

南开大学软件学院《离散数学》期中试题

1 命题逻辑

1.1 求下列公式的主析取范式, 并求其成真赋值. (4 分)

1. $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r)$.
2. $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

1.2 求下列公式的主合取范式, 并求其成假赋值. (4 分)

1. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$.
2. $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$.

1.3 用等值演算法求解 (6 分)

在某班班委成员的选举中, 已知王小红、李强、丁金生三位同学被选进了班委会. 该班的甲、乙、丙三名同学预言:

甲说: 王小红为班长, 李强为生活委员.

乙说: 丁金生为班长, 王小红为生活委员.

丙说: 李强为班长, 王小红为学习委员.

班委会分工名单公布后发现, 甲、乙、丙三人都恰好猜对了一半. 问王小红、李强、丁金生各任何职

1.4 在自然推理系统 P 中构造下列推理的证明. (9 分)

1. 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$
结论: $r \vee s$
2. 前提: $q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$
结论: $p \wedge q$
3. 前提: $p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \wedge q$
结论: $r \wedge s$

2 一阶逻辑

2.1 在一阶逻辑中将下列命题符号化. (8 分)

1. 火车都比轮船快.
2. 有的火车比有的汽车快.

3. 不存在比所有火车都快汽车.
4. 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

2.2 求下列各式的前束范式. (4 分)

1. $\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$
2. $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y, z))$
3. $\forall x F(x, y) \leftrightarrow \exists x G(x, y)$
4. $\forall x_1 (F(x_1) \rightarrow G(x_1, x_2)) \rightarrow (\exists x_2 H(x_2) \rightarrow \exists x_3 L(x_2, x_3))$

2.3 在自然推理系统中, 构造下列推理的证明. (9 分)

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车. 每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车. 有的人不喜欢乘汽车. 所以, 有的人不喜欢步行. (个体域为人类集合)

3 集合

3.1

设 $A = \{1, 2\}$, 计算 $P(A) \times A$ (5 分) .

3.2

设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的关系 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y + 1 \text{ 或 } x = y - 1 \}$, R 的补关系 \bar{R} 也是 A 上的关系, 其中, $\bar{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R \}$, 求 \bar{R} (5 分)

3.3

设 R 是自然数集合 N 上的关系, 且满足 xRy 当且仅当 $x + 2y = 10$, 其中 $+$ 为最普通加法, 计算以下各题 (6 分) .

1. $\text{dom} R$ (dom 是定义域)
2. $\text{ran} R$ (ran 是值域)

3.4

$A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$, R_1 和 R_2 为 A 上的关系, 其中 $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A, y - 1 < x < y + 2 \}$
 $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A, x^2 \leq y \}$ 令 $R_i(x) = \{ y \mid x R_i y \}, i = 1, 2$, 求 $R_1(0)$ 与 $R_2(3)$ (8 分) .

4 关系

4.1

设 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, R 是 A 上的二元关系, 其关系定义如下: $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, e \rangle \}$ 用关系矩阵法求最小的自然数 s, t , 使得 $s < t$, 且 $R^s = R^t$. (7 分)

4.2

设 $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, 在 A 上定义二元关系 R 如下: $\langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R$ 当且仅当 $xv = yu$, 证明 R 是一个等价关系. (6 分)

4.3

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $\langle A, \preceq \rangle$ 是偏序集, 其中 \preceq 是整除关系. 画出 $\langle A, \preceq \rangle$ 的哈斯图 (5 分)

5 图

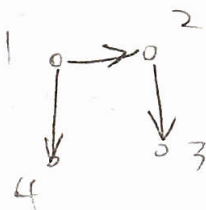
5.1 有向图 (8 分)

设有有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 其关联矩阵为

$$M(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

求:

1. 各顶点的入度, 出度和度数
2. 平行边



5.2 无向图 (8 分)

无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 其关联矩阵为

$$M(D) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

试在同构意义下画出 G 的图形, 并写出:

1. G 的邻接矩阵和可达矩阵

2. v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数和回路数

$0, 1, 2, 3, 4$