Infos zur Klausur am Freitag, dem 26.7.2013

- Bitte ein Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) zur Klausur mitbringen!
- Die Klausur findet im Hörsaal West in der Chemie (INF 252) und im Hörsaal wo die Vorlesung ist (INF 288) statt. Die Studenten, die in der Übungsgruppe von René Heß, Tobias Siekmann oder Dominik Haas sind, schreiben die Klausur im NF 252, alle anderen im NF 288.
- Die Klausur startet **pünktlich um 9:00 Uhr** und endet **pünktlich um 11:00 Uhr**. Also bitte am besten schon 10 Minuten vorher eintreffen und Platz nehmen!
- Alle Handys/Smartphones sind auszuschalten! Taschen sind vorne auf dem Podium des Hörsaals abzulegen. Es dürfen nur Schreibutensilien und Getränke an den Platz mitgenommen werden.
- Die Aufgabenblätter werden ausreichend sein, um Nebenrechnungen zu machen. Eigene Schmierzetteln werden also nicht notwendig sein.
- Als Hilfsmittel darf ein beidseitig **handbeschriebenes** DIN-A4-Blatt und ein Taschenrechner ohne hochauflösendes Display mitgenommen werden. Am Ende der Klausur ist dieses Blatt auch abzugeben!
- Wer die Kriterien der Übungsgruppe erfüllt hat, **ist automatisch zu der Klausur angemeldet** im Sinne der Studienordnung. Wer sich abmelden will, muss eine Email mit Begründung an pavel.hron@iwr.uni-heidelberg.de schicken.
- Der Termin und der Ort für die Nachklausur wird noch bekanntgegeben. An dieser dürfen nur Studenten teilnehmen, welche an der ersten Klausur teilgenommen, aber nicht bestanden oder entschuldigt gefehlt haben.

Dieses Übungsblatt enthält Bonusaufgaben und Aufgaben zur Klausurvorbereitung

- Der Übungszettel wird nur bei den Studenten korrigiert, die bis zum Übungszettel 12 noch nicht mindestens 112 Punkte erreicht haben.
- In der Übungsgruppe werden nur teilweise die Aufgaben diskutiert.

Übung 1 *Zahlendarstellung und Kondition*

Sie haben in der Vorlesung die allgemeine Darstellung von Fließkommazahlen als $\mathbb{F}(\beta, r, s)$ kennengelernt. Dabei ist β die Basis, r die Anzahl Stellen der Mantisse und s die Anzahl Stellen des Exponenten.

a) Geben Sie die Mantisse der Zahl $\mathrm{rd}(\frac{1}{3})$ an, wobei rd: $\mathbb{R} \to \mathbb{F}(2, 6, 3)$ die natürliche Rundung für die Fließkommazahlen bezeichnet.

b) Geben Sie alle positiven Zahlen aus $\mathbb{F}(2, 2, 1)$ an.

c) Wie lautet die kleinste positive Zahl aus $\mathbb{F}(2, 2, 3)$ in der normierten Fließkommadarstellung $\mathbb{F}(10, 4, 1)$ zur Basis 10?

d) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist folgende Funktion schlecht konditioniert?

$$f(x) = \sqrt{(x^2 + a)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(Bonus 2 Punkte)

Übung 2 *Matrix Kondition und Störungstheorie*

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 100 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die zur Zeilensummennorm gehördende Kondition $\mathrm{cond}_\infty(A)$ der Matrix A.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens $\pm 2\%$ und der in den Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 5\%$ beträgt?

(Bonus 1+1 Punkte)

Übung 3 *LR-Zerlegung*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 6 & \alpha & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter α. Berechnen sie die zugehörige LR-Faktorisierung (ohne Pivotisierung), beziehungsweise geben Sie an, für welchen Wert des Parameters α diese nicht existiert. **(Bonus 2 Punkte)**

Übung 4 *Überbestimmte Gleichungssysteme*
Gegeben seien die folgenden Datenpunkte

x	-2	-1	0	1	2
y	3	3	1	-1	-1

Bestimmen Sie die Gaußsche Ausgleichsgerade $y = ax + b$ zu diesen Punkten, also die Gerade, die die Punkte im Sinne von kleinsten Fehlerquadraten am besten beschreibt. **(Bonus 2 Punkte)**

Übung 5 *Einfache Eigenschaften*

a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $P^2 = P$. Außerdem sei P nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\| \cdot \|$

b) Zeigen Sie: Sei $\| \cdot \|$ eine zu einer Vektornorm verträgliche Matrizennorm. Dann gilt: $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle Eigenwerte λ von A.

c) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische positiv definite Matrizen. Ist die Matrix AB auch symmetrisch und positiv definit (mit der Bergründung)?

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass alle Hauptdiagonal Elemente von A positiv sind.

(Bonus 2 Punkte)

Übung 6 *Interpolation*

a) Gegeben seien die Wertepaare:

i	0	1	2
x_i	-4	- 1	0
y_i	1	-1	5

Bestimme die Koeffizienten des interpolierenden Polynoms $p(x)$ in der Monom-Darstellung (also die c_i aus $p(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i x^i$, wobei wir mit $\{1, x, x^2\}$ die Monombasis bezeichnen).

b) Warum ist die Bestimmung der zugehörigen Koeffizienten bei der Lagrange-Interpolation trivial?

c) Interpolieren Sie die Funktion $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p \in P_2$) zwischen den Stützstellen $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, und $t_2 = 2$.

(Bonus 1+1+1 Punkte)

Übung 7 *Splines*

Seit $X = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalles $[a, b]$.

a) Sei $f \in C^2([a, b])$. Für den zugehörigen interpolierenden linearen Spline $s \in S^1(X)$ beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel die folgende Fehlerabschätzung:

$$|s'(x) - f'(x)| \leq \frac{1}{2}\|f''\|_\infty h_{max} \quad \text{für } x \in [a, b], \quad x \notin X,$$

wobei $h_{max} = \max\limits_{j=0,\cdots,n-1} |x_{j+1} - x_j|$ den maximalen Knotenabstand bezeichnet.

b) Geben Sie die Bedingungen für quadratische Splines $S^2(X)$ mit periodischen Randbedingungen an.

c) Warum sind die quadratische Splines in der Praxis für nichtperiodische Randbedingungen unbeliebt?

(Bonus 1+1+1 Punkte)

Übung 8 *Tridiagonale Matrizen*
Das Tridiagonalsystem $Ax = d$ lässt sich sehr schnell mit dem Thomas-Algorithmus lösen.

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Der Thomas-Algorithmus modifiziert im ersten Schritt die Koeffizienten in der Matrix:

$$c'_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i} & i = 0 \\ \dfrac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i} & i = 1, 2, \ \ldots, n-2 \end{cases}$$

$$d'_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i} & i = 0 \\ \dfrac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i} & i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Die Lösung ergibt sich dann durch ein Rückwärts-Einsetzverfahren:

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= d'_{n-1} \\ x_i &= d'_i - c'_i x_{i+1} \qquad i = n-2, n-3, \ldots, 1, 0. \end{aligned}$$

Der Student Paul Faul hat eine C++ Funktion mit `HDNum` implementiert, um das Tridiagonalsystem aus dem Übungsblatt 12 zu lösen. Seine Implementierung lautet:

```
template<typename NUMBER>
void tridiagSolverThomas(hdnum::DenseMatrix<NUMBER> A,
              hdnum::Vector<NUMBER>& x,
              hdnum::Vector<NUMBER> d )
{
  int n = A.rowsize();
  if( x.size() != n || d.size() != n || A.colsize() != n)
    HDNUM_ERROR("Wrong vector size or wrong matrix size!?");

  for(int i = 0; i < n; i++) {
    if (i==0){
      A[i][i+1]/=A[i][i];
      d[i]/=A[i][i];
    }
    else{
      if (i<(n-1))
         A[i][i+1]/=(A[i][i]- A[i-1][i]*A[i][i-1]);
      d[i]=(d[i]-d[i-1]*A[i][i-1])/(A[i][i]-A[i-1][i]*A[i][i-1]);
    }
  }

  x[n-1]=d[n-1];
  for(int i = 0; i < n-1; i++)
    x[i]=d[i]-A[i][i+1]*x[i+1];
}
```

Obwohl das Programm syntaktisch korrekt ist, funktioniert es leider nicht so wie Paul sich das wünscht.

a) Finden Sie den logischen Fehler (es gibt nur 1 Fehler) in der Funktion und korrigieren Sie den.

b) Pauls Funktion verwendet eine `if` Anweisung in der innersten Schleife. An solchen Stellen können bedingte Anweisungen die Effizienz der Bearbeitung durch den Prozessor erheblich beeinträchtigen. Ändern Sie das Programm derart, dass es ohne `if`, `switch` oder `?:` Anweisungen auskommt.

c) Wie viele Rechenoperationen braucht man für den Thomas-Algoritmus?

(Bonus 1+2+1 Punkte)

Übung 9 *Summierte Quadraturformeln*

a) Zeigen Sie: Bei interpolatorischen Quadraturformeln $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ zur näherungsweisen Berechnung von $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = b - a.$$

b) Es sei auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ gegeben. Es soll das Integral

$$I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

numerisch ausgewertet werden. Dazu werde das gesamte Intervall in N gleich große Abschnitte

$$[x_i, x_{i+1}], \qquad x_i = -1 + ih, \quad i = 0, ..., N-1, \quad h = 2/N$$

unterteilt, auf denen wir die Simpsonregel $I^{(2)}(f)$ anwenden. Berechnen Sie den Wert der summierten Quadraturformel für den Fall $N = 2$.

(0 Punkte)