

离散数学第二次作业

2023 年 10 月 14 日

1 判断题

1.1 判断下列命题的真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例.

1. $A \cup (B * C) = (A \cup B) * (A \cup C)$.
2. $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C)$.
3. 存在集合 A 使得 $A \subseteq A * A$.
4. $P(A) * P(A) = P(A * A)$.

1.2 判断下列各关系是否具有自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性.

1. R 是自然数集合 N 上的关系，且 xRy 当且仅当 $x + y$ 是偶数.
2. R 是自然数集合 N 上的关系，且 xRy 当且仅当 $x > y$ 或 $y > x$.
3. R 是自然数集合 N 上的关系，且 xRy 当且仅当 $|x| + |y| \neq 3$.
4. R 是有理数集合 Q 上的关系，且 xRy 当且仅当 $y = x + 2$.
5. R 是自然数集合 N 上的关系，且 xRy 当且仅当 $xy = 4$.

2 设 $A=\{1,2,4,6\}$, 列出下列关系 R .

1. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x + y \neq 2 \}$.
2. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge |x - y| = 1 \}$.
3. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge \frac{x}{y} \in A \}$.
4. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge y \text{ 为素数} \}$.

3 简答题

3.1 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x - y \text{ 可被 } 2 \text{ 整除} \}$, 简答以下各题.

1. 画出 R 的关系图.
2. R 是否为 A 上的等价关系? 如果是, 求出 R 的各等价类.

3.2 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, 偏序集 $S = \langle A, \preceq \rangle$, 其中, \preceq 为整除关系.

1. 画出 S 的哈斯图.
2. 找出 $\{4, 6\}$ 的最大下界和最小上界.

- 3.3 $A = \{1, 2, \dots, 12\}$, \preceq 为整除关系, $B = \{x | x \in A \wedge 2 \leq x \leq 4\}$, 在偏序集 $\langle A, \preceq \rangle$ 中求 B 的上界, 下界, 最小上界和最大下界.

4 证明题

- 4.1 证明 $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A * C \subseteq B * D$.

- 4.2 证明题 4.1 的逆命题是否正确, 证明你的结论.

- 4.3 设 R 是 A 上的自反和传递关系, 如下定义 A 上的关系 T, 使得任意的 $x, y \in A$.

$$\langle x, y \rangle \in T \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

证明: T 是 A 上的等价关系.

- 4.4 设 $\langle A, B \rangle$ 为偏序集, 在 A 上定义新的关系 S: 任意 $x, y \in A$, $xSy \Leftrightarrow yRx$, 称 S 为 R 的对偶关系. 证明: S 也是 A 上的偏序关系