知识点

数学

Trick

1. $gcd(f_i, f_j) = f_{gcd(i,j)}$，$f_i$ 表示斐波那契数列的第 i 项
2. $f_{n+m} = f_{n+1}f_m + f_nf_{m-1}$，$f_i$ 表示斐波那契数列的第 i 项
   负数通过递推求：$f_{-1} = f_1 - f_0$，$f_{-2} = f_0 - f_{-1}$，$f_{-i} = f_{-(i-2)} - f_{-(i-1)}$
3. $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749$
4. n 个变量取值为 $|a_i| \le W$，满足 $\sum a_i$ 很小，随机打乱后的前缀和基本满足 $|pre| \le \sqrt{n}W$

泰勒展开

$$f(x) = \sum_{i=0} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$
$$\text{取 } x_0 \to 0, \text{有}$$
$$e^x = \sum_{i=0} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$ln(1+x) = \sum_{i=0} \frac{(-1)^i}{i+1}x^{i+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$
$$sinx = \sum_{i=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$cosx = \sum_{i=0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

线性代数

LGV 引理

在**有向无环图**中，A 是起点集合，B 是终点集合，大小均为 n.

$w(P)$ 表示路径 P 上所有边的边权之积，作为路径的权值；路径计数时，可以将边权都设为 1

$e(u, v)$ 表示 u 到 v 所有路径的权值和；路径计数时，表示 u 到 v 的**路径数。**

一个不相交路径的集合 S，对应一个排列 $\sigma(S)$，S_i 表示 A_i 到 B_{σ_i} 的路径；对于 $i \ne j$，有 S_i 和 S_j 没有公共点。

设路径集合 S 的权值为 $val(S) = (-1)^{t(\sigma(S))}\prod w(S_i)$，其中 $t(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序对个数.

路径计数时，$\prod_S w(S_i) = 1$，即 $val(S) = (-1)^{t(\sigma(S))}$，若只计算奇偶性，则 $val(S) = 1$

对于矩阵 M，它的行列式表示所有 $A \to B$ 的不相交路径集合 S 的权值和，即 $det(M) = \sum_S val(S)$

$det(M)$ 也表示**不相交路径集合的奇偶数。**

$$M=\begin{bmatrix}e(A_1,B_1) & e(A_1,B_2) & \cdots & e(A_1,B_n)\\ e(A_2,B_1) & e(A_2,B_2) & \cdots & e(A_2,B_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e(A_n,B_1) & e(A_n,B_2) & \cdots & e(A_n,B_n)\end{bmatrix}$$

$$\det(M)=\sum_{S:A\to B}(-1)^{t(\sigma(S))}\prod_{i=1}^{n}\omega(S_i)$$

矩阵树定理

1. 对于 n 个点的无向无权图，设 A 为邻接矩阵，A_{ij} 表示边 e_{ij} 的个数；D 为度数矩阵 D_{ii} 表示点 i 的度数，$D_{ij}=0(i\neq j)$.

   基尔霍夫矩阵 $K=D-A$，K' 为 K 去掉第 k 行第 k 列的 $n-1$ 阶矩阵（k 任意），则 $det(K')$ 表示这张图生成树的个数。
2. 在有边权的情况下，将边权理解成**重边条数**，定义生成树的权值为所有边的乘积，则 $det(K')$ 表示所有生成树的权值和。
3. 对于 n 个点的**有向图**，A 表示邻接矩阵，D^{in} 表示**入度**矩阵，D^{in}_{ii} 表示点 i 的入度数，则 $K=D^{in}-A$

   设 K' 为 K 去掉第 k 行第 k 列的 $n-1$ 阶矩阵，则 $det(K')$ 表示这张图**以 k 为根的外向树**个数。
4. 对于 n 个点的有向图，A 表示邻接矩阵，D^{out} 表示**出度**矩阵，D^{out}_{ii} 表示点 i 的出度数，则 $K=D^{out}-A$

   设 K' 为 K 去掉第 k 行第 k 列的 $n-1$ 阶矩阵，则 $det(K')$ 表示这张图**以 k 为根的内向树**个数。

BEST 定理

1. 设 G 是有向欧拉图，则 G 中循环同构的欧拉路径数量为 $sum=T\times\prod_i(out_i-1)$，$T$ 表示图中内向树个数。
2. 在欧拉图中，以任意一点为根的内向树个数相同，即 $T_i=T_j(i\neq j)$。
3. 以 i 出发的欧拉回路个数，等于循环同构的欧拉路数量和 i 的出度的乘积，即 $c_i=sum\times max(1,out_i)$。

数论

莫比乌斯函数

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{若 } n=1\text{；}\\ (-1)^k & \text{若 } n \text{ 无平方数因数，且 } n=p_1p_2\cdots\cdots p_k\text{；}\\ 0 & \text{若 } n \text{ 有大于} 1 \text{ 的平方数因数。}\end{cases}$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & n=1\\0 & n\neq 1\end{cases}$$

$$[\gcd(i,j)=1]=\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)$$

莫比乌斯反演

如果有：

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$$

那么有：

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})$$

这种形式下，数论函数 $f(n)$ 称为数论函数 $g(n)$ 的莫比乌斯变换，数论函数 $g(n)$ 称为数论函数 $f(n)$ 的莫比乌斯逆变换（反演）。

如果有：

$$f(n)=\sum_{n|d}g(d)$$

那么有：

$$g(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})f(d)$$

常用公式

1.

$$\begin{aligned}&\sum_{d=1}^{n}\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}p\\=&\sum_{d=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{d}[d|p]\\=&\sum_{T=1}^{n}\sum_{p|T}p\end{aligned}$$

2.

$$\sum_{d=1}^{n}\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}pf(d)$$

$$=\sum_{T=1}^{n}\sum_{p|T}pf(\frac{T}{p})$$

$$=\sum_{T=1}^{n}\sum_{d|T}\frac{T}{d}f(d)$$

3.

$$d(n)=\sum_{i|n}1$$

$$d(i\cdot j)=\sum_{x|i}\sum_{y|j}[\gcd(x,y)=1]$$

4.

$$\sum_{i=1}^{n}[d|i]\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$$

$$\text{设 } i=kd$$

$$\sum_{i=1}^{n}[d|i]\lfloor\frac{n}{i}\rfloor=\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor$$

$$=\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\lfloor\frac{n}{id}\rfloor$$

相当于把整除条件通过两个向下取整消去了

5.

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)*\frac{n}{d}$$

$$\text{即}\varphi=\mu*id$$

6.

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,k)=1]$$

思考，当 $i>k$ 时，有 $\gcd(i,k)=\gcd(i+k,k)$，那么答案肯定是呈现一个长度为 k 的循环，那么有:

$$f(n)=f(n \bmod k)+\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\varphi(k)$$

常见反演

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=1] \\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x|i}\sum_{x|j}\mu(x) \\
&=\sum_{x=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x|i][x|j]\mu(x) \\
&=\sum_{x=1}^{n}\mu(x)\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\gcd(i,j)) \\
&=\sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=d] \\
&=\sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]
\end{aligned}
$$

$$
=\sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{dk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dk}\right\rfloor
$$

令 $dk=T$，则:

$$
=\sum_{T=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor\sum_{d|T}f(d)\mu(\frac{T}{d})
$$

欧拉函数

定义 $\varphi(x)$ 为小于 x 且与 x 互质的数的个数

性质:

1.

- $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$。

2.

$$\varphi(n)=n\times\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i}$$

若p为质数，则 $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$

3.

$\forall n > 1$， 1~ N中所有与 n 互质的数的和为 $\frac{n \cdot \varphi(n)}{2}$

4.

$\varphi(\varphi(m)) \le \frac{m}{2}$

幂塔每计算两次，模数至少除2

5. 若 p 为质数，若 $p|n$ 且 $p^2|n$ ，则 $\varphi(n)=\varphi(\frac{n}{p})\cdot p$；若$p$ 为质数，若 $p|n$ 且 $p^2 \nmid n$ ，则 $\varphi(n)=\varphi(\frac{n}{p})\cdot(p-1)$。

欧拉反演

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x|i}\sum_{x|j}\varphi(x)\\
&=\sum_{x=1}^{n}\varphi(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x|i][x|j]\\
&=\sum_{x=1}^{n}\varphi(x)\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{x}\right\rfloor
\end{aligned}
$$

欧拉定理

若 $\gcd(a,m)=1$，则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$。

扩展欧拉定理（欧拉降幂）

$$
a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(m)}, & \gcd(a,m)=1, \\ a^b, & \gcd(a,m)\ne 1, b<\varphi(m), \\ a^{(b \bmod \varphi(m))+\varphi(m)}, & \gcd(a,m)\ne 1, b\ge\varphi(m). \end{cases} \pmod{m}
$$

费马小定理

对于任意整数 a，有 $a^p \equiv a \pmod{p}$。

整除分块

求 $\sum_{i=1}^{x} \frac{n}{\lfloor ai+b \rfloor}$

$$\begin{aligned} k &= \lfloor \frac{n}{ai+b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{al+b} \rfloor \\ r^* &= \lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{ai+b} \rfloor} \rfloor \\ \\ r^* &= ai+b \\ r &= max(i) \\ \Rightarrow r &= \lfloor \frac{r^*-b}{a} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{ai+b} \rfloor} \rfloor - b}{a} \rfloor \end{aligned}$$

类欧几里得算法

$$f(a,b,c,n) = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor$$

如果说 $a \geq c$ 或者 $b \geq c$，意味着可以将 a, b 对 c 取模以简化问题：

$$\begin{aligned} f(a,b,c,n) &= \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{\left(\lfloor \frac{a}{c} \rfloor c + a \bmod c\right)i + \left(\lfloor \frac{b}{c} \rfloor c + b \bmod c\right)}{c} \right\rfloor \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + (n+1) \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{(a \bmod c)i + (b \bmod c)}{c} \right\rfloor \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + (n+1) \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor + f(a \bmod c, b \bmod c, c, n) \end{aligned}$$

我们可以把变量 i 消掉了！具体地，令 $m = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$，那

$$\begin{aligned} f(a,b,c,n) &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n} \left[i > \left\lfloor \frac{jc+c-b-1}{a} \right\rfloor \right] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (n - \left\lfloor \frac{jc+c-b-1}{a} \right\rfloor) \\ &= nm - f\left(c, c-b-1, a, m-1\right) \end{aligned}$$

积性函数

若 $f(n)$ 和 $g(n)$ 都是积性函数，，则以下函数也为积性函数：

$$h(x) = f(x^p)$$
$$h(x) = f^p(x)$$
$$h(x) = f(x)g(x)$$
$$h(x) = \sum_{d|x} f(d)g\left(\frac{x}{d}\right)$$

常见积性函数

- 单位函数 $\epsilon(n) = [n = 1]$。
- 幂函数 $Id^k(n) = n^k$， $id^1(n)$ 通常简记为 $id(n)$。
- 常数函数 $1(n) = 1$。
- 因数个数 $\mathrm{d}(n) = \sum_{d|n} 1$。
- 除数函数 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$。$k = 1$ 时为因数和函数，通常简记为 σ_n。$k = 0$ 时为因数个数函数 $\sigma_0(n)$。
- 欧拉函数 $\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n} [\gcd(i, n) = 1]$。
- 莫比乌斯函数 $\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \text{ 含有平方因子} \\ (-1)^k & k \text{为 } n \text{ 的本质不同质因子个数} \end{cases}$。

约数个数函数的性质

$$d(n) = \sum_{i|n} 1$$

d 函数的一个特殊性质：

$$d(i \cdot j) = \sum_{x|i} \sum_{y|j} [\gcd(x, y) = 1]$$

狄利克雷卷积性质

定义两个数论函数 f, g 的狄利克雷卷积为：

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

2. ϵ 为狄利克雷卷积的单位元，有 $(f*\epsilon)(n)=f(n)$。
3. 若 f,g 为积性函数，则 $f*g$ 为积性函数。
4. $\epsilon=\mu*1=\sum\limits_{d|n}\mu(d)$。
5. $(\mathrm{Id}_k*1)(n)=\sum_{d|n}\mathrm{Id_k}(d)=\sum_{d|n}d^k=\sigma_k(n)$。
6. $\begin{array}{l}\varphi*1=\mathrm{Id}\\ \quad\varphi=\mathrm{Id}*\mu\end{array}$。

杜教筛

求 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)$，其中 $f(i)$ 为积性函数。

$1\le n\le 2^{31}$。

构造积性函数 h,g，使得 $h=f*g$。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}h(i)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(\frac{i}{d})g(d)\\
&=\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(i)\\
&=\sum_{d=1}^{n}g(d)S(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor)
\end{aligned}
$$

结论：找个能快速求前缀和的 $h(x)$，套入以下公式

$$
S(n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}h(i)-\sum\limits_{d=2}^{n}g(d)S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)}{g(1)}
$$

威尔逊定理

p 是质数当且仅当 $p-1$ 的阶乘在模 p 意义下等于 -1

$$(p-1)!\equiv-1\ (mod\ p),\text{当且仅当}p\text{为素数}$$

阶

满足同余式 $a^n\equiv 1\pmod m$ 的最小正整数 n 存在，这个 n 称作 a 模 m 的阶，记作 $\delta_m(a)$ 或 $\mathrm{ord}_m(a)$.

$a,a^2,\cdots,a^{\delta_m(a)}$ 模 m 两两不同余。

若 $a^n \equiv 1 \pmod{m}$，则 $\delta_m(a) \mid n$.

若 $a^p \equiv a^q \pmod{m}$，则有 $p \equiv q \pmod{\delta_m(a)}$.

设 $m \in \mathbf{N}^*$，$a, b \in \mathbf{Z}$，$(a, m) = (b, m) = 1$，则

$$\delta_m(ab) = \delta_m(a)\delta_m(b)$$

的充分必要条件是

$$(\delta_m(a), \delta_m(b)) = 1$$

原根

设 $m \in \mathbf{N}^*$，$g \in \mathbf{Z}$. 若 $(g, m) = 1$，且 $\delta_m(g) = \varphi(m)$，则称 g 为模 m 的原根。

即 g 满足 $\delta_m(g) = |\mathbf{Z}_m^*| = \varphi(m)$. 当 m 是质数时，我们有 $g^i \bmod m,\ 0 < i < m$ 的结果互不相同。

设 $m \geqslant 3, (g, m) = 1$，则 g 是模 m 的原根的充要条件是，对于 $\varphi(m)$ 的每个素因数 p，都有 $g^{\frac{\varphi(m)}{p}} \not\equiv 1 \pmod{m}$.

若一个数 m 有原根，则它原根的个数为 $\varphi(\varphi(m))$.

一个数 m 存在原根当且仅当 $m = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$，其中 p 为奇素数，$\alpha \in \mathbf{N}^*$.

(原根存在定理)

计算几何

反演变换

> ## 定义
>
> 给定反演中心点 O 和反演半径 R。若平面上点 P 和 P' 满足:
>
> - 点 P' 在射线 $\overrightarrow{OP}$ 上
> - $|OP| \cdot |OP'| = R^2$
>
> 则称点 P 和点 P' 互为反演点。

- 记圆 A 半径为 r_1，其反演图形圆 B 半径为 r_2，则有:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|OA| - r_1} - \frac{1}{|OA| + r_1}\right)R^2$$

1. 过 O 的圆的反演是一条直线
2. 不过 O 的圆的反演是还一个圆，在 R 内的部分反演到 R 外， R 外的部分反演到 R 内，和反演圆的交点个数不变
3. 不过 O 的直线的反演是过 O 的圆
4. 过 O 的直线反演是它本身
5. 两个图形相切且存在不为点 O 的切点，则他们的反演图形也相切
6. 反演之后的圆的圆心不是反演之前的圆的圆心的反演
7. 反演之后的圆的圆心必在反演圆和被反演圆的圆心的连心线的延长线上

Trick

1. 凸多边形对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$

组合数学

二项式反演

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g(k)$$

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)$$

卡特兰数

- n 对括号合法方案数
- n 个结点二叉树个数
- $n\times n$ 方格到对角线下方的单调路径数
- 凸 $n+2$ 边形的三角划分数

卡特兰数有多种定义方式

$$C_0=C_1=1$$

递归定义：
$$\begin{aligned}C_n&=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}\\&=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0,\text{其中}n\geq 2\end{aligned}$$

递推公式：$C_n=\frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$

通项公式：$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}=C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$

$C_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i\right)^2$

斯特林数

$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ 为第一类斯特林数，表示把 n 个元素组成 m 个圆排列 (圆之间无顺序区别) 的个数

$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$ 为第二类斯特林数，表示把 n 个元素划分到 m 个非空集合 (集合之间无顺序区别) 的方案数

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-i} i^n}{i!(m-i)!}$$

错位排列

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ D_2 &= 1 \\ D_n &= (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\ &= n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}) \\ &= \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor \end{aligned}$$

min/max 容斥

把 交集/并集 换成 min/max 即可

由于期望的线性性，求满足若干条件的最大值的期望时，可以枚举条件的子集，计算最小值的期望，我们只需要关心什么时候首次满足条件即可

$$\max_{i \in S}(x_i) = \sum_{T \subseteq S, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|-1} \min_{j \in T}(x_j)$$
$$\min_{i \in S}(x_i) = \sum_{T \subseteq S, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|-1} \max_{j \in T}(x_j)$$
$$E(\max_{i \in S}(x_i)) = \sum_{T \subseteq S, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|-1} E(\min_{j \in T}(x_j))$$

常用公式

拆自然数幂

$$i^k = \sum_{j=0}^{k} S(k,j) \times C(i,j) \times j!$$

组合数递推式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

广义二项式系数/定理

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)(n-2)..(n-m+1)}{m!}$$

$$(1+x)^a=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{a}{i}x^i$$

二项式定理 $a=b=1$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

二项式定理 $a=1,b=-1$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}=[n=0]$$

$$C(n,0)+C(n,2)+\ldots+C(n,2k)=C(n,1)+C(n,3)+\ldots+C(n,2k+1)$$
$$=2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}C(n,2i)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}C(n,2i+1)=2^{n-1}$$

范德蒙德卷积（合并组合数）

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i}=\binom{m+n}{m}\quad(n\geq m)$$

$n=m$ 特殊情况

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i}=\binom{m+n}{m}\quad(n\geq m)$$

二项式定理求导

$$\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}=n2^{n-1}$$

拆排列数

$$A_n^m=A_{n-1}^m+m*A_{n-1}^{m-1}$$

组合数性质

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$$

组合数二次求导

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i = 2^{n-2} n(n-1)$$

错位排列

对于$a_1, \cdots, a_n$共n个元素中的全排列，对任意的$i, 1 \le i \le n$，有a_i不在第i个位置上，这样的排列称为错位排列，总排列数为

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

其中递推公式为

$$f(n) = (n-1)[f(n-1) + f(n-2)]$$

博弈论

巴什博奕

巴什博弈（Bash game）是一个双人博弈：有一堆总数为n的物品，2名玩家轮流从中拿取物品。每次至少拿1件，至多拿m件，不能不拿，最终将物品拿完者获胜。

在先取完者胜的巴什博弈中，若n可被m+1整除，则后手方必胜，否则先手方必胜。具体策略分析如下：

二分图博弈

二分图博弈是一类博弈模型，他可以抽象为：给出一张二分图和起点 S ，A 与 B 轮流进行操作，每次操作只能选择与上一个被选的点相邻的点，且不能选择已经选择过的点，无法选点的人输掉。问先手是否必胜。

先给出结论：**考虑二分图的所有最大匹配，如果在所有的最大匹配的方案中都包含了起点 S ，那么先手必胜，否则先手必败。**

斐波那契博弈

有一堆物品，两人轮流取物品，先手最少取一个，至多无上限，但不能把物品取完，之后每次取的物品数不能超过上一次取的物品数的二倍且至少为一件，取走最后一件物品的人获胜。

结论是：先手胜当且仅当n不是斐波那契数（n为物品总数）

威佐夫博弈

有两堆各若干个物品，两个人轮流从某一堆取至少一个或同时从两堆中取同样多的物品，规定每次至少取一个，多者不限，最后取光者得胜。

当且仅当 $\left\lfloor \frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a) \right\rfloor = a$ 时先手必败。

Chomp游戏

Chomp是一个双人游戏，有m x n块曲奇饼排成一个矩形格状，称作棋盘。

----两个玩家轮流自选一块还剩下的曲奇饼，而且还要把它右边和下边所有的曲奇饼都取走（如果存在）

----先吃到左上角(1,1)那块曲奇饼的玩家为失败

除去 1 x 1大小的棋盘外，其他大小的棋盘，先手存在必胜策略。

1、**三维Chomp游戏**

将曲奇排成 P x Q x R 的立方体，两个玩家轮流自选吃掉一块剩下的曲奇饼，若取走的曲奇饼为 (i,j,k)，则也要取走所有满足 i ≤ a ≤ P，j ≤ b ≤ Q， k ≤ c ≤ R 的曲奇饼(a,b,c)（如果存在）。

可以类似地将Chomp游戏扩展到任意维，并可以类似地证明，先手都存在必胜策略。

2、**有限偏序集上的Chomp游戏**

Chomp游戏可以推广到在任意一个存在最小元 a 的有限偏序集(S,≤)上：两名游戏者轮流选择S中的元素 x，移走 x 以及所有 S 中比 x 大的元素。失败者是被迫选择最小元 a 的玩家。

如果 (S,≤) 有最大元素 b，那么在偏序集上的Chomp游戏存在一个获胜策略.

3、**约数游戏**

给定一个大于1的自然数 N，两个游戏参与者轮流选择N的大于1的正约数，但不可选择之前被选择过的因子的倍数（例如 N = 72，有一方之前选择了4，则之后任一方都不可以再选择36）

4、**删数游戏**

给定整数集合 {1,2,...n}，两个人轮流从中选择一个数字，并将它和它的约数从集合中删除，删除最后一个数的人获胜。

以上几个游戏，类似Chomp游戏，得到结论就是无论 n 是几，都是先手必胜。

阶梯Nim博弈

有n堆石子，每堆石子的数量为$x_1, x_2, ..., x_n$，A, B轮流操作，每次可以选第k堆中的任意多个石子放到第$k-1$堆中，第1堆中的石子可以放到第0堆中，最后无法操作的人为输。问A先手是否有必胜策略。

先手必败当且仅当**奇数**阶梯上的石子数异或和为 0

Nimk游戏

有n堆石子，石子数目分别为x_i，A, B两人每次可以选取最多k堆石子，并从选中的每堆石子堆中取走任意多的石子，问A是否有必胜策略

Nimk存在必胜策略，当且仅当，将所有石子数转成二进制后，存在某位上，所有二进制数中1的个数之和$\%(k+1)$不为0，用数学语言表述，则存在一个数t，使得$(\sum_{i=1}^{n} x_i \wedge 2^{t-1})\%(k+1) \neq 0$

计算**二进制位** 1 的个数在模 $k+1$，若对每一位都满足结果为 0，则先手必败

生成函数

拉格朗日插值

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

生成函数展开

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-ax} &= \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x^i \\
\frac{1}{(1-x)^n} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^i \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\
ln\frac{1}{1-x^k} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^{ik}
\end{aligned}
$$

常用计数结论

以下均为有标号图。
树： $A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^{n-2}}{n!} x^n$
森林： $B(x) = \exp A(x)$
无向图： $C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$
无向连通图： $D(x) = \ln C(x)$

指数公式定理

首先，根据指数公式定理：

如果存在两个 EGF $F(x)$ 与 $G(x)$，满足 $e^{F(x)} = G(x)$，$F(x)$ 是 f_i 的 EGF，那么 $G(x)$ 是

$$g_n = \sum_{\pi=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}} \prod_{i=1}^{n} f_{|S_i|}$$

EGF，其中 π 是 $[n]$ 的划分。

期望与概率

最大值不超过X的最大值期望

记X为最大值，可选1到n，可重复地选m个

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{Y} iP(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{Y} i(P(X \le i) - P(X < i)) \\
&= \sum_{i=1}^{Y} i((\frac{i}{n})^m - (\frac{i-1}{n})^m)
\end{aligned}
$$

- 箱子里有n个球，编号1到n，随机拿m个，求期望和E(s)

记y_i表示i是否被选，选了$y_i=1$否则为0

$$
\begin{aligned}
E(s) &= E(\sum_{i=1}^{n} y_i * i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(y_i * i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} iE(y_i) \\
&= \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{m(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

链上随机游走

- 假设向左向右概率相同，求从链的一段到另一端的期望步数

链上游走，从一端到另一端的期望步数 $E(y)=\sum_{i=1}^{n-1} X_i$ Xi为随机游走i第一次走到i+1步数

$E(y)=\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$ $E(x_2)=1/2+1/2*(1+E(X_1)+E(X_2))$

$E(x_i)=1/2+1/2*(1+E(X_{i-1})+E(X_i))=E(X_{i-1})+2$

$E(y)=\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)=1+3+5+7+9+\ldots=(n-1)^2$

完全图上游走

- 这个很简单，无论你在哪个点，总有1/(n-1)的概率能走到终点，于是期望值E(X)=n-1

完全二分图上随机游走

有2n个点的完全二分图
A：到同侧某点的期望步数
B：到异侧某点的期望步数

$$B = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} * (B+2)$$
$$A = (1+B)$$

得A = 2n，B = 2n - 1

树上随机游走

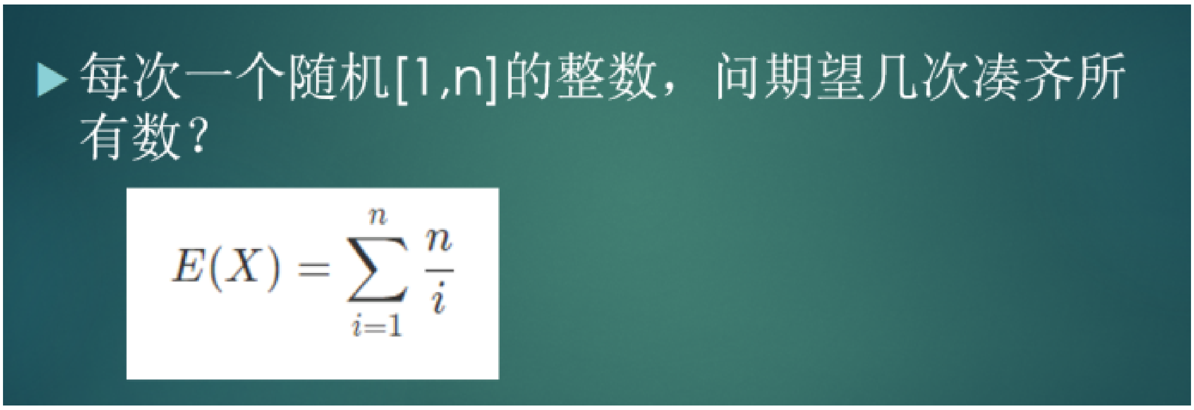
- N个点的树上游走，求从x到y的期望步数

以y为根，记$f(x)$为x点到其父亲的期望步数，记d为x的度，有

$$f(x) = \frac{1}{d} + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d-1}(1 + f(son[i]) + f(x))$$

整理得

$$f(x) = d + \sum_{i=1}^{d-1} f(son[i])$$



图论

连通性定理

对于一个无向图，如果它的补图不联通，那么这个图是连通图

一个不联通的图，它的补图是连通图

点双,圆方树

1. 对于一个点双中的两点，它们之间简单路径的并集，恰好完全等于这个点双
   即：同一个点双中的两点 u, v 之间一定存在一条简单路径经过给定的在同一个点双内的另一点 w
2. 两点间割点的数量，等价于广义圆方树上圆点的数量，即 $dis(u, v)/2+1$
3. 统计路径信息时，给每个圆点和方点赋上合适的值，然后树形 dp
4. 树剖后若要单点修改，可以把每个方点的值用儿子表示，修改时只要修改父节点即可，查询时若 lca 为方点，要特判查询父亲
5. 对于一个点双联通图，若其中存在奇环，则点双中任意一个点都在至少一个奇环中

网络流建模

1. **最大权闭合子图**

   超级源点 s 向正权点连边，边权为点权，负权点向超级汇点 t 连边，边权为点权的绝对值，原图连边正无穷

   最大权为 **所有正权值的和 - 最大流**

2. **最小割构造**

   跑完最大流后，从原点 S 开始走流量不为 0 的边进行 bfs，可达的点集记为 S'

   一端在 S' 中，一端不在 S' 中的边，形成一个最小割集

   最小割可行边（所有割集的并集）

   跑完最大流后，将残量网络进行强连通缩点，所有**满流**且**两端不在同一个联通分量**的边是最小割可行边。

   割的构造：把这条边左端点到 S 的路径钦定为 S 集合,其余为 T 集合,然后把所有 S, T 之间的边割断,这是紧的,而且该边是最小割的一部分。

   不割的构造：如果右端点不是 T ,把这条边右端点到 S 的路径钦定为S 集合。否则左端点必然不是 S ,把这条边左端点到 T 的路径钦定为 T 集合即可。

   最小割必须边（所有割集的交集）

   残量网络进行强连通缩点后，所有**满流**且**一端在 S 联通分量,一端在 T 联通分量**的边是最小割必须边

3. 网络流的**流量出现负值**，可以统一加上 INF 来偏移
4. 求流量为 x 时的最小费用，通过连一些辅助边，限制最大流恰好为 x，然后跑最小费用最大流
5. **上下界最小费用可行流**

   建立虚拟源汇 S,T，对于原图每个点，令 $d[i]$ 表示所有入边的流量下界−所有出边的流量下界

   若 $d[i]>0$，连边 $(S,i,d[i],0)$，若 $d[i]<0$，连边 $(i,T,-d[i],0)$

   对于原图的边，连边 $(u,v,upp-low,w)$

   若为有源汇图，连边 $(T0,S0,INF,0)$

   最小费用为 **每条边的下界*费用+新图的最小费用最大流**
6. **上下界可行流**

   建立虚拟源汇 S,T，对于原图每个点，令 $d[i]$ 表示所有入边的流量下界−所有出边的流量下界

   若 $d[i]>0$，连边 $(S,i,d[i])$，若 $d[i]<0$，连边 $(i,T,-d[i])$

   对于原图的边，连边 $(u,v,upp-low)$

   若为有源汇图，连边 $(T0,S0,INF)$

   求最大流后，**每条边的流量+下界** 即为可行流
7. **有源汇上下界最小流**

   按 **上下界可行流** 方式建图，但是 **先不建边**$(T0,S0)$

   按虚拟源汇跑一遍网络流，得到残量网络

   然后建边 $(T0,S0,INF)$，按虚拟源汇再跑一遍网络流

   $T0\to S0$ 的流量即是答案，也就是**最后一条边的反向边边权**

兰道定理（竞赛图判定）

定义

定义一个竞赛图的比分序列(score sequence)，是把竞赛图的每一个点的出度从小到大排列得到的序列。

定理内容

一个长度为n的序列$s=(s_1\le s_2,\le...\le s_n)$，$n\ge 1$，是合法的比分序列当且仅当：

$$\forall 1\le k\le n,\sum_{i=1}^{k}s_i\ge\binom{k}{2}$$

且 $k=n$时这个式子必须取等号。

二分图

1. 最小点覆盖：选最少的点，满足每条边至少有一个端点被选。

   最小边覆盖：选最少的边，满足每个点至少有一个邻边被选。

   最大独立集：选最多的点，满足两两之间没有边相连。

   最大匹配：选最多的边，满足两两之间没有公共点。

   最小路径覆盖：对于一个 DAG，选最少条路径，使得每个顶点**属于且仅属于**一条路径。

   二分图完美匹配：若两侧点集为 X,Y，大小为 $min(|X|,|Y|)$ 的匹配为完美匹配。

二分图最大团：选左侧点集 X 和右侧点集 Y，使 $|X|+|Y|$ 最大，满足 X 中的每个顶点和 Y 中每个顶点都有边。

二分图补图：对于左侧点 x 和右侧点 y，如果原图中 $x \to y$ 存在，则补图中不存在，否则 $x \to y$ 在补图中存在。

2. $Konig$ 定理：二分图中，**最小点覆盖**$=$**最大匹配数。**

   最小点覆盖构造：先求出一组最大匹配，最大匹配上的点标记为匹配点，边标记为匹配边。

   找出**右侧**的非匹配点集合 S，每次从 S 中取一个点开始 dfs，找出所有 $\text{非匹配边} \to \text{匹配边} \to \text{非匹配边} \to \ldots \to \text{匹配边}$ 的路径，并标记所有经过的点（注意一定是**匹配边结尾**）。

   左侧所有的标记点和**右侧所有的非标记点**组成一个最小点覆盖。

3. **最大独立集** $=$ **总点数** $-$ **最小点覆盖。**（对于**一般图也成立**）

   最大独立集构造：先求出最小点覆盖，再取补集就是最大独立集。

4. **最小边覆盖** $=$ **总点数** $-$ **最大匹配。**

5. 设二分图 $|X| \le |Y|$，称 X 的子集 S 连向 Y 的点集为 S 的**邻域**，记作 $N(S)$。

   $Hall$ 定理：二分图**存在完美匹配的充要条件**为对于 X 的所有子集 S，满足 $|S| \le |N(S)|$。

6. **DAG 最小路径覆盖** $=$ **总点数** $-$ **拆点二分图最大匹配**

   拆点：每个点 i 拆成 $i_{in} \to i_{out}$，流量为 1；原 DAG 上，每条边 $u \to v$ 连 $u_{out} \to v_{in}$，流量为 1。

7. 二分图中，**最大团** $=$ **补图的最大独立集。**

8. 二分图最大匹配**非必经点**：在残量网络中，S **可以到达**的**左**部点和**可以到达** T 的**右**部点是非必经点。

   二分图最大匹配**必经点**：在残量网络中，S **不能到达**的**左**部点和**不能到达** T 的**右**部点是必经点。

   如果在**左部非必经点和右部非必经点**间连一条边，可以使二分图最大匹配**增加** 1

   非必经点求法：

   1. 在残量网络上，从 S 开始 $dfs1$，走**流量非零**的边，可以到达的**左部点**为非必经点；

      从 T 开始 $dfs2$，走**反边流量非零**的边，可以到达的右部点为非必经点。

   2. 先跑 $dinic$，$dis[i] \ne 0$ 的**左部点**为非必经点。

      把所有边反向，流量恢复为初始状态，以 T 为源点跑 $dinic$，$dis[i] \ne 0$ 的**右部点**为非必经点。(通过 $swap(S,T)$ 实现)

图论Trick

1. 在一棵树上选 k 个点，按照 dfs 序排序为 $\{a_1, a_2 \ldots a_k\}$

   它们形成的极小联通子树的边权和的二倍等于 $dis(a_1,a_2)+dis(a_2,a_3)+\ldots dis(a_{k-1},a_k)+dis(a_k,a_1)$

   它们所有点的 lca 为 $lca(a_1,a_k)$

2. 最小割在数值上等于最大流

   最小割的割边数量：将最大流中流满的边赋值 1，其它边赋值 INF，再跑一遍最大流，注意**反边要全部清0**

3. LCA 具有区间可加性，可以用线段树维护

4. **分层图最短路建模**

如果有 k 次机会免费/特殊代价走一条边，可以建 k 张完全相同的图，每张图对应点以特殊边权 $/0$ 相连，每向下走一层代表用了一次机会，**答案不一定在最后一层，考虑每一层的终点**

如果有 k 个不同的边集，可以建 k 张图，然后建一张虚层，和 k 张图连起来，通过虚层实现层与层的转移

如果 k 个机会逆向行使，建 k 张相同的图，层与层之间用反边连接

5. 二分图最大权完美匹配用 KM 算法做到 n^3 复杂度，若两边点数不一致，对较少的一部分补点，不存在的边连边权 0 的边

prufer序列

1. n 个节点完全图，无根生成树为 n^{n-2} 个，有根生成树为 n^{n-1} 个
2. n 个节点完全图，第 i 个点的度数为 d_i，生成树个数为 $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!}$
3. n 个点，被分成 k 个连通块，通过加入 $k-1$ 条边使原图联通的方案数为 $n^{k-2}\prod_{i=1}^{k} siz_i$

字符串

Runs

- $\textbf{Runs}$： 三元组 $\mathbf{r}=(l,r,p)$ 是串 s 的一个 run，当且仅当：
    - $s[l,r]$ 的**最小**循环节为 p，满足 $2p\le\left|s[l,r]\right|=r-l+1$
    - 该循环不能延伸，即 $s[l-1]\neq s[l+p-1], s[r+1]\neq s[r-p+1]$

  实数 $e_{\mathbf{r}}=\dfrac{r-l+1}{p}$ 被称为该 run 的指数。

Lyndon 分解

- $\textbf{Lyndon Word}$： 若字符串 s 的最小后缀是其本身，即 $s<\mathrm{suf}'(s)$，则称之为 $\mathrm{Lyndon Word}$，简称为 Ly。

  另一个等价的定义： s 是自己的所有循环位移中最小的一个。

  例： $\texttt{abc},\texttt{ababc}$ 是 Ly，而 $\texttt{ba},\texttt{acabc}$ 不是。

- △ **定理(1.4)** : s 是 Ly **当且仅当** $s=ab$，$a<b$ 且 a,b 均为 Ly。（a,b 均非空，$|s|\ge 2$）

  - ⊛ **定义** : 串的 Lyndon 分解

将字符串 s 分解成 $s_1,s_2\dots s_m$，满足 $s_1,s_2,\dots,s_m$ 均为 Ly，且 $s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_m$。

  - △ **定理(1.6)** : Ly 分解唯一

周期定理

- 定理(2) $\text{Weak Periodicity Lemma}:$

  若 p, q 为 S 的周期，且 $p+q \le n$，则 $\gcd(p,q)$ 也是 S 的周期。（简称为 WPL）

强化版 $\text{Periodicity Lemma}: p+q-\gcd(p,q) \le n \Longrightarrow \gcd(p,q)$ 也是 S 的周期。

Trick

1. 对于确定的初始状态仅有极少数（大多数时候仅有一个），其余的状态与相邻的部分（大多数时候是相邻的点）有关的 dp，考虑（放到图上）以最短路的方式进行转移，可以考虑 $dijkstra$。
2. 一组数中取任意个数求最大/最小异或和用线性基，取两个数求最大/最小异或和则可以用 $01trie$ 解决
3. 在存在**区间推平**操作前提下，颜色段均摊有两层含义
   1. 随机数据：任意时刻的颜色段个数期望为 $O(log_2n)$
   2. 非随机数据：每次推平时访问的颜色段个数为均摊 $O(n)$，单次有可能达到 $O(n)$
4. 带权并查集**写按秩合并**，**不要写路径压缩。**