图论部分综合练习（二）

一、证明题：

1） 证明：$n(n \geq 2)$个结点的简单图至少有两个相同度数的结点。

2） 证明：假设图 G 是具有$n(n \geq 2)$个结点的简单图，且$|E| > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$，则该图是连通的。

3) 设 G 是简单平面图，则它—定有一个度数≤5 的结点。

4) 若平面图 G 有 n 个结点，m 条边，f 个面，且每个面至少由$k(k \geq 3)$条边围成，则 m≤k(n －2) / (k －2)。

5) 证明：小于 30 条边的简单平面图中至少有一个度数小于等于 4 的结点。

二、计算

1） 一棵树有 7 片叶，3 个 3 度顶点，其余都是 4 度顶点，求 4 度顶点多少个？

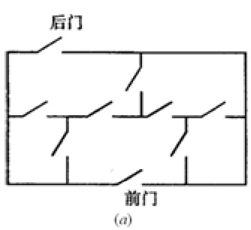
2） 一棵树有 2 个 4 度顶点， 3 个 3 度顶点，其余都是树叶，求这棵树共有多少个顶点？

3） 假设连通平面简单图有 20 个顶点，每个顶点的度都是 3， 则该平面性图的平面把平面分割成多少个区域？

4） 如果简单图的每个顶点的度数都为 n，则成该图为 n 正则图，那么度为 4 的且有 10 条边的正则图有多少个顶点？

三、设计分析

1） 图是一幢房子的平面图形，前门进入一个客厅，由客厅通向 4 个房间。如果要求每扇门只能进出一次， 现在你由前门进去， 能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅， 然后从后门走出。



(a)

2） N 是何值时，无向完全图是欧拉图或者有向完全图是欧拉图？

3）在由 6 个结点，12 条边构成的连通平面图中，每个面由几条边组成？

证明 2

证明　用反证法。若 G 不连通，不妨设 G 可分成两个不相连通的子图 G_1 和 G_2，并假设 G_1 和 G_2 中的顶点数分别为 n_1 和 n_2，显然，$n_1+n_2=n$。因为 $n_i\geq 1$，所以 $n_i\leq n-1(i=1，2)$。

$$|E|\leq\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\leq\frac{(n-1)(n_1+n_1-2)}{2}\leq\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设相矛盾。因此，G 是连通的。

证明 3

证明　不妨设 G 是连通的。若不连通，就可考察 G 中的一个连通分支。因 G 是简单图，所以每个面至少有三条边，所以，$3r\leq 2e$，即有 $r\leq\frac{2e}{3}$。

如果每个结点的度数都≥6，则 $6v\leq 2e$,即有 $v\leq\frac{e}{3}$。

由欧拉公式可得

$2=v-e+r\leq\frac{e}{3}-e+\frac{2e}{3}=0$

矛盾。所以，G 中至少有一个结点的度数≤5。

证明 4

设连通简单无向平面图 G=〈V,E,F〉，则|V|=n,|E|=m,|F|=f。

由已知对任一 $f\in F$， $\deg(f)\geq k$。由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得，$2|E|\geq kf$。

再由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得 $|V|-|E|+\frac{2}{k}|E|\geq 2$，即 $n-m+\frac{2}{k}m\geqq 2$

即 $k(n-2)\geq(k-2)m$。

所以 $m\leq k(n-2)/(k-2)$。

三、

设 Ti 为满足要求的无向树，则边数 mi=6。

不妨假设：结点 v1，v2 和 v3 是叶结点，v7 是 3 度结点，v4，v5 和 v6 是待定结点。

于是 Σj=1..7d(vj) = 12 = 3+3+d(v4)+d(v5)+d(v6)。

由于 1 ≤ d(vj) ≤ 6，且 d(vj) ≠ 1 和 d(vj) ≠ 3 可知：

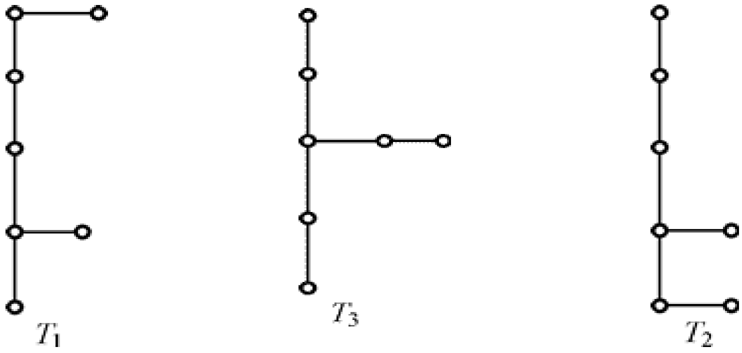
d(vj) = 2 (j = 4，5，6)。

于是 Ti 的度数列为：1，1，1，2，2，2，3。

由度数列可知：Ti 中有一个 3 度顶点 v7，v7 的邻域 N(v7)中有 3 个顶点，这 3 个顶点的度数列只能是下列三种之一：

(1，1，2)，(1，2，2)，(2，2，2)

此度数列只能产生这三棵非同构的 7 阶无向树，依次对应右图中的树 T1，T2 和 T3。


T_1
T_3
T_2