Übung 1 *Rückwärtsanalyse des Lösens eines Dreiecksystems*

Es seien $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ die numerischen Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $Lx = b$ und $Ry = c$ mit $L, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$(L+F)\hat{x} = b \qquad |F| \leq n \text{ eps } |L| + O(\text{eps}^2) \tag{1}$$

$$(R+G)\hat{y} = c \qquad |G| \leq n \text{ eps } |R| + O(\text{eps}^2) \tag{2}$$

Hierbei sind $F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir mit $|A| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, welche die Beträge der Einträge von A enthält:

$$(|A|)_{i,j} = |a_{i,j}|.$$

Beweisen Sie Gleichung (1) durch Induktion (Gleichung (2) geht analog und muss nicht separat bewiesen werden). Tipp: Verwenden Sie mitunter $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$. **(4 Punkte)**

Übung 2 *Eigenschaften der LR-Zerlegung*

a) Zeigen Sie, dass die Menge der unteren Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. (Ist diese Gruppe abelsch?) Damit lässt sich die Eindeutigkeit der LR-Zerlegung $A = LR$ nachweisen, wenn L eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen ist.

b) Gegeben sei eine LR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|l_{ij}| \leq 1$. Bezeichne a_i^T und r_i^T die i-te Reihe von A bzw. R. Zeigen Sie, dass

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$$

gilt und verwenden Sie diese Beziehung, um

$$\|R\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$$

zu beweisen (Norm der Gleichung bilden - dann Induktion).

(4 Punkte)

Übung 3 *LR-Zerlegung konkret*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ -2 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie (mit Bleistift und Papier) die eindeutige LR-Zerlegung von A und die Determinante von A. Lösen Sie $Ax = b$.
- Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(4 Punkte)

Übung 4 *LR-Zerlegung (Praktische Übung)*

Zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach der LR-Zerlegung soll der Algorithmus 1 **oder** 2 (siehe unten) implementiert werden. Die Implementierungen von beiden Algorithmen sind gleich aufwendig. Der Algorithmus 1 war auch in der Vorlesung gezeigt.

a) Schreiben Sie eine neue Headerdatei `LR.hh`, welche die beiden Template-Funktionen

```
template<class T>
void lr( hdnum::DenseMatrix<T>& A,
         hdnum::Vector<std::size_t>& perm
       ){...}
```

und

```
template<class T>
void permute_forward( const hdnum::Vector<std::size_t>& perm,
                      hdnum::Vector<T>& b )
{...}
```

enthält.

Die Funktion `void lr(...)` soll die LR-Zerlegung von A berechnen und das Ergebnis L und R wiederum in die Matrix `A` speichern. Der Indexvektor `perm` soll sich die Permutation der Zeilen merken.

Die Funktion `void permute_forward(...)` soll dieselben Permutationen auf die Rechte Seite b übertragen.

Zur Vorwärts- und Rückwärtssubstitution können dann die beiden Headerdateien `solveL.hh` und `solveR.hh` (siehe Webseite der Vorlesung) benutzt werden.

b) Diese Headerdateien werden benötigt, damit das Hauptprogramm `testLR.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden kann.

c) Kompilieren Sie das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfen Sie, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem nicht eine falsche Lösung x liefert ($\|x - x_r\| < 10^{-3}$, wobei x_r die analytische Lösung ist).

d) Lösen Sie das Gleichungsystem aus der Übungsaufgabe 3 unter Benutzung der LR-Zerlegung und kontrollieren Sie die Richtigkeit von Ihnen bestimmten LR-Zerlegung.

(7 Punkte)

Algorithmus 1 zur LR-Zerlegung

Input: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ (wird überschrieben)
Output: $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $a_{ij}, j < i, l_{ii} = 1$ implizit
$R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $a_{ij}, j \geq i$
$p: \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$

for $(k = 1; k < n; k = k+1)$ **do**
  Finde $r \in$ {k,...,n} so dass $a_{rk} \neq 0$; (sonst Fehler);
  if $(r \neq k)$ **then** {tausche Zeile k mit Zeile r}
    for $(j = 1; j \leq n; j = j+1)$ **do**
      $t = a_{kj}; a_{kj} = a_{rj}; a_{rj} = t;$
    end for
  end if
  $p_k = r$; {merke Permutation}
  {Update der unteren Zeilen}
  for $(i = k+1; i \leq n; i = i+1)$ **do**
    $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk};$
    for $(j = k+1; j \leq n; j = j+1)$ **do**
      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj};$
    end for
  end for
end for
{Permutation von b}
for $(k = 1; k < n; k = k+1)$ **do**
  if $(p_k \neq k)$ **then**
    $t = b_k; b_k = b_{p_k}; b_{p_k} = t;$
  end if
end for
{Vorwärtseinsetzen}
for $(k = 1; k \leq n; k = k+1)$ **do**
  $t = 0;$
  for $(j = 1; j < k; j = j+1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j;$
  end for
  $x_k = b_k - t;$
end for
{Rückwärtseinsetzen}
for $(k = n; k \geq 1; k = k-1)$ **do**
  $t = 0;$
  for $(j = k+1; j \leq n; j = j+1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j;$
  end for
  $x_k = (x_k - t)/a_{kk};$
end for

Algorithmus 2 zur LR-Zerlegung (Andere Permutation)

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ (wird überschrieben)
Output: $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $a_{ij}, j < i, l_{ii} = 1$ implizit
$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $a_{ij}, j \geq i$
$p: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$

for $(k = 1; k \leq n; k = k + 1)$ **do**
  $p_k = k$;
end for
for $(k = 1; k < n; k = k + 1)$ **do**
  Finde $r \in$ {k,...,n} so dass $a_{rk} \neq 0$; (sonst Fehler);
  if $(r \neq k)$ **then** {tausche Zeile k mit Zeile r}
    for $(j = 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
      $t = a_{kj}$;$a_{kj} = a_{rj}$;$a_{rj} = t$;
    end for
    $t = p_k$;$p_k = p_r$;$p_r = t$;
  end if
  {Update der unteren Zeilen}
  for $(i = k + 1; i \leq n; i = i + 1)$ **do**
    $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$;
    for $(j = k + 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$;
    end for
  end for
end for
{Permutation von b}
for $(k = 1; k \leq n; k = k + 1)$ **do**
  $x_k = b_{p_k}$;
end for
{Vorwärtseinsetzen}
for $(k = 1; k \leq n; k = k + 1)$ **do**
  $t = 0$;
  for $(j = 1; j < k; j = j + 1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j$;
  end for
  $x_k = x_k - t$;
end for
{Rückwärtseinsetzen}
for $(k = n; k \geq 1; k = k - 1)$ **do**
  $t = 0$;
  for $(j = k + 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j$;
  end for
  $x_k = (x_k - t)/a_{kk}$;
end for