1

……个数字,有 $C(8,1)$ 种方法.将这个数字与 8 和 9 组成三位数,有 $3!$ 种排列.其中 089 和 098 不符合题目要求.因此,所求的三位数是 $3!\times C(8,1)-2=46$ 个.

4. 若第 1 位是 3 或 4,则第 2 位和第 3 位每位有 4 种选择,共计 $2\times4^2=32$ 种方式.若第 1 位是 2,则第 2 位可以是 3 或 4 有 2 种选择,第 3 位可以有 4 种选择,总共 8 种方法.于是,大于 230 的三位数有 $32+8=40$ 个.

5. 从 $\{1,2,\cdots,9\}$ 选出 7 个数字进行排列有 ……

2and3

2 张明信片可能属于任何一种选法.于是所求的方法数……

12. 第 i 种明信片有 $\binom{A_i+n-1}{A_i}$ 种送出的方法,因此总方法数为 $N=\prod_{i=1}^{k}\binom{A_i+n-1}{A_i}$.

13. 使用一一对应的方法.将所有书的集合记作 $S=\{1,2,\cdots,24\}$,选出的 5 卷不相继的书为 $i_1,i_2,\cdots,i_5$,其中 $i_1<i_2<\cdots<i_5$,且 $i_j+1\neq i_{j+1}$,$j=1,2,3,4$.令 $k_j=i_j-j+1$,$j=1,2,3,4,5$.例如,$i_1,i_2,\cdots,i_5$ 是 2,5,7,13,15,那么 $k_1,k_2,\cdots,k_5$ 是 2,4,5,10,11.显然,$i_1,i_2,\cdots,i_5$ 与 $k_1,k_2,\cdots,k_5$ 之间是一一对应的.$\{k_1,k_2,\cdots,k_5\}$ 恰好是 $\{1,2,\cdots,20\}$ 的 5-组合,因此所求得选法数是 $C(20,5)=15\,504$.

4and5

17. 将密码按照字符个数进行分类,包含 4 个字符的有 (36^4-26^4) 个,包含 5 个字符的有 (36^5-26^5) 个,包含 6 个字符的有 (36^6-26^6) 个.因此,登录密码总数为

$$N=(36^4-26^4)+(36^5-26^5)+(36^6-26^6)$$

18. 由二项式定理

$$(2x+(-3y))^{25}=\sum_{i=0}^{25}\binom{25}{i}(2x)^{25-i}(-3y)^i$$

令 $i=13$ 得到展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数,即

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!\ 12!}2^{12}3^{13}$$

6

(2) ……为奇数时等式右边为 -1,n 为偶数时等式右边为 $+1$.

5.

$$\begin{aligned}&L_{2n+2}-(L_1+L_3+\cdots+L_{2n+1})\\&=(L_{2n+2}-L_{2n+1})-L_{2n-1}-L_{2n-3}-\cdots-L_3-L_1\\&=L_{2n}-L_{2n-1}-L_{2n-3}-\cdots-L_3-L_1\\&=\cdots=L_2-L_1=L_0=2\end{aligned}$$

7

8. 设 a_n 为 n 条封闭曲线把平面划分成的区域个数.假设前 n 条封闭曲线已经存在,当加入第 $n+1$ 条封闭曲线时,这条曲线与前 n 条曲线交于 $2n$ 个点,这些交点将第 $n+1$ 条曲线划分成 $2n$ 段,每段都会增加一个区域,因此得到递推方程如下:

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+2n\\a_1=2\end{cases}$$

解得 $a_n=n^2-n+2$.

8and9

22.（1）如果不考虑邮票的顺序，每种邮票使用的张数不同决定了不同的方案. 设 3 元、4 元和 20 元的邮票分别使用 x_1, x_2 和 x_3 张，则得到下述方程

$$3x_1+4x_2+20x_3=r$$
$$x_i\in\mathbf{N}, i=1,2,3$$

于是，生成函数为

$$G(y)=\frac{1}{(1-y^3)(1-y^4)(1-y^{20})}$$

$G(y)$ 的展开式中 y^r 的系数就是方案数.

（2）如果考虑邮票的顺序，那么贴 k 张邮票可能得到的总邮资数值由 $(y^3+y^4+y^{20})^k$ 中 y 的幂指数确定，而对于给定的邮资，其系数则代表了用 k 张邮票贴出这种邮资的方法数. 如

$$\begin{aligned}(y^3+y^4+y^{20})^3=&\binom{3}{300}(y^3)^3+\binom{3}{210}(y^3)^2y^4+\binom{3}{201}(y^3)^2y^{20}\\&+\binom{3}{120}(y^3)(y^4)^2+\binom{3}{102}(y^3)(y^{20})^2+\binom{3}{021}(y^4)^2y^{20}+\binom{3}{012}y^4(y^{20})^2\\&+\binom{3}{111}y^3y^4y^{20}+\binom{3}{003}(y^{20})^3+\binom{3}{030}(y^4)^3\\=&y^9+3y^{10}+3y^{26}+3y^{11}+3y^{43}+3y^{28}+3y^{44}+6y^{27}+y^{60}+y^{12}\end{aligned}$$

这说明用 3 张邮票贴 9 元邮资只有 1 种方法，贴 10 元邮资有 3 种方法，即 3+3+4，3+4+3，4+3+3，…根据上述分析，考虑邮票顺序情况下的生成函数是

$$1+(y^3+y^4+y^{20})+(y^3+y^4+y^{20})^2+\cdots=\frac{1}{1-(y^3+y^4+y^{20})}$$

上述函数中 y^r 项的系数就是考虑邮票次序的情况下贴 r 元邮资的方法数.

23. 每个孩子至少得到一个苹果的分法数是方程 $x_1+x_2+x_3=n-3$ 的非负整数解的个数，其生成函数为

$$A(y)=(1+y+y^2+\cdots)^3=\frac{1}{(1-y)^3}$$

上述展开式中 y^{n-3} 项的系数为 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

前两个孩子苹果数相等的分法数为方程 $2x_1+x_3=n-3$ 的非负整数解的个数. 当 n 为奇数时，x_3 为偶数，有 $\dfrac{n-1}{2}$ 种取法，于是

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{2}$$

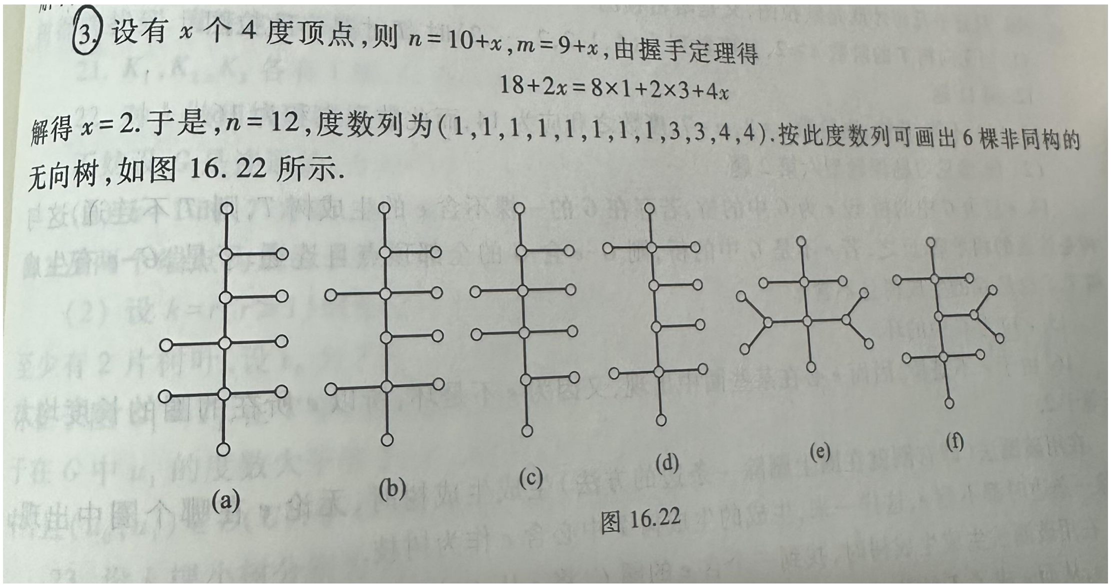
28. $\{a_n\}$ 的指数生成函数为

$$\begin{aligned}A_e(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\\&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^2=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}4^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}2^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

于是

$$a_n=\begin{cases}4^{n-1}+2^{n-1}, & n\geqslant 1\\1, & n=0\end{cases}$$

10、

11、

3. 设有 x 个 4 度顶点，则 $n=10+x$，$m=9+x$，由握手定理得

$$18+2x=8\times1+2\times3+4x$$

解得 $x=2$. 于是，$n=12$，度数列为 $(1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,4,4)$. 按此度数列可画出 6 棵非同构的无向树，如图 16.22 所示.

图 16.22

12、$m-n+1$

13、4

14、5

15、0

16、7

```
17、      65
        /   \
       34     31
      / \
     17    17
    / \
    5    5
   / \
  2     3
```

计算该最优二叉树的权，即为所有叶子节点的权值之和。在这个例子中，最终的权值为 2+3+5+7+17+31 = 65。