一、分别用等值演算与真值表法，判断下列公式是否存在主析取范式或主合取范式，若有，请写出来。

(1)$(p\to(p\vee q))\vee r$

(2) $(p\to q)\wedge(q\to r)$

(3) $(p\wedge q)\to q$

(4) $\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

二、求下列各式的前束范式。

(1) $\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)$

(2) $\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y,z)$

三、应用题

1、某次课间休息时，1 位同学作为主持人与另外 3 位同学进行猜数游戏，主持人说这个数是 30、50、70 中的某一个，你们三位同学各猜一次，然后主持人分析每人猜数的结果，从而最终确定是哪个数。

同学 1 说：这个数是 30，不是 50

同学 2 说：这个数是 50，不是 70

同学 3 说：这个数既不是 30，也不是 50

主持人听后说道：你们 3 人中，有一人全对，有二人对了一半，请问到底是哪个数。

2、某年级要从 1 班、2 班、3 班、4 班、5 班中选出一名才子主持元旦晚会，每班最多一人，也可能没有，这些人满足如下条件，请确定最终选择哪些班级的学生：

(1)如果 1 班有人选中，则 2 班有人选中。

(2)若 5 班有人选上则 1 班与 2 班均有人选上。

(3)5 班与 4 班必有一班有被选中。

(4)3 班与 4 班同时有人选上或同时没人选上。

3、给定解释 I 如下：

a)个体域 D={3，4}，

b)$f(3)=4$, $f(4)=3$，

c)$F(3,3)=F(4,4)=0$;　$F(3,4)=F(4,3)=1$,

求下列公式在 I 下的真值。

1）$\forall x\exists yF(x,y)$.

2）$\exists x\forall yF(x,y)$.

3）$\forall x\forall y(F(x,y)\to F(f(x),f(y)))$.

4、在一阶逻辑中，将下列命题符号化，要求用两种不同的等值式。

1）没有小于复数的正数

2）相等的两个角未必都是对顶角

四、证明题

构造下面推理的证明：

(1)前提：$p\to(q\to r)$，p，q

结论：$r\vee s$

(2)前提：$p\to q$，$\neg(q\wedge r)$，r

结论：$\neg p$

(3)前提：$p\to q$

结论：$p\to(p\wedge q)$

一、（1）

$(6)(p\to(p\vee q))\vee r$

p	q	r	$(p\vee q)$	$(p\to(p\vee q))$	$(p\to(p\vee q))\vee r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

永真式，只有小项组成的主析取范式。

没有为假的赋值，所以没有成假赋值对应的大项的合取，即没有主合取范式。

原式$=(\neg p\vee (p\vee q))\vee r=(1\vee q)\vee r=1$

（2）

$(8)\ (p\to q)\wedge(q\to r)$

p	q	r	$(p\to q)$	$(q\to r)$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

主析取范式$=m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{111}$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式$=M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}=$

$=(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$(p\to q)\wedge(q\to r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee 0)\wedge(0\vee\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee(\neg r\wedge r))\wedge((\neg p\wedge p)\vee\neg q\vee r)$

$=(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$(p\to q)\wedge(q\to r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge 1)\vee(\neg p\wedge 1\wedge r)\vee(1\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee r))\vee(\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)\vee((\neg p\vee p)\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

（3）

(9) $(p\wedge q)\to q$

p	**q**	$(p\wedge q)$	$(p\wedge q)\to q$
0	**0**	0	1
0	**1**	0	1
1	**0**	0	1
1	**1**	1	1

永真式，只有小项的析取构成的主析取范式$=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$
没有为假的指派，所以没有由大项的合取构成的主合取范式

$(p\wedge q)\to q$
$=\neg(p\wedge q)\vee q$
$=(\neg p\vee\neg q)\vee q$
$=\neg p\vee\neg q\vee q$
$=1$

（4）

(10) $\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

p	q	r	$r\leftrightarrow p$	$\neg(r\leftrightarrow p)$	$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

主析取范式$=m_{110}=p\wedge q\wedge\neg r$
主合取范式$=M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{111}$
$=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$
$=\neg((\neg p\vee r)\wedge(p\vee\neg r))\wedge p\wedge q$
$=((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r))\wedge p\wedge q$
$=(p\wedge\neg r\wedge p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r\wedge p\wedge q)$
$=(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\neg(r\leftrightarrow p)\wedge p\wedge q$

$=\neg((p\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg r))\wedge p\wedge q$
$=((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\vee r))\wedge p\wedge q$
$=(\neg p\vee\neg r)\wedge(p\vee r)\wedge p\wedge q$
$=(\neg p\vee\neg r)\wedge((p\vee r)\wedge p)\wedge q$
$=(\neg p\vee\neg r)\wedge p\wedge q$
$=(\neg p\vee(\neg q\wedge q)\vee\neg r)\wedge(p\vee(\neg q\wedge q)\vee(\neg r\wedge r))\wedge((\neg p\wedge p)\vee q\vee(\neg r\wedge r))$
$=(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge$
$(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge$
$\wedge\cancel{(\neg p\vee q\vee\neg r)}\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge\cancel{(p\vee q\vee\neg r)}\wedge\cancel{(p\vee q\vee r)}$
$=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$
$=M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{111}$

二. (1) $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(z,y))$ (2) $\forall x\exists t(F(x,y)\rightarrow G(x,t,z))$

三.

1

解：令 S 表示“这个数是 30”，W 表示“这个数是 50”，Q 表示“这个数是 70”

同学 1 的话：$S\wedge\neg W$

同学 2 的话：$W\wedge\neg Q$

同学 3 的话：$\neg S\wedge\neg W$

对于每个人来说，只有二个选择：全对、对一半，对一半又分成：第一句对第二句错、第一句错第二句对，因此每个同学的对错情况为：√√、√×、×√，因此 3 个人共有 3*3*3=27 种可能的情况，其中有些情况不符合“有一人全对，有二人对了一半”而剔除。

我们按“√√、√×、×√”顺序，构造“类真值表”来分析其组合情况

同学 1	同学 2	同学 3	命题公式	分析
√√	√√	√√	不必写	不可能全对
√√	√√	√×	不必写	不可能有 2 个对
√√	√√	×√	不必写	不可能有 2 个对
√√	√×	√√	不必写	不可能有 2 个对
√√	√×	√×	$S\wedge\neg W\wedge W\wedge Q\wedge\neg S\wedge W=0$	真值为 0 不对
√√	√×	×√	$S\wedge\neg W\wedge W\wedge Q\wedge S\wedge\neg W=0$	真值为 0 不对
√√	×√	√√	不必写	不可能有 2 个对
√√	×√	√×	$S\wedge\neg W\wedge\neg W\wedge Q\wedge\neg S\wedge W=0$	真值为 0 不对
√√	×√	×√	$S\wedge\neg W\wedge\neg W\wedge\neg Q\wedge S\wedge\neg W= S\wedge\neg W\wedge\neg Q$	可能对的，是 30 不是 50，不是 70
√×	√√	√×	$S\wedge W\wedge W\wedge\neg Q\wedge\neg S\wedge W=0$	不可能
√×	√√	×√	$S\wedge W\wedge W\wedge\neg Q\wedge S\wedge\neg W=0$	不可能
√×	√×	√√	$S\wedge W\wedge W\wedge Q\wedge\neg S\wedge\neg W=0$	不可能
√×	×√	√√	$S\wedge W\wedge\neg W\wedge\neg Q\wedge\neg S\wedge\neg W=0$	不可能
×√	√√	√×	$\neg S, \neg W, W, \neg Q, S, W=0$	不可能
×√	√√	×√	$\neg S, \neg W, W, \neg Q, S, \neg W=0$	不可能
×√	√×	√√	$\neg S, \neg W, W, Q, \neg S, \neg W=0$	不可能
×√	×√	√√	$\neg S$，$\neg W$，$\neg W$，$\neg Q$，$\neg S$，$\neg W=$	3 个数都不是，不可能

答案是：是 30，不是 50，不是 70

同学 1 说：这个数是 30，不是 50　**全对**

同学 2 说：这个数是 50，不是 70　**第一句错第二句对**

同学 3 说：这个数既不是 30，也不是 50　**第一句错第二句对**

2

解：用 One 表示 1 班选了人，Two 表示 2 班选了人，Three 表示 3 班选了人，Four 表示 4 班选了人，Five 表示 5 班选了人。

则这 4 个条件依次为

$One \to Two$，$Five \to (One \land Two)$，$Four \lor Five$，$Three \leftrightarrow Four$

满足这 4 个条件，即这 4 个条件的值均为真即为 1，所以其合取为 1

$(One \to Two) \land (Five \to (One \land Two)) \land (Four \lor Five) \land (Three \leftrightarrow Four) = 1$，

将以上合取范式转换为主析取范式，因此双条件应转换为析取式的合取式

原式=

$(\neg One \lor Two) \land (\neg Five \lor (One \land Two)) \land (Four \lor Five) \land ((\neg Three \lor Four) \land (Three \lor \neg Four))$

$= [(\neg One \lor Two) \land (\neg Five \lor (One \land Two))] \land (Four \lor Five) \land (\neg Three \lor Four) \land (Three \lor \neg Four)$

$= [(\neg One \land \neg Five) \lor (\neg One \land (One \land Two)) \lor (Two \land \neg Five) \lor (Two \land (One \land Two))] \land (Four \lor Five)$
$\land (\neg Three \lor Four) \land (Three \lor \neg Four)$

$= \{[(\neg One \land \neg Five) \lor (Two \land \neg Five) \lor (Two \land One)] \land (Four \lor Five)\}$
$\land (\neg Three \lor Four) \land (Three \lor \neg Four)$

$= \{[(\neg One \land \neg Five \land Four) \lor (Two \land \neg Five \land Four) \lor (Two \land One \land Four) \lor (Two \land One \land Five)]$
$\land (\neg Three \lor Four)\} \land (Three \lor \neg Four)$

$= \{(\neg One \land \neg Five \land Four \land \neg Three) \lor$
$(\neg One \land \neg Five \land Four) \lor$
$(Two \land \neg Five \land Four \land \neg Three) \lor$
$(Two \land \neg Five \land Four) \lor$
$(Two \land One \land Four \land \neg Three) \lor$
$(Two \land One \land Four) \lor$
$(Two \land One \land Five \land \neg Three) \lor$
$(Two \land One \land Five \land Four)\} \land (Three \lor \neg Four)$

$= (\neg One \land \neg Five \land Four \land Three) \lor$
$(Two \land \neg Five \land Four \land Three) \lor$
$(Two \land One \land Four \land Three) \lor$
$(Two \land One \land Five \land \neg Three \land \neg Four) \lor$
$(Two \land One \land Five \land Four \land Three)$

$= (\neg One \land Three \land Four \land \neg Five) \lor$
$(Two \land Three \land Four \land \neg Five) \lor$
$(One \land Two \land Three \land Four) \lor$
$(One \land Two \land \neg Three \land \neg Four \land Five) \lor$
$(One \land Two \land Three \land Four \land Five)$

	一班	二班	三班	四班	五班	条件 1	条件 2	条件 3	条件 4
方案一	无	不限	有	有	无	满足	满足	满足	满足
方案二	不限	有	有	有	无	满足	满足	满足	满足
方案三	有	有	有	有	不限	满足	满足	满足	满足
方案四	有	有	无	无	有	满足	满足	满足	满足
方案五	有	有	有	有	有	满足	满足	满足	满足

3

$\Leftrightarrow((0\wedge 1)((1\wedge 0))$

$\Leftrightarrow 0$

3) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow\forall x((F(x,3)\rightarrow F(f(x),f(3)))\wedge(F(x,4)\rightarrow F(f(x),f(4)))$

$\Leftrightarrow((F(3,3)\rightarrow F(f(3),f(3)))\wedge(F(3,4)\rightarrow F(f(3),f(4)))\wedge((F(4,3)\rightarrow F$

$(F(4,4)\rightarrow F(f(4),f(4)))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow F(4,4))\wedge(1\rightarrow F(4,3))\wedge(1\rightarrow F(3,4))\wedge(0\rightarrow F(3,3))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow 1)\wedge(1\rightarrow 1)\wedge(0\rightarrow 0)$

$\Leftrightarrow 1$

例 2.17 在一阶逻辑中将下列命题符号化，要求用两种不同的等值形式。

1)没有小于负数的正数。

2)相等的两个角未必都是对顶角。

答案 1) $F(x)$：X 是正数，$G(x)$：X 是负数，$L(x,y)$：$x<y$。

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$。

2) $F(x,y)$：$x=y$，$G(x,y)$：x,y 是对顶角。

$\exists x\exists y(F(x,y)\rightarrow\neg G(x,y))\Leftrightarrow\neg\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$。

例 2.18 求下列各式的前束范式。

4.

$\Leftrightarrow\exists x(\neg F(x))\vee\forall yG(u,y)$

$\Leftrightarrow\exists x\forall y(\neg F(x)\vee G(u,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(u,y))$

2) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg F(x,u)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists y(\neg F(x,u)\vee\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists y(F(x,u)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

例 2.19 在一阶逻辑中将下面命题符号化：(1)人都

个体域分别取(a)人类集合，(b)全总个体域

答案 (a)(1)设 $F(x)$：x 爱美，符号化为 $\forall xF(x)$

(2)设 $G(x)$：x 用左手写字，符号化为 $\exists xG(x)$

(b)设 $M(x)$：x 为人，$F(x)$，$G(x)$ 同(a)中

(1) $\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

(2) $\exists x(M(x)\wedge G(x))$

这里，$M(x)$ 就是特性谓词。

课后习题解答

2.1 解题过程 (1)令 $F(x)$：x 是鸟

四.证明题

所以，推理正确。2.

（1）证明：

①p→(q→r)②p ③q→r ④q ⑤r ⑥r∨s

前提引入 前提引入 ①②假言推理 前提引入 ③④假言推理 ⑤附加律

（2）证明：

①¬ (q∧r)②¬ q∨¬ r ③r ④¬ q ⑤p→q ⑥¬ p

前提引入 ①置换 前提引入 ②③析取三段论 前提引入 ④⑤拒取式

（3）证明：

①p→q ②¬ p∨q

③(¬ p∨q)∧(¬ p∨p)④¬ p∨(p∧q)⑤p→(p∧q)

前提引入 ①置换 ②置换 ③置换 ④置换

也可以用附加前提证明法，更简单些。