. 注意到 $S_0 = S \setminus \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ 是一个单连通域, 故存在一个 S_0 上的光滑函数 f 使得在 S_0 上有 $\theta = df$, 其中 f 可以取成

$$f(z) = \int_{z_0}^z \theta, \quad z \in S_0, \quad z_0 \in S_0,$$

这里的积分路径限于 S_0 之内.

显然, f 可以连续延拓到 S_0 的边界上. 但这时要注意 f 延拓后, 在等价的边界点上未必有相同的值. 这样, 由 Stokes 公式有

$$\int_S \theta \wedge \tilde{\theta} = \int_{S_0} \theta \wedge \tilde{\theta} = \int_{aS_0} f \tilde{\theta}. \quad (6.9)$$

另一方面, 很容易看出,

$$\int_{a_j} f \tilde{\theta} + \int_{a_j^{-1}} f \tilde{\theta} = \int_{a_j} \left[\int_{z_0}^z \theta - \int_{z_0}^{z'} \theta \right] \tilde{\theta},$$

其中 z 与 z' 分别落在 a_j 与 a_j^{-1} 上并相互为等价点. 注意到 θ 在边界的等价点有相同值, 由 θ 是闭微分立即推出 (见图 6.4):

$$\int_{z_0}^z \theta - \int_{z_0}^{z'} \theta = - \int_{b_j} \theta,$$

和

$$\int_{a_j} f \tilde{\theta} + \int_{a_j^{-1}} f \tilde{\theta} = - \int_{a_j} \tilde{\theta} \int_{b_j} \theta.$$

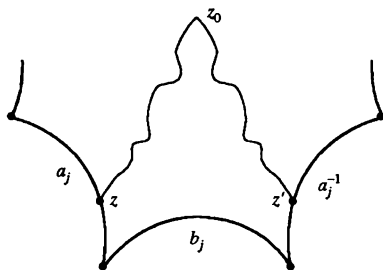


图 6.4

完全类似地可以证明

$$\int_{b_j} f \tilde{\theta} + \int_{b_j^{-1}} f \tilde{\theta} = \int_{b_j} \tilde{\theta} \int_{a_j} \theta.$$

注意到 θ 与 $\tilde{\theta}$ 是闭微分, 故由 (6.9) 式立即推出

$$\int_S \theta \wedge \tilde{\theta} = \sum_{j=1}^g \left[\int_{a_j} \theta \int_{b_j} \tilde{\theta} - \int_{a_j} \tilde{\theta} \int_{b_j} \theta \right]. \quad (6.10)$$

关于全纯微分的双线性关系实际上就是(6.10)式的特例. 这样, 上面的讨论实际上给出了全纯微分双线性关系的另一种证明. 这个证明的好处在于它便于推广到半纯微分的情况.

设 ω 是一个半纯微分, 其 a 周期为 A_1, \dots, A_g . 又设 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 上的一组典型基, 那么微分

$$\omega_0 = \omega - (A_1\varphi_1 + \dots + A_g\varphi_g)$$

的 a 周期全部为 0.

a 周期全部为 0 的半纯微分称为**规范化半纯微分**, 上述讨论表明任意一个半纯微分总可以写成一个规范化半纯微分与一个全纯微分之和.

现在我们叙述一个关于**半纯微分的双线性关系**的定理.

定理 1 设 ω 为紧 Riemann 曲面 S 上的一个全纯微分. 又设 $\tilde{\omega}$ 为 S 上的一个半纯微分, 只有一个极点 p_0 , 并在该点的留数为 0. 在 p_0 附近取一个局部参数, 使 p_0 点对应于 $z=0$, 并假定 ω 及 $\tilde{\omega}$ 在 p_0 附近分别有下列局部表示:

$$\omega = (a_0 + a_1z + \dots)dz,$$

$$\tilde{\omega} = \left(\frac{c_{-m}}{z^m} + \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + c_0 + c_1z + \dots \right) dz \quad (m \geq 2),$$

那么

$$\sum_{j=1}^g \left(\int_{a_j} \omega \int_{b_j} \tilde{\omega} - \int_{b_j} \omega \int_{a_j} \tilde{\omega} \right) = 2\pi i \sum_{n=2}^m \frac{c_{-n}a_{n-2}}{n-1}. \quad (6.11)$$

证 不失一般性, 可以假定 a_j 及 b_j 均不经过 p_0 . 像前面一样, 我们考虑 $4g$ 多边形 $S_0 = S \setminus \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$, 并令

$$f(p) = \int_{p_0}^p \omega, \quad p \in \bar{S}_0.$$

这时, 由留数定理有

$$0 = \int_S \omega \wedge \tilde{\omega} = \int_{\partial S_0} f \tilde{\omega} - 2\pi i \operatorname{Res}_{p_0} f \tilde{\omega}.$$

类似于(6.10)式的简单推导即推出(6.11)式. 证毕.

这个定理是证明 Riemann-Roch 定理的基础.

§ 5 除子与 Riemann-Roch 定理

在本节中,我们始终假定 S 是一个紧 Riemann 曲面,其亏格为 g . 我们用 $\mathcal{K}(S)$ 表示 S 上的全体半纯函数所组成的域.

假定在 S 上给定 n 个点 p_1, \dots, p_n . 又设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 n 个整数, 则称形式积

$$A = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad \text{或} \quad \prod_{j=1}^n p_j^{\alpha_j}$$

是 S 上的一个**除子**(divisor).

下面是除子的另一个等价定义: 设 $\alpha: S \rightarrow \mathbb{Z}$ 是 S 到整数环的一个映射: $p \mapsto \alpha(p)$, 它至多仅在 S 的有限个点上取非零值. 那么称形式积

$$A = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p)}$$

为一个除子.

两个除子 $A = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p)}$ 和 $B = \prod_{p \in S} p^{\beta(p)}$ 之积定义为 $AB = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p) + \beta(p)}$. 显然, 全体除子构成一个 Abel 群, 而常值映射 $0: p \mapsto 0 \in \mathbb{Z}$ 所对应的除子 $\prod_{p \in S} p^{0(p)}$ 是除子群的单位元素.

S 上的除子群记做 $\text{Div}(S)$.

对于 $\text{Div}(S)$ 中每一个元素 $A = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p)}$, 我们称数 $\sum_{p \in S} \alpha(p)$ 为 A 的**度**(degree), 记之为 $\deg A$. 因此, \deg 建立了同态:

$$\deg: \text{Div}(S) \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$\prod_{p \in S} p^{\alpha(p)} \mapsto \sum_{p \in S} \alpha(p).$$

我们引进除子概念是为了研究半纯函数与半纯微分. 紧 Riemann 曲面上的一个半纯函数或半纯微分在相当大的程度上依赖于它们零点与极点的分布状况. 除子概念的引入是为了刻画这种分布.

今后我们用 $\mathcal{K}^*(S)$ 表示 S 上全体非零半纯函数, 也即 $\mathcal{K}^*(S)$

$= \mathcal{K}(S) \setminus \{0\}$. 对于任意一个非零半纯函数 $f \in \mathcal{K}^*(S)$, 我们定义 f 的除子为

$$(f) = \prod_{p \in S} p^{\text{ord}_p(f)},$$

其中 $\text{ord}_p(f)$ 是一个整数 n : 当 p 为 f 的零点时, n 是 p 处零点的阶; 当 p 为 f 的极点时, n 是 p 处极点的阶的负值; 当 p 为其他点时, n 是零.

显然, 并非任意一个除子均是某个半纯函数的除子. 事实上, 紧曲面上的半纯函数的零点个数等于极点个数(均按重数计算), 即

$$\deg(f) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{K}^*(S). \quad (6.12)$$

若除子 D 恰好是某个半纯函数 f 的除子, 也即 $D = (f)$, 那么我们称 D 为**主除子**(principal divisor).

全体主除子组成一个群, 称做**主除子群**, 记之为 $D_0(S)$. 显然, 若将 $\mathcal{K}^*(S)$ 视作乘法群, 那么运算 $()$ 是 $\mathcal{K}^*(S)$ 到 $D_0(S)$ 的一个同态.

若 f 与 \tilde{f} 是两个非零半纯函数, 具有相同的除子, 那么 f/\tilde{f} 是 S 上的全纯函数, 而 S 是紧 Riemann 曲面, 故 $f = c\tilde{f}$, 其中 c 为常数. 可见, 除子在相当大的程度上决定了一个半纯函数.

商群 $\text{Div}(S)/D_0(S)$ 被称为**除子类群**(divisor class group). 更具体地说, 主除子群在除子群中建立了一种等价关系: 除子 A 与 A' 称做是等价的, 当且仅当 $A \cdot (A')^{-1} \in D_0(S)$. 全体与某除子 A 等价的除子所组成的集合记做 $[A]$, 称做以 A 为代表元的**除子类**. 在除子类间定义下列乘法运算: $[A] \cdot [B] = [A \cdot B]$. 在这样的乘法下, 全体除子类组成一个群, 即除子类群.

(6.12) 式告诉我们, \deg 可以定义在除子类上:

$$\deg[A] = \deg A.$$

现在讨论半纯微分的除子. 设 ω 是 S 上的一个半纯微分, 不恒为零. 我们可以像半纯函数一样, 定义 ω 在一点 p 的阶 $\text{ord}_p(\omega)$, 并定义 ω 的除子:

$$(\omega) = \prod_{p \in S} p^{\text{ord}_p(\omega)}.$$

两个非零半纯微分之商总是一个半纯函数. 故任意两个非零半纯微分 ω_1 与 ω_2 的除子 (ω_1) 与 (ω_2) 总在同一个除子类之中.

非零半纯微分的除子称做**典范除子**, 记做 Z . 它所在的除子类称做**典范除子类**.

为了后面讨论的需要, 现在对除子规定一种序. 设 A 与 B 是两个除子:

$$A = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p)}, \quad B = \prod_{p \in S} p^{\beta(p)}.$$

若对一切点 $p \in S$, 均有 $\alpha(p) \geq \beta(p)$ (或对于某个点 p , $\alpha(p) > \beta(p)$), 则我们约定 $A \geq B$ (或 $A > B$). 记 1 为除子群中的单位元. 若 $A \geq 1$, 我们将 A 称做**整除子**.

设 D 是一个除子, 我们引进两个集合:

$$L(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{K}(S) : (f) \geq D\},$$

$$\Omega(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : \omega \text{ 为 } S \text{ 上的半纯微分}, (\omega) \geq D\}.$$

这里应当指出, 我们约定恒等于零的半纯函数与半纯微分的除子大于任何给定除子. 因此, 上述两个集合中均包括零元素, 也即恒等于零的半纯函数或半纯微分.

若 $f \in L(D)$ 不恒等于零, $D = \prod_{p \in S} p^{\alpha(p)}$, 则

$$\text{ord}_p(f) \geq \alpha(p), \quad \forall p \in S.$$

因此, 若 $\alpha(p) = 0$, 则 p 点为 f 的正则点; 若 $\alpha(p) > 0$, 则 p 为 f 的零点, 其阶数至少为 $\alpha(p)$; 若 $\alpha(p) < 0$, 则 p 可能为 f 的正则点或极点, 但极点的阶 $\leq -\alpha(p)$.

对于 $\Omega(D)$ 中的非零半纯微分也有类似的结论.

很容易看出, $L(D)$ 与 $\Omega(D)$ 都是复数域上的线性空间. 我们关心的是它们的维数, 记

$$r(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D), \quad i(D) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega(D).$$

有时我们将 $r(D)$ 称做**除子 D 的维数**, 而将 $i(D)$ 称做**除子 D 的特殊性指标**.

首先, 我们指出, $r(D)$ 与 $i(D)$ 只依赖于 D 的除子类, 并有下列关系式:

$$i(D) = r(D/Z), \quad (6.13)$$

其中 Z 代表典范除子.

事实上, 设 D 与 D' 是两个除子, 且 D/D' 是主除子, 即存在 $f \in \mathcal{K}^*(S)$ 使得 $D/D' = (f)$. 这时, 对应

$$g \mapsto f^{-1} \cdot g$$

显然实现了 $L(D)$ 到 $L(D')$ 的一个同构. 故 $r(D) = r(D')$. 类似地, 对应 $\omega \mapsto f^{-1}\omega$ 是 $\Omega(D)$ 到 $\Omega(D')$ 的一个同构, 故又有 $i(D) = i(D')$.

取定一个非零的半纯微分 ω_0 . 这时, 对于任意一个非零半纯微分 ω , ω/ω_0 是一个非零半纯函数. 很容易看出, 对应 $\omega \mapsto \omega/\omega_0$ 实现了 $\Omega(D)$ 到 $L(D/(\omega_0))$ 的一个同构. 于是有

$$i(D) = r(D/(\omega_0)).$$

这样, (6.13) 式成立.

根据定义很容易直接验证下列事实:

- (1) 若 $\deg(D) > 0$, 则 $r(D) = 0$;
- (2) $L(1) \cong \mathbb{C}$, 也即 $r(1) = 1$;
- (3) $\Omega(1) \cong \mathcal{K}(S)$, 也即 $i(1) = g$;
- (4) 若 $D \geq D'$, 则 $r(D) \leq r(D')$, $i(D) \leq i(D')$.

这些性质的证明留给读者.

我们研究的目的是要对 $r(D)$ 或 $i(D)$ 进行估计与刻画.

Riemann 首先证明了下列不等式

$$r(D^{-1}) \geq \deg D - g + 1. \quad (6.14)$$

此不等式称做 Riemann 不等式. 后来, 他的学生 Roch 将 Riemann 的这一不等式改进为一个等式, 后人称之为 Riemann-Roch 定理.

定理 1 (Riemann-Roch 定理) 设 S 为一紧 Riemann 曲面, 其亏格为 g , 又设 D 是 S 上任意给定的一个除子, 则我们有

$$r(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i(D). \quad (6.15)$$

这个公式通常称为 Riemann-Roch 公式. 它在现代数学中有重大价值和广泛应用. 它的很多重要应用在目前我们尚无法介绍. 现在我们只介绍若干简单推论.

推论 1 $\deg Z = 2g - 2$, 其中 Z 是典范除子.

证 我们取 $D = Z$, 这时由 (6.13) 式有 $i(Z) = 1$, 并有

$$r(1/Z) = i(1) = g,$$

于是由 (6.15) 式有 $\deg Z = 2g - 2$. 证毕.

此推论告诉我们, S 上的一个半纯微分的零点个数与极点个数之差为 $2g - 2$. 特别地, S 上的一个全纯微分的零点个数为 $2g - 2$.

推论 2 任何亏格为零的紧 Riemann 曲面解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$.

证 设 S 的亏格 $g = 0$, 也即 S 拓扑等价于球面. 在 S 上任意取定一点 p 和除子 $D = p$, 这时由 Riemann-Roch 定理可知

$$\dim_{\mathbb{C}} L(p^{-1}) = r(p^{-1}) = 2 + i(p) \geq 2.$$

这就是说, 在 S 上至少有一个半纯函数 $f: S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, 它以 p 为其一阶极点而在其他点全纯. 因为它只有一个一阶极点, 故它实现了 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的单层的全纯映射, 也即共形映射. 证毕.

推论 3 紧 Riemann 曲面 S 上全体半纯函数集合 $\mathcal{K}(S)$ 作为线性空间是无穷维的.

证 设 l 为任意自然数, 并任意取定一点 $p \in S$, 则 $\mathcal{K}(S) \supset L(p^{-l})$. 由定理 1 可知, $L(p^{-l})$ 的维数为

$$r(p^{-l}) \geq l - g.$$

而 l 可以任意大, 故 $\dim \mathcal{K}(S) = \infty$. 证毕.

推论 4 若紧 Riemann 曲面 S 的亏格 $g > 0$, 则对任意一点 $p \in S$, 都存在一个全纯微分 ω 使 p 不是 ω 的零点.

证 我们用反证法. 假设 $\mathcal{H}(S)$ 中一切元素均以 S 上某点 p 为零点, 于是 $\mathcal{H}(S) \subset \Omega(p)$, 也即 $i(p) \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(S) = g$. 从而由 Riemann-Roch 定理有

$$\dim_{\mathbb{C}} L(p^{-1}) = r(p^{-1}) \geq 1 - g + 1 + g = 2.$$

这表明 S 上有一个以 p 为一阶极点且在其他点全纯的函数. 这样的函数实现了 S 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的解析自同构, 但这与亏格大于零矛盾. 证毕.

这一推论将在讨论紧 Riemann 曲面的 Jacobi 簇时有用 (见 § 8).

推论 5 对于任意一点 $p \in S$, 存在一个函数 $f \in \mathcal{K}(S)$ 仅以 p 为极点, 其阶数不超过 $g + 1$.

证明是简单的, 只要在 Riemann-Roch 定理中令 $D = p^{g+1}$ 即可.

推论 6 对于任意一点 $p \in S$, 存在一个函数 $f \in \mathcal{K}(S)$ 使得 $f(p) = 0$, 而 df 在 p 点不为零.

这一推论表明 S 的局部单值化参数可全部取在 $\mathcal{K}(S)$ 之中.

证 证明是容易的. 在 S 上任取两点 p 与 $q, p \neq q$. 令 $D = q^{(2g+1)}p^{-1}$, 则 $\deg D = 2g > 2g - 2$. 因此, $\deg(D/Z) > 0$, 从而 $r(D/Z) = 0$. 于是, 由 (6.13) 式我们有 $i(D) = r(D/Z) = 0$. 由 Riemann-Roch 定理, 我们又有

$$r(D^{-1}) = 2g - g + 1 = g + 1,$$

也即

$$\dim_{\mathbb{C}} L(pq^{-(2g+1)}) = g + 1.$$

又令 $D_1 = q^{(2g+1)}p^{-2}$, 完全类似地讨论即可得到

$$\dim_{\mathbb{C}} L(p^2q^{-(2g+1)}) = g.$$

这表明集合 $L(pq^{-(2g+1)}) \setminus L(p^2q^{-(2g+1)})$ 是非空的, 其中的任一元素 f 在 p 只能是一阶零点, 这便满足我们的要求. 证毕.

最后, 我们介绍 Riemann-Roch 定理的一个重要应用: 导出紧 Riemann 曲面上全纯二次微分复线性空间的维数为 $3g - 3$. 这一结论在 Teichmüller 空间的理论中是不可少的.

一个 Riemann 曲面 S 上的 **全纯二次微分** (holomorphic quadratic differential) 是指局部表示为

$$\varphi(z)dz^2$$

的不变形式, 其中 $\varphi(z)$ 为全纯函数. 也即, 若一点 p 有两个局部参数 z_α 及 z_β , 则它们所对应的 φ_α 及 φ_β 满足 $\varphi_\alpha(z_\alpha)dz_\alpha^2 = \varphi_\beta(z_\beta)dz_\beta^2$.

显然, 若 $\omega = \psi(z)dz$ 是一个全纯微分, 那么 $\omega^2 = \psi^2(z)dz^2$ 一定是一个全纯二次微分.

我们设 S 的亏格 $g > 1$, 并用 $\mathcal{H}^2(S)$ 表示 S 上全纯二次微分的复线性空间. 在 $\mathcal{H}^2(S)$ 中取定一个非零元素 $\omega_0 = \psi_0(z)dz$. 设 $(\omega_0) = D$, 那么 $\mathcal{H}^2(S)$ 与 $L(D^{-2})$ 同构. 事实上, 对于任意一个 $\varphi \in \mathcal{H}^2(S)$, $\varphi/\omega_0^2 \in L(D^{-2})$. 反之, 对于任意的 $f \in L(D^{-2})$, 则 $f\omega_0^2 \in \mathcal{H}^2(S)$. 因此, 映射 $\varphi \mapsto \varphi/\omega_0^2$ 实现了 $\mathcal{H}^2(S)$ 到 $L(D^{-2})$ 的同构. 这样, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^2(S) = \dim_{\mathbb{C}} L(D^{-2}) = r(D^{-2})$. 根据 Riemann-Roch 定理,

$$r(D^{-2}) = \deg D^2 - g + 1 + i(D^2).$$

显然, $\deg D^2 = 2\deg D = 4g - 4$, 而 $i(D^2) = 0$ (因为 $\deg D^2 > 2g - 2$), 故我们有 $r(D^{-2}) = 3g - 3$. 这样, 我们证明了下列定理 2.

定理 2 设 S 为紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$, 则 S 上的全体全纯二次微分所组成的复线性空间 $\mathcal{H}^2(S)$ 的维数是 $3g - 3$.

§ 6 Riemann-Roch 定理的证明

我们先证明 Riemann 不等式:

$$r(D^{-1}) \geq \deg D - g + 1, \quad (6.16)$$

其中 D 为紧 Riemann 曲面 S 上的任意一个除子, 而 g 是 S 的亏格.

当 $D=1$ 时, (6.16) 式显然成立.

现在假定 $D > 1$, 并设

$$D = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}, \quad p_j \in S, \alpha_j \in \mathbb{Z}_+.$$

令 $D_1 = p_1^{\alpha_1+1} \cdots p_n^{\alpha_n+1}$, 并用 $\Omega_0(D_1^{-1})$ 表示 $\Omega(D_1^{-1})$ 中 a 周期全部为零且留数也全为零的半纯微分. 那么, 微分算子

$$d: L(D^{-1}) \rightarrow \Omega_0(D_1^{-1}),$$

$$f \mapsto df$$

的核 $\ker(d) \cong \mathbb{C}$. 于是, 由线性映射的核与像的维数关系, 我们有

$$r(D^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} d(L(D^{-1})) + 1. \quad (6.17)$$

因此, 我们只要给出 d 的像集的维数之下界估计即可.

设 $\tau_k^{(j)}$ 是一个 a 周期为零且留数也为零的半纯微分, 它在 $S \setminus \{p_j\}$ 上全纯, 而在 p_j 点的局部表示的 Laurent 展开的主部为 dz/z^k , $k \geq 2$. 这里 z 是事先取定的 p_j 附近的一个局部参数, p_j 对应于 $z=0$. 设 $f \in L(D^{-1})$, 并假定 df 在 p_j 的局部表示的展开式的主部为

$$\left(\frac{c_2^{(j)}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{m_j}^{(j)}}{z^{m_j}} \right) dz, \quad m_j = \alpha_j + 1.$$

这样一来

$$df = \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{m_j} c_k^{(j)} \tau_k^{(j)}$$

是 S 上的一个全纯微分, 且 a 周期全部为零, 从而它在 S 上恒为零, 也即

$$df \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{m_j} c_k^{(j)} \tau_k^{(j)}.$$

由 df 的恰当性可知, 上述等式右端 b 周期全部为零.

反过来, 若 $c_k^{(j)}$ 是任意给定的常数, 则微分

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{m_j} c_k^{(j)} \tau_k^{(j)} \in \Omega_0(D_1^{-1}).$$

但 φ 未必是算子 d 的像. 若要求 φ 是 d 的像, 应该要求 φ 的全部 b 周期也为零, 也即 $c_k^{(j)}$ 应满足方程组

$$\int_{b_l} \varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{a_j+1} c_k^{(j)} \int_{b_l} \tau_k^{(j)} = 0, \quad (6.18)$$

其中 $l=1, \dots, g$. (6.18) 式是一个有 g 个方程、 $\deg D$ 个未知数 $c_k^{(j)}$ 的方程组.

当 $\deg D < g$ 时, Riemann 不等式 (6.16) 自动成立而无须证明. 故只需讨论 $\deg D \geq g$ 的情况.

设 $\deg D \geq g$, 这时方程组 (6.18) 的解空间至少为 $\deg D - g$ 维的. 因此, 我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} d(L(D^{-1})) \geq \deg D - g.$$

这样, 我们在 $D > 1$ 的情况下证明了 Riemann 不等式.

现在讨论 D 的一般情况. 设

$$D = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

不失一般性可以假定当 $1 \leq j \leq l$ 时 $n_j > 0$, 而对其他 j , $n_j < 0$. 令 $D^+ = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l}$, 这时 $D^+ > 1$. 应用前面的结果, 我们有

$$r((D^+)^{-1}) \geq \deg D^+ - g + 1.$$

另外, 由 $f \in L((D^+)^{-1})$ 在 $p_j (j > l)$ 的局部展开式可知

$$r(D^{-1}) - \sum_{j=l+1}^k n_j \geq r((D^+)^{-1}),$$

于是我们得到

$$r(D^{-1}) \geq \deg D^+ + \sum_{j=l+1}^k n_j - g + 1 = \deg D - g + 1.$$

在上述证明中, 我们看到关键之处在于讨论算子 $d: L(D^{-1}) \rightarrow \Omega_0(D_1^{-1})$ 的像空间的维数. 而这一点归结为讨论方程组 (6.18) 的解空间的维数. Riemann 不等式的获得只是利用了解空间维数的最简单的估计, 没有涉及方程组 (6.18) 的系数矩阵的秩. 如果我们能对其

系数矩阵的秩有所刻画势必会有进一步结果. 而这需要半纯微分的双线性关系.

Riemann-Roch 定理的证明

我们的证明分作两步: 首先讨论 $D \geq 1$ 的情况, 然后再讨论 D 的一般情况.

现在, 我们假定 $D \geq 1$.

当 $D=1$ 时 Riemann-Roch 定理显然成立. 于是只需假定 $D > 1$ 即可. 设

$$D = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}, \quad a_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \cdots, n.$$

设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 的一组典型基, 并设 φ_k 在 p_j 处有局部表示:

$$\varphi_k = (a_{k0}^{(j)} + a_{k1}^{(j)}z + \cdots)dz,$$

其中 z 是 p_j 附近的局部参数, p_j 点对应于 $z=0$.

设 $\varphi \in \Omega(D)$, 并假定 $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_g \varphi_g$. 那么系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ 必是下列方程组之解:

$$\sum_{k=1}^g \lambda_k a_{kl}^{(j)} = 0, \quad 0 \leq l \leq a_j - 1, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6.19)$$

这是一个有 g 个未知数、 $\deg D$ 个方程的方程组. 反之, 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ 是方程组 (6.19) 的解, 那么 $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_g \varphi_g$ 一定是 $\Omega(D)$ 中的元素.

因此, $\Omega(D)$ 与方程组 (6.19) 的解空间同构.

现在假定方程组 (6.19) 的系数矩阵的秩为 r , 那么其解空间的维数为 $g-r$, 也即 $i(D) = g-r$. 现在再假定方程组 (6.18) 的系数矩阵的秩为 r^* , 那么方程组 (6.18) 的解空间的维数为 $\deg D - r^*$. 这样,

$$r(D^{-1}) = \deg D - r^* + 1. \quad (6.20)$$

假如我们证明了 $r=r^*$, 那么可由 (6.20) 式及 $i(D) = g-r$ 推出 Riemann-Roch 定理.

以下我们证明 $r=r^*$, 这要用到 § 4 的定理 1. 在该定理中, 令 $\omega = \varphi_l, \tilde{\omega} = \tau_k^{(j)}$, 有

$$\int_{b_l} \tau_k^{(j)} = 2\pi i \left(\frac{a_{l, (k-2)}^{(j)}}{k-1} \right),$$

其中 $2 \leq k \leq a_j + 1, 1 \leq l \leq g$. 这表明方程组 (6.19) 的系数矩阵的每一行乘以适当的非零复数, 然后作一转置, 就得到了方程组 (6.18) 的系

数矩阵. 这样, 我们证明了两个方程组的系数矩阵有相同的秩, 也即 $r=r^*$.

以上我们证明了在 $D \geq 1$ 的情况下 Riemann-Roch 定理成立. 下面讨论 D 的一般情况.

为此, 我们先证明一个预备性结果: 当 $g > 1$ 时, $\deg(\omega) = 2g - 2$, 其中 ω 是 S 上的全纯微分. 事实上, $(\omega) \geq 1$, 于是应用 Riemann-Roch 定理前面已证明的部分, 有

$$r((\omega)^{-1}) = \deg(\omega) - g + 1 + i((\omega)).$$

利用关系式 $r(D/Z) = i(D)$, 立刻知道, $r((\omega)^{-1}) = i(1) = g$, 而 $i((\omega)) = r(1) = 1$. 因此, $\deg(\omega) = 2g - 2$.

我们知道, $r(D)$, $i(D)$ 及 $\deg D$ 均只依赖于 D 的除子类. 因此, 前面已证的结果表明, 若除子 D 等价于一个整除子, 则其 Riemann-Roch 公式 (6.15) 成立. 下面我们要进一步说明: 若 D 使得 Z/D 等价于一个整除子, 则其 Riemann-Roch 公式也成立. 事实上, 若 $D' = Z/D$ 等价于一个整除子, 那么由关于 D' 的 Riemann-Roch 公式有

$$r(D/Z) = \deg Z/D - g + 1 + i(Z/D).$$

这个公式可以变形为

$$i(D) = -\deg D + g - 1 + r(D^{-1}),$$

这便是关于 D 的 Riemann-Roch 公式.

这样, 我们只需讨论这样的除子 D : D 与 Z/D 均不等价于整除子. 假如 D 是这样的除子, 那么必有 $r(D^{-1}) = 0$ 及 $i(D) = 0$. 事实上, 如果 $r(D^{-1}) \neq 0$, 则存在一个半纯函数 f 使得 $(f) \geq D^{-1}$, 也即 $(f)D \geq 1$. 这与 D 不等价于整除子矛盾. 如果 $i(D) \neq 0$, 则 $r(D/Z) \neq 0$. 这意味着 Z/D 等价于整除子, 与假定矛盾.

因此, 对于上述的除子 D 的 Riemann-Roch 公式是

$$0 = \deg D - g + 1.$$

为了证明这个公式, 我们将 D 写成 $D = D_1/D_2$, 其中 $D_1 > 1, D_2 > 1$. 这时 $\deg D = \deg D_1 - \deg D_2$. 对于 D_1 使用 Riemann 不等式 (6.14), 有

$$r(D_1^{-1}) \geq \deg D_1 - g + 1 = \deg D_2 + \deg D - g + 1.$$

假若 $\deg D \geq g$, 则 $r(D_1^{-1}) \geq \deg D_2 + 1$. 这时至少有 $m = \deg D_2 + 1$ 个

半纯函数 $f_1, \dots, f_m \in L(D_1^{-1})$ 构成一个线性无关组. 我们考虑它们的线性组合 $f = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$. 由于 $m > \deg D_2$, 故可选取适当常数 c_1, \dots, c_m 使得 $f \neq 0$, 而在 D_2 中的每一个点都是 f 的零点. 这时

$$f \in L(D_2/D_1) = L(D^{-1}).$$

这与 $r(D^{-1}) = 0$ 矛盾, 由此推出 $\deg D < g$.

又由于 $r(D/Z) = i(D) = 0$, 故利用上面的结果及 $\deg Z = 2g - 2$ 可知 $\deg Z/D < g$, 也即 $\deg D > g - 2$.

总之, 我们证明了 $g - 2 < \deg D < g$, 也即 $\deg D = g - 1$. 证毕.

§ 7 Weierstrass 空隙定理

假定 S 为一紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 0$. 我们在本节要讨论下列问题:

设 $p \in S$ 是给定的一点. 问对于自然数 n , 是否存在一个半纯函数, 以 p 为 n 阶极点, 而在其他点全纯? 也即问

$$L(p^{-n}) \setminus L(p^{-n+1}) \neq \emptyset? \quad (Q_n)$$

若 (Q_n) 不成立, 则相应的自然数 n 称为点 p 的 **Weierstrass 空隙数**, 简称为**空隙数**.

显然, 这个问题与 Riemann-Roch 定理有关. 本节的结果是 Riemann-Roch 定理的一个直接应用.

定理 1 (Weierstrass) 对于亏格 $g > 0$ 的紧 Riemann 曲面上的任意一点 p , 有且仅有 g 个空隙数:

$$n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_g \leq 2g - 1.$$

证 $n=1$ 是空隙数. 事实上, $L(p^{-1}) \setminus L(1) = \emptyset$, 否则曲面 S 将与 \mathbb{C} 解析同构, 这与 S 的亏格 $g > 0$ 矛盾.

由 Riemann-Roch 定理我们有

$$r(p^{-n}) - r(p^{-n+1}) = 1 + i(p^n) - i(p^{n-1}). \quad (6.21)$$

显然, $i(p^n) \leq i(p^{n-1})$, 故 $r(p^{-n}) - r(p^{-n+1}) \leq 1$. 因此, 当且仅当 $r(p^{-n}) - r(p^{-n+1}) = 1$ 时, n 是非空隙数. 或者说, 当且仅当 $i(p^{n-1}) - i(p^n) = 1$ 时, n 是空隙数.

另一方面,由(6.21)式可以推出

$$r(p^{-n}) - r(1) = n + i(p^n) - i(1), \quad (6.22)$$

也即

$$r(p^{-n}) - 1 = n - g + i(p^n). \quad (6.23)$$

这里(6.22)式是在(6.21)式中令 n 为 k , 然后对 k 求和而得来. 在这样的求和过程中, 每个非空隙数对(6.22)式或(6.23)式的贡献为 1, 而空隙数的贡献为 0. 于是(6.23)式可以解释为: 不超过 n 的非空隙数的个数等于 $n - g + i(p^n)$.

注意到 $i(p^{2g}) = 0$, 立即推出 $2g$ 之前共有 g 个非空隙数, 也即 $2g$ 之前共有 g 个空隙数. 另一方面, 当 $n > 2g$ 时, $i(p^n) = i(p^{n-1}) = 0$. 这时 n 不可能是空隙数. 证毕.

设 $n_1 = 1 < n_2 < \cdots < n_g$ 是点 $p \in S$ 的空隙数. 若 $n_g > g$, 则称 p 为 **Weierstrass 点**.

显然, p 是 Weierstrass 点, 等价于下列两个命题之一:

(1) 存在一个自然数 k , $1 < k \leq g$, 使得 $n_k > k$;

(2) $\sum_{j=1}^g (n_j - j) > 0$.

令 $\tau(p) = \sum_{j=1}^g (n_j - j)$, 并称之为点 p 的**权重**, 其中 n_1, \dots, n_g 为点 p 的空隙数.

有趣的是, 我们将会证明一个紧 Riemann 曲面上 Weierstrass 点是有限个. 换句话说, 除去有限个点之外, 其他点的前 g 个空隙数均为 $\{1, 2, \dots, g\}$.

现在讨论 Weierstrass 点的个数问题.

设 $p_0 \in S$ 是给定的一点, 又设 U 是包含 p_0 的一个参数盘. 假定 $z = z(p)$ 是其局部参数, 且 $D = z(U)$. 这时每一个全纯微分 $\omega \in \mathcal{H}(S)$ 都有局部表示

$$\omega = \varphi(z)dz, \quad z \in D,$$

其中 φ 在 D 内全纯.

命题 1 设 $\omega_1, \dots, \omega_g$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 的一组基, 其中每一个 ω_j 在 U 内有局部表示

$$\omega_j = \varphi_j(z)dz, \quad j = 1, 2, \dots, g.$$

则全纯函数

$$\Phi(z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \cdots & \varphi_g(z) \\ \varphi_1'(z) & \cdots & \varphi_g'(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(g-1)}(z) & \cdots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix} \quad (z \in D)$$

在 z 点的阶 $\text{ord}_z(\Phi)$ 恰好就是 z 点所代表的点 p 的权重 $\tau(p)$.

证 我们用 $\det[\psi_1, \dots, \psi_n]$ 表示全纯函数 ψ_1, \dots, ψ_n 的 Wronski 行列式. 设 f 是全纯函数, 经过计算可以证明:

$$\det[f\psi_1, \dots, f\psi_n] = f^n \det[\psi_1, \dots, \psi_n].$$

我们首先证明, 在条件

$$\text{ord}_z \varphi_1 < \text{ord}_z \varphi_2 < \cdots < \text{ord}_z \varphi_g \quad (6.24)$$

下, 有

$$\text{ord}_z \det[\varphi_1, \dots, \varphi_g] = \sum_{j=1}^g [\text{ord}_z \varphi_j - j + 1]. \quad (6.25)$$

事实上, 此式可以用数学归纳法证明. 当 $g=1$ 时, 它显然成立. 假设 (6.25) 式对 $g=k$ 时成立, 那么

$$\det[\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}] = \varphi_1^{k+1} \det[1, \varphi_2/\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}/\varphi_1].$$

这里由条件 (6.24) 保证了 $\varphi_2/\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}/\varphi_1$ 是全纯的, 并且它在 z 点的阶也依次排列. 利用归纳假定, 我们有

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \det[\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}] &= \text{ord}_z \varphi_1^{k+1} + \sum_{j=1}^k (\text{ord}_z \varphi_{j+1}/\varphi_1 - j + 1) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (\text{ord}_z \varphi_j - j + 1). \end{aligned}$$

对于未必满足条件 (6.24) 的一般情况, 我们令 A 是 $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ 所张成的线性空间, 并令

$$\mu_1 = \min\{\text{ord}_z \varphi: \varphi \in A\}.$$

取 $\psi_1 \in A$ 使得 $\text{ord}_z \psi_1 = \mu_1$. 再考虑 $A_1 = \{\varphi \in A: \text{ord}_z \varphi > \mu_1\}$, 那么 A_1 是 $g-1$ 维子空间. 我们令

$$\mu_2 = \min\{\text{ord}_z \varphi: \varphi \in A_1\},$$

并取 $\psi_2 \in A_1$ 使得 $\text{ord}_z \psi_2 = \mu_2$. 如此下去, 即可得到 ψ_1, \dots, ψ_g , 且有

$$\text{ord}_z \psi_1 < \text{ord}_z \psi_2 < \dots < \text{ord}_z \psi_g.$$

应用前面的结果, 我们有

$$\text{ord}_z \det[\psi_1, \dots, \psi_g] = \sum_{j=1}^g (\mu_j - j + 1).$$

这里 $\{\psi_1, \dots, \psi_g\}$ 显然构成 A 的一组基. 它可以用 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_g\}$ 经过一个满秩的线性变换表示. 因此,

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \det[\varphi_1, \dots, \varphi_g] &= \text{ord}_z \det[\psi_1, \dots, \psi_g] \\ &= \sum_{j=1}^g (\mu_j - j + 1). \end{aligned}$$

但是, 另一方面根据 μ_j 的取法可知, $\mu_j + 1$ 恰好是 z 对应的点 p 的第 j 个空隙数 n_j (见本章习题第 9 题). 于是

$$\text{ord}_z \det[\varphi_1, \dots, \varphi_g] = \sum_{j=1}^g (n_j - j) = \tau(p).$$

证毕.

由上述命题立即推出下列推论:

推论 Weierstrass 点是孤立的, 从而紧的 Riemann 曲面上的 Weierstrass 点是有限个.

下面我们给出 Weierstrass 点的个数的估计式.

定理 2 设 S 为紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 设 W 是 S 上的 Weierstrass 点的个数, 则有

$$2g + 2 \leq W \leq g(g-1)(g+1). \quad (6.26)$$

证 沿用前面的符号. 我们知道, $\varphi_j(z)$ 依赖于局部参数的选取, 但 $\omega_j = \varphi_j dz$ 却是一个不变形式, 也即, 若点 p 有两个局部参数 $z = z(p)$ 及 $\zeta = \zeta(p)$, 其参数转换函数为 $\zeta = f(z)$, 而 ω_j 关于它们的局部表示分别是 $\varphi_j dz$ 与 $\psi_j d\zeta$, 那么

$$\psi_j(f(z)) f'(z) = \varphi_j(z).$$

这时

$$\varphi'_j(z) dz^2 = \psi'_j(f(z)) [f'(z)]^2 dz^2 + \psi_j(f(z)) f''(z) dz^2.$$

$\varphi'_j dz^2$ 不再是一个不变形式. 虽然如此, 但 $\varphi'_j dz^2$ 可以用 $\psi'_j d\zeta^2 + \alpha \psi_j d\zeta$ 表示, 其中 $\alpha = f''(z) dz / f'(z)$ 是一个与 j 无关的数. 一般说来,

$\varphi_j^{(k)} dz^{k+1}$ 可以用 $\psi_j^{(k)} d\zeta^{k+1}$ 及 $\psi_j d\zeta, \dots, \psi_j^{(k-1)} d\zeta^k$ 的线性组合表示, 其中系数与 j 无关. 这样, 我们证明了

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 dz & \cdots & \varphi_g dz \\ \varphi_1' dz^2 & \cdots & \varphi_g' dz^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(g-1)} dz^g & \cdots & \varphi_g^{(g-1)} dz^g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 d\zeta & \cdots & \psi_g d\zeta \\ \psi_1' d\zeta^2 & \cdots & \psi_g' d\zeta^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(g-1)} d\zeta^g & \cdots & \psi_g^{(g-1)} d\zeta^g \end{vmatrix},$$

也即

$$\det[\varphi_1, \dots, \varphi_g] dz^m = \det[\psi_1, \dots, \psi_g] d\zeta^m,$$

其中 $m = g(g+1)/2$. 因此, $\Phi(z) dz^m$ 是一个不变形式. 这种不变形式称做 m 阶全纯微分形式. 记 $\mathcal{H}^m(S)$ 为 S 上全体 m 阶全纯微分形式的复线性空间.

像在一阶全纯微分情况一样, 可以定义 m 次全纯微分的零点及其阶. 因此, 谈论一个 m 阶全纯微分 Ω 在一点 p 的阶 $\text{ord}_p \Omega$ 及其除子 (Ω) 是有意义的. 本节的命题 1 可以表述为

$$\tau(p) = \text{ord}_p(\Phi dz^m).$$

由此可见, 我们有

$$\sum_{p \in S} \tau(p) = \deg(\Phi dz^m).$$

为了求得除子 (Φdz^m) 的度, 我们取 $\omega \in \mathcal{H}(S)$. 那么 $\omega^m \in \mathcal{H}^m(S)$, 并且 $\Phi dz^m / \omega^m$ 是 S 上的一个半纯函数, 因而有

$$\deg(\Phi dz^m) - m \deg \omega = 0,$$

也即

$$\deg(\Phi dz^m) = m(2g - 2) = g(g - 1)(g + 1).$$

这样我们证明了

$$\sum_{p \in S} \tau(p) = g(g - 1)(g + 1).$$

注意到 p 是 Weierstrass 点的充要条件是 $\tau(p) \geq 1$, 可见, S 上 Weierstrass 点的个数

$$W \leq g(g - 1)(g + 1).$$

下面我们讨论 W 的下界估计.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_g = 2g$ 是 p 点的前 g 个非空隙数. 我们要证明

$$\sum_{j=1}^g \alpha_j \geq g(g+1).$$

注意到两个非空隙数之和仍是一个非空隙数这一事实,可以推出(见本章习题第 8 题):

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g, \quad j = 0, 1, \dots, g,$$

其中我们约定 $\alpha_0 = 0$. 由此进一步推出

$$\sum_{j=1}^g \alpha_j \geq g(g+1).$$

可见

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \sum_{j=1}^g (n_j - j) = \sum_{j=1}^g n_j - \sum_{j=1}^g j \\ &= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g \alpha_j - \sum_{j=1}^g j \\ &\leq g(g-1)/2. \end{aligned}$$

这就证明了 $W \geq 2g+2$. 证毕.

应当指出, $W = 2g+2$ 当且仅当所有 Weierstrass 点的第一个非空隙数 $\alpha_1 = 2$ 时成立(此时空隙数必为 $1, 3, \dots, 2g-1$).

§ 8 Abel 定理及其推论

在这一节中我们要讨论下列的问题: 一个除子 D 是主除子的充要条件是什么?

我们已经知道, 当给定的紧 Riemann 曲面 S 亏格为零时, S 解析同构于 \mathbb{C} , 而在 \mathbb{C} 上回答上述问题是容易的. 故在本节后面的讨论中, 我们假定给定的 Riemann 曲面 S 的亏格 $g \geq 1$.

Abel 定理回答了上述问题. 为了叙述 Abel 定理我们引进格群 $L = L(S)$ 的概念.

设 $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ 是 S 的一个典型剖分, 而 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_g\}$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 相应于这个典型剖分的一组典型基. 根据定义, 这组典型基的 a 周期为单位阵 $E_{g \times g}$, 也即

$$\int_{a_i} \varphi_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g.$$

设它的 b 周期矩阵为 B , 则 $\text{Im} B$ 为正定矩阵. 我们将矩阵 (E, B) 的 $2g$ 个列依次记做

$$e^{(1)}, \dots, e^{(g)}; \quad b^{(1)}, \dots, b^{(g)},$$

并考虑下列的形式和

$$\sum_{j=1}^g m_j e^{(j)} + \sum_{j=1}^g n_j b^{(j)}, \quad m_j, n_j \in \mathbb{Z}.$$

上述形式和组成一个 Abel 群, 记做 L 或 $L(S)$, 并称之为格群 (简称格).

当 $g=1$ 时, $(E, B) = (1, \tau)$, 其中 τ 为复数且 $\text{Im} \tau > 0$. 这时

$$L(S) = \{m + n\tau; m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

在一般情况下, 每一个 $e^{(j)}$ 与 $b^{(j)}$ 都是由 g 个复数组成的列向量. 故 $L(S)$ 可视作 \mathbb{C}^g 中某种格点的集合.

在 S 上取定一点 p_0 , 并考虑

$$I(p) = \left(\int_{p_0}^p \varphi_1, \dots, \int_{p_0}^p \varphi_g \right)^T, \quad p \in S,$$

其中 T 代表矩阵的转置. 显然, $I(p)$ 依赖于积分路径的选取, 可能是多值的. 但是, $I(p) \pmod{L}$ 便不再依赖于积分路径的选取, 是单值的.

设 $D = p_1 \cdots p_r \cdot q_1^{-1} \cdots q_s^{-1} \in \text{Div}(S)$, 我们定义

$$I(D) = \sum_{j=1}^r I(p_j) - \sum_{j=1}^s I(q_j).$$

定理 1 (Abel 定理) 设 S 为一紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g \geq 1$. 又设 $D \in \text{Div}(S)$, 则 D 为主除子的充要条件是

$$\deg(D) = 0 \quad \text{且} \quad I(D) = 0 \pmod{L(S)}.$$

证 必要性 设 D 是一主除子, 也即存在一个半纯函数 $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 使得 $(f) = D$. 这时显然有 $\deg(D) = 0$. 余下只需证明 $I(D) = 0 \pmod{L(S)}$. 当 $D=1$ 时, 这一条件自然成立. 下面假定 $D \neq 1$, 设

$$D = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} \cdot q_1^{-n_1} \cdots q_r^{-n_r},$$

其中 $m_j > 0$ ($j=1, \dots, k$), $n_j > 0$ ($j=1, \dots, r$) 为整数, 且

$$m_1 + \cdots + m_k = n_1 + \cdots + n_r.$$

不失一般性, 可以假定 p_0, p_j ($j=1, \dots, k$) 与 q_j ($j=1, \dots, r$) 均不落

在剖分曲线 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ 上. 令 ω_{pq} 为 S 上的一个半纯微分, 在 $S \setminus \{p, q\}$ 内全纯, 且以 p, q 为其一阶极点, 其留数分别为 1 与 -1 , 并且其全部 a 周期为零. 在这样的记号下, 我们考虑微分

$$\omega = \frac{df}{f} - \sum_{j=1}^k m_j \omega_{p_j p_0} + \sum_{j=1}^r n_j \omega_{q_j p_0}.$$

显然, $(\omega) \geq 0$, 即 ω 是 S 上的一个全纯微分. 于是我们有 $\omega = \sum_{j=1}^g c_j \varphi_j$, 其中 c_j 为常数. 利用 $\omega_{p_j p_0}$ 与 $\omega_{q_j p_0}$ 的 a 周期为零, 立即推出

$$\int_{a_l} \omega = \int_{a_l} \frac{df}{f} = c_l, \quad l = 1, \dots, g.$$

由半纯微分的双线性关系可知

$$\int_{b_l} \frac{df}{f} = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^k m_j \int_{p_0}^{p_j} \varphi_l - \sum_{j=1}^r n_j \int_{p_0}^{q_j} \varphi_l \right) + \sum_{j=1}^g c_j b_{jl}.$$

另外, 由于 $df/f = d \ln f$, 故有

$$\int_{a_l} \frac{df}{f} = 2\pi i \alpha_l, \quad \int_{b_l} \frac{df}{f} = 2\pi i \beta_l \quad (l = 1, \dots, g),$$

其中 α_l 与 β_l 均为整数. 由前面已经得到的关于 df/f 沿 a_l 与 b_l 的积分公式, 立即看出 $c_l = 2\pi i \alpha_l (l=1, \dots, g)$, 且有

$$\sum_{j=1}^k m_j \int_{p_0}^{p_j} \varphi_l - \sum_{j=1}^r n_j \int_{p_0}^{q_j} \varphi_l = \beta_l - \sum_{j=1}^g \alpha_j b_{jl},$$

其中 $l=1, \dots, g$. 根据 $I(p)$ 定义, 此式表明: $I(D) = 0 \pmod{L(S)}$.

充分性 设 $D = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} \cdot q_1^{-n_1} \cdots q_r^{-n_r} \in \text{Div}(S)$, 其中 m_j 与 n_j 为正整数. 假定 $\deg(D) = 0$ 且 $I(D) = 0 \pmod{L(S)}$. 在 S 上取定 p_0 及 q_0 , 使 $p_0 \neq q_0$, 且 p_0 与 q_0 均不同于 $p_j (j=1, \dots, k)$ 与 $q_j (j=1, \dots, r)$. 我们考虑函数

$$f(p) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k m_j \int_{q_0}^p \omega_{p_j p_0} - \sum_{j=1}^r n_j \int_{q_0}^p \omega_{q_j p_0} + \sum_{j=1}^g c_j \int_{q_0}^p \varphi_j \right\},$$

其中 c_j 为常数, 且积分路径不通过 p_j, q_j 及 p_0 . 一般说来, $f(p)$ 是一多值半纯函数. 下面我们要证明可选取适当的 c_j 使得 f 为一单值函数. 令

$$\omega = \sum_{j=1}^k m_j \omega_{p_j p_0} - \sum_{j=1}^r n_j \omega_{q_j p_0} + \sum_{j=1}^g c_j \varphi_j,$$

那么,函数 f 可写成

$$f(p) = \exp \left\{ \int_{a_0}^p \omega \right\}.$$

由 ω 的表达式,我们不难看出

$$\int_{a_l} \omega = c_l, \quad l = 1, \dots, g.$$

再一次利用双线性关系,我们又得到

$$\int_{b_l} \omega = 2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^k m_j \int_{p_0}^{p_j} \varphi_l - \sum_{j=1}^r n_j \int_{p_0}^{q_j} \varphi_l \right\} + \sum_{j=1}^g c_j b_{jl}.$$

由条件 $I(D) \equiv 0 \pmod{L(S)}$ 可知,存在整数 α_l 及 $\beta_l (l=1, \dots, g)$ 使得

$$\sum_{j=1}^k m_j \int_{p_0}^{p_j} \varphi_l - \sum_{j=1}^r n_j \int_{p_0}^{q_j} \varphi_l = \alpha_l + \sum_{j=1}^g \beta_j b_{jl}.$$

我们取 $c_j = -2\pi i \beta_j$, 这时积分

$$\int_{a_l} \omega \quad \text{与} \quad \int_{b_l} \omega \quad (l = 1, \dots, g)$$

均为 $2\pi i$ 的整数倍,于是 $f(p)$ 是一单值半纯函数,函数 f 的除子 (f) 显然为 D . 证毕.

现在我们引入 Jacobi 簇的概念.

我们知道格群 $L(S)$ 可以视作 \mathbb{C}^g 中某类格点的集合. 因而可以考虑商群 $\mathbb{C}^g / L(S)$. 更确切地说, \mathbb{C}^g 中两点 $z = (z_1, \dots, z_g)^T$ 与 $w = (w_1, \dots, w_g)^T$ 称做关于 $L(S)$ 等价, 如果 $z - w \in L(S)$. $\mathbb{C}^g / L(S)$ 定义为 \mathbb{C}^g 中关于 $L(S)$ 的等价类集合, 记做 $J(S)$, 并称之为 **Jacobi 簇**.

显然, \mathbb{C}^g 中的加法运算诱导了 $J(S)$ 中的一个加法运算. 很容易直接验证, $J(S)$ 是一个紧的、可交换的 g 维 Lie 群. 特别地, 当 $g=1$ 时, $J(S)$ 是一个 Riemann 曲面:

$$J(S) = \mathbb{C} / \{m + n\tau\}, \quad \text{Im}\tau > 0.$$

映射 $I: p \mapsto I(p)$ 诱导了 S 到 $J(S)$ 的一个全纯映射

$$\begin{aligned} \chi: S &\longrightarrow J(S), \\ p &\longmapsto I(p) \pmod{L(S)}. \end{aligned}$$

根据 Riemann-Roch 定理的推论 4, 立即推出全纯映射 χ 的 Jacobi 矩阵的秩为 1.

当亏格 $g=1$ 时, $\chi: S \rightarrow J(S)$ 是两个 Riemann 曲面之间的全纯映射, 并且是非平凡的. 有趣的是, 由 Abel 定理可以进一步推出, 当 $g=1$ 时, $\chi: S \rightarrow J(S)$ 是解析同构.

定理 2 设 S 是亏格为 1 的紧 Riemann 曲面, 则映射 $\chi: S \rightarrow J(S)$ 是解析同构.

证 因为 $\chi: S \rightarrow J(S)$ 是两个紧 Riemann 曲面间的非平凡全纯映射, 故它一定是满射. 为证明 χ 是解析同构, 只需证明它是单射即可. 假定存在 p 与 $q \in S$, $p \neq q$, 使得 $\chi(p) = \chi(q)$, 那么 $I(p) = I(q) \pmod{L(S)}$. 于是对除子 $D = pq^{-1}$, 我们有

$$I(D) = 0 \pmod{L(S)}, \quad \deg D = 0.$$

由 Abel 定理推出, 存在一个半纯函数 $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $(f) = D$. 由于 f 只有一个一阶极点, 故 f 是 S 到 \mathbb{C} 的解析同构. 但 S 的亏格不为零, 故此为不可能. 这就证明了 χ 是单值的. 证毕.

定理 2 告诉我们: 任何亏格为 1 的紧 Riemann 曲面均解析同构于 $\mathbb{C} / \{m + n\tau\}$, 其中 τ 为复数, $\text{Im}\tau > 0$.

习 题

在本章习题中一律假设 S 是紧 Riemann 曲面, 其亏格为 g .

1. 用 $\mathcal{H}^m(S)$ 表示紧 Riemann 曲面 S 上的全体 m 阶全纯微分所组成的复线性空间, 并假定 S 的亏格 $g > 0$. 试证明 $L(D^{-m})$ 与 $\mathcal{H}^m(S)$ 同构, 其中 D 为一非零全纯一阶微分之除子.

2. 在上题的假定下, 证明: 若 $g > 1$, 则

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^m(S) = (2m - 1)(g - 1), \quad m > 1.$$

3. 设 $\Omega \in \mathcal{H}^m(S)$, 试证明 $\deg \Omega = 2m(g - 1)$.

4. 设 $\Omega^m(D)$ 表示 S 上全体除子大于或等于 D 的 m 阶半纯微分所组成的复线性空间. 试导出包含 $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^m(D)$ 的类似于 Riemann-Roch 定理中的公式.

5. 设紧 Riemann 曲面 S 的亏格 $g > 1$. 试证明存在一个非常值

的全纯映射 $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, 其覆盖层数 $\leq g$.

(提示: 取 $\omega \in \mathcal{H}(S)$, 表 $(\omega) = D_1 D_2$, D_1 与 D_2 为整除子且 $\deg D_1 = g$. 证明 $\dim_{\mathbb{C}} L(D_1^{-1}) \geq 2$.)

6. 设 $D \in \text{Div}(S)$ 且 $D < 1$. 试不用 Riemann-Roch 定理而利用双线性关系直接计算 $\Omega(D)$ 的维数.

7. 设 $D \in \text{Div}(S)$, 试证明:

(i) 若 $\deg D > 2g - 2$, 则 $\dim_{\mathbb{C}} L(D^{-1}) = \deg D - g + 1$;

(ii) 若 $\deg D < 0$, 则 $\dim_{\mathbb{C}} \Omega(D) = g - 1 - \deg D$.

8. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ 为 S 上一点 p 的前 g 个非空隙数. 试证明

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g, \quad j = 1, \dots, g-1.$$

9. 证明: 若在 S 上存在一个全纯微分 ω 以 $p \in S$ 为 k 阶零点, 那么 $k+1$ 则是 p 的空隙数.

10. 一个紧 Riemann 曲面 S 称为超椭圆型的, 如果在 S 上存在一个除子 $D \geq 1$, $\deg D = 2$, 且 $r(D^{-1}) \geq 2$. 证明: S 是超椭圆型的, 当且仅当 S 上存在一个非平凡半纯函数 $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, 其覆盖层数 $m = 2$.

11. 证明亏格 $g \leq 2$ 的紧 Riemann 曲面都是超椭圆型的.

(提示: 对于 $g \leq 1$ 的情况利用 Riemann-Roch 定理; 对于 $g = 2$, 利用 Weierstrasse 点的存在性).

12. 设 S 为超椭圆型 Riemann 曲面, 其亏格 $g \geq 2$. 又设 $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 是一非平凡半纯函数, 其覆盖层数 $m = 2$. 试证明:

(i) 总分歧数 $B = 2g + 2$;

(ii) f 的每一分歧点 p 都是 S 的一个 Weierstrasse 点 (提示: 证明 2 是 p 的第一个非空隙数);

(iii) 除 f 的分歧点外, S 上无其他 Weierstrasse 点 (提示: 注意在 $\alpha_1 = 2$ 的情况下, $1, 3, \dots, 2g-1$ 是空隙数, 计算分歧点 p 的权重 $\tau(p)$);

(iv) S 上 Weierstrasse 点的个数 $W = 2g + 2$.

第七章 单值化定理

本章的主要目的是证明单值化定理,并阐明它的意义.单值化定理不仅回答了著名的单值化问题,而且导致了許多重要结论:任何一个 Riemann 曲面均可用 $\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} 或 Δ 作为其覆盖,并由此推出,任何 Riemann 曲面上都有一个自然的常曲率的完备度量;除去少数几种 Riemann 曲面之外,大多数 Riemann 曲面具有负常曲率的完备度量,即 Poincaré 度量.

§ 1 单值化问题与单值化定理

在第一章中我们曾涉及多值解析函数的概念.那时一个多值函数是由某个解析元素(一点附近的幂级数)沿任意路径进行解析延拓的结果.显然,这些讨论同样可以在一个 Riemann 曲面上进行.

另外,我们在讨论 Riemann 曲面上的半纯微分的积分时看到,这种积分依赖于路径的选取.因此, Riemann 曲面上的半纯微分的变上限积分一般说来,是一个多值的半纯函数.

以上为导致多值半纯函数的某些具体方式.现在我们给出多值半纯函数的一般定义.

设 S 是一个 Riemann 曲面.又设 $U \subset S$ 是 S 上的一个开集, $f: U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 是 U 上的一个半纯函数,我们记之为 (f, U) . 我们称两个这样的偶 (f, U) 与 (g, V) 在 p 点等价,当且仅当 $p \in U \cap V$ 且存在开集 $W \subset U \cap V$ 使得 $p \in W$ 时, $f|_W = g|_W$. 在 p 点与 (f, U) 等价的偶的集合记做 $[f, p]$, 并称为在 p 点的一个半纯函数芽. 在 S 上所有点的半纯函数芽集合记做 $G(S)$.

现在赋予 $G(S)$ 以拓扑结构.

对于任意一点 $[f, p] \in G(S)$, 我们定义其邻域是

$$\tilde{V} = \{[f, q]: q \in V \subset U\},$$

其中 U 是 f 的定义域,而 V 是 U 内的任一开集.显然,邻域 \tilde{V} 与代

表元 (f, U) 及 V 的选取有关.

容易验证, 在这样的拓扑下, $G(S)$ 是一个 Hausdorff 空间.

我们将 $G(S)$ 到 S 的自然投影 $\pi: [f, p] \mapsto p$ 记为 σ . 显然 σ 是一个局部同胚.

定义 1 设 \mathcal{F} 是 $G(S)$ 上的一个连通分支. 我们称 \mathcal{F} 是 S 上的一个**多值半纯函数**, 如果它满足下列两个条件:

(i) $\sigma(\mathcal{F}) = S$;

(ii) 对任一点 $p \in S$ 及以 p 为始点的曲线 γ , 过 $\sigma^{-1}(p) \cap \mathcal{F}$ 中的任一点均有 γ 的一个惟一提升.

设 \mathcal{F} 是 S 上的一个多值半纯函数. 那么, 根据定义, $(\mathcal{F}, \sigma|_{\mathcal{F}})$ 是 S 上的一个正则覆盖.

设 $p \in S$ 且 \mathcal{F} 是 S 上的一个多值半纯函数, 我们称集合

$$\mathcal{F}(p) = \{f(p): [f, p] \in \mathcal{F}\}$$

为 \mathcal{F} 在 p 点的函数值集合. 若对每一点 $p \in S$, $\mathcal{F}(p)$ 只有一个元素, 则 \mathcal{F} 称做**单值函数**.

设 S 是单连通 Riemann 曲面, \mathcal{F} 是 S 上的一个多值半纯函数. 那么根据第六章 § 1 定理 1 立即推出 \mathcal{F} 是 S 上的一个单值函数. 事实上, 若 σ 是 \mathcal{F} 到 S 的自然投影, 则此时 σ 一定是单射. 如若不然, 则存在一点 $p \in S$ 及两个不同的点 $[f, p]$ 及 $[g, p] \in \mathcal{F}$. 用一条弧 $\tilde{\gamma}$ 连结点 $[f, p]$ 及 $[g, p]$, 则 $\tilde{\gamma}$ 是 $\sigma(\tilde{\gamma})$ 的提升. 根据 S 的单连通性, $\sigma(\tilde{\gamma})$ 同伦于 0. 但 $\tilde{\gamma}$ 是一条起点与终点不同的曲线. 这就导致矛盾.

总之, 单通连的 Riemann 曲面上的多值半纯函数总是单值函数.

现在, 我们来讨论多值半纯函数的单值化问题.

设 \mathcal{F} 是 Riemann 曲面 S 上的一个多值半纯函数. 人们希望找到 S 的一种参数, 使得该多值函数在此参数的表示下变成一个单值函数. 这样的参数是否存在, 就成为历史上著名的**单值化问题**.

单值化问题使人们自然联想到万有覆盖, 即单连通的覆盖.

设 \tilde{S} 是 S 的万有覆盖曲面, 并假定 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是其投影映射. 又设定 \mathcal{F} 是 S 上的任意一个多值半纯函数. 那么

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{[f \circ \pi, \tilde{p}]: \tilde{p} \in \tilde{S}\}$$

便是 \tilde{S} 上的一个多值解析函数. 根据前面的讨论, 由于 \tilde{S} 是单连通

的,故 $\tilde{\mathcal{S}}$ 是 \tilde{S} 上的单值函数.

假如我们证明了 \tilde{S} 解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的某个区域,那么 \tilde{S} 便有一个整体的复参数,而多值函数 \mathcal{S} 在此参数的表示下便是单值函数了.

因此,问题化归为,单通连的 Riemann 曲面 \tilde{S} 是否总能共形等价于 $\bar{\mathbb{C}}$ 中的某个区域的问题.

根据 Riemann 映射定理,人们很自然地猜想到 \tilde{S} 解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} 或 Δ 之一.

经过许多人的努力,单值化问题最终得到解决.通常人们将单值化定理冠以 Poincaré-Klein-Koebe 的名字.

定理 1(Poincaré-Klein-Koebe) 单连通的 Riemann 曲面解析同构于下列三种典型 Riemann 曲面:

- (i) 扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- (ii) 复平面 \mathbb{C} ;
- (iii) 单位圆 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

显然,单值化定理是 Riemann 映射定理的推广.

§ 2 单值化定理的证明

一般有关 Riemann 曲面的书籍中,单值化定理的证明是采用 Perron 方法.它是通过对次调和函数的 Perron 族的讨论,给出 Riemann 曲面上一般 Dirichlet 问题的解,最后导出单值化定理.下面我们将给出一个直接的证明,它依赖于 Montel 正规则.

在前两章中(第五章 § 11 定理 4 及第六章 § 5 推论 2),我们已经两次证明过下列事实:亏格为 0 的紧 Riemann 曲面解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$. 因此,为证明单值化定理,只需证明下列命题即可:

设 S 是单连通的非紧 Riemann 曲面,则 S 解析同构于 \mathbb{C} 或 Δ .

现在我们着手证明这一命题. 设 S 是一单连通的非紧 Riemann 曲面. 我们在 S 上取一个区域序列 $\{S_n : n = 1, 2, \dots\}$, 其中 $S_n \subset S$ 是

单连通区域,满足下列条件:

$$S_n \subset \bar{S}_n \subset S_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

此外,我们要求 S_n 的边界 ∂S_n 是一条实解析的 Jordan 曲线.

设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A\}$ 是 Riemann 曲面 S 的局部坐标卡集合. 我们将满足条件 $U_\alpha \cap \bar{S}_n \neq \emptyset$ 的全体 α 的集合记为 A_n , 并对相应的坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 作一番改造: 若 $U_\alpha \subset S_n$, 则保留 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 不变, 并令 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) = (V_\alpha, \psi_\alpha)$. 设 $U_\alpha \cap \partial S_n \neq \emptyset$. 不失一般性, 可假定 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 是 \mathbb{C} 平面的一个圆盘, 而 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial S_n)$ 是一条分割盘 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 的弧, 其两端落在盘的边缘上. 这时, 存在一个共形映射 f_α , 将 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \bar{S}_n)$ 映为

$$\{w: |w| < 1 \text{ 且 } \operatorname{Im} w \geq 0\},$$

并将 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \partial S_n)$ 映为实轴区间 $(-1, 1)$. 我们令 $V_\alpha = U_\alpha \cap \bar{S}_n$, $\psi_\alpha = f_\alpha \circ \varphi_\alpha$. 这样, 我们对 \bar{S}_n 有一坐标卡集合 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha): \alpha \in A_n\}$, 在此坐标卡集合下, \bar{S}_n 是一带边 Riemann 曲面.

现在, 我们在 \bar{S}_n 的拓扑上构造一个新的带边 Riemann 曲面 \bar{S}'_n , 其局部坐标卡集合是

$$\{(V_\alpha, \bar{\psi}_\alpha): \alpha \in A_n\},$$

这里 $\bar{\psi}_\alpha$ 表示 ψ_α 的共轭. 很容易验证, 当 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 时, $f_{\alpha\beta} = \bar{\psi}_\alpha \circ \bar{\psi}_\beta^{-1}$ 是共形映射. 因此, \bar{S}'_n 也是一个带边 Riemann 曲面.

将 \bar{S}_n 与 \bar{S}'_n 在边界上粘合在一起 (即将原来代表同一点的两个边界点重新等同为一点), 并对 \bar{S}_n 及 \bar{S}'_n 的局部坐标盘作相应的整合 (即将包含 S_n 边界的 \bar{S}_n 中的局部坐标盘 V_α 与 \bar{S}'_n 中的相应的局部坐标盘 V'_α 合并为一个坐标盘) (见图 7.1). 这时粘合后的曲面是一个亏格为 0 的 Riemann 曲面, 记之为 S_n^d .

在 S_1 中取定两个不同点 p_0 与 p_1 . 则这两点包含于一切 S_n 及 S_n^d 中. 记 p_0 在 \bar{S}'_n 中的对应点为 p'_0 . 那么 p'_0 自然也在 S_n^d 上. 由于 S_n^d 与 \mathbb{C} 同构, 故存在一个共形映射 $f_n: S_n^d \rightarrow \mathbb{C}$, 使得

$$f_n(p_0) = 0, \quad f_n(p_1) = 1, \quad f_n(p'_0) = \infty.$$

令 $\varphi_n = f_n|_{S_n}$, 那么 φ_n 是 S_n 上的一个共形映射, 其像域 $\varphi_n(S_n) \subset \mathbb{C}$, 并分别将 p_0 及 p_1 映为 0 与 1.

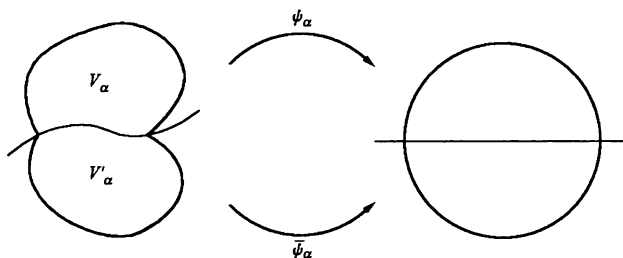


图 7.1

显然, 当 $m \geq n$ 时, φ_m 在 S_n 上有定义.

对任意固定的 n , 函数族 $\{\varphi_m: m \geq n\}$ 在 S_n 上是正规族. 事实上, 它在 $S_n \setminus \{p_0, p_1\}$ 上是正规族 (因为该函数族中的函数在 $S_n \setminus \{p_0, p_1\}$ 中不取 0 与 1 两个值). 因此又进一步推出它在 p_0 的邻域及 p_1 的邻域的正规性. 因而它在 S_n 上是正规族.

注意到 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, 即可推出存在一个子序列 φ_{n_k} , 在 S 上内闭一致收敛. 设其极限函数为 φ , 那么 φ 要么是 S 上的共形映射, 要么是常数. 但 φ 不可能为常数 (因为 $\varphi(p_0) = 0, \varphi(p_1) = 1$), 故 φ 是 S 的共形映射.

若 $\varphi(S) = \mathbb{C}$, 则表明 S 与 \mathbb{C} 解析同构. 若 $\varphi(S) \neq \mathbb{C}$, $\varphi(S)$ 是 \mathbb{C} 中之一单连通域, 且边界多于一点. 根据 Riemann 映射定理, $\varphi(S)$ 可共形映射为 Δ . 这时, S 与 Δ 解析同构.

单值化定理至此证毕.

§ 3 单值化定理的推论

设 S 是任意一个 Riemann 曲面. 又假定 (\tilde{S}, π) 是 S 的万有覆盖. 根据单值化定理, \tilde{S} 解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} 或 Δ . 现在, 我们来讨论在这三种不同情况之下, Riemann 曲面 S 应具有哪些特征?

为回答这一问题, 我们先来讨论有关覆盖变换群的一些性质.

今后我们记 G 为 (\tilde{S}, π) 的覆盖变换群. 基于投影 π 的局部一一性, 我们很容易推出下列性质:

(i) 对任意一点 $\tilde{p}_0 \in \tilde{S}$, 存在 \tilde{p}_0 点的邻域 $U \subset \tilde{S}$ 使得 $g(U) \cap U = \emptyset$, 只要 $g \in G \setminus \{\text{id}\}$.

(ii) 对 \tilde{S} 中的点建立等价关系 \sim : $\tilde{p}_1 \sim \tilde{p}_2$ 当且仅当 $\exists g \in G$ 使得 $\tilde{p}_2 = g(\tilde{p}_1)$. 这时 \tilde{S} 上的点的等价类所组成的空间记做 \tilde{S}/G . 那么, 由 (i) 可以看出, \tilde{S}/G 由 \tilde{S} 的复结构继承了一个自然的复结构, 从而构成一个 Riemann 曲面.

(iii) 若 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{S}$ 且 $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$, 则存在 $g \in G$ 使得

$$\tilde{p}_2 = g(\tilde{p}_1).$$

事实上, 当 $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ 时, 取 $g = \text{id}$ 即可. 若 $\tilde{p}_2 \neq \tilde{p}_1$, 则可依照下列方式定义一个映射 $g: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$: 首先定义 g 在 \tilde{p}_1 的像为 \tilde{p}_2 ; 其次对于任意一点 $\tilde{p} \neq \tilde{p}_1$, 我们用任意一条曲线 $\tilde{\gamma}$ 连结 \tilde{p}_1 与 \tilde{p} 两点, 并考虑 $\pi(\tilde{\gamma})$, 记之为 γ . 显然, γ 的始点 $p = \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$. 再过 \tilde{p}_2 提升 γ , 所得曲线之终点定义为 $g(\tilde{p})$. 显然, $g: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ 是一个覆盖变换, 且

$$g(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2.$$

由 (iii) 可以看出, (ii) 中的等价关系 \sim 可以改为: $\tilde{p}_1 \sim \tilde{p}_2$ 当且仅当 $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$, 并且 \tilde{S}/G 解析同构于 S .

既然 \tilde{S} 解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} 或 Δ , 我们不妨把它们直接作为 S 的万有覆盖曲面. 在这种情况下, 覆盖变换群 G 中的元素是分式线性变换. 下面分三种情况讨论.

(1) $\tilde{S} = \bar{\mathbb{C}}$ 的情况

这时 G 中无非平凡元素. 事实上, 若 G 中有非平凡元素 g , 那么 $g: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 是分式线性变换, 而分式线性变换总有不动点. 这便导致矛盾. 由此可见 $G = \{\text{id}\}$.

于是, $S \cong \bar{\mathbb{C}}$, 也即以 $\bar{\mathbb{C}}$ 为万有覆盖的 Riemann 曲面解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$.

(2) $\tilde{S} = \mathbb{C}$ 的情况

这时 G 由保持 \mathbb{C} 不变的 Möbius 变换组成, 因而 G 中的元素应该是下列形式:

$$g: z \mapsto az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

再考虑到 g 在 \mathbb{C} 上不可能有不动点 ($g \neq \text{id}$ 时), 则立即推出 $a=1$, 即

$$g: z \mapsto z+b, \quad b \in \mathbb{C}.$$

假定 $G = \{z \mapsto z+n\omega; n \in \mathbb{Z}\}$, $\omega \neq 0$. 则 S 共形等价于 \mathbb{C}/G , 后者又共形等价于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

假定 $G = \{z \mapsto z+n\omega_1+m\omega_2; m, n \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$, 则 S 共形等价于环面.

除去平凡情况 $G = \{\text{id}\}$ (这时 S 共形等价于 \mathbb{C}) 外, G 只可能有上述两种情况. 现在来证明这一结论. 假如 $G \neq \{\text{id}\}$ 又不是上述两种情况, 则我们选定 G 中两个本原元素

$$\begin{aligned} g_1: z &\mapsto z+\omega_1, \\ g_2: z &\mapsto z+\omega_2, \end{aligned} \quad \omega_1 \neq \pm\omega_2.$$

这时只有两种可能:

$$(i) \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) = 0;$$

$$(ii) \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

但 g_1 与 g_2 所生成的子群 $\langle g_1, g_2 \rangle \neq G$. 若 (i) 发生, 则

$$\omega_1 = a\omega_2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

如 a 是有理数, 则用辗转相除求得 $g \in G$ 使得 $g_1 = g^m$ 且 $g_2 = g^n$ ①, $m, n \in \mathbb{Z}$. 但 g_1, g_2 是本原的, 故 m, n 只能是 ± 1 , 因此 $g_1 = g_2^{\pm 1}$; 这与 $\omega_1 \neq \pm\omega_2$ 矛盾. 当 a 是无理数时,

$$\begin{aligned} g_1^m \cdot g_2^{-n}: z &\mapsto z+m\omega_1-n\omega_2 \\ &= z+(ma-n)\omega_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

这时可适当选取 m, n 使 $(ma-n)$ 任意接近于零, 即 $g_1^m \cdot g_2^{-n}(z)$ 可任意接近于 z . 这与覆盖投影的局部一一性矛盾. 若 (ii) 发生, 则至少存在一个元素

$$g_3: z \mapsto z+\omega_3 \in G,$$

使得对于任意的 m 与 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$g_3(z) \neq z+m\omega_1+n\omega_2.$$

设 $\omega_3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 显然, 上式表明 α 与 β 不可能同时为有理数. 若 α 与 β 中有一个为有理数, 比如 $\alpha = p/q$, 那么

① g^n 表示 n 个 g 复合, 下同.

$$g_3^{kq} \cdot g_1^{-kp} = z + kq\beta\omega_2.$$

利用无理数的有理逼近可知, 可选适当的 k 使 $kq\beta\omega_2$ 与 ω_2 的某一整数倍相差可以任意的小. 这样, 我们便由 g_1, g_2 与 g_3 构造了一个元素 $g \in G$, 使 $g(z)$ 与 z 之差可以任意小. 这与投影 π 的局部一一性矛盾. 当 α 与 β 同时为无理数时, 利用完全类似于前面的方法可导致矛盾.

总之, 在 $\tilde{S} = \mathbb{C}$ 的情况, S 只有三种可能: S 解析同构于 \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 或者环面 \mathbb{C}/Λ , Λ 是一个格.

(3) $\tilde{S} = \Delta$ 的情况

这时相应的 Riemann 曲面 S 解析同构于 Δ/G , 其中 G 是由保持 Δ 不变的并有下列性质的 Möbius 变换组成的群: 对于任意 $z \in \Delta$, 存在 z 的一个小邻域 U , 使得

$$g(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall g \in G, g \neq \text{id}.$$

定义 设 G 是一个由 Möbius 变换组成的群. 我们称 G 是一个 **Fuchs 群**, 如果它满足下列条件:

- (i) $\forall g \in G$ 保持单位圆不变;
- (ii) 对于单位圆 Δ 中的任意一个紧集 K , 使得

$$g(K) \cap K \neq \emptyset$$

的元素 $g \in G$ 最多只有有限多个.

如果一个 Fuchs 群中所有元素(单位元素除外)在 Δ 中都没有不动点, 则被称为是**无挠的**.

很容易看出, 在 $\tilde{S} = \Delta$ 的情况下, 覆盖变换群 G 是一个无挠的 Fuchs 群.

这样, 我们证明了

定理 1 设 S 是任意一个 Riemann 曲面, 则 S 解析同构于下列五种 Riemann 曲面之一:

- (i) $\bar{\mathbb{C}}$;
- (ii) \mathbb{C} ;
- (iii) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (iv) 环面 \mathbb{C}/Γ , 其中 $\Gamma = \{z \mapsto z + n\omega_1 + m\omega_2; n, m \in \mathbb{Z}\}$ 并且 $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$;
- (v) Δ/G , 其中 G 为无挠的 Fuchs 群.

由此定理及第六章 § 8 中定理 2 可以看出,紧 Riemann 曲面中除了亏格为 0 与 1 两种情况之外,其他都能表示为 Δ/G , 其中 G 为无挠 Fuchs 群.

显然,定理 1 中的群 Γ 或 G 同构于 S 的基本群 $\pi_1(S)$. 群 Γ 有时也称做格群.

若 Riemann 曲面 S 不解析同构于 (i)~(iii), 则 S 上的任意一个半纯函数 $f: S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 或者可看做 \mathbb{C} 上关于

$$\Gamma = \{z \mapsto z + n\omega_1 + m\omega_2; n, m \in \mathbb{Z}\}$$

自守的半纯函数,或者可看做 Δ 上关于某 Fuchs 群 G 自守的半纯函数.

$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (或者说, $\bar{\mathbb{C}}$ 上挖去任意三点) 可表为 Δ/G , G 为无挠 Fuchs 群. 熟悉椭圆模函数的读者会理解这里的群 G 正是大家熟知的模群.

最后我们指出,若在上述定义中将单位圆 Δ 改为上半平面 \mathbb{H} , 相应的群 G 也叫 Fuchs 群. 在某些情况下,我们需要用上半平面与 Fuchs 群的商来表示 Riemann 曲面.

§ 4 Riemann 曲面上的度量

设 S 是任意一个 Riemann 曲面. 当 S 的万有覆盖同构于 $\bar{\mathbb{C}}$ 时, S 本身也解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$. 我们知道 $\bar{\mathbb{C}}$ 上有一个自然度量——球面度量

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2},$$

其曲率 $K=1$. 这种球面度量的几何意义是: $\bar{\mathbb{C}}$ 通过球极投影变为 \mathbb{R}^3 中的单位球面 S^2 , 而 S^2 上的球面度量诱导了上述 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的球面度量. 由于 S 解析同构于 $\bar{\mathbb{C}}$, 故 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的球面度量可以移至 S 上.

当 S 的万有覆盖同构于 \mathbb{C} 时, S 解析同构于 \mathbb{C} , 或 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 或 \mathbb{C}/Γ , 其中

$$\Gamma = \{z \mapsto z + n\omega_1 + m\omega_2; n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

\mathbb{C} 上有一个自然度量——Euclid 度量:

$$ds^2 = |dz|^2,$$

并且这个度量在分式线性变换

$$z \mapsto z + \omega \quad (\omega = \text{常数})$$

作用下不变. 因此, 我们可以由 \mathbb{C} 上的 Euclid 度量诱导 S 上的一个度量.

当 S 的万有覆盖同构于单位圆 Δ 时, 我们自然希望 S 能从 Δ 上的某种度量诱导出它的度量. 这要求 Δ 中的这种度量要在保圆分式线性变换下不变. Poincaré 度量正是这样一种度量.

我们假定 (Δ, π) 是 S 的万有覆盖. 又设 G 是这个覆盖的覆盖变换群. 那么, 在 Poincaré 度量下, G 中每个元素都是保距变换, 也即对任意的 $g \in G$, 我们有

$$\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2}, \quad \zeta = g(z).$$

这个式子告诉我们, 当我们把 $\pi^{-1}(p)$ 的一个局部单值分支取做局部参数时, 量

$$\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

与该分支的取法无关. 因此, S 便从 Δ 上继承了一个曲率为 -1 的 Riemann 度量. 这个度量也称做 **Poincaré 度量**, 或**双曲度量**.

正是由于以单位圆为万有覆盖的 Riemann 曲面具有一个双曲度量, 故现代文献中常把这类曲面称做**双曲型 Riemann 曲面**. 本节的结果告诉我们: 除了少数几种 Riemann 曲面之外, 大多数 Riemann 曲面是双曲的.

我们把以 $\bar{\mathbb{C}}$ 为万有覆盖的 Riemann 曲面称做**椭圆型 Riemann 曲面**, 而把以 \mathbb{C} 为万有覆盖的 Riemann 曲面称做**抛物型 Riemann 曲面**.

应该指出, 在传统的 Riemann 曲面理论中还有另外一种分类方式. 它同样有椭圆型、抛物型和双曲型之称, 但其定义与上述定义大相径庭.

§ 5 双曲型 Riemann 曲面与 Fuchs 群

§ 3 中我们指出, 双曲型 Riemann 曲面总可以表示成 $S = \Delta/G$,

其中 G 是一个无挠 Fuchs 群. 这里有许多问题应该进一步研究. 比如, 当 S 是紧曲面时, G 应该有什么特征? 或者更一般地说, 曲面 S 的拓扑与分析的特征是怎样体现在群 G 上的?

为讨论这些问题, 我们先来对 Möbius 变换进行分类.

Möbius 变换的一般形式是

$$\alpha: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. 为了使上述表达式规范化, 我们对 α 的系数作如下规定:

$$ad - bc = 1.$$

这时, α 的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

属于 $SL(2, \mathbb{C})$. 正像我们过去所指出的, $\bar{\mathbb{C}}$ 上的全体 Möbius 变换所组成的群 $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ 同构于

$$SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\} = \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

两个 Möbius 变换 α 与 β 称做共轭等价, 如果存在一个 Möbius 变换 γ , 使得

$$\beta = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}.$$

一个 Möbius 变换, 如果不是恒同变换, 则至多在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上有两个不动点. 事实上, 方程

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad (ad - bc = 1)$$

在 $c \neq 0$ 或 $(a-d)^2 + b^2 \neq 0$ 的条件下至多有两个根.

一个 Möbius 变换称做抛物型的, 如果它在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上只有一个不动点.

一个抛物型的 Möbius 变换共轭于平移变换

$$z \mapsto z + 1.$$

后者的不动点是 ∞ .

图 7.2 显示了抛物型 Möbius 变换在不动点附近的性态.

一个非抛物型的非平凡 Möbius 变换 α 有两个不动点. 取一个

Möbius 变换 γ 将这两个不动点分别变到 0 与 ∞ , 这时

$$\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}: z \mapsto kz, \quad k \neq 0, 1,$$

其中 $k = \lambda e^{i\theta}$, $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

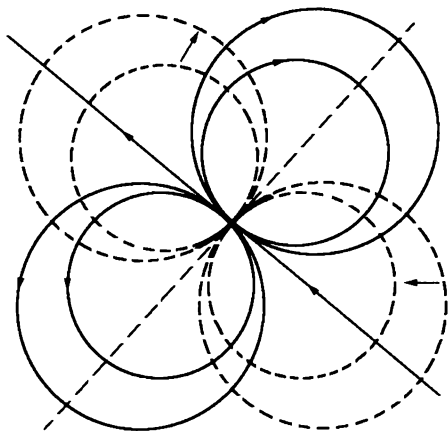


图 7.2

若 $\lambda=1, \theta \neq 0$, 则称 α 是**椭圆型**的 Möbius 变换; 换句话说, 一个共轭于旋转变换的 Möbius 变换称做椭圆型的.

若 $\lambda \neq 1, \theta=0$, 则称 α 是**双曲型**的 Möbius 变换; 换句话说, 一个共轭于相似变换的 Möbius 变换称做双曲型的.

若 $\lambda \neq 1, \theta \neq 0$, 则称 α 是**斜驶型**的 Möbius 变换.

图 7.3 画出了双曲型 Möbius 变换在不动点附近的性态. 椭圆型 Möbius 变换在不动点附近则是各绕着一簇圆旋转. 请读者自己画出椭圆型变换的图形.

设 α 是一双曲型 Möbius 变换, 其不动点为 z_1 与 z_2 . 那么对任何一点 $z \neq z_1$ 与 z_2 , $\alpha^n(z)$ 趋向于不动点之一, 这里 α^n 表示 α 的 n 次复合. 我们将 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(z)$ 称做 α 的**吸性不动点**, 而将另一个不动点称做 α 的**斥性不动点**.

根据定义和上述性质, 我们很容易推出: 若 α 是保持 Δ 不变的双曲型或抛物型 Möbius 变换, 则其不动点均在 $\partial\Delta$ 上. 若 α 是保持 Δ 不变的椭圆型 Möbius 变换, 则其不动点一个在 Δ 内, 另一个在 Δ 外.

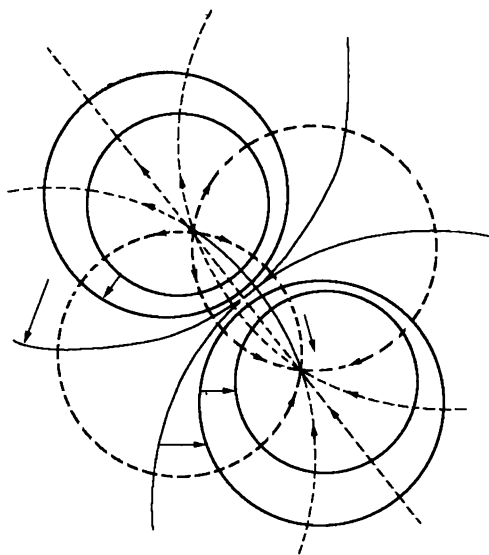


图 7.3

现在,我们回到本节开始时提出的问题上.

定理 1 设 S 是一 Riemann 曲面,以 Δ 为其万有覆盖,相应的覆盖变换群为 G . 则 G 中非平凡元素是双曲型元素或抛物型元素. 特别地,若 S 是紧曲面,则 G 中非平凡元素都是双曲型元素.

证 由于 G 中非平凡元素在 Δ 内无不动点,故 G 中非平凡元素均不能是椭圆型的. 另外, G 中非平凡元素也不可能是斜驶型的. 事实上,若有这样的元素,则其不动点必在单位圆周上. 然而斜驶型元素在其不动点局部性态是拉伸(或压缩)加上一个旋转,这不可能保持单位圆周不变. 因此, G 中最多只有双曲型与抛物型的非平凡元素.

设 $\alpha \in G \setminus \{\text{id}\}$ 是一抛物型元素, $\zeta \in \partial\Delta$ 是 α 的不动点. 取一分式线性变换 β , 将 ζ 变成 ∞ , 将 Δ 变成上半平面 \mathbb{H} , 并且

$$\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}: z \mapsto z + 1.$$

在上半平面 \mathbb{H} 中考虑线段 $\gamma_y = \{x + iy: 0 \leq x \leq 1\}$. γ_y 的 Poincaré 长度为

$$l(\gamma_y) = \int_0^1 \frac{dx}{y} = \frac{1}{y}.$$

因此,当 $y \rightarrow +\infty$ 时, $l(\gamma_y) \rightarrow 0$. 这表明在 S 上有一个非平凡的闭曲线族,其长度可以任意小. 这样, S 不可能是紧曲面. 因此,当 S 是紧曲面时, G 中无抛物型元素. 证毕.

设 S 是一紧 Riemann 曲面,其亏格 $g > 1$. 又设 Δ 为 S 的万有覆盖,其覆盖变换群为 G .

在 S 上取定一点 p_0 ,我们可以取到 $2g$ 条以 p_0 为终点和始点的闭曲线 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$,使其构成 S 的一个典型剖分.

在 Δ 内取定一点 z_0 ,使其为 p_0 之上方点. 过点 z_0 提升曲线 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$,分别得到曲线

$$\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g.$$

我们假定这些曲线的终点分别是

$$\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_g, \eta_g.$$

显然,这些终点的投影都是 p_0 . 于是,在 G 中存在 $2g$ 个元素 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ 使得

$$\alpha_j(z_0) = \xi_j, \quad j = 1, \dots, g, \quad (7.1)$$

$$\beta_j(z_0) = \eta_j, \quad j = 1, \dots, g. \quad (7.2)$$

我们知道, $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ 同伦于 $[p_0]$, 故过 z_0 提升 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ 所得曲线的终点必为 z_0 . 这表明元素

$$\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \circ \dots \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1}$$

在 Δ 内有一不动点,因而是恒同映射,也即

$$\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \circ \dots \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1} = \text{id}. \quad (7.3)$$

总之,我们证明了下列定理:

定理 2 设 S 为紧 Riemann 曲面,其亏格 $g > 1$. 又设 Δ 为其万有覆盖, G 为相应的覆盖变换群,则相对 S 的任一典型剖分,存在 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \in G$, 满足关系式 (7.3), 并构成 G 的生成元组.

现在我们来构造一个无挠 Fuchs 群的**基本多边形**.

我们假定 G 是一个非平凡的无挠 Fuchs 群,并将群 G 的元素加以排列:

$$G = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots\} \quad (\gamma_0 = \text{id}).$$

在 Δ 内取定一点 z_0 , 并考虑 G 关于 z_0 的轨道:

$$Gz_0 = \{z_0, z_1, \dots\},$$

其中 $z_n = \gamma_n(z_0)$. 对于任一点 z_n , 我们设

$$l_n(z_0) = \{z \in \Delta; d(z_0, z) = d(z, z_n)\},$$

其中 $d(\cdot, \cdot)$ 为两点的 Poincaré 距离. $l_n(z_0)$ 是一条 Poincaré 直线, 并将 Δ 分作两部分, 将其中包含 z_0 的部分记做 $P_n(z_0)$, 即

$$P_n(z_0) = \{z \in \Delta; d(z_0, z) < d(z, z_n)\}.$$

定义 集合

$$P(z_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(z_0)$$

称为群 G 的关于 z_0 的**基本多边形**.

很容易证明, 对于 Δ 中任何紧集 E , E 最多与有限多条 $l_n(z_0)$ 相交 (见本章习题第 12 题). 利用这一性质立即推出 $P(z_0)$ 是一区域. 事实上, 若 $z \in P(z_0)$, 那么

$$d(z_0, z) < d(z, z_n), \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

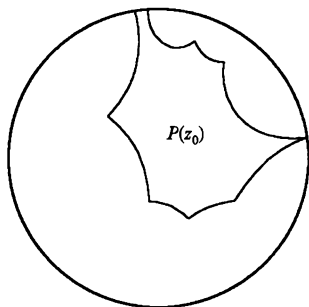


图 7.4

取 $E_\delta = \{\zeta \in \Delta; |\zeta - z| < \delta\}$, 其中 $\delta > 0$ 充分小. 由于 E_δ 至多与 $l_n(z_0)$ 有限多条相交, 故可以取 δ 充分小使 $\{\zeta; |\zeta - z| < \delta\}$ 内一切点 ζ 均在 $l_n(z_0)$ 之一侧. 这样, G 是一开集. G 的连通性是显然的.

$P(z_0)$ 不仅是一区域, 而且关于 Poincaré 直线而言是凸的. 这是因为每一个 $P_n(z_0)$ 是凸的.

此外, $P(z_0)$ 的边是由 Poincaré 直线段与 $\partial\Delta$ 上的弧或点组成, 见图 7.4. $\partial P(z_0)$ 中落在 Δ 内的 Poincaré 直线段称做**内边**, 而落在 $\partial\Delta$ 上的边称做**无穷远边**.

根据 $P(z_0)$ 的定义, 并注意到 G 中元素保持 Poincaré 距离的特性, 立即推出下面结论 (i):

(i) 基本多边形内部任意两点关于 G 不等价.

此外,我们还可以证明:

(ii) 对基本多边形的每一条内边,都存在惟一的一条内边与之等价(关于 G).

(iii) 记 P_0 为基本多边形 $P(z_0)$ 与其内边之并,则

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \gamma_n(P_0).$$

现在,我们讨论双曲型 Riemann 曲面所对应的 Fuchs 群的基本多边形.

设 S 为一 Riemann 曲面, (Δ, π) 为其万有覆盖,相应的覆盖变换群是 G . 又设 $P = P(z_0)$ 是以 z_0 为基点的、 G 的基本多边形, P_0 是 P 和 P 的内边之并. 那么,由 P 的构造及上述性质立即看出, P, P_0 与 S 有下述关系: $\pi|_P: P \rightarrow S$ 是一单射,而 $\pi|_{P_0}: P_0 \rightarrow S$ 是一满射.

定理 3 在上述假定和记号之下,若 S 是紧 Riemann 曲面,则它所对应的 Fuchs 群 G 的基本多边形 P 的边界中只有内边,并且边数有限. 特别地, P_0 是 Δ 内紧集合(见图 7.5).

证 首先证明 P_0 是紧的. 若 P_0 不是紧集,则存在一串点 $z_n \in P_0$,使得当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(z_0, z_n) \rightarrow \infty$. 设 $p_n = \pi(z_n)$,则由 S 的紧性可知 p_n 在 S 上有聚点. 假定 $q \in S$ 是 p_n 的一个聚点. 设 $\zeta \in P_0$ 是 q 的上方点. 那么 ζ 的邻域内应有无穷多个 z_n 的点. 但这不可能,由此推出 P_0 是紧集合.

前面已经指出,对于任何紧集 E , $\{L_n(z_0)\}$ 与 E 相交者最多为有限条. 可见 P 只能有有限条边. 证毕.

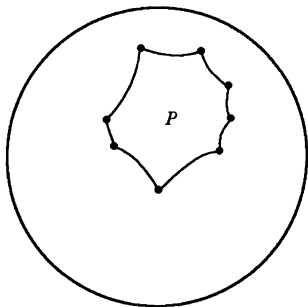


图 7.5

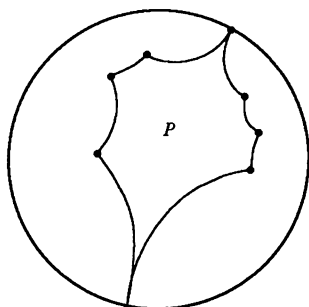


图 7.6

非紧 Riemann 曲面所对应的 Fuchs 群的基本多边形可以是十分复杂的. 它的内边可能是有限条, 也可能是无限条.

一般说来, 若 S 所对应的 Fuchs 群 G 是有限生成的 (或者说 S 的基本群是有限生成的), 则称 S 是**拓扑有限型曲面**; 否则称为**拓扑无限型曲面**. 拓扑有限型的 Riemann 曲面所对应的 Fuchs 群的基本多边形的内边是有限条. 一个紧 Riemann 曲面挖去有限个点所形成的新 Riemann 曲面, 称为**解析有限型 Riemann 曲面**. 解析有限型 Riemann 曲面是拓扑有限型曲面, 因而其对应的 Fuchs 群的基本多边形的内边也是有限条的. 但与紧曲面情况不同的是, 其内边可能成对地延伸到单位圆的边上, 并且在那里相交. 见图 7.6.

最后, 在结束本节前我们要证明下面定理:

定理 4 设 S 是一紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 (Δ, π) 是 S 的万有覆盖, 而 G 是其覆盖变换群. 则 G 中全体非平凡元素的不动点集合在 $\partial\Delta$ 是稠密的.

这个定理本质上是定理 3 的推论.

这个定理在下一章中讨论紧 Riemann 曲面间的同胚的同伦提升时要用到.

我们先来讨论双曲 Möbius 变换的不变轴, 然后再给出定理 4 的证明.

设 γ 是一个保持单位圆 Δ 不变的双曲 Möbius 变换, 其吸性不动点记为 ζ_+ , 斥性不动点记为 ζ_- . 过 ζ_+ 与 ζ_- 在 Δ 内作一条 Poincaré 直线 l . 那么 l 在 γ 的作用下不变, 也即 $\gamma(l) = l$. 我们称 l 为 γ 的不变轴.

l 的不变性可以用下面的办法得到清楚的解释: 作一分式线性变换 $w = \varphi(z)$ 将 ζ_+ 与 ζ_- 分别映为 ∞ 与 0 , 并把 Δ 映为上半平面. 这时 $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ 是一相似变换: $z \mapsto kz$, $k > 1$. 而 $\varphi(l)$ 是 \mathbb{H} 中的虚轴. 显然, 上半虚轴在相似变换下不变. 因此, l 在 γ 作用下不变.

若 γ 是定理 4 中群 G 的一个非平凡元素, 那么其不变轴的投影则一定是 S 上的一条闭的测地线. 反之, 若 $\Gamma \subset S$ 是一条闭的测地线, 则 $\pi^{-1}(\Gamma)$ 的任何一个连通分支都是 G 中某双曲元素的不变轴.

定理 4 的证明 在 $\partial\Delta$ 上任意取定一点 $\zeta = e^{i\theta_0}$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$), 并考虑

一个充分小的正数 δ . 过点

$$, \quad \zeta_1 = e^{i(\theta_0 + \delta)} \quad \text{及} \quad \zeta_2 = e^{i(\theta_0 - \delta)}$$

在 Δ 作一条 Poincaré 直线 L , 则 L 将 Δ 分作两个连通分支. 将其中的一个以 ζ 为边界点的分支记做 N_δ .

任取一点 $z_0 \in \Delta$, 并构造其基本多边形 $P = P(z_0)$. 根据定理 3, P 有有限多条边且均为内边, 也即 P_0 是 Δ 内紧集. 由 P_0 的紧性及性质 $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \gamma_n(P_0)$ 可以推出, 存在一自然数 m 使得 $\gamma_m(P_0) \subset N_\delta, \gamma_m \in G$. 显然, $\gamma_m(P_0)$ 是以 $\gamma_m(z_0)$ 为基点的基本多边形的闭包.

设 $\Gamma \subset S$ 是一条闭的测地线. 在 Γ 上取定一点 p_0 , 那么 p_0 在 $\gamma_m(P_0)$ 中至少有一上方点, 记之为 \tilde{p}_0 . 在 $\pi^{-1}(\Gamma)$ 的连通分支中, 至少有一个分支过 \tilde{p}_0 . 记该分支为 l . 那么 l 是某双曲元素 $\gamma \in G \setminus \{\text{id}\}$ 的不变轴.

现在有两种可能性: (i) l 与 L 不交, 这时 $l \subset N_\delta$; (ii) l 与 L 相交, 这时 l 的半直线落在 N_δ 之中. 但无论哪种可能性, γ 至少有一个不动点落在弧 $\widehat{\zeta_1 \zeta_2}$ 之中. 证毕.

习 题

1. 证明双曲 Riemann 曲面上的 Poincaré 度量是完备的.

2. 设 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是两个双曲 Riemann 曲面之间的全纯映射. 又设 ds_1 与 ds_2 分别是 S_1 及 S_2 上的 Poincaré 度量. 证明 $f^* ds_2 \leq ds_1$ (这是 Schwarz 引理的推广).

3. 证明: 在上述不等式中等号成立之必要条件为 f 是 $S_1 \rightarrow S_2$ 的覆盖映射.

4. 设 $S = \mathbb{H}/G$, 其中 G 是保持上半平面 \mathbb{H} 不变的 Fuchs 群. 假定 $g \in G$ 且 g 的表达式为 $g: z \mapsto \lambda z, \lambda > 1$. 又设 $\pi: \mathbb{H} \rightarrow S$ 是自然投影. 试证明上半平面中的虚轴的投影是 S 上的一条闭测地线. 若 g 在 G 中为本原元素, 则该测地线的长度 (依双曲度量) 为 $\ln \lambda$.

5. 设 S 为双曲型紧 Riemann 曲面. 又设 $f: S \rightarrow S$ 是 S 到自身的共形映射. 证明 f 一定是周期映射, 即存在 m 使得

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \uparrow} = \text{id}.$$

6. 设 $S = \Delta/G$, 其中 G 为无挠的 Fuchs 群. 又设 $g \in G \setminus \{\text{id}\}$, 并记 $g^n = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \uparrow}$. 证明对任一点 $z_0 \in \Delta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $g^n(z_0) \rightarrow \partial\Delta$.

7. 设 $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto \lambda z$, 其中 $\lambda > 1$, 并假定 $\langle g \rangle$ 是由 g 生成的循环群. 求 $\text{Mod}(\mathbb{H}/\langle g \rangle) = ?$

8. 设 $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto z+1$. 证明: $\mathbb{H}/\langle g \rangle \cong \Delta \setminus \{0\}$.

9. 设 S 是双曲型 Riemann 曲面. 又设 $f: S \rightarrow S$ 是 S 到自身的解析映射, 且有一不动点 p_0 . 记

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \uparrow}.$$

证明: 要么 f 是共形映射, 要么对任意一点 p , $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = p_0$.

10. 设

$$\alpha: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1)$$

是非平凡 Möbius 变换. 记

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

试证明:

- (i) α 是抛物型的, 当且仅当 $\text{tr}^2(A) = 4$;
- (ii) α 是椭圆型的, 当且仅当 $0 \leq \text{tr}^2(A) < 4$;
- (iii) α 是双曲型的, 当且仅当 $4 < \text{tr}^2(A) < \infty$;
- (iv) α 是斜驶型的, 当且仅当 $\text{tr}^2(A) \in [0, +\infty)$.

11. 设 Γ 是 Riemann 曲面上的一条闭测地线, 且 Γ 的表示式为 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S, \gamma(0) = \gamma(1)$. 证明 Γ 是 γ 的自由同伦类中的最短线.

12. 证明: (i) 在 §5 定理 2 的证明中的

$$l_n(z_0) = \{z \in \Delta: d(z_0, z) = d(z, z_n)\}$$

是一条 Poincaré 直线, 并垂直二等分 Poincaré 线段 $\overline{z_0 z_n}$;

(ii) 对 Δ 中任何紧集 E , 至多有有限条 $l_n(z_0)$ 与 E 相交.

第八章 Riemann 曲面上的拟共形映射

本章将介绍 Riemann 曲面上拟共形映射的基本概念,讨论紧 Riemann 曲面上拟共形映射的极值问题,并证明 Teichmüller 关于极值拟共形映射的惟一性定理.

本章的内容是 Teichmüller 空间理论的基础.

§ 1 基 本 概 念

现在,我们将拟共形映射的概念搬到 Riemann 曲面上.

定义 1 设 S_0 为一 Riemann 曲面,其坐标卡集合为

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A\}.$$

又设 S_1 为另一 Riemann 曲面,其坐标卡集合为

$$\{(V_\beta, \psi_\beta): \beta \in B\}.$$

若 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一保向同胚,且存在常数 $K \geq 1$,使得对 $\forall \alpha \in A$ 及 $\beta \in B$,且

$$f(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset \text{ 时,}$$

f 的局部表示

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$$

是 K 拟共形映射,则称 f 是一个 S_0 到 S_1 的 K 拟共形映射,或简称拟共形映射.

由于平面区域上的拟共形映射在复合以共形映射后伸缩商不变,故在上述定义中,不会因局部参数的选择而影响 f 的局部表示的 K 拟共形性. 因此,上述定义是合理的.

我们应当指出,在上述定义中 K 是事先给定的,不依赖于局部参数的选取.

对于 Riemann 曲面间的拟共形映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$,其 Beltrami 系

数依赖于局部参数的选择. 因此, 一般说来 f 局部表示的 Beltrami 系数整体上不再是一个函数.

事实上, 每一个拟共形映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 都在 S_0 上诱导了一个特殊的微分形式, 我们称之为 Beltrami 微分. 这种 Beltrami 微分的作用相当于 Beltrami 系数, 因此也称为 f 的 **Beltrami 系数**.

定义 2 若 $\mu(z)\overline{dz}/dz$ 在 S_0 上是一个局部参数变换下不变的微分形式, 那么 $\mu(z)\overline{dz}/dz$ 称为 **Beltrami 微分**.

这里所谓 $\mu(z)\overline{dz}/dz$ 是一种不变形式是指: 若 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 S_0 的局部坐标卡集合, 且对每一个 α , 都在 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上指定了一个函数 $\mu_\alpha(z_\alpha)$, 使得对于任意的 α 与 β , 且 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 总有

$$\mu_\alpha(z_\alpha) \overline{dz_\alpha}/dz_\alpha = \mu_\beta(z_\beta) \overline{dz_\beta}/dz_\beta,$$

其中 $z_\alpha = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z_\beta)$.

命题 1 若 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一个拟共形映射, 则 f 在 S_0 上诱导了一个可测的 Beltrami 微分 $\overline{\partial}f/\partial f = \mu(z)\overline{dz}/dz$, 且

$$\|\mu\|_{L^\infty(S_0)} < 1.$$

证 我们设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 S_0 的局部坐标卡集合. 则 f 在参数 $z_\alpha = \varphi_\alpha(p)$ 下的局部表示为

$$f_\alpha = \psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1},$$

其中 ψ 为 S_1 的局部参数. 每个局部表示 f_α 的 Beltrami 系数决定了一个函数 $\mu_\alpha(z_\alpha)$. 显然, ψ 的选取不影响 $\mu_\alpha(z_\alpha)$ 的值. 故不妨取一个固定的局部参数 ψ . 假定 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 这时, f 在参数 $z_\beta = \varphi_\beta(p)$ 下的局部表示为

$$f_\beta = \psi \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

设 f_β 的 Beltrami 系数为 $\mu_\beta(z_\beta)$. 因为 $f_\alpha(z_\alpha)$ 与 $f_\beta(z_\beta)$ 之间只差一个自变量的共形映射

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) \quad (f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}).$$

故它们的 Beltrami 系数满足下列关系:

$$\mu_\beta(z_\beta) = \mu_\alpha(f_{\alpha\beta}(z_\beta)) \overline{f'_{\alpha\beta}(z_\beta)} / f'_{\alpha\beta}(z_\beta),$$

此式意味着

$$\mu_\alpha(z_\alpha) \overline{dz_\alpha}/dz_\alpha = \mu_\beta(z_\beta) \overline{dz_\beta}/dz_\beta,$$

也即 $\bar{\partial}f_\alpha/\partial f_\alpha = \bar{\partial}f_\beta/\partial f_\beta$.

根据 Beltrami 微分的局部表达式立即可以看出: Beltrami 微分的模是 S_0 上的一个函数. 因此, 可以谈论 Beltrami 微分 $\mu \bar{dz}/dz$ 的 $L^\infty(S_0)$ 范数, 并且显然有: 若 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是 K 拟共形映射, 则对 f 所诱导的 Beltrami 微分 $\mu(z) \bar{dz}/dz$, 有

$$\|\mu\|_{L^\infty(S_0)} \leq \frac{K-1}{K+1} < 1.$$

证毕.

设 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一个拟共形映射, $\mu \bar{dz}/dz$ 为它的 Beltrami 微分. 令

$$K[f] = \frac{1 + \|\mu\|_{L^\infty(S_0)}}{1 - \|\mu\|_{L^\infty(S_0)}},$$

并称之为 f 的最大伸缩商(maximal dilatation).

显然, $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是共形映射的充要条件为 $K[f]=1$. 因此, 一般说来, $\ln K[f]$ 的大小反映着 f 对共形映射偏离的程度.

像平面区域间的拟共形映射一样, 我们有

$$K[f \circ g] \leq K[f] \cdot K[g],$$

其中 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 及 $g: S_1 \rightarrow S_2$ 均为拟共形映射.

§ 2 拟共形映射的同伦提升

为研究 Riemann 曲面上的拟共形映射, 我们将它们提升到其万有覆盖曲面上进行讨论是十分自然的. 由于今后主要讨论亏格 $g > 1$ 的紧 Riemann 曲面间的拟共形映射, 故我们仅讨论双曲型 Riemann 曲面上拟共形映射的**提升**.

设 (Δ, π_0) 是 S_0 的万有覆盖, 而 (Δ, π_1) 为 S_1 的万有覆盖. 假定 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一个同胚. 如果一个同胚 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$, 使得 $\pi_1 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_0$, 也即下列交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Delta \\
 \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 S_0 & \xrightarrow{f} & S_1
 \end{array}$$

成立,这时,我们称 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 的提升.

上述同胚的提升总是存在的. 它可以用下列办法获得: 先在 Δ 中取定一点 z_0 . 这样在 S_0 上得到一点 $p_0 = \pi_0(z_0)$. 对于 Δ 中的任意一点 z , 我们用任意一条弧 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \Delta$ 连结 z_0 与 z , 即 $\tilde{\gamma}(0) = z_0$, $\tilde{\gamma}(1) = z$. $\tilde{\gamma}$ 在 S_0 上的投影记做 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S_0$, 那么 γ 的始点为 p_0 , 而终点为 $p = \pi_0(z)$. 我们考虑 S_1 上的弧 $\beta = f \circ \gamma$, 则 β 以 $f(p_0)$ 为始点, 而以 $f(p)$ 为其终点. 在 Δ 上选定 $f(p_0)$ 的一个上方点 w_0 , 并过 w_0 提升 β , 设其终点为 w . 我们将 z 到 w 的对应记做 $w = \tilde{f}(z)$.

那么, 显然 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 的一个提升, 且 $\tilde{f}(z_0) = w_0$.

应当指出, 在上述做法中, 在给定 z 后, w 的确定与曲线 $\tilde{\gamma}$ 的选取无关. 这一点可由单值性定理可推出.

显然, 一个同胚 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 的提升一般说来不是惟一的. 它依赖于基点偶 (z_0, w_0) 的选取. 若 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 f 的一个提升, 且 G_0 及 G_1 分别是万有覆盖 (Δ, π_0) 及 (Δ, π_1) 的覆盖变换群, 那么, $g_1 \circ \tilde{f} \circ g_0$ 显然也是 f 的一个提升, 其中 $g_1 \in G_1$ 及 $g_0 \in G_0$ 是任意元素.

下面我们假定 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是拟共形映射. 这时 f 的提升 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 也是拟共形映射. 事实上, 当 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 限制在每一个很小的邻域时, 它本身恰好是 f 的局部表示, 因而一定是拟共形的.

设 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是拟共形映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 的提升. 又假定 $\mu(z)$ ($z \in \Delta$) 是 \tilde{f} 的 Beltrami 系数. 那么 $\mu(z)$ 应满足下列关系式:

$$\mu(z) = \mu(g(z)) \overline{g'(z)} / g'(z), \quad \forall g \in G_0, z \in \Delta,$$

其中 G_0 是覆盖 (Δ, π_0) 的覆盖变换群.

事实上,对于任一元素 $g \in G_0$, $\tilde{f} \circ g$ 仍是 f 的一个提升. 这时 $\tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}$ 将是 (Δ, π_1) 的一个覆盖变换, 记之为 g_1 . 那么 $g_1 \in G_1$ 且有 $\tilde{f} \circ g = g_1 \circ \tilde{f}$. 分别对此式两端求其 Beltrami 系数即得到上述关系式.

总之,我们证明了 Riemann 曲面间的一个拟共形映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 到其万有覆盖曲面上的提升仍是一个拟共形映射, 而且此拟共形映射的 Beltrami 系数关于 S_0 的覆盖变换群 G_0 满足一种自守关系.

下面我们讨论两个同伦的拟共形同胚的提升问题.

设 $f_j: S_0 \rightarrow S_1$ 是拟共形映射, $j=1, 2$. 若存在一个连续映射:

$$F: S_0 \times [0, 1] \rightarrow S_1$$

使得 $F(p, 0) = f_1(p)$, $F(p, 1) = f_2(p)$, $\forall p \in S_0$, 这时我们称 f_1 与 f_2 同伦.

设 (Δ, π_j) 为 S_j 的覆盖, 又设其覆盖变换群为 G_j , $j=0, 1$. 容易得到: S_0 到 S_1 的任何一个同胚 f 的提升 \tilde{f} , 都诱导了 G_0 到 G_1 的同构对应:

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{f}}: G_0 &\longrightarrow G_1, \\ g &\longmapsto \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}. \end{aligned}$$

我们发现, 当 f_1 与 f_2 同伦时, 它们的提升 \tilde{f}_1 与 \tilde{f}_2 所诱导的 G_0 到 G_1 的同构之间有一定的关系.

定理 1 设 f_1 及 f_2 是 $S_0 \rightarrow S_1$ 的两个同胚, 而 \tilde{f}_1 及 \tilde{f}_2 分别是 f_1 及 f_2 的提升. 则 f_1 与 f_2 同伦的充要条件是: 存在一个 $g_1 \in G_1$, 使得

$$\chi_{\tilde{f}_1} = g_1 \circ \chi_{\tilde{f}_2} \circ g_1^{-1}. \quad (8.1)$$

证明 充分性 假定 (8.1) 成立, 要证 f_1 与 f_2 同伦. 我们令 $g_1 \circ \tilde{f}_2 = \tilde{h}$, 则显然 \tilde{h} 也是 f_2 的提升, 且由 (8.1) 式有

$$\chi_{\tilde{f}_1} = \chi_{\tilde{h}},$$

其中

$$\chi_{\tilde{h}} = \tilde{h} \circ g \circ \tilde{h}^{-1}, \quad \forall g \in G_0. \quad (8.2)$$

现在我们构造 f_1 与 f_2 的同伦. 对于任意一点 $t \in [0, 1]$, 我们令

$\tilde{F}(z, t)$ 是 Poincaré 直线段 $(\tilde{f}_1(z), \tilde{h}(z))$ 上的一点, 它到 $\tilde{f}_1(z)$ 的非欧距离与它到 $\tilde{h}(z)$ 的 Poincaré 距离之比为 $t : (1-t)$. 显然, $\tilde{F}(z, t)$ 是 z 与 t 的连续函数. 下面我们记 $\tilde{F}(z, t)$ 为 $\tilde{F}_t(z)$.

(8.2) 式告诉我们:

$$\tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{h} \circ g \circ \tilde{h}^{-1}, \quad \forall g \in G_0.$$

对于 $g \in G_0$ 我们令 $\tilde{g} = \tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1}$, 那么 $\tilde{g} \circ \tilde{f}_1 = \tilde{f}_1 \circ g$, 且 $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ g$. 由于 \tilde{g} 保持 Poincaré 距离不变, 故有

$$\tilde{g} \circ \tilde{F}_t = \tilde{F}_t \circ g, \quad \forall g \in G_0.$$

注意到 $\tilde{g} \in G_1$, 上式表明 \tilde{F}_t 将关于 G_0 等价点变成关于 G_1 的等价点. 这样一来 \tilde{F}_t 可以投影为 $S_0 \rightarrow S_1$ 的一个同胚 F_t . 显然, $F_t: S_0 \rightarrow S_1$ 作为 $S_0 \times [0, 1] \rightarrow S_1$ 的映射是连续的. 而根据 \tilde{F}_t 的定义, $F_0 = f_1$, $F_1 = f_2$. 可见, f_1 与 f_2 是同伦的.

必要性 设 f_1 与 f_2 是同伦的, 也即存在连续映射

$$F: S_0 \times [0, 1] \rightarrow S_1,$$

使得 $F(\cdot, 0) = f_1, F(\cdot, 1) = f_2$. 根据拓扑学中的定理, 我们可以不失一般性地假定, 对于每一个 $t \in [0, 1], F(p, t)$ 都是 $S_0 \rightarrow S_1$ 的同胚. 我们记 $F(p, t)$ 为 $F_t(p)$.

在 S_0 上取定一点 p_0 , 再在 Δ 中取定一点 z_0 , 使之成为 p_0 的一个上方点. 令 $w_0 = \tilde{f}_1(z_0)$, 过点 w_0 提升 S_1 上的曲线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S_1$, $t \mapsto F(p_0, t)$ 得到 $\tilde{\gamma}$.

对于任意固定的一点 $t \in [0, 1]$, 我们以 z_0 及 $\tilde{\gamma}(t)$ 为基点提升同胚 $F_t: S_0 \rightarrow S_1$ 而得到 \tilde{F}_t . 显然, $\tilde{F}_t: \Delta \rightarrow \Delta$ 作为 $\Delta \times [0, 1] \rightarrow \Delta$ 的映射是连续的, 而且 \tilde{F}_t 诱导了 G_0 到 G_1 的一个同构

$$g \mapsto \tilde{F}_t \circ g \circ \tilde{F}_t^{-1}, \quad \forall g \in G_0,$$

记之为 χ_t .

再注意到 G_1 在 Δ 作用的间断性可知, 对于任意取定的点 z 及 $g \in G_0$, 集合

$$\{\tilde{F}_t \circ g \circ \tilde{F}_t^{-1}(z): t \in [0, 1]\}$$

在 Δ 内均无极限点. 故上述集合只能是一点, 也即 $\chi_t \equiv \chi_0, \forall t \in$

$[0, 1]$. 特别地, $\chi_1 = \chi_0$.

另外一方面, 根据 \tilde{F}_t 的构造方式, $\tilde{F}_0 = \tilde{f}_1$. 于是我们又有

$$\tilde{F}_1 \circ g \circ \tilde{F}_1^{-1} = \tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1}, \quad \forall g \in G_0. \quad (8.3)$$

显然 \tilde{F}_1 是 f_2 的一个提升. 因此, 存在一个 $g_1 \in G_1$ 使得 $\tilde{F}_1 = g_1 \circ \tilde{f}_2$. 这样, 由 (8.3) 式便得到要证明的 (8.1) 式. 证毕.

注 1 从这个定理的证明中可以看出: 条件 (8.1) 也是 f_1 与 f_2 合痕的充要条件. 这里所谓合痕是指 f_1 与 f_2 有这样的同伦 $F: S_0 \times [0, 1] \rightarrow S_1$, 对于任意固定的 $t \in [0, 1]$, $F(\cdot, t)$ 是 $S_0 \rightarrow S_1$ 的同胚.

注 2 上述定理可修改成下列形式: f_1 与 f_2 同伦的充要条件是: 对于 f_1 的任一提升 \tilde{f}_1 , 都存在 f_2 的一个提升 \tilde{f}_2 使得它们所诱导的 G_0 到 G_1 的同构是相同的.

下面我们来讨论紧 Riemann 曲面上两个同伦的拟共形映射的提升问题.

现在, 我们回顾有关紧 Riemann 曲面所对应的 Fuchs 群的一些基本事实. 设 $S = \Delta/G$ 是一个紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 这时 Fuchs 群 G 中元素有下列事实:

- (i) G 中的非平凡元素是双曲型分式线性变换;
- (ii) 对任意 $g \in G \setminus \{\text{id}\}$ 及任意一点 $z \in \Delta$, 我们有

$$g^n(z) \rightarrow \zeta_g^+ \quad (n \rightarrow +\infty),$$

其中 ζ_g^+ 是 g 的吸性不动点.

- (iii) G 中全体非平凡元素的不动点集合在 $\partial\Delta$ 是稠密的.

这些结论已在第七章 § 5 中证明过了.

定理 2 设 S_0 与 S_1 是两个亏格相同的紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 (Δ, π_0) 与 (Δ, π_1) 分别是 S_0 与 S_1 的覆盖. 假设 $f_j: S_0 \rightarrow S_1$ 是拟共形映射^① ($j=1, 2$), 则 f_1 与 f_2 同伦的充要条件是: 对于 f_1 的任一提升 \tilde{f}_1 , 都存在 f_2 的一个提升 \tilde{f}_2 , 使得

① 实际上, 这里可以不假定 f_j 是拟共形映射, 而只假定它们是保向同胚即可. 但这时需要拓扑学中的一条定理: 紧曲面间同胚到万有覆盖上的提升可同胚延拓至边界 $\partial\Delta$.

$$\tilde{f}_1|_{\partial\Delta} = \tilde{f}_2|_{\partial\Delta}. \quad (8.4)$$

证 先证条件(8.4)的必要性. 设 (Δ, π_j) 的覆盖变换群为 G_j , $j=0,1$. 根据定理1, 若 f_1 与 f_2 同伦, 则存在提升 \tilde{f}_1 与 \tilde{f}_2 使得

$$\tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ g \circ \tilde{f}_2^{-1}, \quad \forall g \in G_0.$$

由此推出

$$\tilde{f}_1 \circ g^n \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ g^n \circ \tilde{f}_2^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

令 $w_1 = \tilde{f}_1^{-1}(z), w_2 = \tilde{f}_2^{-1}(z)$, 那么

$$\tilde{f}_1 \circ g^n(w_1) = \tilde{f}_2 \circ g^n(w_2), \quad n = 1, 2, \dots.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $g^n(w_1)$ 与 $g^n(w_2)$ 均趋于 g 的吸性不动点 ζ_g^+ , 于是 $\tilde{f}_1(\zeta_g^+) = \tilde{f}_2(\zeta_g^+)$. 以 g^{-1} 替代上述的 g , 又可得到 $\tilde{f}_1(\zeta_g^-) = \tilde{f}_2(\zeta_g^-)$, 其中 ζ_g^- 是 g 的斥性不动点. 总之, \tilde{f}_1 与 \tilde{f}_2 在元素 g 的两个不动点上有相同的值. 由于 G_0 中的非平凡元素都是双曲型的, 而且它们的不动点在 $\partial\Delta$ 上是稠密的. 再注意到 \tilde{f}_1 及 \tilde{f}_2 在 $\partial\Delta$ 上的连续性, 即得 $\tilde{f}_1|_{\partial\Delta} = \tilde{f}_2|_{\partial\Delta}$.

下面证明条件(8.4)也是充分条件. 假如(8.4)成立, 那么对于任意 $g \in G_0$, 所对应的元素 $\tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1}$ 与 $\tilde{f}_2 \circ g \circ \tilde{f}_2^{-1}$ 在 $\partial\Delta$ 上有相同的边界值. 但它们都是分式线性变换, 故它们是同一分式线性变换. 因此

$$\tilde{f}_1 \circ g \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ g \circ \tilde{f}_2^{-1}, \quad \forall g \in G_0.$$

这也就是说 $\chi_{\tilde{f}_1} = \chi_{\tilde{f}_2}$. 根据定理1, f_1 与 f_2 同伦. 证毕.

这个定理把紧 Riemann 曲面间的同伦拟共形映射化成单位圆内具有相同边界值的拟共形映射. 这为今后的讨论带来很大方便.

这个定理的一个直接推论是下面的推论.

推论 设 $f: S_0 \rightarrow S_0$ 是紧 Riemann 曲面 S_0 到自身的共形映射, 并设 S_0 的亏格 $g > 1$. 若 f 同伦于恒同映射, 则 f 本身是恒同映射.

证 设 (Δ, π) 是 S_0 的一个覆盖, 并假定 \tilde{f} 是 f 的一个提升. 根

据定理 2, 恒同映射 id 有一个提升 $\tilde{f}_0: \Delta \rightarrow \Delta$, 使得 $\tilde{f}|_{\partial\Delta} = \tilde{f}_0|_{\partial\Delta}$. 但 \tilde{f} 与 \tilde{f}_0 都是共形映射, 故 $\tilde{f} \equiv \tilde{f}_0$. \tilde{f}_0 是恒同映射的提升, 因而 \tilde{f} 也是如此, 也即 f 是恒同映射. 证毕.

§ 3 拟共形映射的极值问题

设 S_0 与 S_1 是两个紧 Riemann 曲面, 其亏格均为 g 且 $g > 1$. 又假定 $h: S_0 \rightarrow S_1$ 是给定一个保向同胚. 记 Q_h 为一切与 h 同伦的拟共形映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 之集合. 令

$$K_0 = \inf \{K[f]: f \in Q_h\},$$

其中 $K[f]$ 为 f 的最大伸缩商.

定义 1 若 $f_0 \in Q_h$ 且使得 $K[f_0] = K_0$, 则称 f_0 为极值拟共形映射.

研究拟共形映射的极值问题的主要任务是讨论极值映射的存在性、惟一性和刻画极值映射.

历史的注记 Teichmüller 在 20 世纪 40 年代前后, 为了研究 Riemann 模问题而研究了这样的极值问题, 并导致了 Teichmüller 空间理论的产生.

Teichmüller 证明了: 对于任意两个亏格 $g > 1$ 的 Riemann 曲面 S_0 与 S_1 及任意给定的保向同胚 $h: S_0 \rightarrow S_1$, 极值映射 $f_0: S_0 \rightarrow S_1$ 总是存在并且是惟一的. 此外, 他还刻画了极值映射 f_0 的特征: 极值映射的 Beltrami 系数是下列形式的 Beltrami 微分

$$\mu \frac{d\bar{z}}{dz} = k \frac{\overline{\varphi dz^2}}{|\varphi dz^2|},$$

其中 $k \in [0, 1)$ 是常数, 而 φdz^2 是全纯二次微分. Teichmüller 利用这些结果赋予他所引入的空间 (后人称之为 Teichmüller 空间) 以完备的度量.

Teichmüller 的思想来源于 Grötzsch, 后者在一篇短文中研究了一个极值问题, 并提出了“most conformal”映射的概念. 后人普遍认为 Grötzsch 是拟共形映射创始人之一.

为了解 Teichmüller 的想法,我们先来介绍 Grötzsch 问题.

Grötzsch 问题: 设 $[0, a] \times [0, 1]$ 与 $[0, a_1] \times [0, 1]$ 是平面上的两个矩形,分别记为 R_0 与 R_1 . 寻求一个拟共形映射 $w = f(z)$, 使得 $f(R_0) = R_1$ 且保持顶点之间的依次对应,并使得 $K[f]$ 最小.

Grötzsch 认为使得 $K[f]$ 最小的映射是最接近共形映射的映射.

Grötzsch 用面积长度方法解决了这个问题. 其答案是: 问题中要寻求的映射是惟一的, 并且是 $R_0 \rightarrow R_1$ 的仿射拉伸映射.

由于 Grötzsch 的结果和方法颇具启发性, 我们在这里给出其详细证明.

不失一般性, 我们假定 $a_1 \geq a$. 在这种情况下, $R_0 \rightarrow R_1$ 的仿射拉伸映射 f_0 是

$$x \mapsto \frac{a_1}{a}x, \quad y \mapsto y,$$

并且不难计算, $K[f_0] = a_1/a$.

设 $f: R_0 \rightarrow R_1$ 是任意一个拟共形映射, 保持矩形顶点的依次对应. 由 f 的 ACL 性质可知, 对几乎所有的 $y \in [0, 1]$, $f(x + iy)$ 是 x 的绝对连续函数. 于是对这样的 y , 我们有

$$a_1 \leq \int_0^a |f_x(x + iy)| dx.$$

两边再对 y 积分, 又得

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \int_0^1 dy \int_0^a |f_x(x + iy)| dx = \iint_{R_0} |f_x(x + iy)| dx dy \\ &= \iint_{R_0} \frac{|f_x(x + iy)|}{J_f^{\frac{1}{2}}} \cdot J_f^{\frac{1}{2}} dx dy, \end{aligned}$$

其中 J_f 为 f 的 Jacobi 行列式. 使用 Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} a_1^2 &\leq \iint_{R_0} \frac{|f_x(x + iy)|^2}{J_f} dx dy \iint_{R_0} J_f dx dy \\ &\leq \iint_{R_0} \frac{(|f_x| + |f_{\bar{x}}|)^2}{|f_x|^2 - |f_{\bar{x}}|^2} dx dy \cdot a_1 \end{aligned}$$

$$\leq K[f] \cdot a \cdot a_1.$$

这里我们用到 $|f_x| \leq |f_z| + |f_{\bar{z}}|$ 及 $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$. 由上述不等式推出

$$K[f] \geq a_1/a = K[f_0].$$

下面我们证明: 若 $K[f] = K[f_0]$, 则 $f = f_0$. 事实上, 若 $K[f] = K[f_0]$, 则在上述推导中所有不等式均成立等号. 这就要求

$$\frac{(|f_z| + |f_{\bar{z}}|)^2}{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2} \equiv K[f],$$

也即 $|f_{\bar{z}}|/|f_z|$ 是一常数 k . 此外, 还要求

$$|f_x| = |f_z| + |f_{\bar{z}}|,$$

后者意味着 $f_{\bar{z}}/f_z$ 是实数. 在使用 Schwarz 不等式时等号成立的要求是 $|f_x|/J_f^{\frac{1}{2}}$ 与 $J_f^{\frac{1}{2}}$ 之比是一常数, 设其为 λ . 那么, 我们有

$$|f_x|^2/J_f = \lambda J_f.$$

由于已经知道上式左端 $|f_x|^2/J_f \equiv K[f]$ 是一常数, 那么 J_f 也应是一常数. 而 $J_f = |f_z|^2(1 - |\mu|^2)$, 其中 $\mu = f_{\bar{z}}/f_z$, 于是由 $|\mu| \equiv k$ 又进一步推出 $|f_z|$ 是一常数, 进而推出 $|f_{\bar{z}}|$ 是一常数. 最后, 由

$$a_1 = \int_0^a |f_x(x + iy)| dx, \quad \text{a.e. } y \in [0, 1]$$

推出对于几乎所有的 y 而言, $x \mapsto f(x + iy)$ 的像集合是一条水平直线段, 且 $f_x \geq 0$. 这样, 由 $f_x = |f_x| = |f_z| + |f_{\bar{z}}|$ 及前面的结果, 立即推出 f_x 为一常数. 再由 $f_x = f_z + f_{\bar{z}}$ 及前面的结果看出, f_z 及 $f_{\bar{z}}$ 均为常数, 且是非负实数, 因而 f 是仿射变换. 证毕.

这里所采用的方法被称做**面积长度方法**.

Teichmüller 将 Grötzsch 关于矩形间拟共形映射的极值问题推广到 Riemann 曲面上. 这一推广是实质性的. 在这一推广中, Teichmüller 至少要遇到两个实质性困难: 首先是要在 Riemann 曲面上找到一种适当的参数, 极值映射在此种参数表示下是一个拉伸变换. 这导致了 Teichmüller 对于二次微分的讨论. 其次, 在 Grötzsch 的上述讨论中矩形的边界所形成的“框”起了很大作用, 它构成了面积长度方法的基础. 但在 Riemann 曲面的情况下, “框”不

存在了,如何建立相应的不等式也是一个重要问题.这个问题的解决只有在后面叙述了 Teichmüller 的方法后,才会看得清楚.

现在,我们回到我们关心的 Riemann 曲面间拟共形映射的极值问题上.

我们首先要指出:上述极值问题的解的存在性是容易回答的,并且回答是肯定的.

定理 1 设 S_0 与 S_1 是两个具有相同亏格的紧 Riemann 曲面,且其亏格 $g > 1$. 又设 $h: S_0 \rightarrow S_1$ 是给定的一个保向同胚. 则在 h 的同伦类中至少存在一个拟共形映射 $f_0: S_0 \rightarrow S_1$ 是极值映射.

证 首先,我们要指出, Q_h 并非空集,也即在 h 的同伦类 $[h]$ 中至少有一个拟共形映射. 我们可以按照下列方法直接构造 h 的同伦类中的拟共形映射: 先是对 S_0 与 S_1 作适当三角剖分,使 h 保持顶点、边、面的对应;然后在对应的三角形之间构造拟共形映射. 最后将三角形间的这些映射拼接成为一个 $S_0 \rightarrow S_1$ 的拟共形映射. 现在我们略去这一过程的细节.

不失一般性,我们假定 $h: S_0 \rightarrow S_1$ 本身就是拟共形映射. 设 (Δ, π_0) 与 (Δ, π_1) 分别是 S_0 与 S_1 的覆盖. 又假定 $\tilde{h}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 $h: S_0 \rightarrow S_1$ 关于上述覆盖的一个提升. 设 $f: S_0 \rightarrow S_1 \in Q_h$, 那么总存在 f 的一个提升 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 使得 $\tilde{f}|_{\partial\Delta} = \tilde{h}|_{\partial\Delta}$. 记 $Q_{\tilde{h}}$ 为满足下列条件的拟共形映射 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 的全体:

$$\tilde{f}|_{\partial\Delta} = \tilde{h}|_{\partial\Delta}, \quad \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} \in G_1, \quad \forall g \in G_0,$$

其中 G_0 与 G_1 分别是 (Δ, π_0) 与 (Δ, π_1) 的覆盖变换群. 那么显然,每一个 Q_h 中的映射都是 $Q_{\tilde{h}}$ 中的某个映射的提升,并且 Q_h 与 $Q_{\tilde{h}}$ 有一个一一对应的关系.

设 $K_0 = \inf\{K[f]: f \in Q_h\}$, 那么显然有

$$K_0 = \inf\{K[\tilde{f}]: \tilde{f} \in Q_{\tilde{h}}\}.$$

为了下面讨论的需要,我们将每一个 $\tilde{f} \in Q_{\tilde{h}}$, 借助于关于单位圆周的反演将其延拓为 $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 的拟共形映射,而这种延拓不改变最大伸缩商.

取 $f_n \in Q_h$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$K[f_n] \rightarrow K_0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这样 $K[\tilde{f}_n] \rightarrow K_0$ ($n \rightarrow \infty$). 另外, \tilde{f}_n 在 $\partial\Delta$ 上取固定的值, 也即 $\tilde{f}_n|_{\partial\Delta} = \tilde{h}|_{\partial\Delta}$, 故而 $\{\tilde{f}_n\}$ 是正规族. 因此, 它有一个内闭一致收敛的子序列. 不失一般性, 可以假定 $\{\tilde{f}_n\}$ 本身内闭一致收敛. 特别地, $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\bar{\Delta}$ 上一致收敛. 设其极限为 \tilde{f}_0 , 那么 \tilde{f}_0 要么是拟共形映射, 要么是一常数. 由于 $\tilde{f}_0|_{\partial\Delta} = \tilde{h}|_{\partial\Delta}$, 故 \tilde{f}_0 不可能是一常数, 只能是拟共形映射.

现在证明 $\tilde{f}_0 \in Q_h$. 事实上, 对于任意一个元素 $g \in G_0$, 我们有

$$\tilde{f}_n \circ g \circ \tilde{f}_n^{-1} \in G_1, \quad n = 1, 2, \dots.$$

由 f_n 的一致收敛性及群 G_1 的间断性可知, 当 n 充分大时, $\tilde{f}_n \circ g \circ \tilde{f}_n^{-1}$ 是 G_1 中同一个元素. 这样, 取极限后便有 $\tilde{f}_0 \circ g \circ \tilde{f}_0^{-1} \in G_1$, 因此, $\tilde{f}_0 \in Q_h$.

现在我们进一步证明 $K[\tilde{f}_0] = K_0$. 事实上, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N , 当 $n \geq N$ 时, 使得 $K[\tilde{f}_n] \leq K_0 + \epsilon$. 因此序列 $\{\tilde{f}_n\}_{n \geq N}$ 是 $K_0 + \epsilon$ 拟共形映射序列, 因而 \tilde{f}_0 是 $K_0 + \epsilon$ 拟共形映射, 也即 $K[\tilde{f}_0] \leq K_0 + \epsilon$. 注意到 ϵ 的任意性及 $K[\tilde{f}_0] \geq K_0$, 立即推出 $K[\tilde{f}_0] = K_0$.

设 \tilde{f}_0 是 $f_0: S_0 \rightarrow S_1$ 的提升, 则 $f_0 \in Q_h$ 且 $K[f_0] = K_0$, 也即 f_0 是极值拟共形映射. 证毕.

§ 4 二次微分的轨线结构

为刻画极值拟共形映射, 我们需要二次微分的概念.

首先, 让我们通过 Grötzsch 问题的解来阐明极值拟共形映射与二次微分的关系.

我们知道, 矩形

$$R = \{z = x + iy; 0 < x < a, 0 < y < 1\}$$

到矩形

$$R' = \{w = u + iv; 0 < u < a', 0 < v < 1\}$$

的拟共形映射 f , 在保持顶点依次对应的条件下, 使得 $K[f]$ 最小的极值映射是仿射变换

$$A: x \mapsto \frac{a'}{a}x, y \mapsto y.$$

这是 Grötzsch 的结果. 现在把 Grötzsch 问题略加推广: 考虑两个 Jordan 区域 D 与 D' , 分别在它们的边界上沿着正向依次给定四点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \partial D$ 和 $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \partial D'$, 寻求把 D 映为 D' 并保持给定边界点依次对应的拟共形映射 f , 使其最大伸缩商最小. 我们分别作共形映射

$$\varphi: D(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow R(0, a, a + i, i),$$

$$\psi: D'(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow R'(0, a', a' + i, i),$$

并保持四边形顶点依次对应, 其中 a 与 a' 分别由 D 与 D' 的共形模所决定. 这样, 我们把问题又归结为 Grötzsch 问题. 因此, 推广的 Grötzsch 极值问题的解是 $\psi^{-1} \circ A \circ \varphi$, 其中 A 是上述拉伸仿射变换.

如果我们把 D 与 D' 看作是两个 Riemann 曲面, 而把 $\zeta = \varphi(z)$ 与 $\zeta' = \psi(w)$ 看作是 D 与 D' 的局部参数, 那么极值映射用这两个局部参数表示时恰好是拉伸仿射变换. 此外, 我们注意到这两个局部参数满足 $\varphi'^2 dz^2 = d\zeta^2$ 和 $\psi'^2 dw^2 = d\zeta'^2$, 它们分别是二次微分 $\varphi'^2 dz^2$ 与 $\psi'^2 dw^2$ 的自然参数. 这样, 我们会联想到 Teichmüller 极值问题中的极值映射也可能与 S_0 上的某个二次微分和 S_1 上的某个二次微分相关, 使得极值映射在这两个二次微分的自然参数表示下是一个拉伸仿射变换.

在上述讨论中, 仿射变换 A 保持两个矩形中的水平线段不变, 并且沿水平方向拉伸一个固定倍数. 矩形中的水平线段拉回到区域 D 或 D' 便形成了特殊的曲线族, 使得映射 $\psi^{-1} \circ A \circ \varphi$ 沿这些曲线具有“拉伸”固定倍数的性质. 在 D 或 D' 中的这种曲线弧就是今后被称为二次微分的水平轨线弧 (见图 8.1).

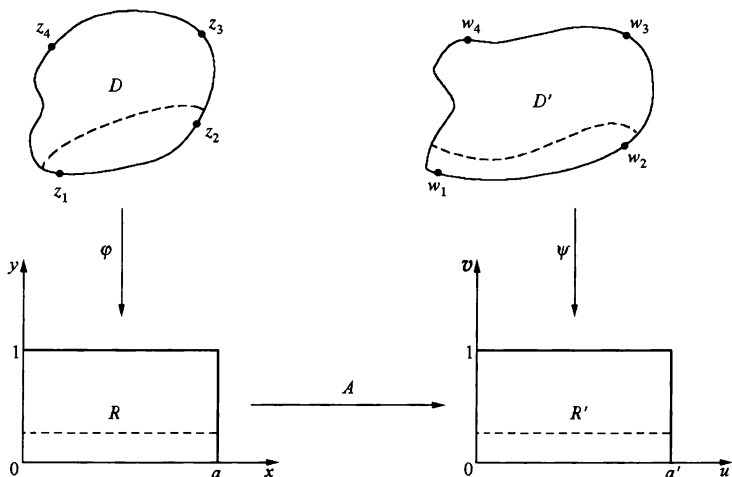


图 8.1

由此可见,全纯二次微分在讨论极值拟共形映射时扮演着一个必不可少的角色.

下面我们讨论二次微分的轨线结构及其诱导的度量.

设 S 是一个 Riemann 曲面. 正像过去我们定义过的那样, 一个在局部参数更换时的不变形式 $\varphi(z)dz^2$ 称做二次微分. 若其局部表示的系数是半纯的, 则称之为半纯二次微分. 像对 Abel 微分一样, 我们可以谈论一个半纯二次微分的零点与极点.

一个半纯二次微分的极点与零点统称为它的**临界点**, 而其他点称为**正则点**.

设 φdz^2 是 Riemann 曲面 S 上的一个半纯二次微分. 若沿着 S 上的一条光滑弧, 处处有 $\varphi dz^2 > 0$, 则称该弧为 φdz^2 的一条**水平轨线弧**. 若沿着 S 上的一条光滑弧, 处处有 $\varphi dz^2 < 0$, 则称该弧为 φdz^2 的一条**垂直轨线弧**.

在本节开始的例子中, 所涉及的二次微分是 $\varphi'^2(z)dz^2$ 及 $\psi'^2(w)dw^2$. 矩形中的水平线段拉回到 D 与 D' 中后, 恰好分别满足 $\varphi'^2(z)dz^2 > 0$ 及 $\psi'^2(w)dw^2 > 0$, 因而是相应二次微分的水平轨线弧.

设 $p_0 \in S$ 是 φdz^2 的一个正则点. 假定 U_{p_0} 是它的一个参数盘而

$z: U_{p_0} \rightarrow \{|z| < r\}$ 是它的一个局部参数, 且 $p_0 \mapsto 0$. 设在局部参数 z 的表示下二次微分有表示式 $\varphi(z)dz^2$, 那么 p_0 点的正则性蕴含着 $\varphi(0) \neq 0$. 取 U_{p_0} 充分小 (即 r 充分小), 可使得 $\sqrt{\varphi}$ 可取到一个单值分支. 命

$$\zeta(z) = \int_0^z \sqrt{\varphi(t)} dt, \quad |z| < r. \quad (8.5)$$

那么, $\zeta'(0) \neq 0$. 因此, 当 r 充分小时, 映射

$$z \mapsto \zeta(z), \quad |z| < r$$

是一个共形映射. 因而 ζ 可以取为 p_0 的某个小邻域的局部参数. 由 (8.5) 式可知, 在这个参数下二次微分有最简单的形式:

$$\varphi dz^2 = d\zeta^2. \quad (8.6)$$

使得 (8.6) 式成立且把 p_0 点对应于 $\zeta = 0$ 的局部参数 ζ 被称为 φdz^2 在正则点的自然参数.

若在正则点 p_0 处有两个自然参数 ζ 与 ζ_1 , 则有

$$\zeta = \pm \zeta_1. \quad (8.7)$$

二次微分 φdz^2 的水平轨线弧, 局部看来它对应于自然参数下的水平线段. 垂直轨线弧对应于自然参数下的垂直线段. 反之亦然. 这样我们给出了轨线弧的几何解释.

(8.7) 式还告诉我们, 在正则点的充分小的局部邻域内, 过一点有且只有一条水平轨线弧.

因此, 一条水平或垂直轨线弧总可以继续延长下去, 只要其端点是正则点. 一条极大的水平轨线弧称为水平轨线, 而极大的垂直轨线弧称为垂直轨线. 水平轨线有时也简称为轨线.

现在我们讨论在零点附近轨线的局部结构.

设 $p_0 \in S$ 是 φdz^2 的 m 阶零点. 又设 z 是 p_0 的一个邻域 U_{p_0} 内的参数, 它把 U_{p_0} 对应于 $\{z: |z| < r\}$ 而 p_0 对应于 $z = 0$. 假定在参数 z 的表示下二次微分表为 $\varphi(z)dz^2$, 而

$$\varphi(z) = z^m \psi(z), \quad |z| < r,$$

其中 $m > 0$ 是整数, $\psi(0) \neq 0$. 取 r 充分小使得 $\sqrt{\psi}$ 可取到一个单值分支, 并设

$$\sqrt{\psi(z)} = b_0 + b_1 z + \dots, \quad b_0 \neq 0, |z| < r.$$

命 $c_j = 2b_j/(m+2+2j)$, $j=0, 1, 2, \dots$, 则形式上有

$$\int_0^z \sqrt{\varphi} dt = \int_0^z t^{\frac{m}{2}} \sqrt{\psi} dt = z^{\frac{m}{2}+1} (c_0 + c_1 z + \dots).$$

注意到 $c_0 \neq 0$, 故可取到

$$(c_0 + c_1 z + \dots)^{\frac{2}{m+2}}, \quad |z| < r$$

的一个单值分支(记之为 $h(z)$), 只要 r 充分小. 这样,

$$\int_0^z \sqrt{\varphi} dt = [zh(z)]^{\frac{m}{2}+1}, \quad |z| < r. \quad (8.8)$$

因为 $h(0) \neq 0$, 所以在 r 充分小时, $z \mapsto zh(z)$ 是共形映射, 因而

$$\zeta = zh(z)$$

可以作为 p_0 附近的一个局部参数. 在这个局部参数表示下,

$$\varphi dz^2 = \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^2 \zeta^m d\zeta^2. \quad (8.9)$$

事实上, 当 $\zeta=0$ 时此式显然成立. 在 $\zeta \neq 0$ 时, 也即 $z \neq 0$ 时, 在 z 的充分小的邻域内, $z^{\frac{m}{2}+1}$ 可以取到一个单值分支. 这时, 对(8.8)式微分再取平方即得(8.9)式.

满足(8.9)式的局部参数 ζ 被称为 φdz^2 在零点附近的自然参数. 若有另外一个自然参数 ζ_1 , 则有

$$\zeta = \epsilon \zeta_1 \quad (\epsilon^{m+2} = 1).$$

现在借助于自然参数 ζ 讨论 m 阶零点 p_0 附近的轨线结构. 设 p_0 的邻域 U 对应于 $\{|\zeta| < \rho\}$, p_0 对应于 $\zeta=0$. 我们把 $\{|\zeta| < \rho\}$ 分作 $m+2$ 个扇形:

$$S_k = \left\{ \zeta: \frac{2k\pi}{m+2} < \arg \zeta < \frac{2(k+1)\pi}{m+2} \right\}, \quad (8.10)$$

$$k = 0, 1, \dots, m+1.$$

相应地, 这时 U 也被分作 $m+2$ 个扇形 \tilde{S}_k . 我们考虑函数

$$w = \zeta^{\frac{m}{2}+1}, \quad |\zeta| < \rho.$$

那么它在每个 S_k 上都是单值函数, 并把 S_k 均变成 w 的上半平面或下半平面. 另一方面, 注意到 $\varphi dz^2 = dw^2$, 不难看出 φdz^2 的轨线弧对

应于 w 平面的水平线段. 这样, S_k 的边是两条伸向 p_0 的水平轨线弧, 而 S_k 的内部由相互不交的水平轨线弧所布满.

总之, 我们证明了在 m 阶零点附近, 有 $m+2$ 条水平轨线弧以该零点为其端点, 该 $m+2$ 条轨线弧把零点邻域分为等角的 $m+2$ 个扇形, 而这些扇形由相互不交的水平轨线弧所布满 (见图 8.2 中实线, 图中显示的是 $m=1$). 垂直轨线的结构与水平轨线的结构相似, 并且垂直轨线弧与水平轨线弧正交.

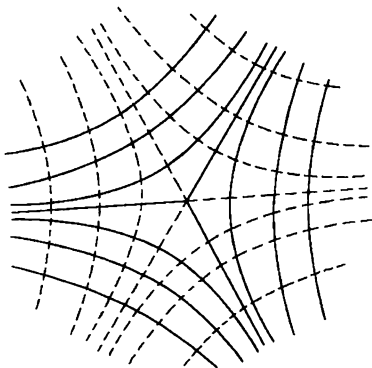


图 8.2

对于极点附近的自然参数和轨线的局部结构的讨论略微复杂些. 由于我们今后只用到一阶极点的情况, 所以只对这种情况作讨论.

设 p_0 是一阶极点, 这时 $\varphi(z)$ 可表为

$$\varphi(z) = z^{-1}(a_{-1} + a_0 z + \cdots), \quad |z| < r,$$

其中 $a_{-1} \neq 0$. 像前面一样, 选取 $(a_{-1} + a_0 z + \cdots)^{\frac{1}{2}}$ 的单值分支, 并假定

$$(a_{-1} + a_0 z + \cdots)^{\frac{1}{2}} = b_0 + b_1 z + \cdots, \quad b_0 \neq 0, \quad |z| < r.$$

这时, 命 $c_k = 2b_k / (-1 + 2k + 2)$, $k = 0, 1, \cdots$. 那么, $c_0 \neq 0$, 并且

$$\int_0^z \sqrt{\varphi} dt = z^{\frac{1}{2}}(c_0 + c_1 z + \cdots), \quad |z| < r.$$

命

$$\zeta(z) = z(c_0 + c_1 z + \cdots)^2,$$

则 $\zeta = \zeta(z)$ 在 $z=0$ 的充分小邻域内是共形的. 根据 c_k 的定义, 不难

由上式推得

$$\varphi dz^2 = \frac{1}{4} \zeta^{-1} d\zeta^2. \quad (8.11)$$

可见,如果我们用 ζ 作局部参数,则二次微分有较简单的形式. 这样的 ζ 被称为 φdz^2 在一阶极点附近的自然参数.

我们现在考虑函数

$$w = \zeta^{\frac{1}{2}},$$

它在 ζ 平面割去正实轴所得的区域内是单值的,并把该区域变为 w 的上半平面或下半平面. 注意到 $\varphi dz^2 = dw^2$, 可以看出 φdz^2 的水平轨线弧对应于 w 平面的水平线段, 而 w 平面的水平直线在 ζ 平面的像是一条绕过原点分居正实轴两侧的曲线. 此外, 从 (8.11) 式可以看出在 ζ 的正实轴上 $\varphi dz^2 > 0$, 从而它对应一条水平轨线弧.

总之, 我们证明了, 在一阶极点附近, 有一条而且只有一条水平轨线弧以该极点为端点, 其他水平轨线绕弧过极点分居在上述轨线弧的两侧, 见图 8.3 (图中实线为水平轨线, 虚线为垂直轨线).

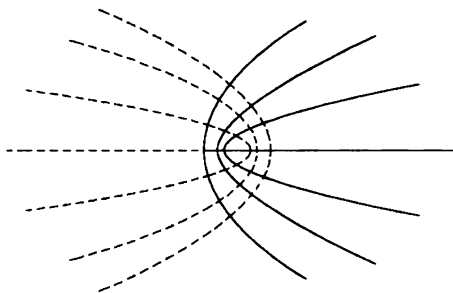


图 8.3

总之, 我们看到一个半纯二次微分的水平轨线与垂直轨线在 Riemann 曲面上形成了两个相互横截的叶状结构.

下面我们讨论全纯二次微分所诱导的度量以及这个度量下的测地线.

设 φdz^2 是 Riemann 曲面 S 上的一个非平凡全纯二次微分. 则它在 S 上诱导了一个度量

$$ds = |\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|.$$

这个度量被称为 φ 度量, 它在二次微分的正则点附近实际上就是自然参数平面上的欧氏度量.

S 上的一条可求长曲线 γ 在这个度量下的长度为

$$l_{\varphi}(\gamma) = \int_{\gamma} |\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|,$$

被称为 γ 的 φ 长度. 一个区域 $D \subset S$ 的 φ 面积是指

$$A_{\varphi}(D) = \iint_D |\varphi(z)| dx dy.$$

很容易验证: $|\varphi| dx dy$ 是一个不依赖于局部参数选取的量. 因此, 这样定义是合理的.

为了讨论 φ 度量下的测地线, 我们引进 φ 直线弧的概念: 若沿着曲线 $\gamma \subset S$ 处处有 $\arg(\varphi dz^2) = \text{常数}$, 则 γ 被称为一条 φ 直线弧. 显然, 水平轨线弧或垂直轨线弧都是 φ 直线弧. 局部地看, 一条 φ 直线弧恰好对应于自然参数平面上的一条直线线段.

现在讨论局部最短连线问题: 在一点 p_0 附近任意给定两点 p_1 与 p_2 , 问何种连线在 φ 度量下长度最短?

先讨论 p_0 是正则点的情况. 设 U_{p_0} 是 p_0 的一个邻域, 在自然参数 ζ 下对应于 $\{|\zeta| < \rho\}$, p_0 对应于 $\zeta = 0$. 记

$$V_{p_0} = \{p \in U_{p_0} : |\zeta(p)| < \rho/2\}.$$

这时 V_{p_0} 内任意两点 p_1 与 p_2 之间的 φ 直线弧 α 是最短连线. 事实上, 若 β 是 p_1 与 p_2 的一条连线, $\beta \subset U_{p_0}$, 则显然 $l_{\varphi}(\beta) \geq l_{\varphi}(\alpha)$. 若 β 是 p_1 与 p_2 的一条连线, 但 β 不包含于 U_{p_0} , 这时, 在 $\{\zeta : |\zeta| < \rho\}$ 中一定有两条弧 τ_1 与 τ_2 分别把 $\zeta_1 = \zeta(p_1)$ 与 $\zeta_2 = \zeta(p_2)$ 连到圆周 $\{\zeta : |\zeta| = \rho\}$ 上, 这里 τ_1 与 τ_2 是 β 上的两段弧在 $\{\zeta : |\zeta| < \rho\}$ 中的像. 根据 V_{p_0} 的取法, 我们有

$$l_{\varphi}(\beta) \geq l(\tau_1) + l(\tau_2) \geq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} \geq |\zeta_1 - \zeta_2| = l_{\varphi}(\alpha),$$

这里 $l(\tau_j)$ 表示 τ_j 的欧氏长度, $j=1, 2$.

这样我们证明了, 在正则点附近两点之间的 φ 直线弧连线是最短连线. 特别地, φ 直线弧是局部最短线, 即测地线.

下面我们讨论在零点附近的情况. 设 p_0 是 m 阶零点, 又设

$$\zeta = \zeta(p): U_{p_0} \rightarrow \{\zeta: |\zeta| < \rho\}$$

是自然参数, 即 $\varphi(z)dz^2 = [(m+2)^2/4]\zeta^m d\zeta^2$. 取

$$V_{p_0} = \left\{ p \in U_{p_0}: |\zeta(p)| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}} \rho \right\}.$$

设 p_1 与 p_2 是 V_{p_0} 中的任意两点, $\zeta_j = \zeta(p_j)$, $j=1, 2$. 若 ζ_1 与 ζ_2 同时落在某个扇形

$$\Omega = \left\{ \zeta: \theta_0 < \arg \zeta < \theta_0 + \frac{2\pi}{m+2}, |\zeta| < \rho \right\}$$

之中(即 $|\arg \zeta_1 - \arg \zeta_2| < 2\pi/(m+2)$), 则 ζ_1 到 ζ_2 间的 φ 直线弧是最短连线. 事实上, 函数

$$w = \zeta^{\frac{m}{2}+1}$$

在 Ω 上是单值解析函数, 并且 $\varphi dz^2 = dw^2$. 所以在 $w(\Omega)$ (w 平面上的一个半圆) 内用直线段连结 $w_1 = \zeta_1^{\frac{m}{2}+1}$ 及 $w_2 = \zeta_2^{\frac{m}{2}+1}$, 这个直线段所对应的 p_1 与 p_2 间的连线就是 φ 直线弧, 记之为 α . 那么, $l_\varphi(\alpha) = |w_1 - w_2|$. 设 β 是 p_1 与 p_2 之间的任意一条连线. 若 $\beta \subset \zeta^{-1}(\Omega)$, 则 $l_\varphi(\beta)$ 恰好是 $w(\Omega)$ 中 β 的像的欧氏长度, 于是 $l_\varphi(\beta) \geq l_\varphi(\alpha)$. 若 β 不包含于 $\zeta^{-1}(\Omega)$ 之内, 但 $\beta \subset U_{p_0}$, 则这时仍有 $l_\varphi(\beta) \geq l_\varphi(\alpha)$. 事实上, 若将 $\zeta(\beta)$ 写成参数形式:

$$\zeta(\beta): \zeta = \zeta(t), t \in [0, 1],$$

这时令 $w(t) = |\zeta(t)|^{\frac{m}{2}+1} e^{i\theta(t)(\frac{m}{2}+1)}$, 其中 $\theta(t) = \arg \zeta(t)$ 连续依赖于 t , 那么 $w = w(t)$ 是 w 平面上连结 w_1 与 w_2 的一条曲线, 记为 τ . 显然,

$$\int_\tau |dw| \geq |w_1 - w_2|.$$

从 β 上每一点的局部看, $|dw| = |\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|$, 所以

$$\int_\tau |dw| = l_\varphi(\beta).$$

因此, $l_\varphi(\beta) \geq |w_1 - w_2| = l_\varphi(\alpha)$. 若 β 不包含于 U_{p_0} 之内, 这时一定有两弧 β_1 与 β_2 分别把 p_1 与 p_2 连到 ∂U_{p_0} , 而

$$\begin{aligned}
 l_{\varphi}(\beta_j) &= \int_{\zeta(\beta_j)} \left(\frac{m}{2} + 1 \right) |\zeta|^{\frac{m}{2}} |d\zeta| \geq \int_{\rho_1}^{\rho} \left(\frac{m}{2} + 1 \right) |\zeta|^{\frac{m}{2}} d|\zeta| \\
 &= |\zeta|^{\frac{m}{2}+1} \Big|_{\rho_1}^{\rho} = \rho^{\frac{m}{2}+1} - \rho_1^{\frac{m}{2}+1}, \quad j = 1, 2,
 \end{aligned}$$

其中 $\rho_1 = \rho / 2^{\frac{2}{m+2}}$, 也即

$$l_{\varphi}(\beta_j) \geq \frac{1}{2} \rho^{\frac{m}{2}+1}, \quad j = 1, 2.$$

因此

$$l_{\varphi}(\beta) \geq l_{\varphi}(\beta_1) + l_{\varphi}(\beta_2) \geq \rho^{\frac{m}{2}+1}. \quad (8.12)$$

但是, $|\zeta_j| < \rho_1, j=1, 2$. 所以, 我们有

$$\begin{aligned}
 l_{\varphi}(\alpha) &= |w_1 - w_2| \leq |w_1| + |w_2| \\
 &\leq 2\rho_1^{\frac{m}{2}+1} = \rho^{\frac{m}{2}+1} \leq l_{\varphi}(\beta).
 \end{aligned} \quad (8.13)$$

现在讨论 ζ_1 与 ζ_2 不能落在同一个扇形 Ω 的情况, 这时 ζ_1 与 ζ_2 对原点 $\zeta=0$ 的张角 $\geq 2\pi/(m+2)$. 设 β 是 p_1 与 p_2 的任意一条连线, 我们要证明

$$l_{\varphi}(\beta) \geq |w_1| + |w_2|. \quad (8.14)$$

换句话说, p_1 与 p_2 间的最短连线由 p_1 到 p_0 的 φ 直线弧和 p_0 到 p_2 的 φ 直线弧组成.

当 β 不包含于 U_{p_0} 之内时, (8.12) 及 (8.13) 式已经包含了 (8.14) 式, 所以此时结论已证. 当 $\beta \subset U_{p_0}$ 时, 像前面一样, 考虑曲线

$$\zeta(\beta): t \mapsto \zeta(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$w(\beta): t \mapsto w = |\zeta(t)|^{\frac{m}{2}+1} e^{i\theta(t)\left(\frac{m}{2}+1\right)}, \quad t \in [0, 1],$$

其中 $\theta(t) = \arg \zeta(t)$ 连续依赖于 t . 不失一般性, 我们假定 $w_1 > 0$, 即 w_1 在正实轴上. 因为 ζ_1 与 ζ_2 关于点 $\zeta=0$ 的张角 $\geq 2\pi/(m+2)$, 所以 $w(\beta)$ 与负实轴至少交一次, 设 w_3 为其交点 (可能 $w_3=0$). $w(\beta)$ 上从 w_1 到 w_3 的子弧记为 τ_1 , 而 $w(\beta)$ 上从 w_3 到 w_2 的子弧记为 τ_2 . 那么, 显然有

$$\int_{\tau_1} |dw| \geq |w_1| + |w_3|,$$

和

$$|w_3| + \int_{\tau_2} |dw| \geq |w_2|.$$

于是
$$\int_{w(\beta)} |dw| \geq |w_1| + |w_2|,$$

也即(8.14)式成立.

综上所述,我们有下面的定理 1.

定理 1 设 φdz^2 是 Riemann 曲面 S 上的一个全纯二次微分, 不恒为零. 则在 φ 度量下的测地线是由若干条 φ 直线弧组成, 两条 φ 直线弧连接处一定是 φdz^2 的零点, 且两条 φ 直线弧的交角 $\geq \frac{2\pi}{m+2}$, 这里 m 是零点的阶.

作为定理 1 的推论, 我们有下面的两个定理, 它们在极值拟共形映射的研究中占有重要地位.

定理 2 设 φdz^2 是 $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ 内的全纯二次微分, 不恒为零. 又设 P 是 Δ 内由 φdz^2 的 φ 直线弧组成的多边形, V_1, \dots, V_n 是 P 的顶点, φdz^2 在 V_j 的阶设为 $m_j \geq 0$. 则在 n 个顶角中至少有三个内角 $< 2\pi/(m_j+2)$.

证 设在 V_j 处的内角为 $\theta_j (j=1, 2, \dots, n)$. 在每个 V_j 处作一个小圆 $\{z: |z-V_j|=\rho\}$, ρ 充分小. 在这些小圆之外的 ∂P 的各段 φ 直线弧, 分别记做

$$\beta_1(\rho), \dots, \beta_n(\rho),$$

而 $\{z: |z-V_j|=\rho\}$ 在 P 中的部分记为 $\gamma_j(\rho)$, $j=1, \dots, n$. 设 m 为 φdz^2 在 P 内的零点个数, 则当 ρ 充分小时, 由辐角原理可知

$$\int_{\sum \beta_j(\rho)} \text{darg} \varphi = 2m\pi - \int_{\sum \gamma_j(\rho)} \text{darg} \varphi.$$

注意到在每条边上 $\arg \varphi dz^2 = \text{常数}$, 不难看出

$$\int_{\sum \beta_j(\rho)} \text{darg} \varphi = -2 \int_{\sum \beta_j(\rho)} \text{darg} dz.$$

另外, 显然有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_j(\rho)} \text{darg} \varphi = -m_j \theta_j, \quad j=1, \dots, n,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\sum \beta_j(\rho)} \text{darg} dz = 2\pi - \sum (\pi - \theta_j).$$

所以,我们有

$$2\left(\sum_{j=1}^n(\pi - \theta_j) - 2\pi\right) = 2m\pi + \sum_{j=1}^n m_j \theta_j,$$

也即

$$\sum_{j=1}^n [2\pi - (m_j + 2)\theta_j] = 2\pi(m + 2) \geq 4\pi.$$

此式左端每项 $<2\pi$. 故至少有三项 >0 . 证毕.

这个定理的一个用途是推出了下述的测地线惟一性定理.

定理 3 设 S 是一个具有双曲型万有覆盖的 Riemann 曲面, φdz^2 是 S 上的一个非平凡全纯二次微分. 又设 p_1 与 p_2 是 S 上任意给定的两点, $\alpha \subset S$ 是一条以 p_1 与 p_2 为端点的曲线. 则在同伦类 $[\alpha]$ 中至多有一条 φ 度量下的测地线.

证 设 (Δ, π) 是 S 的万有覆盖曲面, S 上的全纯二次微分 φdz^2 用整体单值化参数 $z \in \Delta$ 表示时为 $\varphi(z) dz^2$, $\varphi(z)$ 是 Δ 内的全纯函数.

设 $[\alpha]$ 内有两测地线 β_1 与 β_2 , $\beta_1 \neq \beta_2$. 过 p_1 的一个上方点 $z_1 \in \Delta$ 提升 β_1 与 β_2 , 则它们的提升 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 有相同的终点 $z_2 \in \Delta$, $\pi(z_2) = p_2$. 显然, $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 是关于 Δ 内全纯二次微分 $\varphi(z) dz^2$ 的两条测地线, 并且 $\tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_2$. 因此, $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 都是由 φ 直线弧组成的折线.

不失一般性, 我们可以假定 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 除 z_1 与 z_2 之外没有其他交点. 如其不然, 我们总可以选取到一个由 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 的子弧所围的 Jordan 区域, 然后用 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 的子弧来替代它们即可.

我们将 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 所围的区域考虑为一个 φ 多边形, 顶点是 φdz^2 在 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 上的零点以及 z_1 与 z_2 . 根据定理 2, 这个多边形至少有三个顶角 $< 2\pi/(m_j + 2)$. 但是, 根据定理 1 除了在顶点 z_1 与 z_2 处的顶角之外, 其他顶角均无此种可能. 这样便导出矛盾. 这矛盾表明, $[\alpha]$ 中不可能有不同的两条测地线. 证毕.

上述定理只解决了测地线的惟一性问题. 而测地线的存在性问题在紧曲面的情况下回答是肯定的, 其证明也是容易的.

定理 4 设 φdz^2 是紧 Riemann 曲面 S 上的一个非平凡全纯二

次微分. 则对任意给定的两点 p_1 与 p_2 和任意一条连结这两点的曲线 $\alpha \subset S$, 在 α 的同伦类 $[\alpha]$ 中必有一条 φ 度量下的最短线.

证 设

$$l = \inf_{\beta \in [\alpha]} \{l_\varphi(\beta)\}.$$

取 $\beta_n \in [\alpha]$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_\varphi(\beta_n).$$

从定理 1 的证明中, 我们已经看到, 对于任意一点 $p \in S$, 都有一个邻域 V_p^* , 使得 V_p^* 中任意两点有最短连线. 由于 S 的紧致性, 我们可选到有限个这样的邻域 $V_{p_1}^*, \dots, V_{p_m}^*$ 覆盖住 S .

对于任意的 β_n , 我们在它上面选定若干个点 $q_0^{(n)} = p_1, q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \dots, q_N^{(n)} = p_2$, 使得 β_n 分解为子弧 $\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \dots, \tau_N^{(n)}$ 之并, 这里 $\tau_1^{(n)}$ 的端点为 $q_{j-1}^{(n)}$ 与 $q_j^{(n)}$, $j=1, 2, \dots, N$; 并使得每个子弧 $\tau_j^{(n)}$ 都包含于某个 $V_{p_k}^*$ 之中. 这样我们可以用 $q_{j-1}^{(n)}$ 与 $q_j^{(n)}$ 之间的最短连线 $\sigma_j^{(n)}$ 来替代 $\tau_j^{(n)}$. 设

$$\gamma_n = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j^{(n)}.$$

那么, $l_\varphi(\gamma_n) \leq l_\varphi(\beta_n)$. 同时, 由于 $\sigma_j^{(n)}$ 与 $\tau_j^{(n)}$ 同时属于一个自然参数盘 $V_{p_k}^*$, 所以 $\sigma_j^{(n)}$ 同伦于 $\tau_j^{(n)}$ (在固定 $q_{j-1}^{(n)}$ 与 $q_j^{(n)}$ 的条件下). 由此推出 γ_n 同伦于 β_n , 也即 $\gamma_n \in [\alpha]$. 这样 $l_\varphi(\gamma_n) \geq l$. 但另一方面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_\varphi(\beta_n) = l,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_\varphi(\gamma_n) = l$.

再一次利用 S 的紧致性, 我们可以在 $\{q_j^{(n)}: n=1, 2, \dots\}$ 的任意一个子序列中挑出一个收敛的子序列, 因而我们可以找到一个序列 n_1, n_2, \dots , 使得 $q_j^{(n_k)}$ 对每个 j , 当 $n_k \rightarrow \infty$ 时收敛于一点 q_j . 显然, 任意一对 q_{j-1} 与 q_j 都将同时属于某个 $V_{p_k}^*$, 因而可以用一条最短线 σ_j 连结它们. 命

$$\gamma = \bigcup \sigma_j,$$

则显然有 $\gamma \in [\alpha]$, 而且

$$l_\varphi(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_\varphi(\gamma_n) = l.$$

证毕.

§ 5 Teichmüller 映射

现在,我们引进 Teichmüller 映射的概念.

定义 设 S_0 与 S_1 是两个 Riemann 曲面,而 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一个拟共形映射.又设 ω_0 及 ω_1 分别是 S_0 及 S_1 上的全纯二次微分.假若 f 将 ω_0 的正则点映为 ω_1 的正则点,将 ω_0 的零点映为 ω_1 的同阶零点,并且借助于 ω_0 在正则点 p 的自然参数 ζ 和 ω_1 在 $f(p)$ 的自然参数 ζ' , f 的局部表示为

$$f: \zeta \mapsto \zeta' = \frac{K+1}{2}\zeta + \frac{K-1}{2}\bar{\zeta},$$

其中 $K \geq 1$ 是常数,则称 f 为 **Teichmüller 映射**,称 ω_0 为 f 的**初始二次微分**,而称 ω_1 为 f 的**终端二次微分**. f 的初始二次微分也称为 f 的**伴随二次微分**.

首先,让我们解释 Teichmüller 映射 f 的几何意义.将 ζ 写成 $\xi + i\eta$ 形式,其中 ξ, η 分别是 ζ 的实部与虚部.同样地,也将 ζ' 写成 $\xi' + i\eta'$ 的形式,其中 ξ', η' 分别是 ζ' 的实部与虚部.那么,这时 f 的局部表示为

$$\xi \mapsto \xi' = K\xi, \quad \eta \mapsto \eta' = \eta.$$

由此可见, Teichmüller 映射在初始二次微分及终端二次微分的自然参数的表示下是一个沿水平线的拉伸,其拉伸倍数为常数.

现在,我们来讨论 Teichmüller 映射 f 在 S_0 上所诱导的 Beltrami 微分.我们假定这个 Beltrami 微分为 μ .那么,它在 ω_0 的正则点借助于自然参数的局部表示为

$$\mu = k \overline{d\zeta}/d\zeta \quad (k = (K-1)/(K+1)).$$

注意到 ω_0 的零点是孤立的,立即看出上式在 S_0 上几乎处处成立.上式可以改写成

$$\mu = k (\overline{d\zeta})^2 / |d\zeta|^2.$$

若 ω_0 的一般局部表示为 $\varphi(z)dz^2$,那么 $d\zeta^2 = \varphi(z)dz^2$,并由此推出

$$\mu = k \frac{\overline{\varphi(z)}}{|\varphi(z)|} \frac{\overline{dz}}{dz}.$$

这便是 f 的 Beltrami 微分 μ 借助于一般参数的局部表示形式.

定理 1 设 S_0 是任意给定的一个 Riemann 曲面, 而 $\omega_0 = \varphi(z)dz^2$ 为 S_0 上的一个非平凡全纯二次微分. 则对于任意给定的 $k \in [0, 1)$, 都存在一个 Riemann 曲面 S_1 及一个 Teichmüller 映射 $f: S_0 \rightarrow S_1$, 其 Beltrami 微分 $\mu = k \overline{\varphi(z)} dz / |\varphi(z)| dz$, 也即以 ω_0 为其初始二次微分.

证 我们在 S_0 的拓扑上, 通过改换 S_0 的局部参数而构造 Riemann 曲面 S_1 .

设 $k \in [0, 1)$ 是任给的常数. 对于 ω_0 的任意一个正则点 p_0 , 都存在一个邻域 U_{p_0} , 使得 U_{p_0} 有 ω_0 的自然参数 ζ , $\zeta(p_0) = 0$. ω_0 在参数 ζ 下的局部表示为 $\omega_0 = d\zeta^2$.

现在我们在 U_{p_0} 内引入一个新参数

$$\zeta' = [\zeta(p) + k \overline{\zeta(p)}] / (1 - k).$$

这样, 在每个正则点的邻域都有了新的参数 ζ' . 这些新参数之间是共形相容的. 事实上, 若有另外一个正则点 p_1 , 在 U_{p_1} 内有自然参数 ζ_1 , 且 $U_{p_0} \cap U_{p_1} \neq \emptyset$, 则在 $U_{p_0} \cap U_{p_1}$ 内有 $d\zeta^2 = d\zeta_1^2$, 因而有

$$\zeta = \pm \zeta_1 + c \quad (c = \text{常数}).$$

命 $\zeta'_1 = (\zeta_1 + k\zeta_1) / (1 - k)$, 显然有

$$\zeta' = \pm \zeta'_1 + c_1 \quad (c_1 = \text{常数}). \quad (8.15)$$

由此可见新参数之间的变换是共形的.

下面将在 ω_0 的零点附近也引入一个新参数, 使得它跟已有的新参数共形相容, 从而使整个曲面 S_0 成为一个新的 Riemann 曲面.

设 $p_0 \in S_0$ 是 ω_0 的一个 m 阶零点, 又设在 p_0 的邻域 U_{p_0} 内有 ω_0 的自然参数 ζ ,

$$\zeta(p_0) = 0.$$

这时 ω_0 在 ζ 的表示下为

$$\omega_0 = \left(\frac{m+2}{2} \right)^2 \zeta^m d\zeta^2.$$

我们在 U_{p_0} 内定义一个新参数:

$$\zeta' = \zeta \left[1 + k \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right)^{\frac{m}{2}+1} \right]^{\frac{2}{m+2}} / (1 - k)^{\frac{2}{m+2}}, \quad \text{当 } \zeta \neq 0 \text{ 时};$$

$\zeta' = 0$, 当 $\zeta = 0$ 时.

为了保证这样定义的参数的单值性, 我们规定

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|},$$

并认为

$$(1+w)^a = 1 + aw + \frac{a(a-1)}{2}w^2 + \dots, \quad |w| < 1.$$

不难验证, 映射 $\zeta \mapsto \zeta'$ 是一一的. 事实上, 若 ζ_1 与 ζ_2 对应于同一个参数 ζ' , 则

$$\zeta_1 \left[1 + k \left(\frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta_1} \right)^{\frac{m}{2}+1} \right]^{\frac{2}{m+2}} = \zeta_2 \left[1 + k \left(\frac{\bar{\zeta}_2}{\zeta_2} \right)^{\frac{m}{2}+1} \right]^{\frac{2}{m+2}}. \quad (8.16)$$

由此推出

$$\pm (\zeta_1^{\frac{m}{2}+1} + k \bar{\zeta}_1^{\frac{m}{2}+1}) = \zeta_2^{\frac{m}{2}+1} + k \bar{\zeta}_2^{\frac{m}{2}+1},$$

也即 $\pm \zeta_1^{\frac{m}{2}+1} = \zeta_2^{\frac{m}{2}+1}$, 从而 $\zeta_1^{m+2} = \zeta_2^{m+2}$. 换句话说, $\zeta_1 = \epsilon \zeta_2$, 其中 ϵ 是 $m+2$ 次单位根. 代入到 (8.16) 式即得 $\epsilon = 1$, 于是 $\zeta_1 = \zeta_2$. 这就证明了 $\zeta \mapsto \zeta'$ 是一个单射.

现在我们说明在零点 p_0 邻域内引入的新参数与它附近的正则点的新参数之间是共形相容的. 设 $p_1 \in U_{p_0}$ 是正则点. 设 ζ_1 是 p_1 附近的自然参数, 而 ζ'_1 是按照前面的定义引进的新参数. 那么, 在 p_1 充分小的邻域内

$$\omega_0 = d\zeta_1^2 = \left(\frac{m+2}{2} \right)^2 \zeta_1^m d\zeta_1^2.$$

因为在 p_1 附近 $\zeta \neq 0$, 所以在 p_1 充分小的邻域内可以取到 $\zeta^{\frac{m}{2}+1}$ 的一个单值分支. 这样

$$\zeta_1 = \pm \zeta_1^{\frac{m}{2}+1} + c \quad (c = \text{常数}).$$

根据新参数的定义, 可得

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= \pm (\zeta_1^{\frac{m}{2}+1} + k \bar{\zeta}_1^{\frac{m}{2}+1}) / (1-k) + c_1 \\ &= \pm \zeta_1^{\frac{m}{2}+1} + c_1 \quad (c_1 = \text{常数}), \end{aligned} \quad (8.17)$$

这里 $\zeta'^{\frac{m}{2}+1}$ 是在 p_1 充分小邻域内的一个单值分支. 这样, ζ'_1 与 ζ' 是共形相容的.

总之, 我们在 S_0 的拓扑上由新的局部参数 ζ' 定义了一个新的复结构. 我们把这样得到的新的 Riemann 曲面记做 S_1 .

现在来说明在 S_1 的局部参数 ζ' 的表示下, 表达式

$$\omega_1 = \begin{cases} d\zeta'^2, & \text{在 } \omega_0 \text{ 的正则点附近,} \\ \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \zeta'^m d\zeta'^2, & \text{在 } \omega_0 \text{ 的 } m \text{ 阶零点附近} \end{cases}$$

在 S_1 上定义了一个全纯二次微分. 事实上, 在正则点附近, 两个局部参数 ζ' 与 ζ'_1 之间有关系式 (8.15), 故在这两个参数盘的公共部分中 $d\zeta'^2 = d\zeta_1'^2$. 若 ζ' 是一个 m 阶零点附近的局部参数, ζ'_1 是该零点附近一正则点的局部参数, 那么 ζ' 与 ζ'_1 满足关系式 (8.17), 因而在两参数的公共部分中,

$$d\zeta_1'^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \zeta'^m d\zeta'^2.$$

这样, 我们证明了 ω_1 是 S_1 上的一个全纯二次微分.

显然, ω_0 的正则点是 ω_1 的正则点, 而 ω_0 的 m 阶零点是 ω_1 的 m 阶零点. 此外, 所引入的新参数 ζ' 就是 ω_1 的自然参数. 这样, 恒同映射 $p \mapsto p$ 作为 $S_0 \rightarrow S_1$ 的映射就将 ω_0 的正则点映为 ω_1 的正则点, 将 ω_0 的零点映为 ω_1 的同阶零点, 且在正则点附近, 借助于自然参数, 其局部表示为

$$\zeta \mapsto \zeta' = (\zeta + k\bar{\zeta}) / (1 - k).$$

可见这个映射即是所求的 Teichmüller 映射. 证毕.

推论 1 若 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是 Riemann 曲面 S_0 到 S_1 的拟共形映射, 其 Beltrami 微分为 $k\bar{\omega}_0/|\omega_0|$, 其中 $k \in [0, 1)$, ω_0 为 S_0 上一个非零全纯二次微分, 则在 S_1 上存在一个全纯二次微分 ω_1 使得 f 是以 ω_0 与 ω_1 为伴随二次微分的 Teichmüller 映射.

证 根据上述定理, 存在一个 Riemann 曲面 S'_1 与 S'_1 上的全纯二次微分 ω'_1 , 并存在一个以 ω_0 为初始二次微分、以 ω'_1 为终端二次微分的 Teichmüller 映射 $f': S_0 \rightarrow S'_1$, 其 Beltrami 微分为 $\mu = k\bar{\omega}_0/|\omega_0|$.

这样,映射 f 与 f' 有相同的 Beltrami 微分,因而 $f \circ f'^{-1}: S'_1 \rightarrow S_1$ 是共形映射,记之为 $\Phi: S'_1 \rightarrow S_1$. 通过 Φ 便可把终端二次微分 ω'_1 移植到 S_1 上,得到一个二次微分 ω_1 . 这时,显然 $f: S_0 \rightarrow S_1$ 是一个以 ω_0 为初始二次微分、以 ω_1 为终端二次微分的 Teichmüller 映射. 证毕.

由此推论看出,我们今后在谈论 Teichmüller 映射时,可不必涉及其终端二次微分,而只要求其 Beltrami 微分具有前述的特殊形式就足够了.

§ 6 Teichmüller 惟一性定理

下面的定理告诉我们: 亏格 >1 的紧 Riemann 曲面之间的 Teichmüller 映射是极值映射,且在其同伦类中极值映射是惟一的.

定理 1 (Teichmüller 定理) 设 S_0 与 S 是两个亏格为 $g > 1$ 的紧 Riemann 曲面. 若 $f_0: S_0 \rightarrow S$ 是一个 Teichmüller 映射,则 f_0 是它所在同伦类 $[f_0]$ 中惟一的极值映射,也即对任意一个 $f \in [f_0]$, 都有

$$K[f] \geq K[f_0], \quad (8.18)$$

等号仅当 $f = f_0$ 时成立.

通常大家都把这个定理称为 Teichmüller 惟一性定理. 但实际上它还断言了 Teichmüller 映射的极值性.

今后,我们用 $Q(S)$ 表示 S 上的全体全纯二次微分所组成的 Banach 空间,其范数为

$$\|\varphi\| = \iint_S |\varphi(z)| dx dy.$$

为了证明这个定理,先证明下面两个引理.

引理 1 设 $f: S_0 \rightarrow S_0$ 是保向自同胚, S_0 是一个亏格 $g > 1$ 的紧 Riemann 曲面. 又设 $\omega \in Q(S_0)$ 不恒为零. 若 f 同伦于恒同映射,则存在一个常数 $M > 0$, 使得 ω 的任意一条水平轨线弧 α , 都有

$$l_\omega(f(\alpha)) \geq l_\omega(\alpha) - 2M, \quad (8.19)$$

其中 $l_\omega(\cdot)$ 表示曲线在 ω 度量下的长度.

证 设 $F: S_0 \times [0, 1] \rightarrow S_0$ 是一个连续映射, $F(p, 0) = p$, $F(p, 1) = f(p)$. 对于任意固定的一点 $p \in S_0$, 记 β_p 是曲线

$$t \mapsto F(p, t), \quad t \in [0, 1].$$

这样, β_p 以 p 点为始点而以 $f(p)$ 为终点. 根据 § 4 定理 3, 在同伦类 $[\beta_p]$ 中必有一条 ω 长度最短者, 设它为 $\bar{\beta}_p$. 命

$$M = \sup_{p \in S_0} \{l_\omega(\bar{\beta}_p)\}.$$

则 $M < \infty$, 这是由于函数 $l_\omega(\bar{\beta}_p)$ 是 p 的连续函数, 而 S_0 是紧的. 函数 $l_\omega(\bar{\beta}_p)$ 对 p 的连续性可直接根据 $\bar{\beta}_p$ 的最短性验证.

现在设 α 是任意一段 ω 的水平轨线弧, 端点为 p 与 q . 不难看出,

$$\alpha \sim \bar{\beta}_p \cdot f(\alpha) \cdot \bar{\beta}_q^{-1} \quad (\text{固定 } p \text{ 与 } q).$$

由于 α 是最短线, 所以我们有

$$\begin{aligned} l_\omega(\alpha) &\leq l_\omega(f(\alpha)) + l_\omega(\bar{\beta}_p) + l_\omega(\bar{\beta}_q) \\ &\leq l_\omega(f(\alpha)) + 2M. \end{aligned}$$

证毕.

下面我们引入一个量 $\lambda_f(p)$.

设 f 是 S 到自身的一个拟共形映射, 又设 ω 是 S 上的一个非平凡全纯二次微分. 假定 $p \in S$ 及 $f(p) \in S$ 均是 ω 的正则点, 且 f 在 p 点可微. 令

$$\lambda_f(p) = |\partial_{\xi} \tilde{f} + \partial_{\bar{\xi}} \tilde{f}|,$$

其中 \tilde{f} 是 f 借助于 ω 的自然参数的局部表达式, ξ 是 ω 在 p 点附近的自然参数. 设 ξ 及 η 分别是 ξ 的实部与虚部, 那么

$$\lambda_f(p) = \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|.$$

这个函数有明显的几何意义: 它是水平轨线长度的变化率, 即

$$\lambda_f(p) = \lim_{l_\omega(\alpha) \rightarrow 0} l_\omega(f(\alpha)) / l_\omega(\alpha),$$

其中 α 是包含点 p 的水平轨线弧. 注意到 f 的 ACL 性质, 对几乎所有的水平轨线弧 α , 我们有

$$l_\omega(f(\alpha)) = \int_{\alpha} \lambda_f(p) ds_\omega,$$

其中 ds_ω 是 ω 诱导的度量.

引理 2 设 S 是亏格 $g > 1$ 的紧 Riemann 曲面, f 是 S 的一个拟共形自同胚, 同伦于恒同映射. 又设 ω 是不恒为零的全纯二次微

分,则有

$$\iint_S dA_\omega \leq \iint_S \lambda_f(p) dA_\omega, \quad (8.20)$$

其中 dA_ω 是 ω 所诱导度量的面积元素.

证 对于任意给定的一个正数 L , 我们考虑从一个正则点 p 出发, 沿着过 p 点的水平轨线的两个相反方向前进. 这时有两种可能性: 一是至少在一个方向上没有走满 L 长时就遇到了临界点而被迫停下来; 另一是在两个方向上都可以走满 L 长而没有遇到临界点, 这时我们把所走过的轨线弧记为 $\alpha = \alpha(p, L)$ (显然其长度为 $2L$). 属于前一情况的点 p 的全体记为 E . 由于临界点是有限个, 而在每个临界点只有有限条轨线以其为端点, 注意到 $L < +\infty$, 可以推出 E 的测度 (在 ω 度量下的二维测度) 为零. 因此在讨论重积分时集合 E 可以忽略不计. 对于第二种情况, $\alpha = \alpha(p, L)$ 可以是一条简单弧, 也可以是一条自交的非简单弧. 后者当且仅当水平轨线是一条闭曲线并且总长度 $< 2L$ 时才能发生. 值得说明的是在这种情况下, $\alpha(p, L)$ 表示绕着这条闭轨线旋转的有重复部分的弧. 根据前面的说明, 对几乎所有的 $\alpha_p = \alpha(p, L)$, 我们有

$$l_\omega(f(\alpha_p)) = \int_{\alpha_p} \lambda_f ds_\omega.$$

由此推出

$$\iint_S l_\omega(f(\alpha_p)) dA_\omega = \iint_S \left(\int_{\alpha_p} \lambda_f ds_\omega \right) dA_\omega,$$

其中 $\alpha_p = \alpha(p, L)$.

利用单位分解的方法不难证明上式右端的重积分与线积分可以交换次序. 因此

$$\iint_S l_\omega(f(\alpha_p)) dA_\omega = 2L \iint_S \lambda_f(p) dA_\omega.$$

但由引理 1 又有

$$l_\omega(f(\alpha_p)) \geq 2L - 2M,$$

其中 M 是与 L 无关的常数. 这表明

$$\iint_S \lambda_f(p) dA_\omega \geq \left(1 - \frac{M}{L} \right) \iint_S dA_\omega.$$

令 $L \rightarrow \infty$ 即得 (8.20) 式. 证毕.

这个引理是 Teichmüller 惟一性定理证明的基础. 在 Grötzsch 问题求解的过程中, 也有类似于 (8.20) 的不等式, 但那时是十分容易证明的. 与 Grötzsch 问题求解的步骤相比较, 将有助于理解目前正在做的事情.

定理 1 的证明 设 $f_0: S_0 \rightarrow S$ 是一个 Teichmüller 映射, 其初始二次微分为 ω_0 , 而终端二次微分为 ω . 又设 $f: S_0 \rightarrow S$ 是一拟共形映射, 同伦于 f_0 . 我们令

$$g = f \circ f_0^{-1},$$

那么 $g: S \rightarrow S$ 是 S 上的拟共形自同胚, 同伦于恒同映射. 对 g 应用引理 2, 我们有

$$\iint_S dA_w \leq \iint_S \lambda_g dA_w. \quad (8.21)$$

设 $K_0 = K[f_0]$, 很容易看出在几乎所有的点 $p \in S$, 我们有

$$\lambda_g(p) = \lambda_f(q) / K_0, \quad q = f_0^{-1}(p).$$

此外, 显然 $dA_w = K_0 dA_{w_0}$. 由 (8.21) 式即有

$$\iint_S dA_w \leq \iint_{S_0} \lambda_f dA_{w_0}. \quad (8.22)$$

设 $\zeta = \xi + i\eta$ 是 ω_0 在一正则点 p 的自然参数, 又设 $\zeta' = \xi' + i\eta'$ 是 ω 在 $f(p)$ 的自然参数. 假定 f 借助于 ζ 及 ζ' 的局部表示式为 \tilde{f} , 那么

$$\lambda_f = \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|.$$

由 f 的拟共形性, 我们有

$$\lambda_f^2 \leq K[f] \left[\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|^2 - \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|^2 \right].$$

记 $J_{\tilde{f}} = \left[\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|^2 - \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} \right|^2 \right]$, 并对积分

$$\iint_{S_0} \lambda_f dA_{w_0} \equiv \iint_{S_0} (\lambda_f J_{\tilde{f}}^{-\frac{1}{2}}) \cdot J_{\tilde{f}}^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta$$

使用 Schwarz 不等式, 我们即得

$$\begin{aligned}
 \left(\iint_{S_0} \lambda_f dA_{w_0} \right)^2 &\leq \iint_{S_0} \lambda_f^2 J_{\tilde{f}}^{-1} d\xi d\eta \cdot \iint_{S_0} J_{\tilde{f}} d\xi d\eta \\
 &\leq K[f] \iint_{S_0} dA_{w_0} \cdot \iint_{S_0} J_{\tilde{f}} d\xi d\eta.
 \end{aligned} \quad (8.23)$$

由(8.22)及(8.23)式,有

$$\left(\iint_S dA_w \right)^2 \leq K[f] \iint_{S_0} dA_{w_0} \cdot \iint_{S_0} J_{\tilde{f}} d\xi d\eta. \quad (8.24)$$

回顾 \tilde{f} 的定义,我们有

$$d\xi' d\eta' = J_{\tilde{f}} d\xi d\eta.$$

于是(8.24)式变成

$$\left(\iint_S dA_w \right)^2 \leq K[f] \iint_{S_0} dA_{w_0} \cdot \iint_S dA_w,$$

也即

$$\iint_S dA_w \leq K[f] \iint_{S_0} dA_{w_0}.$$

但是,由 $dA_w = K_0 dA_{w_0}$ 可知, $\iint_S dA_w = K_0 \iint_{S_0} dA_{w_0}$. 于是得到

$$K_0 \leq K[f].$$

可见 $f_0: S_0 \rightarrow S$ 是极值映射.

极值映射的惟一性的证明完全类似于 Grötzsch 问题中的办法,作为习题留给读者,此处从略.证毕.

这样,我们证明了若在 $f: S_0 \rightarrow S$ 的同伦类中有 Teichmüller 映射,则该 Teichmüller 映射必为极值映射,且极值映射是惟一的.

现在留下的问题是:在 $f: S_0 \rightarrow S$ 的同伦类中是否总存在 Teichmüller 映射呢? 回答是肯定的,这要留到下一章中去解决.

习 题

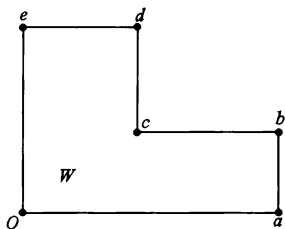
1. 完成 Teichmüller 惟一性定理的最后一部分证明,也即证明若 $K[f] = K[f_0]$, 则 $f \equiv f_0$, 其中 $f_0: S_0 \rightarrow S$ 是 Teichmüller 映射, f 同伦于 f_0 .

2. 设 $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r_0\}$, 试考察 $\frac{1}{z^2} dz^2$ 在 R 中的水平轨

线与垂直轨线.

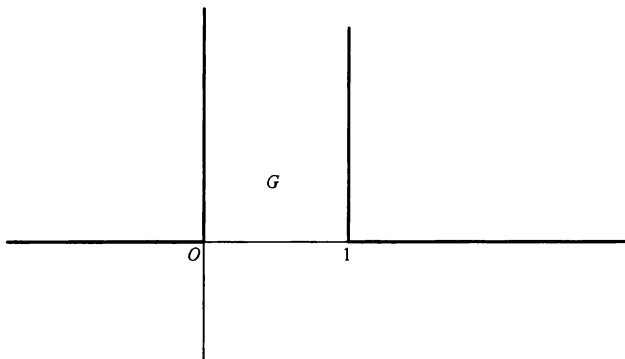
3. 设 S 为一紧 Riemann 曲面. 又假定 $\omega = \varphi dz^2$ 是 S 上的一个全纯二次微分. 若 ω 在 S 上有一条水平轨线是闭的 Jordan 曲线, 试证明存在着一个环域 $R \subset S$, R 由 ω 的闭的水平轨线所布满.

4. 设 W 为六边形, 如下图所示. 又设 W' 是 W 沿水平方向作仿射拉伸变形的结果, 其拉伸倍数为 $k > 1$. 记此拉伸变换为 f_0 . 试证明, 在一切将 W 变成 W' 并保持顶点依次对应的拟共形映射中, f_0 是惟一的极值映射.



5. 设 $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im} z < 1, \text{Re} z > 0\}$. 又设 $f_0: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是拉伸变换: $x \mapsto Kx$, $y \mapsto y$. 证明 f_0 是相对于其边界对应 $f_0|_{\partial\Sigma}$ 的极值映射, 并且是惟一极值映射. 也就是说, 若 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是一个拟共形映射, 且 $f|_{\partial\Sigma} = f_0|_{\partial\Sigma}$, 则 $K[f_0] \leq K[f]$, 且等号仅在 $f = f_0$ 时成立.

6. 下面的图称做 Strebel 图. Strebel 用它说明了拉伸变换不总是惟一极值的.



设 $G = \{z = x + iy: 0 < x < 1, y \geq 0 \text{ 或 } -\infty < x < \infty, y < 0\}$, 又设 f_0 是拉伸变换: $x \mapsto x, y \mapsto Ky (K > 1)$. 证明相对于 $f_0|_{\partial G}$ 而言, f_0 是极值映射, 但不是惟一的极值映射.

7. 设 $f_0 = z|z|^{K-1}$, 其中 $K > 1$ 是常数. 又设 $f: \Delta \rightarrow f(\Delta)$ 是任意一个拟共形映射, 且 $f|_E = f_0|_E$, 其中 $E = (-1, 1)$. 证明 $K[f_0] \leq K[f]$. (提示: 利用第三章 § 7 定理 1, 即 Grötzsch 定理).

第九章 Teichmüller 空间

本章介绍 Teichmüller 空间的若干经典结果,其中包括 Riemann 曲面模问题与模空间, Teichmüller 空间的几个模型, Teichmüller 度量与 Teichmüller 定理. 此外,还将讨论 Teichmüller 空间的模变换的分类及模群的离散性.

§ 1 Riemann 曲面的模问题

在前面的章节中,我们已经看到亏格为 0 的紧 Riemann 曲面都解析同构于 \mathbb{C} ; 换句话说,在一个球面我们所能够放置的复结构本质上是与 \mathbb{C} 的复结构相同的.

其他亏格的紧 Riemann 曲面的情况如何呢?

现在,我们先来考查亏格为 1 的紧 Riemann 曲面. 与球面情况不同,亏格为 1 的紧 Riemann 曲面未必彼此解析同构. 根据第六章 § 8 定理 2,任何亏格为 1 的紧 Riemann 曲面均解析同构于 \mathbb{C}/Λ , 其中 Λ 为一格群. 因此,我们只讨论形如 \mathbb{C}/Λ 的 Riemann 曲面即可.

为了说明这一点,我们取两个格群

$$\Lambda = \{z \mapsto z + m\omega_1 + n\omega_2, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Lambda' = \{z \mapsto z + m\omega'_1 + n\omega'_2, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

并考虑环面 $T = \mathbb{C}/\Lambda$ 及 $T' = \mathbb{C}/\Lambda'$.

下面我们将导出 T 与 T' 解析同构的一个充要条件. 于是当 ω_1, ω_2 及 ω'_1, ω'_2 不满足这个条件时 T 与 T' 就不解析同构.

假定 T 与 T' 解析同构,即存在一个双全纯映射 $f: T \rightarrow T'$. 设

$$\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \quad \text{与} \quad \pi': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$$

分别是 \mathbb{C} 到 T 与 T' 自然投影映射,又设 f 及 f^{-1} 到 \mathbb{C} 上的提升分别为 F 与 G . 那么,它们是 \mathbb{C} 到 \mathbb{C} 的全纯映射并使下图交换,也即

$$\pi' \circ F = f \circ \pi; \quad \pi \circ G = f^{-1} \circ \pi'.$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Lambda' & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathbb{C}/\Lambda \end{array}$$

满足这个要求的 F 与 G 并不是惟一确定的. 但是, 因为 $f \circ f^{-1}$ 为恒同映射, 故适当选择 G 可使得 $F \circ G$ 是 \mathbb{C} 上的恒同映射. 可见, F 是 \mathbb{C} 上的双全纯映射. 因此, $F(z) = a + bz$, $b \neq 0$.

注意到 F 把关于 Λ 等价的点变成关于 Λ' 的等价的点, 可知存在 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ 使得

$$F(\omega_1) - F(0) = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \quad F(\omega_2) - F(0) = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2,$$

也即

$$b\omega_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \quad b\omega_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2,$$

或写成

$$b \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}.$$

同样的讨论应用于 $F^{-1}(z)$, 我们又得到

$$b^{-1} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{Z}$. 可见

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由此推出: $(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = 1$. 由于 $\alpha\delta - \beta\gamma$ 及 $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ 均为整数, 故

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

总之, \mathbb{C}/Λ 与 \mathbb{C}/Λ' 解析同构之必要条件是存在一复数 $b \neq 0$ 及整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 使得

$$\begin{cases} b\omega_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \\ b\omega_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1. \end{cases}$$

令 $\tau = \omega_1/\omega_2, \tau' = \omega'_1/\omega'_2$, 那么上述必要条件可改写成

$$\tau = \frac{\alpha\tau' + \beta}{\gamma\tau' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

上述推理过程中每一步骤都是可逆的. 从最后得到的条件出发, 逆推上去即可以证明这个条件也是充分的.

这样, 我们看到并非所有环面的 Riemann 曲面都是同构的.

现在, 我们考虑全体环面 \mathbb{C}/Λ 所组成的集合 \mathcal{M} , 并在其中建立等价关系 \sim : 称 \mathbb{C}/Λ 等价于 \mathbb{C}/Λ' , 当且仅当它们彼此同构. 由全体等价类所组成的集合

$$\mathcal{M}/\sim$$

称做环面的模空间.

我们将数偶 (ω_1, ω_2) 生成的格群 Λ 所对应的环面 \mathbb{C}/Λ 的等价类记做 $[\omega_1, \omega_2]$. 显然, $[\tau, 1] = [\omega_1, \omega_2]$, 其中 $\tau = \omega_1/\omega_2$.

在定义格群时, 我们曾假定 $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$, 即要求 $\text{Im}\tau \neq 0$. 由于 $[1/\tau, 1] = [\tau, 1]$. 故只讨论 $\text{Im}\tau > 0$ 就足够了. 我们有

$$\mathcal{M}/\sim = \{[\tau, 1]: \text{Im}\tau > 0\}.$$

根据前面证明的结论, 我们知道

$$[\tau, 1] = [\tau', 1] \quad (\text{Im}\tau > 0, \text{Im}\tau' > 0)$$

当且仅当

$$\tau = \frac{\alpha\tau' + \beta}{\gamma\tau' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

由此可见, \mathcal{M}/\sim 与下列集合有一一对应关系:

$$\{\tau \in \mathbb{C}: \text{Im}\tau > 0\} / \text{PSL}(2, \mathbb{Z}),$$

其中 $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 称做模群, 由一切分式线性变换

$$\tau \mapsto \tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

所组成.

模群的基本域可以取成

$$D = \left\{ \tau: \text{Im}\tau > 0, |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

模空间中的每一点将在 D 中至少找到一个对应点, 而 D 的不同内点对应于模空间中的不同点 (见图 9.1).

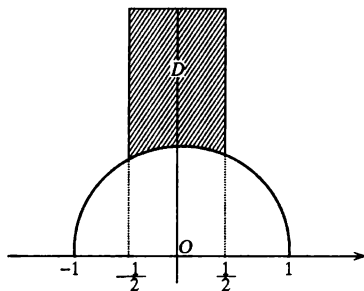


图 9.1

可见,环面的模空间有无穷多元素,而且可以用一个复参数 τ 实现参数化.

现在我们来定义一般亏格的 Riemann 曲面模空间.

定义 1 设 S 为一个紧的可定向曲面,其亏格为 g . 又设 \mathcal{M}_g 是 S 上一切可能的复结构. 我们称 \mathcal{M}_g 中的两个元素 μ_1 与 μ_2 等价,记之为

$\mu_1 \sim \mu_2$, 如果存在一个共形映射 $f: S_{\mu_1} \rightarrow S_{\mu_2}$, 其中 S_{μ_1} 与 S_{μ_2} 分别是 S 赋予 μ_1 与 μ_2 之后所形成的 Riemann 曲面. \mathcal{M}_g 中的元素 μ 的等价类记为 $[\mu]$. 全体等价类 $[\mu]$ 构成的集合称为**亏格为 g 的 Riemann 曲面的模空间**, 简称为**模空间**, 记为 R_g ; 也即

$$R_g \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_g / \sim.$$

前面讨论表明: R_0 只有一个元素, 而

$$R_1 = \mathbb{H} / \text{PSL}(2, \mathbb{Z}),$$

其中 \mathbb{H} 代表上半平面.

1857 年, Riemann 提出了一个重要猜想: **当亏格 $g > 1$ 时, 模空间 R_g 可以由 $3g - 3$ 个复参数全纯地描述.**

这便是著名的 Riemann 模问题. 描述模空间的参数便称为 Riemann 曲面的**模**.

O. Teichmüller 在 20 世纪 30 年代末至 40 年代初, 在上述模问题上做出了重要贡献. 其主要贡献有两个方面: 一是他引入了另外一个空间 T_g , 去替代对模空间的研究, 后来 T_g 被称做 Teichmüller 空间; 二是把拟共形映射的极值问题与模问题联系在一起, 赋予了 T_g 以完备的度量, 并证明了 T_g 拓扑等价于 \mathbb{R}^{6g-6} 中的单位球.

现在, 我们来解释什么是 **Teichmüller 空间**.

我们回到 S 上的复结构集合 \mathcal{M}_g 中元素的等价关系的定义上来. 那里 $\mu_1 \sim \mu_2$ 当且仅当存在一个映射 $f: S_{\mu_1} \rightarrow S_{\mu_2}$ 是共形的. Teichmüller 观察到用这样的等价关系定义的模空间过于复杂, 不便于研究. 于是他对这种等价关系附加了一个拓扑条件: \mathcal{M}_g 中两个

元素 μ_1 与 μ_2 被称做是 Teichmüller 等价的, 记做 $\mu_1 \approx \mu_2$, 如果存在一个共形映射 $f: S_{\mu_1} \rightarrow S_{\mu_2}$, 作为 S 到自身的同胚, 同伦于恒同映射.

定义 2 \mathcal{M}_g 中元素的 Teichmüller 等价类集合, 我们称为 **Teichmüller 空间**, 记做 T_g , 也即

$$T_g \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_g / \approx.$$

T_g 中元素记做 $[\mu]_T$.

由于 Teichmüller 等价关系强于原有的等价关系, 故 T_g 空间要“大于”Riemann 模空间 R_g . 事实上, T_g 空间到 R_g 空间有一个自然投影:

$$\begin{aligned} \pi: T_g &\longrightarrow R_g, \\ [\mu]_T &\longmapsto [\mu]. \end{aligned}$$

以后我们会引入模变换群 Mod_g , 其中每一个元素 $\sigma: T_g \rightarrow T_g$ 是一个单的满射, 且 $\pi \circ \sigma = \pi$, 并有下列关系:

$$R_g = T_g / \text{Mod}_g.$$

在 T_g 赋予了度量之后, 我们会发现模群在 T_g 上的作用是离散的. 如果我们能将 T_g 参数化, 那么由 T_g 的参数便得到 R_g 的参数.

以 $g=1$ 的情况为例: T_1 可取为 \mathbb{H} , 而 Mod_1 可取为 $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, 这时 $R_1 = \mathbb{H} / \text{Mod}_1$.

遗憾的是, 当 $g>1$ 时, 无论是 T_g 还是 Mod_g 都远比 $g=1$ 时复杂. 我们不得不借助于其他途径来描述它们.

§ 2 Teichmüller 空间的模型

为了研究 Teichmüller 空间, 我们应当给出它的具体模型. 这种模型有数个, 它们彼此等价; 而各自适合于某种讨论.

模型 1 标记 Riemann 曲面的等价类.

设 S_0 是取定的一个紧 Riemann 曲面, 其亏格为 g ($g>1$). 又设 S 是另一个紧 Riemann 曲面, 其亏格也是 g . 假定 $f: S_0 \rightarrow S$ 是一个保向同胚, 那么我们就把偶 (S, f) 称为 **标记 Riemann 曲面** (marked Riemann surface). 两个标记 Riemann 曲面 (S_1, f_1) 及 (S_2, f_2) 称做等

价的,记做 $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, 如果在 $f_2 \circ f_1^{-1}: S_1 \rightarrow S_2$ 的同伦类中存在一个共形映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$.

标记 Riemann 曲面 (S, f) 的等价类记做 $[S, f]$. 全体这样的等价类记做 $T(S_0)$. 它就是 Teichmüller 空间的一个模型, 其中点 $[S_0, \text{id}]$ 称做 $T(S_0)$ 的**基点**.

现在, 我们解释 $T(S_0)$ 与 T_g 的关系. 首先, 每个标记 Riemann 曲面 (S, f) , 都可以由同胚 $f: S_0 \rightarrow S$ 将 S 的复结构拉回到 S_0 的拓扑上, 而形成 S_0 上的一个新的复结构. 两个等价的标记 Riemann 曲面 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) , 在 S_0 上分别诱导了两个复结构 μ_1 及 μ_2 , 而 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 同伦类中的共形映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 被拉回到 S_0 后便是一个同伦于恒同映射的共形映射 $\psi: S_{\mu_1} \rightarrow S_{\mu_2}$. 可见 μ_1 与 μ_2 是 Teichmüller 等价的.

反过来, S_0 上的任何两个 Teichmüller 等价的复结构 μ_1 与 μ_2 也可以解释为两个等价的标记 Riemann 曲面 (S_{μ_1}, id) 与 (S_{μ_2}, id) .

因为每一个等价类 $[S, f]$, 只取决于 $f: S_0 \rightarrow S$ 的同伦类, 而不依赖于 f 的选择, 故不失一般性, 可以假定 $f: S_0 \rightarrow S$ 是拟共形映射. 因此, 我们可以定义

$$T(S_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{[S, f] | f: S_0 \rightarrow S \text{ 为 q. c. 映射}\}.$$

模型 2 Beltrami 微分的等价类.

设 (Δ, π_0) 是紧 Riemann 曲面 S_0 的覆盖, 其覆盖变换群为 G_0 . 我们称 Δ 内的一个可测函数 $\mu(z)$ 是关于 G_0 的一个 Beltrami 微分, 如果它满足下列关系式:

$$\mu(g(z)) \overline{g'(z)}/g'(z) = \mu(z), \quad \forall g \in G_0. \quad (9.1)$$

Δ 中的全体这种可测函数记做 $\text{Bel}(\Delta, G_0)$. 显然, 它在 $L^\infty(\Delta)$ 的范数下构成一个 Banach 空间. 我们对这个空间中的单位开球有特殊兴趣, 记之为 $M(\Delta, G_0)$, 也即

$$M(\Delta, G_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in \text{Bel}(\Delta, G_0); \|\mu\| < 1\}. \quad (9.2)$$

对于任意一个标记 Riemann 曲面 (S, f) , 我们可以将映射 $f: S_0 \rightarrow S$ 提升为 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$. 当 f 是拟共形映射时, \tilde{f} 也是拟共形映射, 且满足

$$\tilde{f} \circ g = h \circ \tilde{f}, \quad \forall g \in G_0,$$

其中 h 是 S 的万有覆盖 (Δ, π_1) 的覆盖变换群 G 中的元素. 设 $\mu(z)$ 为 \tilde{f} 的 Beltrami 系数, 那么由关系式 $\tilde{f} \circ g = h \circ \tilde{f}$ 立即推出 μ 是关于 G_0 的一个 Beltrami 微分, 且 $\mu \in M(\Delta, G_0)$. 总之, 我们证明了, 每一个标记 Riemann 曲面 (S, f) 都对应于 $M(\Delta, G_0)$ 中的一个元素.

反过来, 设 $\mu \in M(\Delta, G_0)$, 则根据拟共形映射存在定理, 存在一个拟共形映射 $f_\mu: \Delta \rightarrow \Delta$ 以 μ 为其 Beltrami 系数. 由条件 (9.1) 可知, 对于任意一个元素 $g \in G_0$, $f_\mu \circ g$ 与 f_μ 有相同的 Beltrami 系数, 故而 $f_\mu \circ g \circ f_\mu^{-1}$ 是 Δ 到自身的共形映射, 也即保圆分式线性变换. 记

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{f_\mu \circ g \circ f_\mu^{-1} : g \in G_0\}.$$

不难证明: G 为一个保圆分式线性变换群, 且对任意一点 $z_0 \in \Delta$, 存在一个邻域 U , 使得

$$h(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall h \in G \setminus \{\text{id}\}.$$

由此推出, Δ/G 是一个 Riemann 曲面 S , 而 f_μ 可以投影为 $S_0 \rightarrow S$ 的一个拟共形映射 f . 也就是说, 对于任意一个 $\mu \in M(\Delta, G_0)$, 都对应于一个标记 Riemann 曲面 (S, f) .

总之, 我们证明了, 下列对应

$$\Psi: (S, f) \mapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}$$

是全体标记 Riemann 曲面集合到 $M(\Delta, G_0)$ 的一一对应, 其中 $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 f 的提升.

今后我们用 f_μ 表示以 μ 为复特征的 Δ 到自身的拟共形映射, 它在允许相差一个分式线性变换的条件下是惟一确定的.

设 $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, 并假定在 Ψ 的对应下, (S_1, f_1) 及 (S_2, f_2) 分别对应于 μ_1 与 μ_2 . 设 f_1 及 f_2 的提升分别为 \tilde{f}_1 及 \tilde{f}_2 , 那么 $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1^{-1}$ 是 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 的提升. 由 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 的等价性可知, 存在一个共形映射 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 同伦于 $f_2 \circ f_1^{-1}: S_1 \rightarrow S_2$. 于是根据第八章 § 2 的定理 2, 存在一个共形映射 $\tilde{\varphi}: \Delta \rightarrow \Delta$ 使得

$$\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1^{-1}|_{\partial\Delta} = \tilde{\varphi}|_{\partial\Delta},$$

也即

$$\tilde{f}_2|_{\partial\Delta} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{f}_1|_{\partial\Delta}.$$

用 f_μ 的记号表示, 即有

$$f_{\mu_2}|_{\partial\Delta} = \tilde{\varphi} \circ f_{\mu_1}|_{\partial\Delta}.$$

总之, 上面证明了: 若 $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, 则它们所对应的 μ_1 与 μ_2 使得 f_{μ_1} 与 f_{μ_2} 在 $\partial\Delta$ 上相差一个 Möbius 变换.

这一命题的逆命题也成立, 证明是容易的, 从略.

至此, 我们在 $M(\Delta, G_0)$ 的元素间建立了等价关系: $\mu_1 \sim \mu_2$ 当且仅当 f_{μ_1} 与 f_{μ_2} 在 $\partial\Delta$ 上相差一个 Möbius 变换.

根据前面的讨论, 显然, Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 可以用

$$M(\Delta, G_0) / \sim$$

作其模型.

模型 3 以 $M(\Delta, G_0)$ 中元素为 Beltrami 系数的规范拟共形映射的边界对应.

上面的讨论中, f_μ 没有规范条件, 因而导致在 μ 的等价性条件中 f_μ 的边界值相差一个 Möbius 变换.

今后, 我们用 $F_\mu: \Delta \rightarrow \Delta$ 表示 Δ 到自身的拟共形映射, 其 Beltrami 系数为 μ , 且保持 1, -1 及 i 不动. 这样的 F_μ 由 μ 惟一确定.

因此, 前面定义的 μ 的等价性条件用 F_μ 表示特别简单: $\mu_1 \sim \mu_2$ 当且仅当 $F_{\mu_1}|_{\partial\Delta} = F_{\mu_2}|_{\partial\Delta}$.

在这样的记法下, $T(S_0)$ 的模型可以取成:

$$\{F_\mu|_{\partial\Delta}: \mu \in M(\Delta, G_0)\}.$$

§ 3 Fricke 空间

现在, 我们给出 $T(S_0)$ 空间的另一个模型, 被称为 Fricke 空间. 它的好处在于便于告诉我们 Teichmüller 空间的维数.

设 S_0 是给定的紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 设 $p_0 \in S_0$ 是取定的一点. 取 S_0 的一个典型剖分 $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$, 其中 a_j, b_j 都是

以 p_0 点为起点与终点的闭曲线,且满足下列条件:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \sim 1, \quad (9.3)$$

$$a_i \times b_k = \delta_{ik}, \quad a_i \times a_k = b_i \times b_k = 0 \quad (9.4)$$

$$(i, k = 1, \cdots, g),$$

其中 $\alpha \times \beta$ 表示曲线 α 与 β 的交数,其定义见第六章 § 2.

设 (\mathbb{H}, π_0) 为 S_0 的覆盖^①. 假定 G_0 是其覆盖变换群. 在 \mathbb{H} 内取定一点 z_0 , 使得 $\pi(z_0) = p_0$. 过 z_0 提升 a_j 及 b_j , 分别得到 \tilde{a}_j 及 \tilde{b}_j ($j=1, \cdots, g$). 假定 \tilde{a}_j 及 \tilde{b}_j 的终点分别是 z_j 及 w_j , 那么存在 α_j 及 $\beta_j \in G_0$, 使得

$$\alpha_j(z_0) = z_j, \quad \beta_j(z_0) = w_j \quad (j = 1, \cdots, g).$$

这时 (9.3) 式意味着

$$\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \circ \cdots \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1} = \text{id}. \quad (9.5)$$

由于 $\{a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g\}$ 是基本群 $\pi_1(S_0, p_0)$ 的生成元组, 故群 G_0 是由 $\{\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g\}$ 按 (9.5) 式的关系自由生成的. (9.5) 式是这些生成元之间的惟一关系式.

当我们更换投影 π_0 时, 上述生成元 α_j, β_j 要相应地作一个 Möbius 变换的共轭. 因此, 我们不失一般性可以假定 β_g 具有下列形式:

$$\begin{aligned} \beta_g: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}, \\ z &\mapsto \lambda z \quad (\lambda > 1). \end{aligned}$$

换句话说, 我们将 β_g 的两个不动点规定为 0 与 ∞ , 而 ∞ 是其吸性不动点. 另外, 再通过一个相似变换的共轭 (注意, 相似变换的共轭不改变 β_g 的形式), 将 α_g 的一个不动点规定为 1.

现在考虑任意一个标记 Riemann 曲面 (S, f) . 假定 (\mathbb{H}, π) 是 S 的一个覆盖, 而 G 是其覆盖变换群. 设 $\tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 是 $f: S_0 \rightarrow S$ 的一个提升. 那么, \tilde{f} 诱导了 G_0 到 G 的一个同构:

$$\chi_{\tilde{f}}: G_0 \rightarrow G,$$

① 取上半平面 \mathbb{H} 为万有覆盖仅是为了后面计算方便.

$$g \mapsto \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}.$$

不同的提升所诱导的同构不同,相差 G 的一个内部自同构. 这种不确定性,为叙述带来不便. 下面我们引入规范提升的概念.

当我们更换投影 π 时, G 中的元素及上述的 \tilde{f} 均作一个 Möbius 变换的共轭. 因此,我们通过适当更换投影 π ,要求 f 的提升 \tilde{f} 保持 $0, 1, \infty$ 不动. 这样的提升我们称之为规范提升.

对于规范提升 \tilde{f} 而言,它所诱导的同构将 β_g 变成 $\tilde{f} \circ \beta_g \circ \tilde{f}^{-1}$, 而后者仍以 0 与 ∞ 为其不动点, ∞ 为吸性不动点. 同样地, $\tilde{f} \circ \alpha_g \circ \tilde{f}^{-1}$ 仍以 1 为其不动点.

采用规范提升的另一个好处在于: 若 $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$, 则 f_1 及 f_2 的规范提升有相同的边界值,从而推出

$$\tilde{f}_1 G_0 \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 G_0 \tilde{f}_2^{-1} \quad (\text{记之为 } G),$$

并且它们所诱导的 G_0 到 G 的同构也是相同的.

设 $\tau = [S, f]$ 是 $T(S_0)$ 中的任意一点,并令

$$\alpha_j(\tau) = \tilde{f} \circ \alpha_j \circ \tilde{f}^{-1}, \quad \beta_j(\tau) = \tilde{f} \circ \beta_j \circ \tilde{f}^{-1},$$

其中 $j=1, \dots, g$, 而 \tilde{f} 是 f 的规范提升. 这样定义是合理的,也即 $\alpha_j(\tau)$ 与 $\beta_j(\tau)$ 与 τ 的代表元的选取无关. 显然, $\{\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \alpha_g(\tau), \beta_g(\tau)\}$ 构成 $G_\tau = \tilde{f} G_0 \tilde{f}^{-1}$ 的一组生成元,且满足

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\tau) \circ \beta_1(\tau) \circ \alpha_1^{-1}(\tau) \circ \beta_1^{-1}(\tau) \\ & \quad \circ \dots \circ \alpha_g(\tau) \circ \beta_g(\tau) \circ \alpha_g^{-1}(\tau) \circ \beta_g^{-1}(\tau) = \text{id}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

此外,注意到 \tilde{f} 保持 $0, 1, \infty$ 不动及 α_g 与 β_g 的特殊性质,立即推出 $\alpha_g(\tau)$ 有一个不动点为 1 , 而 $\beta_g(\tau)$ 则以 0 为斥性不动点、以 ∞ 为吸性不动点;换句话说, $\beta_g(\tau)$ 具有下列形式:

$$\beta_g(\tau): z \mapsto \lambda_\tau z \quad (\lambda_\tau > 1). \quad (9.7)$$

总之,我们建立了一个对应:

$$\Phi: \tau \mapsto (\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \alpha_g(\tau), \beta_g(\tau)).$$

根据定义立即推出, Φ 是一个单射. 当 τ 取遍 $T(S_0)$ 时, Φ 的像集合称为 S_0 的 **Fricke 空间**, 记为 $F(S_0)$.

下面我们将 $F(S_0)$ 参数化. 为此, 我们需要下列引理:

引理 1 设 $(\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \alpha_g(\tau), \beta_g(\tau)) \in F(S_0)$, 则其中的 $\alpha_g(\tau)$ 与 $\beta_g(\tau)$ 由其前 $2(g-1)$ 个元素 $\alpha_1(\tau), \dots, \beta_{g-1}(\tau)$ 惟一确定.

证 令

$$\eta = \alpha_1(\tau) \circ \beta_1(\tau) \circ \alpha_1^{-1}(\tau) \circ \beta_1^{-1}(\tau) \\ \circ \dots \circ \alpha_{g-1}(\tau) \circ \beta_{g-1}(\tau) \circ \alpha_{g-1}^{-1}(\tau) \circ \beta_{g-1}^{-1}(\tau),$$

那么, 由 (9.6) 式有

$$\eta \circ \alpha_g(\tau) \circ \beta_g(\tau) \circ \alpha_g^{-1}(\tau) \circ \beta_g^{-1}(\tau) = \text{id},$$

也即

$$\eta \circ \alpha_g(\tau) = \beta_g^{-1}(\tau) \circ \alpha_g(\tau) \circ \beta_g^{-1}(\tau). \quad (9.8)$$

设

$$\eta(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

又设

$$\alpha_g(\tau)(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad AD - BC = 1.$$

那么 (9.8) 式可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_\tau} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\tau}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_\tau} \end{bmatrix}.$$

这样, λ_τ, A, B, C, D 应满足下列方程组:

$$\begin{cases} (a-1)A + bC = 0, \\ cA + (d - \lambda_\tau^{-1})C = 0, \\ cB + (d-1)D = 0, \\ (a - \lambda_\tau)B + bD = 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

现在的问题归结为证明 λ_τ, A, B, C, D 能由 (9.9) 式惟一确定, 其中 $AD - BC = 1$.

首先, 由条件 $AD - BC = 1$ 可知 A 与 C 不同时为零, B 与 D 不同时为零. 这就要求 (9.9) 式中的前两个方程和后两个方程的系数分别满足:

$$(a-1)(d-\lambda_r^{-1})-bc=0,$$

$$bc-(d-1)(a-\lambda_r)=0.$$

这都导致

$$\lambda_r(d-1)=(a-1).$$

由此推出 $a \neq 1, d \neq 1$, 且 $\lambda_r = (a-1)/(d-1)$. 可见 λ_r 由 a 与 d 惟一确定.

由 (9.9) 式可知

$$A = bC/(1-a), \quad D = cB/(1-d).$$

再由 $\alpha_g(\tau)$ 以 1 为不动点推出: $A+B=C+D$. 回顾规范条件 $AD-BC=1$, 这样的 A, B, C, D 由 a, b, c, d 所惟一确定. 证毕.

由引理 1, 我们看出 Fricke 空间中的每一点, 由 $2g-2$ 个双曲型分式线性变换所决定. 我们知道每一个双曲型分式线性变换可由其吸性不动点、斥性不动点和乘子所惟一确定. 对于给定点 τ , 我们将其对应的 $\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \alpha_{g-1}(\tau), \beta_{g-1}(\tau)$ 中每一元素的吸性不动点坐标 ξ , 斥性不动点坐标 η 及其乘子 λ 依次排列, 便得 $T(S_0)$ 空间一点 τ 的坐标:

$$(\xi_1(\tau), \eta_1(\tau), \lambda_1(\tau), \dots, \xi_{2g-2}(\tau), \eta_{2g-2}(\tau), \lambda_{2g-2}(\tau)),$$

我们称之为点 τ 的 **Fricke 坐标**. 显然, 不同的 τ , 其 Fricke 坐标不同.

这样, 我们看到 Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 中的点可以通过 $6g-6$ 个实参数描述. 但是到目前为止, 我们尚不知道, $F(S_0)$ 的 Fricke 坐标是否在 \mathbb{R}^{6g-6} 中形成一个区域.

§ 4 Teichmüller 存在性定理

设 S_0 是一个紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 ω 是 S_0 上的一个全纯二次微分, $k \in [0, 1)$ 是给定常数. 根据前一章的讨论, 对于给定的 ω 及 k , 存在一个 Riemann 曲面 S 和一个 Teichmüller 映射 $f: S_0 \rightarrow S$, 其 Beltrami 系数为 $k\bar{\omega}/|\omega|$. 这样, 我们便由 $\omega \in Q(S_0)$ 及 $k \in [0, 1)$ 确定了 $T(S_0)$ 空间的一点 $[S, f]$.

我们要问这样的问题: 当 ω 取遍 $Q(S_0)$ 而 k 取遍 $[0, 1)$ 时, 由相

应的 Teichmüller 映射 f 所对应的点 $[S, f]$ 的集合是否充满了 $T(S_0)$?

问题的回答是肯定的. 这就是说, 任何一个亏格为 g 的紧 Riemann 曲面 S , 都可由 S_0 经过一个 Teichmüller 形变而得到.

为讨论这一问题我们引入一个临时性记号:

$$\tilde{T}(S_0) = \{[S, f]: f \text{ 是 Teichmüller 映射}\}.$$

另外, 我们记 Banach 空间 $Q(S_0)$ 中的单位球为 $BQ(S_0)$, 也即

$$BQ(S_0) = \{\omega \in Q(S_0): \|\omega\| < 1\}.$$

我们已知道 $Q(S_0)$ 是 $3g-3$ 维的复线性空间, 故 $BQ(S_0)$ 拓扑同构于 \mathbb{R}^{6g-6} 中的单位球.

对任意一个 $\omega \in BQ(S_0) \setminus \{0\}$, 我们令 $k = \|\omega\|$, 并由 k 及 ω 决定一个 Teichmüller 映射 $f_\omega: S_0 \rightarrow S_\omega$. 因而 ω 对应于点 $[S_\omega, f_\omega] \in \tilde{T}(S_0)$. 当 $\omega = 0$ 时, 我们令 $S_\omega = S_0$, $f_\omega = \text{id}_{S_0}$, 这时 $\omega = 0$ 对应于 $T(S_0)$ 的基点 $[S_0, \text{id}]$. 总之, 我们建立了 $BQ(S_0)$ 到 $\tilde{T}(S_0)$ 的一个映射:

$$\begin{aligned} \Phi: BQ(S_0) &\rightarrow \tilde{T}(S_0), \\ \omega &\mapsto [S_\omega, f_\omega]. \end{aligned}$$

第八章 § 6 中的 Teichmüller 惟一性定理告诉我们, Φ 是一个单射 (请读者自行证明). 另外, 很容易看出它也是一个满射. 事实上, 若 $[S, f] \in \tilde{T}(S_0)$, 则 $f: S_0 \rightarrow S$ 是 Teichmüller 映射. 假定其 Beltrami 微分为 $k\bar{\omega}/|\omega|$, $\omega \in Q(S_0) \setminus \{0\}$. 若 $k=0$, 则 f 是共形映射, 因而 $[S, f]$ 是 $T(S_0)$ 的基点, 也即 $\Phi(0)$. 若 $k \in (0, 1)$, 我们令

$$\omega' = k\omega / \|\omega\|,$$

那么

$$\omega' \in BQ(S_0), \quad \|\omega'\| = k,$$

并且 $k\bar{\omega}/|\omega| = k\bar{\omega'}/|\omega'|$, 可见 f 实际上就是 $f_{\omega'}$, 也即

$$\Phi(\omega') = [S, f].$$

上一节我们已建立了 $T(S_0)$ 到 $F(S_0)$ 的一个单的映射:

$$\Psi: T(S_0) \rightarrow F(S_0),$$

$$\tau \mapsto (\xi_1(\tau), \eta_1(\tau), \lambda_1(\tau), \dots, \xi_{2g-2}(\tau), \eta_{2g-2}(\tau), \lambda_{2g-2}(\tau)).$$

那么,复合映射 $\Psi \circ \Phi: BQ(S_0) \rightarrow F(S_0)$ 也是一个单的映射.

引理 1 复合映射 $\Psi \circ \Phi: BQ(S_0) \rightarrow F(S_0)$ 作为 $BQ(S_0)$ 到 \mathbb{R}^{6g-6} 中的映射是连续的.

证 设

$$\omega_n \in BQ(S_0), \quad n = 1, 2, \dots,$$

且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\omega_n \rightarrow \omega_*$, 其中 $\omega_* \in BQ(S_0)$. 为叙述方便, 我们暂且假定 $\|\omega_*\| \neq 0$. 这时, 不妨假定

$$\|\omega_n\| \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

令

$$k_n = \|\omega_n\|, \quad k_* = \|\omega_*\|,$$

那么当 $n \rightarrow \infty$ 时, $k_n \rightarrow k_*$. 设 $f_n: S_0 \rightarrow S_n$ 是以 $k_n \bar{\omega}_n / |\omega_n|$ 为 Beltrami 系数的 Teichmüller 映射, 那么

$$\Phi(\omega_n) = [S_n, f_n], \quad n = 1, 2, \dots.$$

我们假定 (\mathbb{H}, π_0) 是 S_0 的覆盖, G_0 为其覆盖变换群. 我们沿用前面的记号, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ 是 G_0 的生成元, 且 α_g 以 1 为不动点, β_g 以 ∞ 为吸性不动点, 而以 0 为斥性不动点. 假定

$$(\xi_1, \eta_1, \lambda_1, \dots, \xi_{2g-2}, \eta_{2g-2}, \lambda_{2g-2}) \quad (9.10)$$

是基点 $[S_0, \text{id}]$ 的 Fricke 坐标, 其中的分量由 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta_{g-1}$ 的吸性不动点、斥性不动点和乘子组成.

设 $\tilde{f}_n: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 是 $f_n: S_0 \rightarrow S_n$ 的规范提升. 又设 $\tau_n = [S_n, f_n]$ 的 Fricke 坐标为

$$(\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \xi_{2g-2}^{(n)}, \eta_{2g-2}^{(n)}, \lambda_{2g-2}^{(n)}). \quad (9.11)$$

现在我们证明 τ_n 的 Fricke 坐标可以用 \tilde{f}_n 及基点的坐标 (9.10) 式表示. 我们仅以 $\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)}$ 及 $\lambda_1^{(n)}$ 为例, 它们分别是 $\tilde{f}_n \circ \alpha_1 \circ \tilde{f}_n^{-1}$ 的吸性不动点、斥性不动点和乘子. 但 ξ_1 与 η_1 分别是 α_1 的吸性不动点与斥性不动点, 因此, 我们有

$$\xi_1^{(n)} = \tilde{f}_n(\xi_1), \quad \eta_1^{(n)} = \tilde{f}_n(\eta_1). \quad (9.12)$$

作为 $h(z) = \tilde{f}_n \circ \alpha_1 \circ \tilde{f}_n^{-1}$ 的乘子, $\lambda_1^{(n)}$ 应满足下列关系式:

$$\frac{z - \eta_1^{(n)}}{z - \xi_1^{(n)}} = \lambda_1^{(n)} \frac{h(z) - \eta_1^{(n)}}{h(z) - \xi_1^{(n)}}.$$

特别地,有

$$\frac{1 - \eta_1^{(n)}}{1 - \xi_1^{(n)}} = \lambda_1^{(n)} \frac{h(1) - \eta_1^{(n)}}{h(1) - \xi_1^{(n)}}.$$

注意到 $\tilde{f}_n(1)=1$, 我们有 $h_1(1)=\tilde{f}_n(\alpha_1(1))$. 于是我们得到

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{1 - \tilde{f}_n(\eta_1)}{1 - \tilde{f}_n(\xi_1)} \cdot \frac{\tilde{f}_n(\alpha_1(1)) - \tilde{f}_n(\xi_1)}{\tilde{f}_n(\alpha_1(1)) - \tilde{f}_n(\xi_1)}.$$

总之,上面证明了, $\xi_1^{(n)}$, $\eta_1^{(n)}$ 及 $\lambda_1^{(n)}$ 均可用 \tilde{f}_n 在某些点的函数值表示. 显然这一结论也适合于 τ_n 的其他 Fricke 坐标.

设 \tilde{f}_n 的 Beltrami 系数为 μ_n , 那么 $\|\mu_n\|=k_n$, 且

$$\mu_n = k_n \bar{\varphi}_n / |\varphi_n|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 $\varphi_n dz^2$ 为 ω_n 之提升. 又设 $f: S_0 \rightarrow S_*$ 是以 $k_* \bar{\omega}_* / |\omega_*|$ 为 Beltrami 系数的 Teichmüller 映射, \tilde{f}_* 为其规范化提升, 且 $\mu_* = k_* \bar{\varphi}_* / |\varphi_*|$ 为 \tilde{f}_* 的 Beltrami 系数. 那么, 根据 $\omega_n \rightarrow \omega_*$ 的假定, 立即看出当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\mu_n(z) \rightarrow \mu_*(z) \quad (\text{对几乎所有的 } z).$$

注意到 \tilde{f}_n 及 \tilde{f}_* 是规范化拟共形映射, 不难证明, 对于任意固定的 $z \in \mathbb{H}$,

$$\tilde{f}_n(z) \rightarrow \tilde{f}_*(z) \quad (n \rightarrow \infty).$$

这样, τ_n 的 Fricke 坐标将趋向于 τ_* 的 Fricke 坐标. 因此, $\Psi \circ \Phi$ 是连续映射. 证毕.

引理 2 $F(S_0)$ 是弧连通的.

证 设 $\sigma = (\xi_1, \eta_1, \lambda_1, \dots, \xi_{g-1}, \eta_{g-1}, \lambda_{g-1})$ 是一点 $[S, f] \in T(S_0)$ 的 Fricke 坐标. 假定 \tilde{f} 是 f 的规范化提升, 且 μ 是 \tilde{f} 的 Beltrami 系数. 那么

$$\mu(z) = \mu(g(z)) \overline{g'(z)} / g'(z), \quad \forall g \in G_0.$$

令

$$\mu_t(z) = t\mu(z), \quad t \in [0, 1],$$

则 $\mu_t(z)$ 满足 $\|\mu_t\| \leq \|\mu\| < 1$, 且

$$\mu_t(z) = \mu_t(g(z)) \overline{g'(z)} / g'(z), \quad \forall g \in G_0. \quad (9.13)$$

于是存在一个拟共形映射 $\tilde{f}_t: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 以 μ_t 为其 Beltrami 系数, 且保持 $0, 1, \infty$ 不动. 令

$$G_t = \{ \tilde{f}_t \circ g \circ \tilde{f}_t^{-1} : g \in G_0 \},$$

那么 G_t 是一个保持 \mathbb{H} 不变的分式线性变换群, 且 \mathbb{H}/G_t 是一 Riemann 曲面. 记 \mathbb{H}/G_t 为 S_t , 则 \tilde{f}_t 诱导了 $S_0 \rightarrow S_t$ 的一个拟共形映射 f_t , 并形成了 $T(S_0)$ 中的点 $[S_t, f_t]$. 将点 $[S_t, f_t]$ 的 Fricke 坐标记为 σ_t . 那么, 很容易看出 σ_t 的各个分量均可由 \tilde{f}_t 在某些点的值表示. 由第四章 §7 中定理可知, $\tilde{f}_t(z)$ 连续依赖于 t . 故 $t \mapsto \sigma_t$ 形成了 $F(S_0)$ 空间中点 $\sigma_1 = \sigma$ 到 σ_0 (对应于基点) 的一条连续弧. 这就是说 $F(S_0)$ 中每一点 σ 均可以用一条弧与 σ_0 相连. 因此 $F(S_0)$ 是弧连通的. 证毕.

引理 3 $F(S_0)$ 中不含有 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的边界点.

证 用反证法. 假定 $\sigma \in F(S_0)$ 是 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的一个边界点, 以下将导出矛盾.

前面我们已经证明了 $\Psi \circ \Phi: BQ(S_0) \rightarrow F(S_0)$ 是一个连续的单映射. 因为 $BQ(S_0)$ 可视作 \mathbb{R}^{6g-6} 中的一个开球, 故而 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 是 \mathbb{R}^{6g-6} 中的一开集 (根据 Brouwer 定理).

另外, 我们根据 Φ 的定义, $\Phi(0) = [S_0, \text{id}]$, 即为 $T(S_0)$ 中的基点. $\omega \equiv 0$ 是 $BQ(S_0)$ 的内点, 故 $[S_0, \text{id}]$ 的 Fricke 坐标也必是 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的内点. 像前面一样, 将它记为 σ_0 .

引理 2 告诉我们 $F(S_0)$ 是连通的. 因此, $F(S_0)$ 有一条弧 $t \mapsto \sigma_t$ ($0 \leq t \leq 1$) 连结 σ 与 σ_0 . 由于 τ_0 为 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的内点, 故存在 $t^* \in (0, 1]$ 使得 σ_{t^*} 为 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的边界点, 当 $t \in [0, t^*)$ 时, σ_t 均为其内点.

假定 σ_t 是按照引理 2 证明中的方式构造的, 并令

$$\sigma = \Psi([S, f]), \quad \sigma_t = \Psi([S_t, f_t]),$$

则由 (9.13) 式有

$$K[f_t] \leq K[f], \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (9.14)$$

对每一 $t \in [0, t^*)$, 存在 $\omega_t \in BQ(S_0)$ 使得 $\Phi(\omega_t) = [S_t, f_t]$. 根据 Teichmüller 映射的极值性, 我们有 $\|\omega_t\| \leq K[f_t]$ ($t \in [0, t^*)$). 于是, 由 (9.14) 式立刻推出

$$\|\omega_t\| \leq K[f], \quad \forall t \in [0, t^*).$$

因此, 当 $t \rightarrow t^*$ 时, ω_t 不能趋向于 $BQ(S_0)$ 的边界. 但这与 σ_t 是 $\Psi \circ \Phi(BQ(S_0))$ 的边界点矛盾. 证毕.

由引理 2 及引理 3 立即推出

$$\Psi \circ \Phi(BQ(S_0)) = F(S_0).$$

而 $\Psi^{-1}(F(S_0)) = T(S_0)$, 故 $\tilde{T}(S_0) = T(S_0)$. 由此还推出 $F(S_0)$ 是 \mathbb{R}^{6g-6} 中的一个区域.

这样, 我们便证明了下面的 Teichmüller 映射存在性定理:

定理 1 设 S_0 与 S 是任意两个紧 Riemann 曲面, 其亏格大于 1. 又设 $f: S_0 \rightarrow S$ 是任意一个保向同胚, 则在 f 的同伦类中存在一个 Teichmüller 映射.

§ 5 Teichmüller 度量

由 § 4 的讨论可知, 映射

$$\Phi: BQ(S_0) \rightarrow T(S_0)$$

是一个一一的满射. 现在, 我们要在 $T(S_0)$ 上引入一种度量, 被称为 **Teichmüller 度量**, 使 Φ 成为一个同胚.

设 $p_j = [S_j, f_j] \in T(S_0)$, $j = 1, 2$. 我们定义 p_1 至 p_2 之间的 **Teichmüller 距离**是

$$d_T(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \inf \{ \ln K[f]: f \sim f_2 \circ f_1^{-1} \},$$

其中 $f \sim f_2 \circ f_1^{-1}$ 表示 f 与 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 同伦. 这里的 $1/2$ 是非本质的, 只是为某些计算上的简化; 也有一些文献中不用它.

首先, 应该证明 $d_T(p_1, p_2)$ 满足距离公理.

显然, 对任意 p_1 与 $p_2 \in T(S_0)$, $d_T(p_1, p_2) \geq 0$. 设 $p_j = [S_j, f_j]$ ($j = 1, 2$), 其中 f_j 是拟共形映射. 根据极值映射的存在性定理, 存在 $f_0: S_1 \rightarrow S_2$ 同伦于 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 且

$$K[f_0] = \inf\{K[f]: f \sim f_2 \circ f_1^{-1}\}.$$

这样, $d_T(p_1, p_2) = 0$ 的充要条件是 $K[f_0] = 1$, 也即 $f_0: S_1 \rightarrow S_2$ 是共形映射. 可见, $d_T(p_1, p_2) = 0$ 当且仅当 $p_1 = p_2$.

基于 $K[f_0] = K[f_0^{-1}]$, 容易验证 $d_T(p_1, p_2) = d_T(p_2, p_1)$.

另外, 根据 $K[g \circ h] \leq K[g] \cdot K[h]$, 可以证明三角不等式成立:

$$d_T(p_1, p_3) \leq d_T(p_1, p_2) + d_T(p_2, p_3).$$

这样, $T(S_0)$ 在 Teichmüller 距离下成为一个度量空间, 从而也是拓扑空间.

定理 1 映射 $\Phi: BQ(S_0) \rightarrow T(S_0)$ 是同胚映射.

我们知道, $Q(S_0)$ 是 $6g-6$ 维的 Banach 空间. 于是, 定理 1 告诉我们: $T(S_0)$ 同胚于 \mathbb{R}^{6g-6} 中的单位球.

证 我们先证明 Φ 的连续性.

设 $\omega_n \in BQ(S_0)$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $\omega_n \rightarrow \omega_*$ ($n \rightarrow \infty$), 其中 $\omega_* \in BQ(S_0)$. 我们应当证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_T(\Phi(\omega_n), \Phi(\omega_*)) = 0. \quad (9.15)$$

假定 $\Phi(\omega_n) = [S_n, f_n]$, $\Phi(\omega_*) = [S_*, f_*]$, 其中映射 f_n 及 f_* 为 Teichmüller 映射, 分别以 $k_n \bar{\omega}_n / |\omega_n|$ 与 $k_* \bar{\omega}_* / |\omega_*|$ 为其 Beltrami 系数, 这里 $k_n = \|\omega_n\|$, $k_* = \|\omega_*\|$. 显然,

$$k_n \rightarrow k_* \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 μ_n 是 $f_n \circ f_*^{-1}: S_* \rightarrow S_n$ 的 Beltrami 微分. 那么根据复合拟共形映射 Beltrami 系数的公式, 我们有

$$|\mu_n|_p \leq \left| k_n \frac{\bar{\omega}_n}{|\omega_n|} - k_* \frac{\bar{\omega}_*}{|\omega_*|} \right|_{f_*^{-1}(p)} (1 - k_n k_*)^{-1}. \quad (9.16)$$

由此可见, 在 S_* 上几乎处处有 $|\mu_n|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 虽然如此, 但不能由此推出我们要的结论.

设 $g_n: S_n \rightarrow S_*$ 是 $f_* \circ f_n^{-1}$ 的同伦类中的极值映射, 那么

$$K[g_n] = \exp\{2d_T(p_n, p_*)\}.$$

为证明 (9.15) 式只要证明下式即可:

$$K[g_n] \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9.17)$$

设 g_n 的初始二次微分为 $\tilde{\omega}_n \in Q(S_n)$, 而其终端二次微分为 $\tilde{\omega}'_n \in Q(S_*)$. 不失一般性可以假定 $\tilde{\omega}'$ 满足规范条件: $\|\tilde{\omega}'_n\|=1$, 也即

$$\iint_{S_*} dA_{\tilde{\omega}'_n} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

命 $h_n = f_* \circ f_n^{-1} \circ g_n^{-1}$, 那么 h_n 是 $S_* \rightarrow S_*$ 的拟共形映射. 设 λ_{h_n} 是 h_n 沿二次微分 $\tilde{\omega}'_n$ 的轨线弧的弧长变化率 (见第八章 § 6), 我们有

$$\iint_{S_*} dA_{\tilde{\omega}'_n} \leq \iint_{S_*} \lambda_{h_n} dA_{\tilde{\omega}'_n}.$$

此式两边取平方, 然后使用 Schwarz 不等式又有

$$\iint_{S_*} dA_{\tilde{\omega}'_n} \leq \iint_{S_*} \lambda_{h_n}^2 dA_{\tilde{\omega}'_n}. \quad (9.18)$$

设 $\zeta = \zeta(p)$ 是 S_* 上某点附近的 $\tilde{\omega}'_n$ 的自然参数, 而 \tilde{h}_n 是用自然参数的局部表示, 那么

$$\lambda_{h_n}(p) = \left| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \xi} \right| \leq \left| \frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial \bar{\xi}} \right| \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

由此, 简单计算表明:

$$\lambda_{h_n}^2(p) \leq K_n^{-2} D[f_* \circ f_n^{-1}] J_{f_* \circ f_n^{-1}}|_{g_n^{-1}(p)},$$

其中 $K_n = K[g_n]$, $D[f_* \circ f_n^{-1}]$ 是 $f_* \circ f_n^{-1}$ 的局部伸缩商, 而 $J_{f_* \circ f_n^{-1}}$ 是借助于 $\tilde{\omega}_n$ 与 $\tilde{\omega}'_n$ 的自然参数的局部表示的 Jacobi 行列式.

这样, 由 (9.18) 式有

$$\begin{aligned} \iint_{S_*} dA_{\tilde{\omega}'} &\leq K_n^{-2} \iint_{S_*} (D[f_* \circ f_n^{-1}] J_{f_* \circ f_n^{-1}}) \circ g_n^{-1} dA_{\tilde{\omega}'_n} \\ &= K_n^{-1} \iint_{S_n} D[f_* \circ f_n^{-1}] J_{f_* \circ f_n^{-1}} dA_{\tilde{\omega}_n} \\ &= K_n^{-1} \iint_{S_*} D[f_n \circ f_*^{-1}] dA_{\tilde{\omega}'_n}. \end{aligned}$$

注意到关于 $\tilde{\omega}'_n$ 的规范条件 $\|\tilde{\omega}'_n\|=1$, 立刻推得

$$K_n \leq \iint_{S_*} D[f_n \circ f_*^{-1}] dA_{\tilde{\omega}'_n}. \quad (9.19)$$

显然,我们有

$$D[f_n \circ f_*^{-1}] \leq K[f_*] \cdot K[f_n] \leq K[f_*] \frac{1+k_n}{1-k_n}.$$

而当 $n \rightarrow \infty$ 时, $k_n \rightarrow k_*$. 故 $D[f_n \circ f_*^{-1}]$ 一致有界. 另一方面由 (9.16) 式可知: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$D[f_n \circ f_*^{-1}] \rightarrow 1 \quad (\text{几乎处处}).$$

这样,由 (9.19) 式有

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} K_n \leq 1.$$

但 $K_n \geq 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 1$. 这样我们证明了 (9.17) 式.

下面我们证明 Φ^{-1} 也是连续的. 设 $p_n \in T(S_0)$, $p_* \in T(S_0)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_T(p_n, p_*) = 0$. 要证明 $\omega_n = \Phi^{-1}(p_n)$ 在 $BQ(S_0)$ 中趋于 $\omega_* = \Phi^{-1}(p_*)$.

我们仍旧沿用前面的记号: $p_n = [S_n, f_n]$, $p_* = [S_*, f_*]$, 其中 f_n 及 f_* 均为 Teichmüller 映射, 分别以 $k_n \bar{\omega}_n / |\omega_n|$ 与 $k_* \bar{\omega}_* / |\omega_*|$ 为其 Beltrami 系数, 且 $k_n = \|\omega_n\|$, $k_* = \|\omega_*\|$. 在这种记法下, $\Phi^{-1}(p_n) = \omega_n$, 且 $\Phi^{-1}(p_*) = \omega_*$.

现在用反证法. 假定 $\omega_n \not\rightarrow \omega_*$, 下面导出矛盾. 由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_T(p_n, p_*) = 0$ 可知 $\{p_n\}$ 是一个有界点列. 由此推出 $k_n \in [0, 1-\delta]$, 其中 δ 是一正数. 可见 $\{\omega_n\}$ 落在 $Q(S_0)$ 的球 $\{\|\omega\| \leq 1-\delta\}$ 内. 由于 $Q(S_0)$ 是一有限维线性空间, 故存在一个子序列 $\{\omega_n\}$ 及 $\omega'_* \neq \omega_*$, 使得

$$\|\omega_{n_l} - \omega'_*\| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty).$$

这时应用前面已证得的结果, $p_{n_l} \rightarrow p'_*$ ($l \rightarrow \infty$), 其中 $p'_* = \Phi(\omega'_*)$. 根据假定, $p_n \rightarrow p_*$ ($n \rightarrow \infty$). 因此, $p'_* = p_*$. 这与 $\omega'_* \neq \omega_*$ 矛盾. 证毕.

由上述定理可以看出 Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 是一个胞腔 (cell).

应该指出, 尽管定理 1 提供了 Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 的 $6g-6$ 维的实参数, 但它不能因此获得一个自然的 $3g-3$ 维的复结构. 这里所谓自然复结构是指使模变换成为全纯映射的复结构. 第一个给

出这样复结构的是 Ahlfors.

另外,由上述定理立刻推出

定理 2 在 Teichmüller 度量下, $T(S_0)$ 是一个完备度量空间.

证 设 $\tau_n = [S_n, f_n] \in T(S_0)$ 是一个 Cauchy 序列. 由 Cauchy 条件不难证明

$$d_T(\tau_1, \tau_n) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

其中 M 是一个常数. 这意味着

$$d_T(\tau_0, \tau_n) \leq M + d_T(\tau_0, \tau_1), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

其中 $\tau_0 = [S_0, \text{id}]$. 由此推出, τ_n 在 $6g-6$ 维的单位球中的像 $\Phi^{-1}(\tau_n)$ 全部落在半径为某个 $r_0 < 1$ 的球内. 由此可见, 存在一个子序列 $\{\tau_{n_k}\}$, 它在单位球内的像收敛于某个 $\tau \in T(S_0)$ 的像. 根据上一段证明的结果, 这蕴含着

$$d_T(\tau_{n_k}, \tau) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

再由 Cauchy 条件立即推出

$$d_T(\tau_n, \tau) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理证毕.

应该指出, Teichmüller 度量是一种自然度量. 当人们赋予了 Teichmüller 空间以某种自然复结构后, Teichmüller 度量就是其 Kobayashi 度量.

§ 6 模群及其间断性

现在我们引入模群的概念.

设 S_0 是给定的紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 $\sigma: S_0 \rightarrow S_0$ 是 S_0 到自身的一个拟共形同胚. 那么 σ 诱导了 Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 到自身的一个映射:

$$\sigma^*: [S, f] \mapsto [S, f \circ \sigma].$$

这个映射称做模变换.

很容易直接验证: 模变换在 Teichmüller 度量下是保距的.

全体模变换 σ^* 所组成的群, 称做模群(modular group), 记做

$\text{Mod}(S_0)$ 或 Mod_g .

紧曲面 S_0 上的全体自同胚 σ 的同伦类 $[\sigma]$ 组成的群, 被称做 S_0 上的映射类群(mapping class group).

从上面的关于模群的定义可以看出, 模群与映射类群之间有某种联系. 显然, 若 $\sigma \sim \sigma_1$, 则 $\sigma^* = \sigma_1^*$. 因此, 映射类群与模群之间有一个自然同态:

$$[\sigma] \mapsto \sigma^*.$$

业已证明, 当 $g > 2$ 时, 这个同态便是同构. 换句话说, 当 $g > 2$ 时模群 $\text{Mod}(S_0)$ 同构于 S_0 上的映射类群.

下面我们证明 Riemann 模空间 R_g 可以表成:

$$R_g = T(S_0)/\text{Mod}(S_0). \quad (9.20)$$

为了证明这个关系式, 只要证明下述事实就足够了: 两个紧 Riemann 曲面 S_1 与 S_2 (亏格都是 g) 共形等价的充分与必要条件是: 对任意的拟共形映射 $f_j: S_0 \rightarrow S_j$ ($j=1, 2$) 都使得 $[S_1, f_1]$ 与 $[S_2, f_2]$ 是模群 $\text{Mod}(S_0)$ 下的等价点, 即存在一个 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$, 使得

$$\sigma^*([S_2, f_2]) = [S_1, f_1].$$

事实上, 若上式成立, 则

$$[S_2, f_2 \circ \sigma] = [S_1, f_1].$$

这蕴含着 S_1 与 S_2 共形等价. 反之, 若 S_1 与 S_2 共形等价, 则存在一个共形映射 $h: S_1 \rightarrow S_2$. 这时对于任意两个拟共形同胚: $f_j: S_0 \rightarrow S_j$ ($j=1, 2$), 取 $\sigma = f_2^{-1} \circ h \circ f_1$, 即有

$$f_2 \circ \sigma = h \circ f_1,$$

因而 $\sigma^*([S_2, f_2]) = [S_2, f_2 \circ \sigma] = [S_1, f_1]$. 这样, 我们证明了 (9.20) 式.

下面的定理表明模群 $\text{Mod}(S_0)$ 在 Teichmüller 空间中作用的间断性:

定理 1 设 S_0 为紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 对于 Teichmüller 空间 $T(S_0)$ 中的任意一点 p , 模群 $\text{Mod}(S_0)$ 的轨道

$$\{\sigma^*(p): \sigma^* \in \text{Mod}(S_0)\}$$

在 $T(S_0)$ 中没有极限点.

这个定理的证明依赖于 Riemann 曲面的长度谱的讨论. 此外,

还依赖于著名的 Hurwitz 定理. 该定理断言: 亏格为 g ($g > 1$) 的紧 Riemann 曲面上, 共形自同胚的个数 $\leq 84(g-1)$.

现在, 我们先来解释 Riemann 曲面上长度谱的概念.

设 S_0 是一紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 假定 (\mathbb{H}, π) 为 S_0 的覆盖, G_0 为其覆盖变换群. 这时, G_0 同构于 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 中的一个子群.

我们知道, G_0 中的每一个非平凡元素都是双曲型的. 设 $\gamma \in G_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$, 则

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 这时系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

有两个实的特征根 λ_1 与 λ_2 , $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. 不失一般性, 可以假定 λ_1 与 λ_2 均为正数. 又因为 $\gamma(z)$ 不是恒同变换, 故 λ_1 与 λ_2 不可能等于 1, 设 $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则上述系数矩阵相似于

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}.$$

换句话说, γ 经过一个实系数 Möbius 变换的共轭之后变成

$$z \mapsto \lambda^2 z,$$

其中 λ^2 称做 γ 的乘子 (multiplier).

在 \mathbb{H} 中任意取定一点 z_0 并考虑 z_0 至 $\gamma(z_0)$ 的连线. 这条连线的投影在 S 上是一条闭曲线, 记为 α . 那么, $\ln \lambda^2$ 是闭曲线 α 的自由同伦类 $[\alpha]$ 中最短线的长度.

现在, 我们将 G_0 中元素加以排列:

$$G_0 = \{\gamma_0 = \mathrm{id}, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}.$$

这时相应地, 基本群 $\pi_1(S_0, p_0)$ ($p_0 = \pi(z_0)$) 中的元素有一排列:

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}.$$

用 $l[\alpha_n]$ 表示 α_n 的自由同伦类中最短线的长度, 那么我们就得一个序列

$$\{l[\alpha_1], l[\alpha_2], \dots\}.$$

我们称这个序列为 S_0 的**长度谱**. 用群 G_0 中的元素表示, S_0 的长度谱即序列

$$\{\ln \lambda_1^2, \ln \lambda_2^2, \dots\},$$

其中 λ_n^2 是 γ_n 的乘子.

在 S_0 上取定一长度谱之后, 任意一个保向同胚 $f: S_0 \rightarrow S$ 都在 S 诱导了一个长度谱:

$$\{l[f(\alpha_1)], l[f(\alpha_2)], \dots\}.$$

若 $f_1: S_0 \rightarrow S_1$ 与 $f_2: S_0 \rightarrow S_2$ 所对应的标记 Riemann 曲面 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 等价, 则显然 f_1 与 f_2 所诱导的长度谱相同, 也即

$$l[f_1(\alpha_n)] = l[f_2(\alpha_n)], \quad n = 1, 2, \dots.$$

反过来, 若 f_1 与 f_2 所诱导的长度谱相同, 则 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 等价. 我们有更强的结论:

引理 1 在 S_0 给定后, 存在一个自然数 N , 使得当

$$l[f_1(\alpha_j)] = l[f_2(\alpha_j)] \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

时, 则 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 等价. 这里 N 依赖于 S_0 的亏格 g 与 S_0 长度谱的排列.

证 设 (\mathbb{H}, π_j) 为 S_j 的覆盖, 其覆盖变换群为 $G_j (j=1, 2)$. 在 S_0 上取定一点 p_0 并考虑基本群 $\pi_1(S_0, p_0)$, 同时取定 $\pi_1(S_0, p_0)$ 中元素的一个排列:

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\},$$

其中 α_0 为平凡元素. 设 $\tilde{f}_j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 是 $f_j: S_0 \rightarrow S_j$ 的规范化提升, $j=1, 2$. 那么 \tilde{f}_j 诱导了 G_0 到 G_j 的同构:

$$\gamma \mapsto \tilde{f}_j \circ \gamma \circ \tilde{f}_j^{-1}, \quad \gamma \in G_0.$$

假如下式成立:

$$\tilde{f}_1 \circ \gamma \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ \gamma \circ \tilde{f}_2^{-1}, \quad \forall \gamma \in G_0, \quad (9.21)$$

则 $G_1 = G_2$, 且 \tilde{f}_1 与 \tilde{f}_2 所诱导的 G_0 到 G_1 与 G_0 到 G_2 的同构是相同的, 从而 \tilde{f}_1 与 \tilde{f}_2 有相同的边界值. 由此推出 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 等价.

设与上述排列 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ 相对应的 G_0 中元素的排列是 $\{\gamma_0, \gamma_1,$

...}. 又设 m 是一自然数, 使得

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$$

包含 G_0 的一个生成元组. 显然, 由

$$\tilde{f}_1 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_2^{-1}, \quad j = 1, \dots, m \quad (9.22)$$

即可推出 (9.21) 式. 因此 (9.22) 式是保证 (S_1, f_1) 与 (S_2, f_2) 等价的一个充分条件.

下面的问题是如何选定自然数 N , 使得

$$l[f_1(\alpha_j)] = l[f_2(\alpha_j)], \quad j = 1, \dots, N$$

足以保证 (9.22) 式成立.

我们知道 $l[f_1(\alpha_j)] = l[f_2(\alpha_j)]$ 决定了 $\tilde{f}_1 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_1^{-1}$ 与 $\tilde{f}_2 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_2^{-1}$ 有相同的迹, 而不能保证它们完全相同. 但是我们将 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ 适当扩大成 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, 那么迹的等式组

$$\text{tr}^2(\tilde{f}_1 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_1^{-1}) = \text{tr}^2(\tilde{f}_2 \circ \gamma_j \circ \tilde{f}_2^{-1}), \quad j = 1, \dots, N \quad (9.23)$$

则有可能保证 (9.22) 式成立, 因为 (9.23) 式提供了更多的方程.

具体的做法是在 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ 的生成元组中取两个元素, 比如它们是 γ_1 与 γ_2 , 并不失一般性地可以假定, γ_1 以 ∞ 与 0 分别为其吸性不动点与斥性不动点, γ_2 以 1 为其一不动点. 然后将 $\gamma_1 \circ \gamma_j$, $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_j$, $\gamma_2 \circ \gamma_j$, $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_j$ ($j = 3, \dots, m$) 全部列入 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ 之中. 这时, 由 (9.23) 式即可推出 (9.22) 式. 要证明这一点, 需作具体的计算. 对 γ_1 与 γ_2 的不动点的规定可以简化这种计算. 但无论如何这些计算是繁琐的, 我们将计算细节略去. 有兴趣的读者可以参阅文献 [1]. 证毕.

引理 2 设 S_1 与 S_2 是两个相同亏格的紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是拟共形映射, α 是 S_1 上的任意一条闭曲线, 则

$$l[\alpha]/K[f] \leq l[f(\alpha)] \leq K[f]l[\alpha].$$

证 设 (\mathbb{H}, π_j) 是 S_j 的覆盖, 其覆盖变换群是 G_j ($j = 1, 2$). 不失一般性, 我们可以假定

$$\gamma_1: z \mapsto \lambda_1^2 z \quad (\lambda_1 > 1), \quad \gamma_1 \in G_1,$$

$$\gamma_2: z \mapsto \lambda_2^2 z \quad (\lambda_2 > 1), \quad \gamma_2 \in G_2$$

分别是覆盖 α 与 $f(\alpha)$ 的元素. 记 $\langle \gamma_1 \rangle$ 与 $\langle \gamma_2 \rangle$ 分别为 γ_1 与 γ_2 生成的循环群. 这时, $\mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle$ 与 $\mathbb{H}/\langle \gamma_2 \rangle$ 分别是 S_1 与 S_2 的一个覆盖. 设 $F: \mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle \rightarrow \mathbb{H}/\langle \gamma_2 \rangle$ 是 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 的提升, 则 $K[f] = K[F]$.

注意到群 $\langle \gamma_1 \rangle$ 在 \mathbb{H} 中的基本域可以取成

$$D = \{z \in \mathbb{H} : 1 < |z| < \lambda_1^2\},$$

不难看出映射:

$$z \mapsto w = \exp\{2\pi i(\ln z)/\ln \lambda_1^2\}$$

是 $\mathbb{H} \rightarrow B = \{w : a < |w| < 1\}$ 的覆盖映射, 其中

$$a = \exp\{-2\pi^2/\ln \lambda_1^2\}.$$

由此可见, $\mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle$ 共形等价于 B , 并有

$$\text{Mod}(\mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle) = \pi/\ln \lambda_1^2.$$

同样的道理, 我们有

$$\text{Mod}(\mathbb{H}/\langle \gamma_2 \rangle) = \pi/\ln \lambda_2^2.$$

由 $F: \mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle \rightarrow \mathbb{H}/\langle \gamma_2 \rangle$ 的拟共形性, 我们得到

$$1/K[F] \leq \frac{\text{Mod}(\mathbb{H}/\langle \gamma_1 \rangle)}{\text{Mod}(\mathbb{H}/\langle \gamma_2 \rangle)} \leq K[F],$$

也即

$$1/K[f] \leq \frac{\ln \lambda_2^2}{\ln \lambda_1^2} \leq K[f].$$

注意到 $\ln \lambda_1^2 = l[\alpha]$, $\ln \lambda_2^2 = l[f(\alpha)]$, 便由此证明了引理. 证毕.

引理 3 (长度谱的离散性) 设 $\{l_1, l_2, \dots\}$ 是紧 Riemann 曲面 S 上的一个长度谱. 则对任意正数 M , 满足条件 $l_n \leq M$ 的 n 只有有限个 (证明见本章习题第 4 题).

定理 1 的证明 现在我们证明模群的离散性. 用反证法, 即假定有一点 $\tau \in T(S_0)$, 其轨道有一极限点 $\tau_1 = [S_1, f_1]$, 下面将导出矛盾.

根据假定, 这时存在无穷多个不同的模变换 $\sigma_k^* \in \text{Mod}(S_0)$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得

$$d_T(\sigma_k^*(\tau), \tau_1) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

设 $\tau = [S, f]$, 上式意味着

$$[S, f \circ \sigma_k] \rightarrow [S_1, f_1] \quad (k \rightarrow \infty).$$

命 $g_k: S_1 \rightarrow S$ 是 $f \circ \sigma_k \circ f_1^{-1}$ 的同伦类中的极值映射, 那么 $K[g_k] \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$). 不失一般性可以假定 g_k 收敛, 其极限映射为 $h: S_1 \rightarrow S$. 那么 h 是共形映射.

我们不妨将 $[S_1, f_1]$ 中的 S_1 取成 S . 这时 h 是 S 的一个解析自同构.

由引理 2, 对于任意闭曲线 $\alpha \subset S$, 总有

$$l[\alpha]/K[g_k] \leq l[g_k(\alpha)] \leq K[g_k]l[\alpha].$$

这样, 对 $\epsilon > 0$ 存在 N : 当 $k \geq N$ 时, 对于一切闭曲线 α 均有

$$\frac{l[\alpha]}{1+\epsilon} \leq l[g_k(\alpha)] \leq (1+\epsilon)l[\alpha]. \quad (9.24)$$

设 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ 是事先选定的 S_0 基本群元素的一个排列. 那么根据引理 3, 对任意给定的正数 M , 满足

$$l[f_1(\alpha_n)] \leq M \quad (9.25)$$

的 α_n 只有有限多个. 对于满足 (9.25) 式的每个 α_n , 当 k 充分大时, 有

$$l[f \circ \sigma_k(\alpha_n)] \leq 2M. \quad (9.26)$$

在 (9.24) 式中令 $\alpha = f_1(\alpha_n)$, 则推出

$$l[f \circ \sigma_k(\alpha_n)] \rightarrow l[f_1(\alpha_n)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (9.27)$$

假定 α_n 满足 (9.25) 式, 那么当 k 充分大时 $l[f \circ \sigma_k(\alpha_n)]$ 满足 (9.26) 式. 但满足 (9.26) 式的 $\sigma_k(\alpha_n)$ 充其量是有限条. 故 (9.27) 式告诉我们当 k 充分大时,

$$l[f \circ \sigma_k(\alpha_n)] = l[f_1(\alpha_n)]. \quad (9.28)$$

选取 M 足够大, 使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ 均满足 (9.25) 式, 其中 N 是引理 1 中的自然数. 这时由引理 1, (9.28) 式意味着

$$[S, f \circ \sigma_k] = [S, f_1],$$

只要其中 k 充分大. 这表明 $f \circ \sigma_k \circ f_1^{-1}$ 同伦类中有 S 的共形同胚.

每一个同胚的同伦类中至多有一个共形映射, 而 Hurwitz 定理告诉我们: 亏格 $g > 1$ 的紧 Riemann 曲面至多有 $84(g-1)$ 个共形自同胚. 因此 $f \circ \sigma_k \circ f_1^{-1}$ 至多代表有限个同胚同伦类. 这与反证法假定矛盾. 证毕.

推论 1 若 $\sigma^*: T(S_0) \rightarrow T(S_0)$ 是 $\text{Mod}(S_0)$ 中非平凡元素, 且

$\sigma^*(p_0) = p_0$, 则 σ^* 是有限阶元素.

证 记 $\sigma_n^* = \underbrace{\sigma^* \circ \cdots \circ \sigma^*}_{n \uparrow}$, 对任意一点 $p \neq p_0$, 我们有

$$d_T(\sigma_n^*(p), p_0) = d_T(\sigma_n^*(p), \sigma_n^*(p_0)) = d_T(p, p_0) \\ (n = 1, 2, \cdots).$$

可见 $\{\sigma_n^*(p)\}$ 在 $T(S_0)$ 中为有界序列. 由定理 1 立即推出, 该序列只取有限个值, 从而 σ^* 是有限阶元素. 证毕.

推论 2 当 $g > 1$ 时, R_g 是 Hausdorff 空间.

证 由于 $R_g = T_g / \text{Mod}_g$ 和 Mod_g 的离散性, 故 R_g 可由 T_g 的拓扑结构获得拓扑结构. 对于任意一点 $[S] \in R_g$, 取一点 $[S, f] \in T_g$ 及其 ϵ 邻域 $U_\epsilon = \{[\tilde{S}, \tilde{f}]: d_T([S, f], [\tilde{S}, \tilde{f}]) < \epsilon\}$. 将 $V_\epsilon = \{[\tilde{S}]: [\tilde{S}, \tilde{f}] \in U_\epsilon\}$ 作为 $[S]$ 的邻域, 则这时 R_g 是一个 Hausdorff 空间. 证毕.

令

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in T(S_0): \sigma^*(p) = p \text{ 对某 } \sigma^* \in \text{Mod}(S_0) \setminus \{\text{id}\}\}.$$

那么, 当 $p_0 \in T(S_0) \setminus \Sigma$ 时, 存在 p_0 的邻域 U , 使得

$$\sigma^*(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall \sigma^* \in \text{Mod}(S_0) \setminus \{\text{id}\}. \quad (9.29)$$

不难证明 Σ 是闭集(留给读者自证).

另外一方面, 集合 Σ 在模变换下是不变的, 也即

$$\sigma^*(\Sigma) = \Sigma, \quad \forall \sigma^* \in \text{Mod}(S_0). \quad (9.30)$$

事实上, 若 $p_0 \in \Sigma$, 则存在 $\sigma_0^*(p_0) = p_0$. 这时, 对任意 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$, $\sigma^*(p_0)$ 是元素 $\sigma^* \circ \sigma_0^* \circ \sigma^{*-1}$ 的不动点. 于是, $\sigma^*(p_0) \in \Sigma$.

由 (9.29) 及 (9.30) 式我们看出

$$(T(S_0) \setminus \Sigma) / \text{Mod}(S_0)$$

是一个 $6g-6$ 维的流形. 换句话说,

$$R_g \setminus \pi(\Sigma)$$

是一个 $6g-6$ 维的流形, 其中 $\pi: T(S_0) \rightarrow R_g$ 是自然投影:

$$[S, f] \mapsto [S].$$

现在, 我们来讨论 $\pi(\Sigma)$ 由怎样的 Riemann 曲面组成.

若 $p_0 = [S, f] \in \Sigma$, 则存在一个非平凡元素 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 使得

$$[S, f] = [S, f \circ \sigma],$$

其中 $\sigma: S_0 \rightarrow S_0$ 不同于恒同映射. 这表明在 $f \circ \sigma \circ f^{-1}: S \rightarrow S$ 的同伦类中共形映射, 而 $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ 不同伦于恒同映射. 这就证明了:

若 $[S, f] \in \Sigma$, 则 S 上一定存在一个不同伦于恒同映射的共形自同胚.

这个命题的逆命题也成立. 事实上, 若 S 上有一个共形自同胚 $\varphi: S \rightarrow S$, 且 φ 不同伦于恒同映射. 对于任意一点 $[S, f]$, 则我们有

$$[S, f] = [S, f \circ \sigma],$$

其中 $\sigma = f^{-1} \circ \varphi \circ f \neq \text{id}$, 也即 $[S, f] \in \Sigma$.

由上述讨论看出, $\pi(\Sigma)$ 是由那些 Riemann 曲面组成, 它们具有不同伦于恒同映射的共形自同胚.

§ 7 模变换的分类

设 S_0 为紧 Riemann 曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 $\text{Mod}(S_0)$ 为模群. 现在, 我们要对模变换进行分类. 这种分类是首先由 L. Bers 提出的, 其依据是下列极值问题:

Bers 极值问题: 设 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 是给定的一个非平凡模变换. 令

$$D[\sigma^*] = \inf \{d_T(p, \sigma^*(p)): p \in T(S_0)\}.$$

我们提出下列两个问题:

$$(B_1) \quad D[\sigma^*] = 0?$$

$$(B_2) \quad \exists p_0 \in T(S_0): d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = D[\sigma^*]?$$

我们依据对这两个问题的回答来对 σ^* 做出分类:

σ^* 被称做**椭圆型**的, 如果对 (B_1) 与 (B_2) 的回答都是肯定的; σ^* 被称做**抛物型**的, 如果对 (B_1) 回答是肯定的, 而对 (B_2) 的回答是否定的; σ^* 被称做**双曲型**的, 如果对 (B_1) 的回答是否定的, 而对 (B_2) 的回答是肯定的; σ^* 被称做**伪双曲型**的, 如果对两者的回答都是否定的.

如果把上述分类与对 $\text{Aut}(\Delta)$ 元素的分类作一比较是十分有趣的. 对于 $\text{Aut}(\Delta)$ 的非平凡元素同样可以提出上述问题, 这时替代 Teichmüller 距离的是 Poincaré 距离. 前三种类型的分类与分式线性变换的分类完全一致; 但第四种情况, 在分式线性变换中不可能发

生.

假定 σ^* 是椭圆型, 那么存在一点 $p_0 \in T(S_0)$, 使得

$$d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = 0.$$

这表明 p_0 是 σ^* 的不动点. 在上一节我们已经指出 σ^* 是有限阶元素.

现在假定 σ^* 是双曲型元素. 这时存在一个元素 $p_0 = [S, f] \in T(S_0)$, 使得

$$0 < d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) \leq d_T(p, \sigma^*(p)), \quad \forall p \in T(S_0). \quad (9.31)$$

双曲元素 σ^* 的一个重要性质是保持一条 Teichmüller 直线不变. 这与双曲分式线性变换有不变轴一致.

定理 1 设 σ^* 是一双曲型模变换且 $p_0 \in T(S_0)$ 使 (9.31) 式成立. 假定 L 是过 p_0 及 $\sigma^*(p_0)$ 的 Teichmüller 直线, 则

$$\sigma^*(L) = L.$$

现在, 我们先来解释何为 **Teichmüller 直线**.

若存在一个保距映射

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow T(S_0),$$

则 φ 的像集合称做一个 Teichmüller 直线. 这里所谓保距映射是指分别相对于 \mathbb{R} 上 Euclid 度量和 $T(S_0)$ 上的 Teichmüller 度量而言保持距离不变的映射.

在 Teichmüller 空间中, 过任意给定的两点 τ_1 与 τ_2 总存在惟一的一条 Teichmüller 直线. 下面我们来构造这样的 Teichmüller 直线.

设 $T(S_0)$ 是以 S_0 为基点的 Teichmüller 空间. 又设 $\tau_j = [S_j, f_j] \in T(S_0)$, $j=1, 2$. 我们考虑 $g = f_2 \circ f_1^{-1}: S_1 \rightarrow S_2$ 的同伦类中的极值映射 $g_0: S_1 \rightarrow S_2$, 其初始全纯二次微分为 ω , 那么 g_0 的 Beltrami 系数为

$$\mu = k_0 \frac{\bar{\omega}}{|\omega|}.$$

现在我们考虑 Beltrami 微分

$$\mu_k = k \frac{\bar{\omega}}{|\omega|}, \quad k \in [0, 1).$$

这时存在一个 Teichmüller 映射 $h_k: S \rightarrow S_k$ 以 μ_k 为其 Beltrami 系

数. 这样我们得到点 $p(k)=[S_k, h_k \circ f_1]$. 显然, $p(0)=\tau_1$, 而 $p(k_0)=\tau_2$. 当 k 在 $[0, 1]$ 中变动时, $p(k)$ 则在 Teichmüller 空间中走过了一条以 τ_0 为始点且经过 τ_1 的曲线, 记之为 L^+ . 很容易验证映射

$$K \mapsto p\left(\frac{K-1}{K+1}\right)$$

是 $\mathbb{R}^+ \rightarrow L^+$ 的保距映射. 因此, L^+ 是以 τ_1 为始点过 τ_2 的“半直线”.

设 $g_0^{-1}: S_2 \rightarrow S_1$ 的 Beltrami 系数为

$$\tilde{\mu} = k_0 \frac{\bar{\omega}_1}{|\omega_1|}.$$

考虑 Beltrami 微分 $\tilde{\mu}_k = k\bar{\omega}_1/|\omega_1|$. 完全类似地可以得到一条以 τ_2 为始点过 τ_1 的“半直线” L^- .

那么 $L = L^+ \cup L^-$ 就是一条过 τ_1 与 τ_2 的 Teichmüller 直线.

由 Teichmüller 惟一性定理, 可以推出过 τ_1 与 τ_2 的 Teichmüller 直线是惟一确定的.

显然, Teichmüller 直线上的任意一条线段均是其端点之间的最短连线.

定理 1 的证明 设 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 是双曲型模变换, 且 $p_0 \in T(S_0)$ 使得

$$0 < d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = \inf d_T(p, \sigma^*(p)).$$

又设 L 是 p_0 与 $\sigma^*(p_0)$ 所决定的 Teichmüller 直线. 记 $\sigma_n^* = \underbrace{\sigma^* \circ \cdots \circ \sigma^*}_{n \uparrow}$ 和 $p_n = \sigma_n^*(p_0)$, $n=1, 2, \cdots$. 我们先证明 $p_n \in L$. 根据假定已知 p_0 与 $p_1 \in L$. 现在证明: $p_2 \in L$. 假若 $p_2 \notin L$, 那么 p_1 不在 p_0 与 p_2 决定的直线上. 取 q 为直线段 $\overline{p_0 p_1}$ 之中点, 那么 $q^* = \sigma^*(q)$ 是 $\overline{p_1 p_2}$ 之中点, 且 q, q^* 与 p_1 不在一条直线上. 因此

$$\begin{aligned} d_T(q, \sigma^*(q)) &< d_T(q, p_1) + d_T(p_1, q^*) \\ &= d_T(p_0, \sigma^*(p_0)), \end{aligned}$$

这与 p_0 的定义相矛盾. 因此, $p_2 \in L$. 再由 p_1 与 $p_2 \in L$ 又推出 $p_3 \in L$. 余此类推.

设 Γ 是 L 中由 p_0 与 p_1 所决定的线段. 又设 $p \in \Gamma$ 是任意一点, 我们证明 $\sigma^*(p) \in L$. 如若不然, 则 p, p_1 及 $\sigma^*(p)$ 不在同一直线上,

因而

$$\begin{aligned} d_T(p, \sigma^*(p)) &< d_T(p, p_1) + d_T(p_1, \sigma^*(p)) \\ &= d_T(p, p_1) + d_T(p_0, p) \\ &= d_T(p_0, \sigma^*(p_0)), \end{aligned}$$

导致矛盾. 这样, 我们证明了 $\sigma^*(\Gamma) \subset L$.

用归纳法推出 $\sigma_n^*(\Gamma) \subset L$, 从而 $\sigma^*(L) \subset L$. 证毕.

定理 1 的逆命题也成立, 更确切地说, 下列定理 2 成立:

定理 2 设 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 且保持一条 Teichmüller 直线 L 不变, 并且有一点 $p_0 \in L$ 使得 $\sigma^*(p_0) \in L$ ($p_0 \neq \sigma^*(p_0)$), 则 σ^* 是双曲型模变换, 且有

$$0 < d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = \inf_{p \in T(S_0)} \{d_T(p, \sigma^*(p))\}.$$

证 设 p 为任意一点, 那么对于任意自然数 n ,

$$d_T(p, \sigma_n^*(p)) \leq nd_T(p, \sigma^*(p)).$$

另一方面, 显然又有

$$\begin{aligned} d_T(p_0, \sigma_n^*(p_0)) &\leq d_T(p_0, p) + d_T(p, \sigma_n^*(p)) \\ &\quad + d_T(\sigma_n^*(p), \sigma_n^*(p_0)) \\ &\leq 2d_T(p, p_0) + d_T(p, \sigma_n^*(p)). \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} d_T(p, \sigma^*(p)) &\geq \frac{1}{n} \{d_T(p_0, \sigma_n^*(p_0)) - 2d_T(p, p_0)\} \\ &= d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) - \frac{2}{n} d_T(p, p_0). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即证得定理. 证毕.

定理 1 与定理 2 刻画了双曲模变换 σ^* 的特征. 我们想进一步知道, 当 σ^* 是双曲模变换时, σ 有何拓扑特征?

定理 3 设 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 且没有不动点. 那么 σ^* 是双曲元素的充要条件是存在一点 $p_0 = [S, f]$ 使得从 p_0 到 $p_1 = [S, f \circ \sigma]$ 的 Teichmüller 映射的规范初始全纯二次微分与终端全纯二次微分相同.

这里所谓 p_0 到 p_1 的 Teichmüller 映射是指 $f \circ \sigma \circ f^{-1}: S \rightarrow S$

的同伦类中的 Teichmüller 映射. 由于所考虑的同胚是 S 到自身的, 故可以谈论其 Teichmüller 映射的两个伴随二次微分是否相同的问题. 这里所谓规范二次微分是指范数为 1 的二次微分.

证 充分性 设 $f_0: S \rightarrow S$ 是 Teichmüller 映射, 同伦于 $f \circ \sigma \circ f^{-1}$, 并且其初始二次微分与终端二次微分均为 $\omega, \|\omega\|=1$.

这时 f_0 在 ω 的自然参数 $\xi=\xi+i\eta$ 表示下是

$$\xi \mapsto K\xi, \quad \eta \mapsto \eta,$$

其中 $K>1$. 显然, $d_T(p_0, p_1) = \frac{1}{2} \ln K$. 由于终端二次微分等于初始二次微分, 故由 p_0 到 $p_2 = \sigma^*(p_1)$ 的 Teichmüller 映射等于 p_0 到 p_1 的 Teichmüller 映射复合以 p_1 到 p_2 的 Teichmüller 映射, 其局部表示为

$$\xi \mapsto K^2\xi, \quad \eta \mapsto \eta.$$

由此可见, $d_T(p_0, p_2) = 2d_T(p_0, p_1)$, 即 p_2 在 p_0 与 p_1 决定的 Teichmüller 直线上. 像前面一样, 可以由此推出该 Teichmüller 直线是不变的, 且

$$d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = \inf\{d_T(p, \sigma^*(p))\}.$$

可见 σ^* 是双曲型元素.

必要性 设 σ^* 是双曲型元素, L 是其不变 Teichmüller 直线, 且 $p_0 \in L$ 使得

$$d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = \inf\{d_T(p, \sigma^*(p))\}.$$

记 p_0 为 $[S, f]$, p_1 为 $[S, f \circ \sigma]$, 并假定 f_0 是 p_0 到 p_1 的 Teichmüller 映射. 设 ω 为 f_0 的初始二次微分, $\|\omega\|=1$. 又设 $\tilde{\omega}$ 为 f_0 的终端二次微分, $\|\tilde{\omega}\|=1$. 那么 f_0^{-1} 的 Beltrami 系数为

$$\mu_0 = k \frac{\bar{\tilde{\omega}}}{|\tilde{\omega}|}, \quad k \in (0, 1),$$

这是因为 f_0^{-1} 的初始二次微分为 $(-\tilde{\omega})$. 这里的 k 满足

$$d_T(p_0, \sigma^*(p_0)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k}{1-k}.$$

又设 $f_1: S \rightarrow S$ 是 p_1 到 $p_2 = \sigma^*(p_1)$ 的 Teichmüller 映射, 其初始二次微分为 $\omega_1, \|\omega_1\|=1$. 显然, f_1 的 Beltrami 系数为

$$\mu_1 = k \frac{\bar{\omega}_1}{\|\omega_1\|}.$$

我们考虑复合映射 $f_1 \circ f_0^{-1}: S \rightarrow S'$. 直接计算可以表明复合映射 $f_1 \circ f_0^{-1}$ 的 Beltrami 系数有下列公式

$$\mu \circ f_0 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{1 - \bar{\mu}_0 \mu_1} \tau \quad (\tau = \bar{\partial} f_0 / \partial f_0),$$

于是有

$$\|\mu\| \leq \frac{2k}{1-k^2}.$$

另一方面, $d_T(p_0, p_2) = 2d_T(p_0, p_1)$. 于是应有

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \|\mu\|}{1 - \|\mu\|} \geq \ln \frac{1+k}{1-k},$$

这就要求 $\|\mu\| = 2k/(1-k^2)$. 由此推出

$$\frac{\bar{\omega}_1}{|\omega_1|} \equiv \frac{\bar{\tilde{\omega}}}{|\tilde{\omega}|}.$$

注意到 ω_1 与 $\tilde{\omega}$ 的范数为 1, 故有 $\omega_1 \equiv \tilde{\omega}$. 另外, 很容易看出 $f_0 \equiv f_1$ (因为它们是同一同伦类的极值映射), 因此, $\omega \equiv \tilde{\omega}$. 证毕.

设 $f_0: S \rightarrow S$ 是 Teichmüller 映射, 其初始二次微分与终端二次微分相同, 记其为 ω . 这时 ω 的水平轨线与垂直轨线在 S 上形成了两个叶状结构 (foliation) \mathcal{F}_1 与 \mathcal{F}_2 , 它们相互横截, 并且都是有测度的 (即可度量叶之间的距离). f_0 将 \mathcal{F}_i 中的每一叶变成 \mathcal{F}_i 中的一叶, 但保持 \mathcal{F}_1 中的叶片之间距离不变, 而将 \mathcal{F}_2 中的叶片之间距离拉大一个固定倍数 K . 适当改变测度可以使得 f_0 将 \mathcal{F}_1 中的叶片之间距离压缩 \sqrt{K} 倍, 而将 \mathcal{F}_2 中的叶片之间距离拉大 \sqrt{K} 倍. 这样的映射称做 **伪 Anosov 映射**.

根据定理 3 立即推出下列定理:

定理 4 设 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 是双曲型元素, 则 $\sigma: S_0 \rightarrow S_0$ 同伦于一个伪 Anosov 映射.

前面我们讨论了椭圆型模变换与双曲型模变换. 对抛物型或伪双曲型模变换, 我们这里无法详细讨论, 只是指出下列事实:

若 $\sigma^* \in \text{Mod}(S_0)$ 是抛物型或伪双曲型的, 则 $\sigma: S_0 \rightarrow S_0$ 一定同伦于可约简(reducible)映射.

这里我们称映射 $f: S_0 \rightarrow S_0$ 是可约简的, 如果 S_0 存在一个不交简单回路组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, 使得

$$S_0 \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$$

的每一个连通分支不同胚于 Δ 或环域 $\{z: 1 < |z| < r\}$, 并且 f 保持 $\bigcup_{j=1}^k \alpha_j$ 不变.

总结前面的讨论, 我们便得到了一个拓扑定理:

定理 5 (Thurston) 设 S 是一个可定向的紧曲面, 其亏格 $g > 1$. 又设 $\sigma: S \rightarrow S$ 是 S 的一个保向自同胚. 若 σ 不同伦于一个周期映射, 则 σ 要么同伦于一个伪 Anosov 映射, 要么同伦于一个可约简的映射.

Thurston 证明他的结果时基于他的叶状结构理论和对 Teichmüller 空间的紧化. 后来 L. Bers 将问题提成极值问题, 完全用分析的方法证明了 Thurston 的结果.

习 题

1. 设 S_0 是紧 Riemann 曲面, 亏格 $g > 1$. 又设 $\sigma: S_0 \rightarrow S_0$ 是一拟共形映射. 证明

(i) $\sigma^*: T(S_0) \rightarrow T(S_0)$, $[S, f] \mapsto [S, f \circ \sigma]$ 是 Teichmüller 空间中保距映射;

(ii) 若 σ_1 与 σ_2 是 $S_0 \rightarrow S_0$ 的两个拟共形映射, 且 σ_1 与 σ_2 同伦, 则 $\sigma_1^* = \sigma_2^*$.

2. 设 $\omega \in Q(S_0) \setminus \{0\}$, 其中 S_0 为紧 Riemann 曲面, 其亏格 > 1 . 证明

$$k \mapsto \left[k \frac{\bar{\omega}}{|\omega|} \right], \quad k \in (-1, 1)$$

在 $T(S_0)$ 中是一条通过基点 $[0]$ 的测地线.

3. 在上题的假定下, 证明映射:

$$\begin{aligned}\chi: \Delta &\rightarrow T(S_0), \\ z &\mapsto \left[z \frac{\bar{\omega}}{|\omega|} \right]\end{aligned}$$

是分别关于 Poincaré 度量与 Teichmüller 度量的保距嵌入。(注: χ 的像称做 **Teichmüller 盘**.)

4. 证明长度谱的离散性: 若 $\{l[\alpha_1], l[\alpha_2], \dots\}$ 是紧 Riemann 曲面 S 的一个长度谱, 则对于任意正数 M , 满足

$$l[\alpha_n] \leq M$$

的 α_n 只有有限个.

(提示: 设 $p_0 \in S_0$ 为一定点并假定 α_n 本身为闭测地曲线. 从 p_0 到 α_n 作最短连线 β_n . 在 S_0 的万有覆盖 Δ 中, 过 p_0 的一个上方点 z_0 提升 $\beta_n \alpha_n \beta_n^{-1}$. 设提升后的曲线终点为 z_n . 证明 $\{z_n\}$ 在 Δ 内无极限点.)

5. 令

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in T(S_0): \exists \sigma^* \in \text{Mod}(S_0) \setminus \{\text{id}\}: \sigma^*(p) = p\}.$$

证明 Σ 为一闭集.

符号说明

\mathbb{C}	复平面或复数域
$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	扩充复平面
\mathbb{R}	实数域或实数轴
\mathbb{Z}	整数环
$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$	上半平面
$\mathbb{H}^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$	下半平面
$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$	单位圆内部
$\Delta^* = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : z > 1\}$	单位圆外部
$\Delta_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : z - z_0 < r\}$	以 z_0 为中心, r 为半径的圆内部
$\operatorname{Aut}(D)$	复区域 D 上的解析自同构群
$\operatorname{Mod}(Q)$	拓扑四边形 Q 的共形模
$\lambda(\Gamma)$	曲线族 Γ 的极值长度
$K[f]$	拟共形映射 f 的最大伸缩商
$W_p^1(D)$	区域 D 内具有局部 p 方可积的、1 阶广义导数的函数空间
$g(S)$	曲面 S 的亏格
$\pi_1(S, p_0)$	曲面 S 关于点 p_0 的基本群
$\pi_1(S)$	曲面 S 的基本群
$H_1(S)$	曲面 S 的 1 维同调群
$H^1(S)$	曲面 S 的 1 维 de Rahm 上同调群
$\mathcal{H}(S)$	S 上的一阶全纯微分形式组成的线性空间
$\mathcal{H}^m(S)$	S 上的 m 阶全纯微分形式组成的线性空间
$\mathcal{H}(S)$	S 上的全体半纯函数所组成的域
$\operatorname{Div}(S)$	S 上的除子群
$D_0(S)$	S 上的主除子群
Z	典范除子
$r(D)$	除子 D 的维数
$i(D)$	除子 D 的特殊性指标

$L(S)$	对应于 S 的一组典型剖分的格群
$J(S) = \mathbf{C}^g / L(S)$	Jacobi 簇
T_g	亏格为 g 的曲面的 Teichmüller 空间
R_g	亏格为 g 的曲面的 Riemann 模空间
$T(S)$	S 的 Teichmüller 空间
$\text{Mod}(S)$	S 的 Teichmüller 空间的模变换群
$Q(S)$	S 上全纯二次微分所组成的 Banach 空间
$BQ(S)$	$Q(S)$ 中的单位开球
$\text{Bel}(S)$	S 上的有界可测 Beltrami 微分所组成的 Banach 空间
$M(S)$	$\text{Bel}(S)$ 中的单位开球
$\text{Bel}(\Delta, G)$	Δ 内关于 Fuchs 群 G 的有界可测 Beltrami 微分所组成的 Banach 空间
$M(\Delta, G)$	$\text{Bel}(\Delta, G)$ 中的单位开球
$F(S)$	S 的 Fricke 空间
$d_T(\cdot, \cdot)$	Teichmüller 距离

名词索引

(按汉语拼音顺序)

A		除子的维数	165
		除子的特殊性指标	165
Abel 微分	123	D	
ACL 性质	77	单叶函数	4
Ahlfors 超双曲度量	36	典型剖分	150
α 周期	156	典范除子	165
B		典范除子类	165
半纯微分	123	de Rahm 上调群	151
伴随二次微分	228	对偶基	154
保模映射	58	多值半纯函数	185
Beltrami 方程	71	E	
Beltrami 系数	86	二连通域的共形模	50
Beltrami 微分	204	F	
闭微分形式	120	Fricke 空间	248
闭链	150	Fricke 坐标	250
标记 Riemann 曲面	243	Fuchs 群	191
Bieberbach 猜想	19	覆盖映射	12
b 周期	156	覆盖变换	147
C		覆盖变换群	147
参数转换函数	103	复结构	107
测地线	27	复特征	86
长度谱	261	G	
超双曲度量	37	格群	179
除子	163		
除子类群	164		

Grötzsch 问题	212	模空间	242
Grötzsch 函数	62	模变换	259
广义偏导数	75	模群	259
规范化半纯微分	162		
共形等价	47	N	
共形模	48	拟共形映射	65
		拟共形映射几何定义	65
H		拟共形映射分析定义	86
环面的模空间	241		
Hilbert 变换	89	P	
		平方可积	130
J		Poincaré 度量	25
Jacobi 簇	181	Pompeiu 公式	76
基本多边形	198	抛物型 Möbius 变换	194
基本群	144	抛物型 Riemann 曲面	193
极值长度	51	抛物型模变换	267
解析同构	2		
解析自同构群	2	Q	
解析有限型曲面	200	恰当微分	120
局部单值化参数	103	恰当链	150
局部坐标卡	103	全纯微分	121
局部伸缩商	86	全纯二次微分	168
绝对连续	77	曲线的同伦	143
		曲线的同伦类	144
K		曲线族的极值长度	51
开映射	1		
可约简映射	273	R	
Koebe 函数	18	Riemann 曲面	103
亏格	114		
K -q. c. 映射	65	S	
		素端	9
M		双曲度量	25
模的次可加性	56	上闭微分形式	121
模函数	12	Stokes 公式	123

双线性关系	162
双曲型 Möbius 变换	195
双曲型 Riemann 曲面	193
双曲型模变换	267

T

特征微分	133
调和函数	120
调和微分	120
拓扑四边形的	47
同调	150
同调类	150
同调群	150
Teichmüller 距离(度量)	255
Teichmüller 空间	242
Teichmüller 等价类	243
Teichmüller 映射	228
Teichmüller 直线	268
Teichmüller 盘	274
拓扑有限型曲面	200
拓扑无限型曲面	200
椭圆型 Möbius 变换	195
椭圆型 Riemann 曲面	193
椭圆型模变换	267

W

万有覆盖	146
微分形式	115
伪 Anosov 映射	272
伪双曲型模映射	267
无挠 Fuchs 群	194
Weierstrass 点	174
Weierstrass 空隙数	173

X

形式偏导数	67
线段上的绝对连续性	77
斜驶型 Möbius 变换	195

Y

映射类群	260
------	-----

Z

支撑集	10
支撑度量	37
主除子	164
主除子群	164
最大伸缩商	86

参 考 文 献

- [1] Abikoff W. The Real Analytic Theory of Teichmüller Space. Vol 820 of Springer Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1980
- [2] Ahlfors L V. Lectures on Quasiconformal Mappings. New York: Van Nostrand, 1966
- [3] Ahlfors L V. Conformal invariants: topics in geometric function theory. New York: McGraw Hill, 1973
- [4] Ahlfors L V. Finitely generated Kleinian groups. American Journal of Math, 1964, 86,87: 413~429
- [5] Ahlfors L V, Sario L. Riemann surfaces. Princeton: Princeton University Press, 1960
- [6] Beardon A. The Geometry of Discrete Groups. Graduate Texts in Math 91, New York, Berlin: Springer-Verlag, 1983
- [7] Bers L. Riemann Surfaces. New York University, Institute of Mathematical Science Lecture Notes, New York, 1957~1958
- [8] Bers L. Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem; in book: Analytic Functions (1960). Princeton: Princeton University Press, 89~119
- [9] Bers L. Simultaneous uniformization. Bulletin of AMS, 1960, 66: 94~97
- [10] Bers L. Finite dimensional Teichmüller spaces and their generalizations. Bulletin of AMS, 1981, 5: 131~172
- [11] Bers L. An extremal problem for quasiconformal mappings and a Theorem by Thurston. Acta Math, 1978, 141: 73~98
- [12] Bers L, Kra I. A crash course on Kleinian groups. Volume 400 of Lecture Notes in Math, New York, Berlin: Springer-Verlag, 1974
- [13] Bers L, Royden H. Holomorphic families of injections. Acta Math, 1986, 157: 259~286

-
- [14] Bojarski B. Generalized solution of a system of differential equations of first order and elliptic type with discontinuous coefficients. *Math Sbornik*, 1957, 85: 451~530
- [15] Earle C. Teichmüller theory; in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (ed. by W. J. Harvey). 1977, 143 ~ 162, New York: Academic Press, 1977
- [16] Earle C, Eells J. On the differential geometry of Teichmüller space. *J Anal Math*, 19: 35~52
- [17] Earle C, Kra I. On isometries between Teichmüller spaces. *Duke Math J* 1974, 41: 583~591
- [18] Earle C, Kra I, Krushkal S L. Holomorphic motions and Teichmüller spaces. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 343(2): 927~948
- [19] Earle C, Li Zhong. Isometrically embedded polydisks in infinite dimensional Teichmüller spaces. *Journal of Geometric Analysis*, 1999, 9: 51~71
- [20] Earle C, Li Zhong. Extremal quasiconformal mappings in plane domains. In *Celebration of F. Gehring's 70th birthday*. New York: Springer-Verlag, 1998
- [21] Farkas H M, Kra I. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Math 71, New York, Berlin: Springer-Verlag, 1980
- [22] Gauss C F. *Carl Friedrich Gauss Werke*. Vol N, Dieterichsche Universitäts-Druckrei, Göttingen, 1880, 189~216
- [23] Gardiner F P, Lakic N. *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Vol. 76 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Math. Society, 2000
- [24] Gehring F W. Spirals and the universal Teichmüller space, *Acta Math*, 1978, 141: 99~113
- [25] Grötzsch H. Ueber einige extremale probleme der konformen Abbildung, *Ber Verh Sächs Akad Wiss Leipzig*, 1928, 80: 367~376
- [26] Gunning R C. *Lectures on Riemann surfaces*. Mathematical Notes. Princeton: Princeton University Press, 1967
- [27] Hamilton R S. Extremal quasiconformal mapping with prescribed boundary values. *Trans Amer Math Soc*, 1969, 138: 399~406
- [28] Hubbard J, Masur H. Quadratic differentials and foliations. *Acta Math*, 1979, 142: 221~274

- [29] Keen L. Intrinsic Moduli on Riemann surfaces. *Ann Math*, 1966, 84: 404~420
- [30] Kerckhoff S P. The asymptotic geometry of Teichmüller space. *Topology*, 1980, 19: 23~41
- [31] Kra I. On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces. *Acta Math*, 1981, 146: 231~270
- [32] Kobayashi S. *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*. Marcel Dekker, New York, 1970
- [33] Kravetz S. On the geometry of Teichmüller space and the structure of their modular groups. *Ann Acad Sci Fenn*, 1959, 278: 1~35
- [34] Krushkal S L. *Quasiconformal mappings and Riemann surfaces*. Washington: Winston and Sons, 1979
- [35] Lakic N. Strebel points. *Contemporary Math*, 1997, 211: 417~431
- [36] Lehto O, Virtanen K I. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer-Verlag, 1973
- [37] Li Zhong. On the existence of extremal Teichmüller mappings. *Comm Math Helv*, 1982, 57: 511~517
- [38] Li Zhong. Non-uniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces, *Complex Variables*, 1991, 16: 261~272
- [39] Li Zhong. Closed geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1996, 124: 1459~1465
- [40] Li Zhong. Length spectrums of Riemann surfaces and the Teichmüller metric. *Bulletin of London Math Soc*, 2003, 35: 247~254
- [41] 李忠. 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用. 北京: 科学出版社, 1988
- [42] Masur H. On a class of geodesics in Teichmüller space. *Ann of Math*, 1975, 102: 205~221
- [43] McMullen C T. Cusps are dense. *Ann Math*, 1991, 133: 217~247
- [44] McMullen C T. *Complex Dynamics and Renormalization*. Vol 135 of *Ann of Math Studies*, Princeton: Princeton University Press, 1996
- [45] Menchoff D. Sur les differentielles totales des fonctions univalentes, *Math Ann*, 1931, 105: 75~81
- [46] Marden A, Strebel K. The heights theorem for quadratic differentials on Riemann surfaces. *Acta Math*, 1984, 153: 153~211

-
- [47] Marden A, Strebel K. Pseudo-Anosov Teichmüller mappings. *J Analyse Math*, 1986, 46: 195~220
- [48] Mané R, Sad P, Sullivan. On the dynamics of rational maps. *Ann Ec Norm Sup*, 1983, 16: 193~217
- [49] Nevanlinna R. Uniformisierung. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953
- [50] Reich E. A criterion for uniqueness extremality of Teichmüller mappings. *Indian Univ Math J*, 1981, 30: 441~447
- [51] Reich E. Non-uniqueness of Teichmüller extremal mappings. *Proc Amer Math Soc*, 1983, 88: 513~516
- [52] Royden B. Automorphisms and isometries of Teichmüller space. in book: *Advances in the theory of Riemann surfaces*, 369~384
- [53] Reich E, Strebel K. Teichmüller mappings which keep the boundary pointwise fixed. *Ann Math Studies*, 1971, 66: 365~367
- [54] Sullivan D, Thurston W P. Extending holomorphic motions. *Acta Math*, 1986, 157: 243~257
- [55] Strebel K. On the existence of extremal Teichmüller mappings. *J Anal Math*, 1976, 30: 464~480
- [56] Strebel K. On lifts of quasiconformal mappings. *J Anal Math*, 1977, 31: 191~203
- [57] Strebel K. On quasiconformal mappings of open Riemann surfaces. *Comment Math Helv*, 1978, 53: 301~321
- [58] Strebel K. *Quadratic Differentials*. New York, Berlin; Springer-Verlag, 1984
- [59] Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann of Math*, 1985, 122: 401~418
- [60] Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. *Deutsche Math*, 1938, 3: 621~678
- [61] Teichmüller O. Eine Verschärfung des Dreiecksesatzes. *Deutsche Math*, 1939, 4: 16~22
- [62] Teichmüller O. Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. *Abh Preuss Akad*, 1939, 22: 1~197

- [63] Teichmüller O. Über extremal probleme der konformen Geometrie. Deutsche Math, 1941, 6: 50~77
- [64] Thurston W P. The Geometry and Topology of Three Manifolds. Princeton Lecture Notes, 1979
- [65] Thurston W P. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Bull Amer Math Soc, 1988, 19: 417~431
- [66] Veech W A. Moduli spaces of quadratic differentials. J Anal Math, 1990, 55: 117~171
- [67] Vekua I N. Generalized Analytic Functions. Vol 25 of International Series in Pure and Applied Math, New York, Pergamon, 1962
- [68] Wolpert S. Thurston's Riemannian metric for Teichmüller space. J Diff Geometry, 1986, 23: 143—174
- [69] 伍鸿熙、吕以輦、陈志华. 紧黎曼曲面引论. 北京: 科学出版社, 1983

