离散数学第一次期中考试

一．填空题(直接写出答案即可，每题 5 分)

1. $(\forall x)\left(P(x)\to(\exists y)Q(x,y)\right)$的前束范式为______。

2. 设映射$f:X\to Y$，$g:Y\to X$满足$g\circ f=I_X$，则f是______，g是______。

   （选填“满射”、“入射”或“双射”，双射时只填满射或入射不得分）

3. 公式$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$的成真赋值为______。

4. 假设在8×8的棋盘上放车，如果车所在的行和列没有其他的车，则称此车为非攻击型车。那么在8×8棋盘上放 8 个非攻击型车，共有______种放法。

5. 用列举法表示下列$A\times B$上的二元关系S ______。

   $A=\{0\quad 1\quad 2\}$，$B=\{0\quad 2\quad 4\}$，$S=\{<x,y>|\,x,y\in A\cap B\}$

6. 一只袋子里装了 100 个苹果、100 个香蕉、100 个橘子和 100 个梨，如果每分钟从袋子里取出一个水果，那么需要多长时间就能保证至少已拿出了 1 打（12 个）相同种类的水果？______。

二． 解答题(要求写出关键步骤，只有最终答案的不给分)

7. （10 分）设$C^1([a,b])$为区间$[a,b]$上具有一阶连续导数的函数所构成的集合，

   定义映射$f:C([a,b])\to C^1([a,b])$为

   $$f(x)=[f(x)](t)=\int_a^t x(s)\,ds,\forall x\in C([a,b])$$

   证明：f是入射而不是满射。

8. （10 分）证明：有理系数多项式的全体是可数集。

9. （10 分）正实数集R^+上的二元运算$\circ$定义为$x\circ y=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$，则$\circ$是否为可结合的、可交换的？是否满足消去律？是否存在关于$\circ$的幺元、零元？如果有，把它们找出来。运算$\circ$是否满足等幂律？如果存在幺元，哪些元素有逆元？并找出其逆元。

10. （10 分）一位国际象棋大师有 11 周的时间备战一场锦标赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过去疲劳，他还决定每周不能下超过 12 盘棋。

证明存在连续若干天，期间这位大师恰好下了 21 盘棋。

11. （10 分）证明 $P(x)\wedge\forall xQ(x)\Rightarrow\exists x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)$。

12. （10 分）方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 的整数解的个数是多少？其中

$$x_1\ge 3，\ x_2\ge 1，\ x_3\ge 0，\ x_4\ge 5$$

13. （10 分）在 R^2 平面上画出下述关系的图，并确定此关系是否自反，是否反自反，是否对称，是否反对称，是否可传递。

$$\{\langle x,y\rangle \mid |x|\le 1\wedge |x|\le 1\}$$

参考答案

1. $(\forall x)(\exists y)\big(\neg P(x)\vee Q(x,y)\big)$
2. 单射，满射
3. 01,10
4. $8!$
5. $S=\{<0,0>,<0,2>,<2,2>,<2,0>\}$
6. 45
7. 证明：

$\forall x_1,x_2\in C([a,b])$，若有 $f(x_1)=f(x_2)$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\int_a^t[x_1(s)-x_2(s)]ds=0$$

等式两边同时对 t 求导得

$$x_1(t)-x_2(t)=0$$

从而有 $x_1=x_2$，故 f 是单射。

对于 $1\in C^1([a,b])$，若 f 是满射，则 $\exists x\in C([a,b])$，使得

$$\int_a^t x(s)ds=1$$

两边同时求导得 $x(t)=0$，但这是不可能的，否则上述积分为 0，故 f 不是满射。

8. 证明：

设 P 为有理系数多项式的全体所构成的集合，

$$P_n = \left\{ r_0 x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n : r_k \in Q, k = 0,1,\cdots n \right\}$$

则 $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$，故只需证明 P_n 是可数集。由于 $r_0 x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ 可以与 $n+1$ 维有理坐标向量 $\left(r_0, r_1, \cdots, r_n\right)$ 建立起一一对应的关系，故 $P_n \sim Q^{n+1}$，而有限个可数集的直积是可数集，从而 P_n 也是可数的。

9. 不满足结合律；满足交换律；不满足消去律；不满足等幂律；不存在幺元，不存在零元。证明较简单，略。

10. 设 a_1 是在第一天所下的盘数，a_2 是在第一天和第二天所下的总盘数，a_3 是在第一天、第二天和第三天所下的总盘数，以此类推。因为每天至少要下一盘棋，故序列 $a_1, a_2, \cdots a_{77}$ 是一个严格递增的序列。此外，$a_1 \geq 1$，而且因为在任意一周下棋最多 12 盘，所以 $a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$。因此，我们有

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$$

序列 $a_1 + 21$，$a_2 + 21$，…，$a_{77} + 21$ 也是一个严格单调递增的序列

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153$$

于是这 154 个数

$$a_1, a_2, \cdots a_{77}, a_1 + 21, \cdots a_{77} + 21$$

中的每一个数都是 1 到 153 之间的整数。由此可知，它们中有两个是相等的。又因为 $a_1, a_2, \cdots a_{77}$ 没有相等的数，并且 $a_1 + 21$，$a_2 + 21$，…，$a_{77} + 21$ 中也没有相等的数，因此必然存在一个 i 和一个 j 使得 $a_i = a_j + 21$。从而，这位国际象棋大师在第 $j+1, j+2, \cdots i$ 天总共下了 21 盘棋。

11. 证明：设 $P(x) \wedge \forall x Q(x)$ 是真，则 $P(x)$ 是真，$\forall x Q(x)$ 是真，因而 $Q(x)$ 是真，$P(x) \wedge Q(x)$ 是真，所以 $P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \exists x \left(P(x) \wedge Q(x)\right)$ 是真。

12. 引入新变量

$$y_1 = x_1 - 3，\quad y_2 = x_2 - 1，\quad y_3 = x_3，\quad y_4 = x_4 - 5$$

此时方程变为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

变量 x_i 的要求等价于 y_i 非负，新方程的非负整数解的个数从而也是原来方程解的个数，等于

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$$

13.图略，不是自反，不是反自反，不是对称，也不是反对称，是可传递的。