图的练习题

1．证明：序列（7，6，5，4，3，3，2），（6，5，5，4，3，2，2）以及（6，6，5，4，3，3，1）都不是简单图的度序列。

证 由于 7 个顶点的简单图中不可能有 7 度的顶点，因此序列（7，6，5，4，3，3，2）不是简单图的度序列。

序列（6，5，5，4，3，2，2）中有三个奇数，因此它不是简单图的度序列。

序列（6，6，5，4，3，3，1）中有两个 6，若它是简单图的度序列，那么应有两个顶点是 6 度顶点，于是它们都要与其它所有顶点邻接，该图就不会有一度的顶点，与序列中末尾的 1 冲突。故（6，6，5，4，3，3，1）也不是简单图的度序列。

2．（l）证明：n 个顶点的简单图中不会有多于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

（2）n 个顶点的有向完全图中恰有 n^2 条边。

证（l）n 个顶点的简单完全图的边数总和为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

（2）n 个顶点的有向完全图的边数总和为

$$n+n+\cdots+n+n=n\times n=n^2$$

3．证明：在任何 n (n≥2)个顶点的简单图 G 中,至少有两个顶点具有相同的度。

证 如果 G 有两个孤立顶点，那么它们便是具有相同的度的两个顶点。

如果 G 恰有一个孤立顶点，那么我们可对有 n – 1 个顶点但没有孤立顶点的 G’（它由 G 删除孤立顶点后得到）作下列讨论。

不妨设 G 没有孤立顶点，那么 G 的 n 个顶点的度数应是：1，2，3，…，n – 1 这 n – 1 种可能之一，因此必定有两个顶点具有相同的度。

4．图 G 有 12 条边,度数为 3 的结点有 6 个,其余结点度数均小于 3，求 G 至少有多少个结点?

解：由握手定理知道,度数之和为 24，减去度数 18，还剩 6，如果其余结点均为 2 度顶点,则有 3 个结点，则至少为 9 个结点.

5．特殊图：

完全图：Kn

偶　图：

完全偶图：Kn,m

正则图：每个定点的度都相等.

6．同构 设图 G1=<V1,E1>，G2=<V2,E2>，若存在双射 V1 到 V2 的函数 f，f 具有如下性质：对于 V1 里的所有 a 和 b 来说，二者在 G1 里相邻，当且仅当 f(a)和 f(b)在 G2 里相邻，则称 G1 与 G2 同构;

二图同构则必有结点数相同，边数相同，两图中度数相同的结点的个数相同。还可以知道，图的同构关系是一种等价关系.

7．画出 4 阶 3 条边的所有非同构无向简单图.

解： 由握手定理可知，所画的无向简单图各结点度数之和为 2×3＝6，最大

度数小于或等于 3。于是所求无向简单图的度数列应满足的条件是：将 6 分成 4 个非负整数，每个整数均大于或等于 0 且小于或等于 3，并且奇数个数为偶数。将这样的整数列排列出来只有下列三种情况：

3、1、1、1； 2、2、1、1； 2、2、2、0

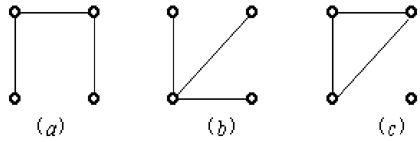
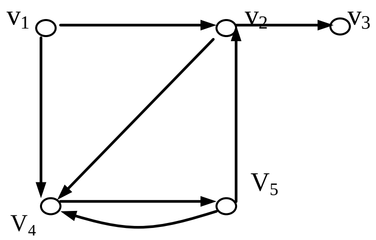


图10-7

8．无向完全图 K_n 有 36 条边,则它的结点数 n 为 9

9．对图 7 给出的有向图 G:



（1）计算它的邻接矩阵 A 及 A^2，A^3，A^4，说出从 v_1 到 v_4 的长度为 l，2，3，4 的拟路径各有多少条。

（2）计算 A◯A'，A'◯A，说出它们中第 2，3 分量及第 4，4 分量的意义。

解（1）

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&2&1\end{pmatrix}$$

V_1 到 V_4 的长度为 l，2，3，4 的拟路径各有 1 条，1 条，1 条，2 条 。

(2)

$$A◯A'=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}◯\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0&2\\1&2&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\2&1&0&0&2\end{pmatrix}$$

第 2，3 分量为 0，表示没有顶点使 v_2 ，v_3 到它都有边；第 4，4 分量为 1，表示 v_4 的出度为 1 。

$$A'◯A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}◯\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&1&1&0\\0&2&1&3&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

第 2，3 分量为 0，表示没有顶点到 v_2 ，v_3 都有边；第 4，4 分量为 3，表示 v_4 的入度为 3 。

7．考虑七天内安排七门课程的考试，使得同一位老师所教的课程不能在连续的天考试，如果每名老师教的课程不超过 4 门，那么能否做出这样的安排。

证明　设 G 为具有七个结点的图，每个结点对应于一门课程考试，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过 4，故每个结点的度数至少是 3，任两个结点的度数之和至少是 6，故 G 总是包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当的安排。

8．某地有 5 个风景点，若每个风景点均有两条道路与其他地点相通，问是否可经过每个风景点恰好一次而游玩这 5 处？

解：将风景点作为结点，连接风景点的路作为边，则得到一个无向图 G。由题意可知，对 G 中每个结点均有 $d(v)=2$。于是对任意 u、$v\in G$，有 $d(u)+d(v)=2+2=4=5-1$，所以该图有一哈密尔顿路，故本题有解。

9．确定n取怎么样的值，完全图Kn有一条欧拉回路。

解：Kn 有 n 个结点，每个结点的度数为 n-1，故当 n 为奇数时，图 K n 有一条欧拉回路。

10．证明在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

证明：

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。则原命题相当于在该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中有 n 个顶点，则图中 n 个顶点的度数只能为 0,1,2,⋯,n-1。若图中有两个或两个以上的顶点度数为 0，则结论显然成立。否则所有顶点的度数都大于等于 1。现用反证法证明该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中 n 个顶点中任何一对顶点的度数都不相等，即这 n 个顶点的度数两两不同。但每个顶点的度数只能是 1,2,⋯,n-1 这 n-1 个数中的某一种，这显然产生了矛盾。

因此该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。从而在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

11．证明对于连通无向简单平面图，当边数 $e<30$ 时，必存在度数≤4 的顶点。

证明：

若结点个数小于等于 3 时，结论显然成立。

当结点多于 3 个时，用反证法证明。

记|V|=n,|E|=m,|F|=k。假设图中所有结点的度数都大于等于 5。由欧拉握手定理得

$5n\le 2m$。

又因为 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对每个面 f

$\deg(f)\ge 3$。

由(面的次数之和等于边数的两倍)可得，$2m\ge 3k$。

再由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得 $2\le \frac{2}{5}m-m+\frac{2}{3}m=\frac{1}{15}m$

从而 $30\le m$,这与已知矛盾。

12. 给定连通简单平面图 G=<V,E,F>，且|V|=6，|E|=12，则对于任意 $f\in F$，d(f)=3。

证明：因为|V|=6≥3，且 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，
所以对任一 $f\in F$，$\deg(f)\ge 3$。由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得|F|=8。

再由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$，$\sum_{f\in F}\deg(f)=24$。

因为对任一 $f\in F$，$\deg(f)\ge 3$，故要使上述等式成立，对任一 $f\in F$，$\deg(f)=3$。

13. 试问 n 个节点的完全图 K_n 中有多少回路？有没有欧拉路或欧拉回路？

解 在 K_n 中，3 条边可以组成一个回路，有 C_n^3 个；4 条边也可以组成一个回路，有 C_n^4 个；以此类推，n 条边可以构成的回路有 C_n^n 个，故 K_n 中回路总数为

$$C_n^3+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^n-1-n-\frac{n(n-1)}{2}=2^n-\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

当 n 为奇数时，每个节点的度数都是偶数，有欧拉回路；当 n 为偶数时，只有在 n=2 时有欧拉路。

14. 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是简单无向图，且 $|V|=5$，$|E|=3$，试画 出 G 的所有可能形式（不同构的图）。

解 由握手定理可知，所画的简单无向图各节点度数之和为 $2\times 3=6$。最大度数小于或等于 3。于是所求的简单无向图的度数列应满足的条件是：将 6 分成 5 个非负整数，每个整数均大于或等于 0 且小于或等于 3，并且奇数个数为偶数。将这样的整数列排列出来，只有下列四种情况：

3，1，1，1，0

2，2，2，0，0
2，1，1，1，1
2，2，1，1，0

将每种度数列所有非同构的图都画出来即得到所要求的全部非同构的图，如图 7-15 所示。

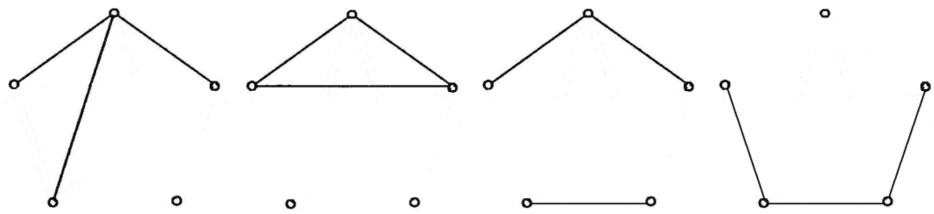


图 7-15 （5,3）图的全部非同构图

由图同构的定义，可以得到两图 $G=<V,E>$ 和 $G'=<V',E'>$ 同构的几个必要条件：

（1）节点数目相等；
（2）边数相等；
（3）度数相同的节点数目相等。

15. “摆渡问题”：一个人带有一条狼、一头羊和一捆白菜，要从河的左岸渡到右岸去，河上仅有一条小船，而且只有人能划船，船上每次只能由人带一件东西过河。另外，不能让狼和羊、羊和菜单独留下。问怎样安排摆渡过程？

解 河左岸允许出现的情况有以下 10 种情况：人狼羊菜、人狼羊、人狼菜、人羊菜、人羊、狼菜、狼、菜、羊及空（各物品已安全渡河），我们把这 10 种状态视为 10 个点，若一种状态通过一次摆渡后变为另一种状态，则在两种状态（点）之间画一直线，得到图 7-22

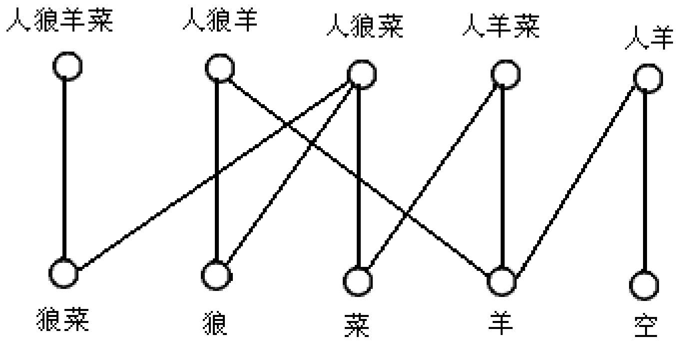


图 7-22

这样摆渡问题就转化成在图中找出以“人狼羊菜”为起点，以“空”为终点的简单路。容易看出，只有两条简单路符合要求，即：

（1）人狼羊菜、狼菜、人狼菜、菜、人羊菜、羊、人羊、空；
（2）人狼羊菜、狼菜、人狼菜、狼、人狼羊、羊、人羊、空。

对于简单路（1）的安排为：人带羊过河；人回来；带狼过河；放下狼再将羊带回；人再带菜过河；人回来；带羊过河。

对于简单路（2）的安排为：人带羊过河；人回来；带菜过河；放下菜再将羊带回；人再带狼过河；人回来；带羊过河。

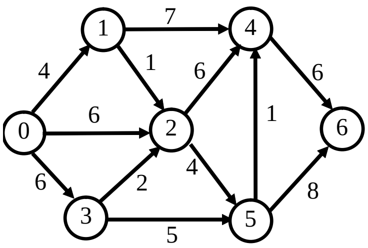
16. n 个结点的有向完全图边数是(　　　)，每个结点的度数是(　　)。

n(n-1),2n-2

17. 下列三元组中的数字分别表示一个图的结点数，边数和面数， 则其中 （ C ）不能够构成平面图。

(a) (4,4,2)　　(b) (4,5,3)　　(c)　(9,6,6)　　(d) (7,8,3)

18. 用狄克斯特拉算法算法计算 V_0 到其余各点的最短路径.



19. 下列(　　) 不是平面图

A.　K_2　　B.　K_3　　C.　K_4　　D. K_5

20. 若 *G* 是连通的平面图，且 *G* 的每个面的次数至少为 *l*(*l*≥3)，则 *G* 的边数 *m* 与结点数 n 有如下关系：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

21. 设 G 是 n(n≥3)阶 m 条边的简单连通平面图，则 m≤3n－6。