Einführung in die Numerik (Sommersemester 2013) Aufgabenblatt 12
Prof. Dr. Peter Bastian Abgabe 12. July 2013, 09:15 Uhr
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Beziér-Kurve zur Approximation des Sinus*

Berechnen Sie die Beziér-Punkte $P_0, \dots, P_3$ deren zugehörige Bézier-Kurve $P(t)$ vom Grad 3 den Graphen

$$S(t) = \begin{pmatrix} \pi t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $t = [0, 1]$ approximiert. Hierzu fordern wir, dass

$$\begin{aligned} S(0) &= P(0) \qquad & S(1) &= P(1) \\ S'(0) &= \alpha P'(0) \qquad & S'(1) &= \alpha P'(1). \end{aligned}$$

Hierbei sei α so zu wählt, dass ebenfalls

$$P(0.5) = S(0.5)$$

erfüllt ist.

(4 Punkte)

Übung 2 *Eigenschaften der kubischen Spline Interpolation*
Auf dem Interval $I = [0, 2]$ seien die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ gegeben, $X = \{x_0, x_1, x_2\}$. Sei $S(X)$ der Vektorraum der kubischen Splines mit **natürlichen** Randbedingungen.

a) Welche der folgenden Funktionen sind im $S(X)$? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2(x-6) - (x-2)^2 \,, \\ f_2(x) &= \max\{0, x-1\}^3 - \tfrac{1}{2}x^3 \,, \\ f_3(x) &= x^3 - x^2 \,. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in S(X)$ von $f(x) = x^3$.

(5 Punkte)

Übung 3 *Fehler der kubischen Spline Interpolation*
Gegeben seien eine äquidistante Zerlegung $X = (x_0, \cdots, x_N)$ des Intervals $[0, 1]$ mit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$, es gilt also $h = x_j - x_{j-1}$ für $j = 1, 2, \cdots, N$, mit $h = 1/N$.

Betrachten Sie auf diesem Intervall die Funktion $f(x) = \sin(2\pi x)$ und die zugehörige interpolierende kubische Splinefunktion $s \in S$ mit natürlichen Randbedingungen.

Wie groß muss die Zahl N gewählt werden, damit auf dem gesamten Intervall die Differenz zwischen s und f betragsmäßig kleiner als 10^{-12} ausfällt? **(2 Punkte)**

Übung 4 *Kubische Splines (Praktische Übung) (bis 19.07.13)*

1. Schreiben Sie eine C++Funktion `getCubicSpline(···)`, die ausgehend von Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

und zugehörigen Stützwerten $y_0, y_1, \ldots, y_n$ die Koeffizienten $a_k^{(i)}, k = 0, \cdots, 3,\ i = 1, \cdots, n$ des natürlichen kubischen Interpolationssplines s,

$$s(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3 \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

berechnet. Zur Lösung des linearen $(n-1) \times (n-1)$ Gleichungssystems (siehe Vorlesung)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_2^{(n-2)} \\ a_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

können Sie die bereits vorhandenen Funktionen zur LR-Zerlegung verwenden oder (4 Bonuspunkte) einen schnelleren Löser schreiben, welcher die tridiagonale Struktur der Matrix ausnutzt.

`Input-Parameter:`x_i, y_i `Output-Parameter:`$a_k^{(i)},\quad k = 0, \cdots, 3,\ i = 1, \cdots, n$

2. Schreiben Sie eine zweite Funktion `evaluateCubicSpline(···)`, die den in 1. berechneten Spline s an einer beliebigen Stelle $x \in [x_0, x_n]$ auswertet. Ausgegeben werden soll der Wert des Splines $s(x)$ bei Eingabe von $x_0, \cdots, x_n, a_k^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, 3$ sowie eines Auswertepunktes x.

3. Testen Sie ihre Funktionen an folgendem höchst realistischen Beispiel:

Die Geologen der Universität Heidelberg brauchen Ihre Hilfe. Auf der schwäbischen Alb wurden die Überreste von Versteinerungen gefunden, die zu einem Saurierskelett gehören. Um die Umrisse des Sauriers rekonstruieren zu können, wird das 14 mal 5 Meter große Fundgebiet mit einem Raster überzogen und jedes Fundstück Dinosaurierhaut in diesem Koordinatensystem lokalisiert. Nach einer logischen Reihung ergibt sich folgende Tabelle von Fundkoordinaten (x_i, y_i) für die von 0 bis 12 nummerierten Fundstücke:

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	3.75	3.75	2.25	1.25	0.25	0.75	4.00	5.50	6.25	9.00	12.50	12.75	12.25
y_i	0.25	1.50	3.25	4.25	4.65	4.83	2.50	3.25	3.65	3.00	1.25	2.15	3.50

Gehen Sie zur Rekonstruktion des Sauriers folgendermaßen vor: Die Gestalt des Sauriers wird durch eine Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T]$$

beschrieben, wobei die Funktionen φ und ψ durch je einen Spline genähert werden. Da das Durchlaufen der Kurve „mit konstanter Geschwindigkeit" geschehen soll, läßt man die Bogenlänge der Kurve einfließen, indem man als Stützstellen die Werte

$$t_0 := 0, t_i := t_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{fü r } \ i = 1, \ldots, 12$$

benutzt. Berechnen Sie mit Ihrer Prozedur aus 1. einen Spline s_φ mit Stützstellen t_i und Stützwerten x_i sowie einen weiteren Spline s_ψ mit Stützstellen t_i und Stützwerten y_i. Die genäherte Gestalt des Sauriers ergibt sich dann aus der Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} s_\varphi(t) \\ s_\psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_{12}]$$

Werten Sie diese Kurve mit Ihrer Prozedur aus 2. an den Stellen $t = \xi_j := \frac{t_{12}}{100} \cdot j,\ j = 0, 1, \ldots, 100$ aus, und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Sauriers an, z.B. mit gnuplot.

Hinweise:

- Sie können den Spline in gnuplot visualisieren, wenn Sie die Ergebnisse in eine Datei schreiben, bei der in jeder Zeile ein Wertepaar $x\ y$ steht:

```
plot "test.dat" using 1:2 with lines
```

- Erste Expertisen vermuten einen weiblichen Brontosaurus mittleren Alters.

(8 (+ 4 Bonus) Punkte)