一

5. (1) $m_0 \vee m_2 \vee m_3$,成真赋值为 00,10,11.

(2) $m_3 \vee m_7$,成真赋值为 011,111.

(3) $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$,重言式,000,001,010,011,100,101,110,11
部为成真赋值.

6. (1) $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$,矛盾式,00,01,10,11 全为成假赋值.

(2) M_4,成假赋值为 100.

(3) 1,重言式,无成假赋值.

29. 丁金生是班长,王小红是学习委员,李强是生活委员.

设 p_1:王小红是班长,p_2:丁金生是班长,p_3:李强是班长.

q_1:王小红是生活委员.q_3:李强是生活委员.r_1:王小红是学习委员.

$F \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg q_3) \vee (\neg p_1 \wedge q_3)) \wedge ((p_2 \wedge \neg q_1) \vee (\neg p_2 \wedge q_1)) \wedge ((p_3 \wedge \neg r_1) \vee (\neg p_3 \wedge r_1)) \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge p_2 \wedge q_3 \wedge \neg q_1 \wedge \neg p_3 \wedge r_1$

演算主要用分配律,并注意每人只能担任一职,每职只能由一人担任,从而 p_1, q_1, r_1 中有且仅有一个为真,p_1, p_2, p_3 中有且仅有一个为真,……,由最后结果可知,丁金生是班长,李强是生活委员,王小红是学习委员.

14. 证明的命题序列不唯一,下面对每一小题各给出一个证明.

(1) 证明:

① $p \to (q \to r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q \to r$	①②假言推理
④ q	前提引入
⑤ r	③④假言推理

⑥ $r \vee s$ ⑤附加

⑤ $p \to (p \wedge q)$

本题用附加前提证明法证明

(4) 证明:

① $s \leftrightarrow t$ 前提引入

② $(s \to t) \wedge (t \to s)$ ①置换

③ $t \to s$ ②化简

④ $t \wedge r$ 前提引入

⑤ t ④化简

⑥ s ③⑤假言推理

⑦ $q \leftrightarrow s$ 前提引入

⑧ $(q \to s) \wedge (s \to q)$ ⑦置换

⑨ $s \to q$ ⑧化简

⑩ q ⑥⑨假言推理

⑪ $q \to p$ 前提引入

⑫ p ⑩⑪假言推理

⑬ $p \wedge q$ ⑩⑫合取

⑬ $p \wedge q$ 前提引入

(5) 证明:

① $p \wedge q$ ①化简

② p ①化简

③ q 前提引入

④ $p \rightarrow r$ ②④假言推理

⑤ r

⑥ $q \rightarrow s$ 前提引入

⑦ s ③⑥假言推理

⑧ $r \wedge s$ ⑤⑦合取

二、

5. (1) $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$,其中 $F(x)$:x 是火车,$G(y)$:y 是轮船,$H(x,y)$:x 比 y 快.

(2) $\exists x \exists y(F(x) \wedge (G(y) \wedge H(x,y))$,其中 $F(x)$:x 是火车,$G(y)$:y 是汽车,$H(x,y)$:x 比 y 快.

(3) $\neg \exists x(G(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ 或 $\forall x(G(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge \neg H(x,y)))$,其中,$F(x)$:$x$ 是火车,$G(y)$:y 是汽车,$H(x,y)$:x 比 y 快.

(4) $\neg \forall x(G(x) \rightarrow \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ 或 $\exists x \exists y(G(x) \wedge F(y) \wedge \neg H(x,y))$,其中,$F(x)$:$x$ 是火车,$G(y)$:y 是汽车,$H(x,y)$:x 比 y 慢.

10. 提示:前束范式……

11. 提示:用换名规则可使两个指导变元不相……

12. 公式的前束范式不唯一,下面每题各给出一个答案.

(1) $\exists z \forall y(F(z) \rightarrow G(x,y))$

(2) $\forall x \exists t(F(x,y) \rightarrow G(x,t,z))$

(3) $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4((F(x_1,y) \rightarrow G(x_2,y)) \wedge (G(x_3,y) \rightarrow F(x_4,y)))$

(4) $\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3((F(y_1) \rightarrow G(y_1,x_2)) \rightarrow (H(y_2) \rightarrow L(x_2,y_3)))$

$\ldots \rightarrow (\neg F(y) \land \neg G(y))$

⑤ $\neg H(y) \rightarrow (\neg F(y) \land \neg G(y))$

⑥ $I(y) \rightarrow (\neg F(y) \land \neg G(y))$

⑦ $\forall x(I(x) \rightarrow (\neg F(x) \land \neg G(x)))$

24. 设 $F(x)$: x 喜欢步行, $G(x)$: x 喜欢骑自行车, $H(x)$: x 喜欢乘汽车.

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$, $\forall x(G(x) \lor H(x))$, $\exists x \neg H(x)$

结论: $\exists x \neg F(x)$

证明:

① $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$　　前提引入

② $F(y) \rightarrow \neg G(y)$　　①∀−

③ $\forall x(G(x) \lor H(x))$　　前提引入

④ $G(y) \lor H(y)$　　③∀−

⑤ $\neg G(y) \rightarrow H(y)$　　④置换

⑥ $F(y) \rightarrow H(y)$　　②⑤假言三段

⑦ $\neg H(y) \rightarrow \neg F(y)$　　⑥置换

⑧ $\neg H(y) \rightarrow \exists x \neg F(x)$　　⑦∃+

⑨ $\exists y \neg H(y) \rightarrow \exists x \neg F(x)$　　⑧∃−

⑩ $\exists x \neg H(x)$　　前提引入

⑪ $\exists x \neg F(x)$　　⑨⑩假言推

也可以直接对⑧和⑩运用∃−得到 $\exists x \neg F(x)$.

三、四、五

4.39 (1) 设 R 为 A 上的偏序关系,证明 $R-I_A$ 为 A 上的拟序关系.

(2) 设 S 为 A 上的拟序关系,证明 $S\cup I_A$ 为 A 上的偏序关系.

4.40 设$\langle S,\preccurlyeq\rangle$是偏序集,且它的最大反链的长度是 n,证明如果将它分解成链,则链的条数至少是 n.

5分

4.3 习题解答与分析

4.1 $P(A)\times A=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}$.

4.2 $A\times\{1\}\times B=\{\langle 0,1,1\rangle,\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,1,1\rangle,\langle 1,1,2\rangle\}$.

4.3 (1) 任取$\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in A\times C\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\Rightarrow x\in B\wedge y\in D\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in B\times D$$

(2) 不正确. 反例: $A=\varnothing,B=D=\{1\},C=\{2\}$.

4.4 (1) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,8\rangle\}$.

(3) $R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 1,5\rangle\}$.

(4) $R=\varnothing$.

(5) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.

4.5 $R=\{\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$.

$\overline{R}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

4.6 $R=\{\langle 1,1,1,6\rangle,\langle 1,1,6,1\rangle,\langle 1,6,1,1\rangle,\langle 6,1,1,1\rangle,\langle 1,1,2,3\rangle,\langle 1,1,3,2\rangle,\langle 1,2,3,1\rangle,\langle 1,3,2,1\rangle,\langle 1,2,1,3\rangle,\langle 1,3,1,2\rangle,\langle 2,1,1,3\rangle,\langle 3,1,1,2\rangle,\langle 3,1,2,1\rangle,\langle 2,1,3,1\rangle,\langle 2,3,1,1\rangle,\langle 3,2,1,1\rangle\}$.

4.7 $R=\{\langle 0,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 8,1\rangle,\langle 10,0\rangle\}$,则

(1) $\mathrm{dom}R=\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2) $\mathrm{ran}\,R=\{0,1,2,3,4,5\}$.

(3) $R^{-1}=\{\langle 5,0\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 0,10\rangle\}$.

4.8 (1) $R\circ R=\{\langle\{a\},a\rangle,\langle\{a\},\{a,\{a\}\}\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,\{a,\{a\}\}\rangle\}$.

(2) $\mathrm{dom}R=\{a,\{a\}\}$.

4.9 任取 x,则

$$\begin{aligned}&x\in\mathrm{dom}(R\cup S)\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R\cup S)\\&\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R\vee\langle x,y\rangle\in S)\\&\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\vee\exists y(\langle x,y\rangle\in S)\\&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}R\vee x\in\mathrm{dom}S\\&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}R\cup\mathrm{dom}S\end{aligned}$$

[illegible]$\varnothing\rangle,\langle\{\varnothing$[illegible]$\},\{\varnothing\}\rangle\}$.

4.11 (1) $\mathrm{ran}R=\{a,\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(2) $R\circ R=\{\langle\varnothing,a\rangle,\langle b,\{\varnothing\}\rangle\}$.

4.12 由于 $y\in R_1(0)\Leftrightarrow x-2<y<x+1,x=0,y\in A\Leftrightarrow -2<y<1,y\in A$，于是 $R_1(0)=\{-1,0\}$.

由于 $y\in R_2(3)\Leftrightarrow 3^2\leqslant y,y\in A$，没有 y 满足这个条件，因此 $R_2(3)=\varnothing$.

4.13 (1) R 仅具有自反性、对称性和传递性.

(2) R 仅具有反自反性和对称性.

(3) R 仅具有自反性和对称性.

(4) R 仅具有反自反性和反对称性.

(5) R 仅具有对称性.

说明：(1) $x+x$ 是偶数，于是 R 是自反的；$x+y$ 为偶数，那么 $y+x$ 也是偶数，于是 R 是对称的；$\langle 2,4\rangle$ 与 $\langle 4,2\rangle$ 同时属于 R，因此不是反对称的；$x+y$ 是偶数，$y+z$ 是偶数，那么 $x+z$ 也是偶数，于是 R 是传递的.

(2) $x<x$ 不成立，于是 R 不是自反的，而是反自反的；若 $x>y$ 或 $y>x$，必有 $y>x$ 或 $x>y$，对称性成立；反对称性不成立，因为 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 都属于 R，但是 $1\neq 2$；R 不是传递的，因为 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 都属于 R，但是 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R.

(3) 是自反的，因为 $|x|+|x|=2x$ 不等于 3；是对称的，不是反对称的，因为 $\langle 1,3\rangle$ 和 $\langle 3,1\rangle$ 都属于 R，但是 $1\neq 3$；不传递，因为 $1+0\neq 3,0+2\neq 3$，但是 $1+2=3$.

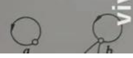
(4) $x\neq x+2$，于是 R 是反自反的；若 $x=y+2$，一定不会有 $y=x+2$，因此 R 不是对称的，而是反对称的；$y=x+2,z=$ … ，那么 $z=x+4$，所以 R 不是传递的.

(5) 不是自反的，因为 $\langle 1,1$ … 不是反自反的，因为 $\langle 2,2\rangle$ 属于 R；是对称的，但不是反对 … $1,4\rangle$ 和 $\langle 4,1$ … 是 $1\neq$ … 因为 $\langle 1,4\rangle$ 和 $\langle 4,1\rangle$ 都属于 R，但是 $\langle 1$ … R.

… $R=\{$ … $b,c\rangle$ …

… 系图如 …

由关系 … 是自 …



4.13 (1) R 仅具有反自反性和对称性.

(2) R 仅具有自反性和对称性.

(3) R 仅具有反自反性和反对称性.

(4) R 仅具有对称性.

(5) R 仅具有对称性.

说明:(1) $x+x$ 是偶数,于是 R 是自反的;$x+y$ 为偶数,那么 $y+x$ 也是偶数,于是 R 是对称的;$\langle 2,4\rangle$ 与 $\langle 4,2\rangle$ 同时属于 R,因此不是反对称的;$x+y$ 是偶数,$y+z$ 是偶数,那么 $x+z$ 也是偶数,于是 R 是传递的.

(2) $x<x$ 不成立,于是 R 不是自反的,而是反自反的;若 $x>y$ 或 $y>x$,必有 $y>x$ 或 $x>y$,对称性成立;反对称性不成立,因为 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 都属于 R,但是 $1\neq 2$;R 不是传递的,因为 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 都属于 R,但是 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R.

(3) 是自反的,因为 $|x|+|x|=2x$ 不等于 3;是对称的,不是反对称的,因为 $\langle 1,3\rangle$ 和 $\langle 3,1\rangle$ 都属于 R,但是 $1\neq 3$;不传递,因为 $1+0\neq 3, 0+2\neq 3$,但是 $1+2=3$.

(4) $x\neq x+2$,于是 R 是反自反的;若 $x=y+2$,一定不会有 $y=x+2$,因此 R 不是对称的,而是反对称的;$y=x+2, z=y+2$,那么 $z=x+4$, 所以 R 不是传递的.

(5) 不是自反的,因为 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R;不是反自反的,因为 $\langle 2,2\rangle$ 属于 R;是对称的,但不是反对称的,$\langle 1,4\rangle$ 和 $\langle 4,1\rangle$ 都属于 R,但是 $1\neq 4$;不传递,因为 $\langle 1,4\rangle$ 和 $\langle 4,1\rangle$ 都属于 R,但是 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R.

4.14 (1) $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$.

(2) 关系图如图 4.4 所示.

(3) 由关系图不难看出 R 是自反、对称、传递的.

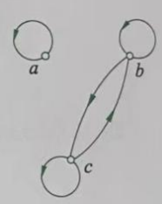


图 4.4

4.15 R 是反自反的、反对称的、传递的.

说明:对任何 x, $4<x-x$ 都不成立,R 是反自反的;若 $4<x-y$,那么 $y-x<-4$,不会成立 $4<y-x$,关系是反对称的;若 $4<x-y$, $4<y-z$,那么 $4<8<x-z$,R 是传递的.

4.16 R 是反对称、传递的.

4.17 设 R 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}$,则

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^5=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^6=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

M^6 对应的关系是

$$R^6=I_A=R^0$$

因此得到 $s=0,t=6$.

4.18 R 的自反、对称、传递闭包如图 4.5 所示.

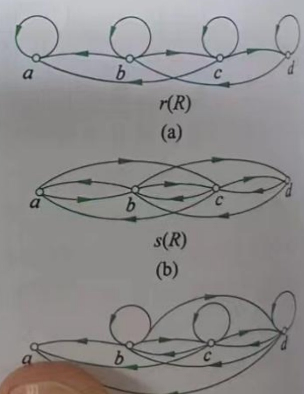


图 4.5

4.19 $\cup$运算不保持反对称性与传递性,反例 1: $A=\{1,2\},R_1=\{\langle 1,2\rangle\},R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$.

- 运算不保持自反性与传递性,反例 2: $A=\{1,2\}$, $R_1=E_A,R_2=I_A$.
- 运算不保持反自反性,同反例 1.
- 运算不保持对称性,反例 3: $A=\{1,2\},R_1=\{\langle 1,1\rangle\},R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$.
- 运算不保持反对称性,反例 4: $A=$ … $R_1=\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\},R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle$ …
- 运算不保持传递性,反例 5:

  $A=\{1,2,3,4\}$

  $R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

  $R_2=\{\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

4.20 根 …

4.21 … 以知道 R 是传递的 … $\boldsymbol{M}_R$.

… A,则

4.25 根据 R 的定义知道 a 与 c 等价，b 与 d 等价，于是 $[a]=[c]=\{a,c\}$，$[b]=[d]=\{b,d\}$.

4.26 $xRy \Leftrightarrow 2\mid(x+y) \Leftrightarrow x$ 与 y 具有相同的奇偶性. 令 $A=\{2x \mid x\in \mathbf{N}\}$，则划分 $=\{A,\mathbf{N}-A\}$.

4.27 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}\cup I_A$.

4.28 (1) $R^*=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup I_A$.

(2) $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$.

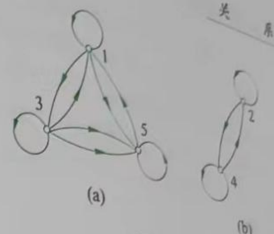


图 4.6

4.29 任取 $\langle x,y\rangle$，则

$$\langle x,y\rangle\in \mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+ \Rightarrow xy=yx \Rightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in \mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R \Rightarrow xv=yu \Rightarrow uy=vx \Rightarrow \langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\in \mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R \wedge \langle\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

$$\Rightarrow xv=yu \wedge ut=vw \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v} \wedge \frac{u}{v}=\frac{w}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{w}{t} \Leftrightarrow xt=yw \Rightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

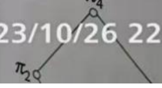
4.30 极大相容性分块是 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4,5\}$.

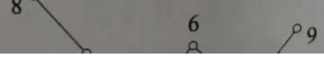
4.31 最细的划分是 π_1，最粗的划分是 π_4. 哈斯图如图 4.7 所示.

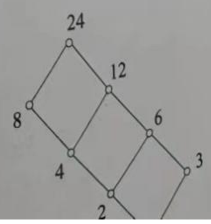
4.32 (1) 哈斯图如图 4.8 所示.

(2) $\{4,6\}$ 的最大下界 2，最小上界不存在.

4.33 哈斯图如图 4.9 所示.







4.26 xRy … $=\{x \mid x\in \mathbf{N}\}$，则划分$=\{A,\mathbf{N}-A\}$.

4.27 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}\cup I_A$.

4.28 (1) $R^{*}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup I_A$.

(2) $A/R^{*}=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$.

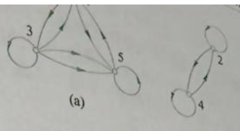


图 4.6

4.29 任取$\langle x,y\rangle$，则

$$\langle x,y\rangle\in \mathbf{Z}^{+}\times \mathbf{Z}^{+}\Rightarrow xy=yx\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in \mathbf{Z}^{+}\times \mathbf{Z}^{+}$，则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow\langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\in \mathbf{Z}^{+}\times \mathbf{Z}^{+}$，则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\wedge\langle\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

$$\Rightarrow xv=yu\wedge ut=vw\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\wedge\frac{u}{v}=\frac{w}{t}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{w}{t}\Leftrightarrow xt=yw\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

4.30 极大相容性分块是$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4,5\}$.

4.31 最细的划分是π_1，最粗的划分是π_4. 哈斯图如图 4.7 所示.

4.32 (1) 哈斯图如图 4.8 所示.

(2) $\{4,6\}$的最大下界 2，最小上界不存在.

4.33 哈斯图如图 4.9 所示.

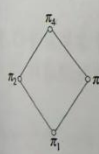


图 4.7

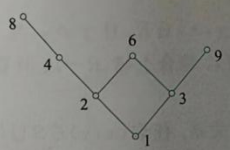


图 4.8

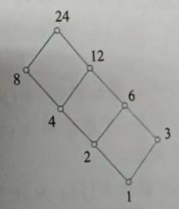


图 4.9

4.34 (1) $X=\{a,b,c,d,e,f\}$，则

$$\leqslant=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle\}\cup I_X$$

(2) 极大元 e,f；极小元 a；最大元不存在；最小元 a.

4.35 哈斯图如图 4.10 所示.

(a) 极大元与最大元为 1，极小元为 2 和 3，没有最小元.

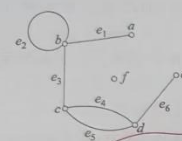


图 6.32

6.24 首先给图 6.1 的边标记,如图 6.32 所示. 它的关联矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

6.25 (1) $d^+(v_1)=4,d^-(v_1)=0,d(v_1)=4,d^+(v_2)=1,d^-(v_2)=1,d(v_2)=2,d^+(v_3)=0,d^-(v_3)=3,d(v_3)=3,d^+(v_4)=0,d^-(v_4)=1,d(v_4)=1.$

(2) e_4 与 e_5 是平行边.

6.26 先写出 D 的邻接矩阵和它的 2~5 次幂.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&2&0&2\\0&0&1&0&0\\0&1&1&1&0\\1&0&2&1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1&1\\ [illegible]&[illegible]&[illegible]&2&0\\ [illegible]&[illegible]&[illegible]&[illegible]&0\\ [illegible]&[illegible]&[illegible]&[illegible]&1\\ [illegible]&[illegible]&[illegible]&1&2\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&1&3&1&2\\2&0&6&2&2\\0&0&1&0&0\\0&1&4&1&2\\1&2&5&3&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[illegible]&2&5&3&1\\0&2&8&2&4\\0&0&1&0&0\\1&2&6&3&1\\2&1&10&3&4\end{bmatrix}$$

[illegible] 长度为 1,2,3,4,5 的通路分别为 0 条、1 条、1 条、1 条、3 条.

[illegible] 长度小于或等于 3 的通路为 2 条.

[illegible] a 长度为 1,2,3,4,5 的回路分别为 0 条、0 条、1 条、0 条、1 条.

[illegible] 则 d 长度小于或等于 3 的回路 [illegible]

$d^+(v_3)=1,d^-(v_3)=3,d(v_3)=4.$

$d^+(v_4)=2,d^-(v_4)=2,d(v_4)=4.$

47. G 如图 14.20 所示.

48. 图 14.20 所示的图 G 的邻接矩阵及各次幂如下.

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad A^{(2)}=\begin{pmatrix}6&2&1&1\\2&4&2&0\\1&2&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix}11&12&7&1\\12&4&2&2\\7&2&1&2\\1&2&2&0\end{pmatrix}\quad A^{(4)}=\begin{pmatrix}42&22&12&7\\22&24&14&2\\12&14&9&1\\7&2&1&2\end{pmatrix}$$

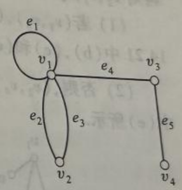


图 14.20

(1) v_1 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路数分别为 0,1,1,7.

(2) v_1 到 v_1 长度为 1,2,3,4 的回路数分别为 1,6,11,42.

由于$A^{(1)}+A^{(2)}+A^{(3)}$的元素全都大于 0, 故 G 的可达矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$