一、

1. (1)(4)　　2. (2)(3)(4)　　3. (2)(3)(4)(5)(6)

4. (1) 是；T　(2) 是；F　(3) 否　(4) 是；T　(5) 否　(6) 否

5. (1) 对于任意整数x，存在整数y，使得$x+y=0$

(2) 存在整数y，使得对于任意的整数x，都有$x+y=0$

6. (1) F　(2) F　(3) F　(4) T

7. $\neg \forall x\,(R(x) \to Q(x))$

二、

1. $(P \to Q) \land R$

$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land R$

$\Leftrightarrow (\neg P \land R) \lor (Q \land R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \land (\neg Q \lor Q) \land R) \lor ((\neg P \lor P) \land Q \land R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R)$

$\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_3 \lor m_7$

$\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_7$

∴主析取范式为：$m_1 \lor m_3 \lor m_7$

$(P \to Q) \land R$

$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land R$

$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor (\neg R \land R)) \land ((\neg P \land P) \lor (\neg Q \land Q) \lor R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor \neg R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (P \lor Q \lor R)$

$\Leftrightarrow M_5 \land M_4 \land M_6 \land M_4 \land M_2 \land {}_0$

$\Leftrightarrow M_0 \land M_2 \land M_4 \land M_5 \land M_6$　　∴主合取范式为：$M_0 \land M_2 \land M_4 \land M_5 \land M_6$

2. $(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow (P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)\vee((\neg P\vee P)\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg R\vee R))$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_7\vee m_5\vee m_3\vee m_7\vee m_0\vee m_2\vee m_1\vee m_3$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

∴主析取范式为：$m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow \neg P\vee(R\wedge(P\vee Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee(\neg Q\wedge Q)\vee R)\wedge(1\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M_6\wedge M_4 \Leftrightarrow M_4\wedge M_6$

∴主合取范式为：$M_4\wedge M_6$

3. $Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee P\vee\neg R$

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee P)\wedge\neg Q\wedge(\neg R\vee R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg R\vee R))\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$
$\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_4\vee m_5\vee m_4\vee m_6\vee m_5\vee m_7\vee m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_6$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

∴主析取范式为：$m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow P\vee\neg Q\vee\neg R$

$\Leftrightarrow M_3$

∴主合取范式为：M_3

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

4. $p\to(p\wedge(Q\to p))$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(p\wedge(\neg Q\vee p))$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg Q\vee p)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

即为永真式

∴主析取范式为：$m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$

无主合取范式

三、

1.证明：① $\neg Q\vee R$ 前提引入

② $\neg R$ 前提引入

③ $\neg Q$ ①②析取三段论

④ $p\to Q$ 前提引入

⑤ $\neg p$ ③④拒取式

⑥ $\neg S\vee p$ 前提引入

⑦ $\neg S$ ⑤⑥析取三段论

2.证明：① A 前提引入

② $A\to(B\to C)$ 前提引入

③ $B\to C$ ①②假言推理

④ B 附加前提引入

⑤ C ③④假言推理

⑥ $C\to(\neg D\vee E)$ 前提引入

⑦ $\neg D\vee E$ ⑤⑥假言推理

⑧ $\neg F\to(D\wedge\neg E)$ 前提引入

⑨ F ⑦⑧拒取式

3.证明：① $P \to R$ 前提引入

② $\neg(\neg P)$ 结论否定引入

③ P ②置换

④ R ①③假言推理

⑤ $(P\to Q)\wedge(R\to S)$ 前提引入

⑥ $Q\wedge S$ ③④⑤假言推理

⑦ $(Q\to W)\wedge(S\to X)$ 前提引入

⑧ $W\wedge X$ ⑥⑦假言推理

⑨ $\neg(W\wedge X)$ 前提引入

⑩ $(W\wedge X)\wedge\neg(W\wedge X)$ ⑧⑨合取

由归谬论可证得成立

四.

解：设 p：李明>朱智 q：陈红<朱智 r：陈红<李明

由题可知，三人中至少有2个人说假话，可符号化为：

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

① $\neg p\wedge\neg q\wedge r$：李<朱，陈>朱，陈<李 ∴不成立

② $\neg p\wedge q\wedge\neg r$：李<朱，陈<朱，陈>李；即：朱>陈>李

③ $p\wedge\neg q\wedge\neg r$：李>朱，陈>朱，陈>李；即：陈>李>朱

④ $\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$：李<朱，陈>朱，陈>李；即：陈>朱>李

∴大小顺序可能为：①朱智>陈红>李明 ②陈红>李明>朱智 ③陈红>朱智>李明

五.

a) $\exists x(x^3=-1)$：1 b) $\exists x(x^4<x^2)$：1 c) $\forall x((-x)^2=x^2)$：1 d) $\forall x(2x>x)$：0

六. 令 $G(x,y)=\forall y P(x,y)$，则

1)证明：$\neg\exists x\forall y P(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x\neg G(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(\forall y P(x,y))$.

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\neg P(x,y)$

(3) 证明：① $\exists x \neg P(x)$　前提引入

② $\neg P(a)$　存在量词消去

③ $\forall x (P(x) \vee Q(x))$　前提引入

④ $P(a) \vee Q(a)$　全称量词消去

⑤ $Q(a)$　②④ 析取三段论

⑥ $\forall x (\neg Q(x) \vee S(x))$　前提引入

⑦ $\neg Q(a) \vee S(a)$　全称量词消去

⑧ $S(a)$　⑤⑥ 析取三段论

⑨ $\forall x (R(x) \rightarrow \neg S(x))$　前提引入

⑩ $R(a) \rightarrow \neg S(a)$　全称量词消去

⑪ $\neg R(a)$　⑧⑩ 拒取式

∴ $\exists x \neg R(x)$ 为真

(2) 证明：令 $G(x,y) = \forall y P(x,y)$，则

$\neg \exists x \forall y P(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg G(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg (\forall y P(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y \neg P(x,y)$

(4) 证明：设 $G(x)$：x 是有理数，$F(y)$：y 是无理数，$H(x,y,z)$：z 在 x,y 之间，则可符号化为：

$\forall x \forall y (G(x) \wedge F(y) \rightarrow \exists z (F(z) \wedge H(x,y,z)))$

则其逆命题为：$\exists x \exists y (G(x) \wedge F(y) \wedge G(z) (F(z) \rightarrow \neg H(x,y,z)))$

∵ 有理数 x 与无理数 y 间的差值：$r = y - x$

若假设 r 为有理数，则可设数 $m = x + r$

∵ x, r 均为有理数，又 ∵ 有理数集合对加法封闭

∴ m 为有理数

又 ∵ $y = x + r$，y 为无理数

∴ 矛盾

∴ 假设不成立

r 为无理数

∴ x, y 之间存在无理数

证毕.