Übung 1 *Normen im unendlich-dimensionalen Vektorraum*
Betrachten wir den Raum $C^0([0,1],\mathbb{R})$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen.
Zeigen Sie:

a) Die durch die Abbildung

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$$

definierte Norm besitzt die Eigenschaften einer Norm.

b) Die durch die Abbildung

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$$

definierte Norm besitzt die Eigenschaften einer Norm.

c) Betrachten Sie für $x_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N},\ k > 0$ die Funktionenfolge

$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1]\backslash[x_k, x_{k+1}] \\ \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}} \cdot \pi\right) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

und berechnen Sie $\|u_k\|_1$ und $\|u_k\|_\infty$ für $k \longrightarrow \infty$.
Warum können diese beiden Normen nicht äquivalent sein?

(4 Punkte)

Übung 2 *Normen im $\mathbb{R}^n$*

a) Zeichnen Sie die Einheitssphäre

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\|_p = 1\}$$

für $p = 1, 2, \infty$.

b) Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Berechnen Sie explizit die sechs Koeffizienten, mit welchen die Normen $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$ (möglichst gut) gegeneinander abgeschätzt werden können. Wie verhalten sich die Koeffizienten für $n \longrightarrow \infty$?

(3 Punkte)

Übung 3 *Frobeniusnorm*
Die Frobenius-Norm einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

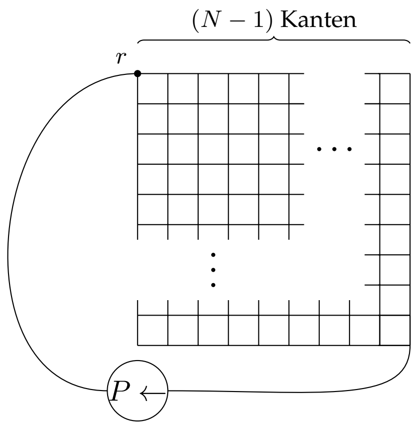
(i) Die Frobenius-Norm (FN) besitzt die allgemeinen Eigenschaften einer Norm.

(ii) FN ist verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$.

(iii) FN Frobenius-Norm ist submultiplikativ.

(4 Punkte)

Übung 4 *Strömung in Rohrleitungsnetzwerken*



Das abgebildete Röhrennetzwerk hat $n := N^2$ Knoten V und $m := 2N(N-1)$ Kanten E (die alle nach rechts bzw. unten gerichtet sind) zuzüglich der Verbindungen zur Pumpe P mit konstanter Flussrate q_P. Zur Bestimmung des Drucks in den einzelnen Knoten kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze (Knoten und Maschenregel) ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Hierzu wird der Druck des Referenzknoten r auf Null gesetzt. Für alle anderen erhält man aus der Knotenregel

$$\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0.$$

Hierbei enthalten E_v^+ bzw. E_v^- die Einfluss- bzw. Ausflusskanten am Knoten v und q_e bezeichnet den Fluss durch die Kante e. Endet die Kante an der Pumpe so ist dieser durch die Flussrate $q_e = q_P$ gegeben. Ansonsten gilt

$$q_e = L_e \Delta p_e.$$

Für gegebenes $e = (v, w) \in E$ ist dabei

$$\Delta p_e = \begin{cases} p_v - p_w & v \neq r \wedge w \neq r \\ p_v & w = r \\ -p_w & v = r. \end{cases}$$

In unserem Beispiel sei $L_e = 1$ für alle Kanten.

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für beliebige $N \in \mathbb{N}$ auf und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie groß ist die Matrix?

b) Wie viele Werte ungleich 0 gibt es in jeder Zeile?

c) Hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

(4 Punkte)