阶段性测试（一）

1. （10 分）假定集合 $A=\{1,2,3,4\}$，Z 是整数，定义 A 上的关系为：
   $R=\{<a,b>\ |,a,b\in A,\dfrac{a-b}{2}\in Z\}$ $S=\{<a,b>\ |,a,b\in A,\dfrac{a-b}{3}\in Z,a-b>0\}$
   计算： $R\cap S, R\cup S$,R-S, S-R ~R, R⊕S 的关系矩阵。
2. （6 分）假定 A 是一个集合，$|A|=n$, R 是定义在 A 上的一个关系，则一定存在正整数，s 和 t，$0\le s<t\le 2^{n^2}$，使得 $R^s=R^t$
3. （10 分)设 R 是集合 A 上的一个传递且自反的关系，T 是 A 上的一个关系，满足：<a, b>属于 T 当且仅当<a, b> 和<b, a> 都属于 R， 证明 T 是一个等价关系。
4. （6 分）任意给定 7 个不同的自然数，证明其中必有两个数的和或者差能够被 10 整除。
5. （10 分）一个宿舍里有 A、B、C、D、E 五人，在出国问题上他们达成如下协议： (1) A 与 B 中必有一个人出国; (2) 若 A 出国，则 C 不出国; (3) 若 D 出国，则 E 也出; (4) 若 D 不出国，则 C 出国; (5) E 不出国。请判断这 5 个同学的去向。
6. （6 分）用反证法证明： $x\rightarrow y$， $(\neg y\vee Z)\wedge\neg Z$, $\neg(\neg x\wedge w)\Rightarrow\neg w$
7. (10 分)用主范式理论和方法给出下列命题为真的赋值，并以此判断给定的命题类型：(1) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ (2) $p\rightarrow(p\vee q)$ (3) $(p\vee q)\rightarrow r$
8. （12 分）对集合 A={1, 2, 3, 4},构造满足如下条件的关系：
   a) 关系既不是自反的也不是反自反的，但是它是对称的
   b) 它是一个偏序关系，也是一个全序关系
   c) 它是一个偏序关系，但是没有最大元，却存在两个极大元。
   d) 它是一个等价关系，且其 0-1 关系矩阵里仅有 8 个 1，这样的等价关系有几个。
   e) 可以构造多少个反对称关系？构造一个既不是反对称，也不是对称的关系。
9. （10 分）证明谓词公式：
   $\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\exists x\,P(x)\rightarrow\exists x\,Q(x))$ 是永真式。
10. （10 分）求 1，3，5，7，9 五个数字组成的 5 位数的个数，要求其中 1 出现的次数为偶数，其他四个数出现次数不加限制。
11. （10 分）设 R 是集合 A 上的关系。对任意 a, b, c∈A，若<a, b>∈R 并且<a, c>∈R，则有<b, c>∈R，则 R 称为 A 上的循环关系。试证明 R 是 A 上的等价关系的充要条件是 R 是 A 上的循环关系和自反关系。