【《离散数学》试卷（A）】离散数学期末考试题——分享篇——题目完善、答案详尽【推荐学习】

《离散数学 》试卷（A）2018

一、填空题：（每空1分，共20分）
二、单项选择题：（每小题2分，共20分）
三、解答题：（每小题10分，共20分）
四、综合证明题：(共4题，共40分)

一、填空题：（每空1分，共20分）

1.若P，Q，为二命题，P—>Q 真值为F当且仅当_____ P真Q假 _____ 。

2、设X={1,2,3,4}，R={<1,2>,<2,4>,< 3,3>},则
r(R)=***{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,4>,< 3,3>,<4,4>}*** _
s(R)=**{<1,2>,<2,1>,<2,4>,< 3,3>,<4,2>}**___
t(R)= **{<1,2>,<1,4>,<2,4>,< 3,3>}** ____

r(R)表示自反闭包
s(R)表示对称闭包
t(R)表示传递闭包

3、若一条路径中，所有边均不相同，则此路径称作______简单路径______；若一条路径中所有的结点均不相同，则称此路径为______初级路径（基本路径)____________

4、命题公式$P\wedge\neg Q\rightarrow R$主合取范式为____┐P∨Q∨R___________

5、P：你努力，Q：你失败。“除非你努力，否则你将失败”的翻译为 ┐P—>Q；“虽然你努力了，但还是失败了”的翻译为 P∧Q

6、两个图同构的必要条件为：***结点数相等****,边数相等*,度数相同的结点数相等（相同的节点度分布）

7、n阶无向完全图每个结点v的度数d(v) = _________n-1__________

8、若集合$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b\}$的二元关系$R^{-1}=\{<1,a>,<2,b>\}$则R=__{<a,1>,<b,2>}__

9、若解释I的论域D仅包含一个元素，则 $\exists xP(x) \to \forall xP(x)$ 在I下真值为_____ 1______

10、全体小项的析取式必为_____永真_________（永真/永假）式；全体大项的合取式必为_________永假______（永真/永假）式

11、集合A={a, b}的幂集P(A) = _________ {∅,{a},{b},{a,b}} _______

12、设< {a,b,c}, * >为代数系统，* 运算如下：

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则它的幺元为 _______a __________ ；零元为 _________c ___________;

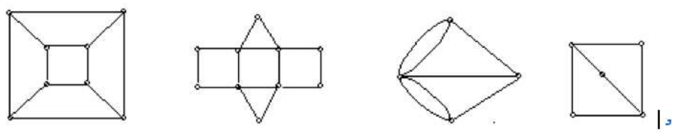
二、单项选择题：（每小题2分，共20分）

1. 在下述公式中是永真式的为（ AD ）

A. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$ B. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

C. $\neg(P \to Q) \wedge Q$ D. $P \to (P \vee Q)$

2.在如下各图中（ B ）是欧拉图。（不含奇数度结点）



A B C D

3. 设 I 是如下一个解释：D＝{a,b}，

$P(a,a)$	P(a,b)	P(b,a)	P(b,b)
T	F	T	F

则在解释 I 下取真值为 T 的公式是(D).

A、∃x∀yP(x,y) B、∀x∀yP(x,y) C、∀xP(x,x) D、∀x∃yP(x,y).

4.Q 为有理数集 N，Q 上定义运算*为 a*b＝a＋b － ab ,则<Q，*>的幺元为（ D ）。

A、a； B、b； C、1； D、0

5.设 G 是连通平面图，有 5 个顶点，6 个面，则 G 的边数是(A).

对于平面图：v-e+r=2(v 为结点，e 为边，r 为面)

A、9 条 B、 5 条 C、 6 条 D、11 条.

6.若供选择答案中的数值表示一个简单图中各个顶点的度，能画出图的是(C).

A、(1,2,2,3,4,5) B、(1,2,3,4,5,6) C、(1,1,1,2,3) D、(2,3,3,4,5,6).

7. 下列语句不是命题的有（ D ）。

A、离散数学是我送给大家最好的礼物； B、鸡有三只脚；

C、太阳系以外的星球上有生物； D、你打算考硕士研究生吗？

子群、循环群、生成元

8. 设 G 有 6 个元素的循环群，a 是生成元，则 G 的子集（ C ）是子群。

A、$\{a\}$ B 、$\{a,e\}$ C、$\{e,a^3\}$ D、$\{e,a,a^3\}$

定义 6-25 在群$\langle G,*\rangle$中，如果$\exists g\in G$，对$\forall a\in A$均能写成$a=g^i(i\in \mathbf{Z})$，则称$\langle G,*\rangle$为**循环群**，元素g为循环群$\langle G,*\rangle$的**生成元**，并称群$\langle G,*\rangle$由g生成，记为$G=\langle g\rangle$。

循环群可以分为两类：如果循环群$\langle G,*\rangle$中G是有限集，称其为**有限循环群**；否则称其为**无限循环群**。

若g是n次元，则$G=\langle g\rangle$是n阶循环群，此时

$$G=\langle g\rangle=\{g^0=e,g^1,g^2,\cdots,g^{n-1}\}$$

若g是无限次元，则$G=\langle g\rangle$是无限循环群，此时

$$G=\langle g\rangle=\{g^0=e,g^{\pm1},g^{\pm2},\cdots\}$$

例 6-14 证明整数加群$\langle \mathbf{Z},+\rangle$是无限循环群。

证明 群$\langle \mathbf{Z},+\rangle$的单位元为 0，并且$\forall a\in \mathbf{Z}$，都有逆元$a^{-1}=-a$。下面先证明 1 是该群的生成元。

由群的幂的定义知

$$0=1^0$$

对于任意正整数k，有

$$k=1+1+\cdots+1=1^k$$

对于任意负整数$-k$，有

$$-k=(-1)+(-1)+\cdots+(-1)=1^{-1}+1^{-1}+\cdots+1^{-1}=(1^{-1})^k=1^{-k}$$

综上所述，1 是群$\langle \mathbf{Z},+\rangle$的生成元。另一方面，$\langle \mathbf{Z},+\rangle$是无限群。所以，$\langle \mathbf{Z},+\rangle$是无限循环群。

顺便指出，-1是群$\langle \mathbf{Z},+\rangle$的另一个生成元。

例 6-15 试证明模 12 加群$\langle \mathbf{N}_{12},\oplus_{12}\rangle$是有限循环群。

解 $\mathbf{N}_{12}=\{0,1,2,\cdots,11\}$，含 12 个元素，其幺元为 0。下面证明 1 是该群的生成元。

由群的幂的定义知

$$0=1^0$$

对于$\mathbf{N}_{12}$中的其他元素$m(1\leqslant m\leqslant 11)$，有

$$m=1\oplus1\oplus\cdots\oplus1=1^m$$

所以，模 12 加群$\langle \mathbf{N}_{12},\oplus_{12}\rangle$是有限循环群。

可以验证，5,7,11 也是模 12 加群$\langle \mathbf{N}_{12},\oplus_{12}\rangle$的生成元。

例 6-16 设$G=\{a,b,c,d\}$，G上的二元运算$*$由表 6-19 定义。验证$\langle G,*\rangle$是循环群。

表 6-19

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

解 参照实例 6-18 不难验证$\langle G,*\rangle$是群，其幺元为a。由于

$$b^0=a,\quad b^1=b,$$
$$b^2=b*b=c,\quad b^3=b^2*b=c*b=d$$

所以，b是该群的一个生成元。

综上所述，$\langle G,*\rangle$是循环群。

可以验证，d也是例 6-16 中群$\langle G,*\rangle$的一个生成元。

例 6-14～例 6-16 的解答说明，循环群的生成元可能有多个。

定理 6-18 任何循环群必定是阿贝尔群。

证明 设$\langle G,*\rangle$是循环群，且g是它的一个生成元，则$\forall a,b\in G$，一定存在整数$r,s\in \mathbf{Z}$，使得$a=g^r,b=g^s$。由于

$$a*b=g^r*g^s=g^{r+s}=g^{s+r}=g^s*g^r=b*a$$

所以，$\langle G,*\rangle$是阿贝尔群。

定理 6-19 设$\langle G,*\rangle$是一个由元素$g\in G$生成的有限循环群，$|G|=n$，则$g^n=e$，且$G=\{g,g^2,g^3,\cdots,g^n\}$，其中$e$为幺元，$n$是使$g^n=e$的最小正整数。

证明 ① 证明不存在一个小于n的正整数m，使得$g^m=e$。用反证法。

假设存在一个正整数$m(0<m<n)$，使得$g^m=e$。

由于$\langle G,*\rangle$是一个循环群，所以G中的任意元素都可写成g^k。若令$k=mq+r$，其中$q\in \mathbf{Z}^+$，且$0\leqslant r<m$，则有

$$g^k=g^{mq+r}=(g^m)^q*g^r=e^q*g^r=g^r$$

上式表明，G中的每个元素都可以写成g^r，且$0\leqslant r<m$。这意味着G中最多只有m个不同元素，且$m<n$。这与G的阶是n相矛盾。所以假设不成立。

② 证明$g,g^2,g^3,\cdots,g^n$都不相同。用反证法。

不失一般性，假定$g^i=g^j$，其中$1\leqslant i<j\leqslant n$，则有

$$g^i=g^j=g^i*g^{j-i}$$

由消去律得$g^{j-i}=e$，且$1\leqslant j-i<n$。根据①的结论，这是不可能的。

所以，$g,g^2,g^3,\cdots,g^n$都不相同。 证毕

定理 6-20 设$\langle H,*\rangle$是循环群$\langle G,*\rangle(G=\langle a\rangle)$的子群，则有

(1) $\langle H,*\rangle$仍是循环群；

(2) 若$H\neq\{e\}$，则$H=\langle a^m\rangle$，其中，m是H中a的最小正幂指数，a^m是最小正幂；

(3) 当$\langle G,*\rangle$是无限群时，若$H\neq\{e\}$，则$\langle H,*\rangle$也是无限群；

(4) 当$\langle G,*\rangle$是有限群时，$\langle H,*\rangle$也是有限群。若$|G|=n$，则(2)中的m是n的约数，并且$|H|=q=\frac{n}{m}$，H是G中惟一的q阶子群。

定理 6-20 的证明从略。下面通过一个实例加深对定理 6-20 的理解。

实例 6-21 (1) 设$Z_2=\{x|x=2n\wedge n\in \mathbf{Z}\}$，则$\langle Z_2,+\rangle$是无限循环群$\langle \mathbf{Z},+\rangle$的一个无限循环子群(相应于定理 6-20 中的$m=2$)，而$\langle\{0\},+\rangle$是$\langle \mathbf{Z},+\rangle$的一个有限循环子群(相应于定理 6-20 中的$H=\{e\}$)，它的阶为 1。

(2) 循环群$\langle \mathbf{N}_6,\oplus_6\rangle$总共有 4 个循环子群：

① $\langle\{0\},\oplus_6\rangle$(相应于定理 6-20 中的$H=\{e\}$)，它的阶为 1。

② $\langle\{0,3\},\oplus_6\rangle$(相应于定理 6-20 中的$m=3$)，它的阶为 2，3 是它的生成元。

③ $\langle\{0,2,4\},\oplus_6\rangle$(相应于定理 6-20 中的$m=2$)，它的阶为 3，2 和 4 都是它的生成元。

④ $\langle \mathbf{N}_6,\oplus_6\rangle$，它的阶为 6(相应于定理 6-20 中的$m=6$)，1 和 5 都是它的生成元。

9. 一颗树有两个 2 度结点，1 个 3 度结点和 3 个 4 度结点，则 1 度结点数为（　C　）。

A、5；　B、7；　C、9；　D、8

握手定理：结点度数和=边数×2

树：结点=边+1

2*2+1*3+3*4+x = (2+1+3+x-1)*2

10. 在自然数集 N 上，下列哪种运算是可结合的？（　B　）

A、a*b=a-b　B、a*b=max{a,b}　C、a*b=a+2b　D、a*b=|a-b|

> 可结合是指一个运算满足结合律：(A*B)*C=A*(B*C)

三、解答题：（每小题10分，共20分）

1. 用求主范式方法判断公式 $(P \to Q) \wedge (P \to R)$, $P \to Q \wedge R$ 是否等价　(10 分)

1. $(P \to Q) \wedge (P \to R)$, $P \to Q \wedge R$ 用主范式判断是否等价

$(P \to Q) \wedge (P \to R)$
$= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$
$= (\neg P \vee Q \vee (\neg R \wedge R)) \wedge (\neg P \vee R \vee (\neg Q \wedge Q))$
$= (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg Q)$

$P \to Q \wedge R$
$= \neg P \vee (Q \wedge R)$
$= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$
$= (\neg P \vee Q \vee (\neg R \wedge R)) \wedge (\neg P \vee R \vee (\neg Q \wedge Q))$
$= (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg Q)$

故 $(P \to Q) \wedge (P \to R)$ 与 $P \to Q \wedge R$ 等价

2. 设 E 是所有偶数做成的集合，“•”是数的加，则“•”是 E 中的运算，（E，•）是一个代数系统，问（E，•）是不是群，为什么？（10 分）

2. $E = \langle \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots \rangle$

答：对于加法运算显然 E 是封闭的，而且 0 为 $\langle E, \cdot \rangle$ 代数系统的一个单位元且存在于 E 中，故 E 存在单位元，而且对于每个数的逆元都为其相反数，也存在于 E 中，满足结合律，故 $\langle E, \cdot \rangle$ 是群.

> 单位元、逆元、群等相关学习

四、综合证明题:（共4题，共40分）

1. 设<R,*>是一个代数系统，*是 R 上二元运算，$\forall a,b \in R \quad a*b=a+b+a\cdot b$，则 0 是幺元且<R,*>是含幺半群。（10 分）

证：$\forall a \in R$，$0*a = 0+a+0 = a$，$a*0 = a+0+0 = a$.

即 $0*a = a*0 = a$ ∴ 0为幺元

$\forall a,b \in R$，由于加法在R上封闭

∴ $a*b = a+b+a\cdot b \in R$ 即*在R上封闭.

$\forall a,b,c \in R$

$(a*b)*c = (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+(a+b+ab)\cdot c = a+b+c+ab+ac+bc+abc$

$a*(b*c) = a*(b+c+bc) = a+b+c+bc+a(b+c+bc) = a+b+c+ab+ac+bc+abc$

∴ $(a*b)*c = a*(b*c)$

因此 0是幺元且 <R,*>是含幺半群。

2. 证明：¬A∨B， ¬C→¬B， C→D 蕴涵（推出） A→D （10 分）

证 ¬A∨B，¬C→¬B，C→D 蕴涵 A→D

即证 $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \to \neg B) \wedge (C \to D) \Longrightarrow (A \to D)$

(1) A CP 附加前提

(2) ¬A∨B P 前提条件

(3) B T:(1),(2) I (1),(2)蕴含

(4) ¬C→¬B P 前提条件

(5) B→C T:(4) E (4)等价转换

(6) C T:(3)(5) I (3)(5)蕴含

(7) C→D P 前提条件,

(8) D T:(6)(7) I (6)(7)蕴含

法二.

(1) ¬A∨B P 前提条件

(2) A→B T:(1) E (1)等价转换

(3) ¬C→¬B P 前提条件

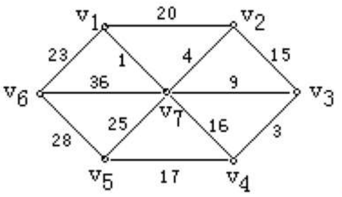
(4) B→C T:(3) E (3)等价转换

(5) A→C T:(2)(4) I (2)(4)蕴含

(6). C→D P 前提条件

(7). A→D T:(5)(6) I (5)(6)蕴含

3．如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价（单位：万元），试给出一个设计方案（注：写明步骤），使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。 （10 分）



(1) 把结点单独拿出来

(2) 权从小到大排序，不能围成圈

(3) {1,3,4,9,15,16,17,20,23,25,28,36}

(4) 选 w=1,e1=v1v7

(5) 选 w=3，e2=v3v4

(6) 选 w=4，e3=v7v2

(7) 选 w=9，e4=v7v3

(8) w=15，16 这两条边会成圈，舍弃

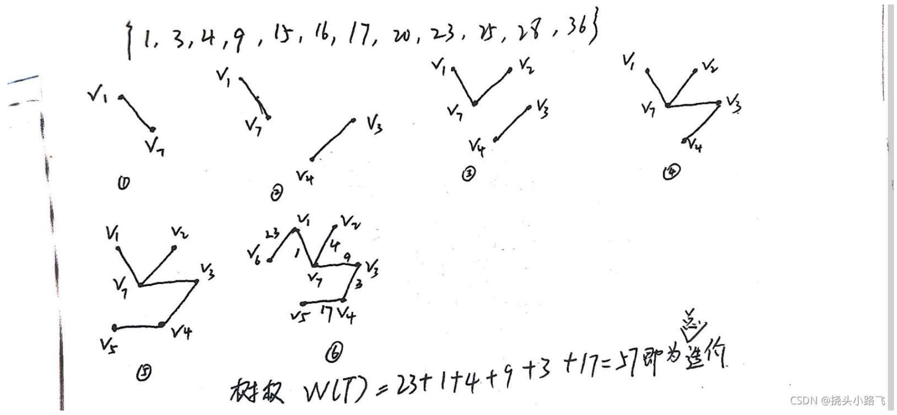
(9) 选 w=17，e5=v4v5

(10) w=20 会成圈，舍弃

(11) 选 w=23，e6=v1v6

(12) W=25,28,36 均会成圈，舍弃。 W(T)=1+3+4+9+17+23=57

3、



4、设 $G = S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，$H = \{(1),(12)\}$，求 G 关于子群 H 的左陪集。（10 分）、

4、

4.设$G=S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，$H=\{(1),(12)\}$，求G关于子群H的左陪集。

解 $\forall g\in G$，$g*H$

$$(1)*H=\begin{cases}(1)*(1)=(1)\\(1)*(12)=(12)\end{cases}=\{(1),(12)\}$$

$$(12)*H=\begin{cases}(12)*(1)=(12)\\(12)*(12)=(1)\end{cases}=\{(1),(12)\}$$

$$(13)*H=\begin{cases}(13)*(1)=(13)\\(13)*(12)=(123)\end{cases}=\{(13),(123)\}$$

$$(23)*H=\begin{cases}(23)*(1)=(23)\\(23)*(12)=(132)\end{cases}=\{(23),(123)\}$$

$$(123)*H=\begin{cases}(123)*(1)=(123)\\(123)*(12)=(13)\end{cases}=\{(1,3),(123)\}$$

$$(132)*H=\begin{cases}(132)*(1)=(132)\\(132)*(12)=(23)\end{cases}=\{(2,3),(123)\}$$

故$g*H=\{\{(1),(12)\},\{(13),(123)\},\{(23),(123)\}\}$

即G关于子群H的左陪集为：$\{\{(1),(12)\},\{(13),(123)\},\{(23),(123)\}\}$