Übung 1 *Positiv definite Matrizen*

Sehr häufig wird im Zusammenhang mit positiv-definiten Matrizen die Symmetrie vorausgesetzt. Doch positiv-definite Matrizen müssen nicht zwangsläufig symmetrisch sein!

a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist, wenn der symmetrische Anteil

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

positiv definit ist.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ und $A_X = (a_{ij})_{i,j\in X} \in \mathbb{R}^{|X|\times|X|}$ eine sogenannte *Hauptuntermatrix*. Zeigen Sie, dass A_X ist positiv definit, wenn A positiv definit ist.

c) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α ist A positiv definit?

d) Zeigen Sie: Sei $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $A = \bar{H}^T H$. Dann gilt A ist positiv definit genau dann wenn $\mathrm{Rang}(H) = n$.

e) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Matrix und $X \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(X) = n$. Zeigen Sie, dass dann $B = X^T A X$ positiv definit.

(5 Punkte)

Übung 2 *Hermitesche Matrix in* $\mathbb{C}$
Beweisen Sie:
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt: A ist hermitesch genau dann wenn $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

(3 Punkte)

Übung 3 *Raleigh-Quotienten*
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine positive definite Matrix. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A ferner symmetrisch. Der Raleigh-Quotient eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2}\,.$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen den Raleigh-Quotienten und dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von A:

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}(A) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}(A) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}\,.$$

b) Die Kondition einer Matrix A in der euklidschen Norm ist definiert als

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Zeigen Sie dass sich die Kondition der Matrix in folgender Weise durch den größten und kleinsten Eigenwert von A beschreiben lässt:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(3 Punkte)

Übung 4 *Strömung in Rohrleitungsnetzwerken (Praktische Übung)*
Auf dem Übungsblatt 4, Übung 5 sollten Sie ein lineares Gleichungssystem für beliebige Anzahl von Knoten N aufstellen. In dieser Aufgabe wird weiter daran gearbeitet.

a) Implementieren Sie ein Programm, dass das Gleichungssystem für beliebiges $N \geq 3$ aufstellt und am Bildschirm ausgibt. Verwenden Sie hierzu die Matrix und Vektor Klassen der `HDNum` Bibliothek, die in der Vorlesung vorgestellt wurde. Diese Klasse wird auch nächste Woche in den praktischen Übungen vorgestellt.

b) Welche Normen sind in der Klasse `DenseMatrix` schon definiert? Implementieren Sie eine Methode, die auch die Frobenius-Norm berechnet. Berechen Sie alle Normen für das lineare Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

c) Die Potenzmethode (power iteration) ist ein iteratives numerisches Verfahren zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes und des dazugehörigen Eigenvektors einer Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Startvektor $r_0 \in \mathbb{R}^n$, $Ar_0 \neq 0$ gegeben. In jedem Iterationsschritt berechnet man

$$r_{k+1} = \frac{Ar_k}{\|Ar_k\|},$$

d.h. die aktuelle Näherung r_k wird auf die Matrix A angewandt und dann normiert. Die Vektoren r_k konvergieren gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert, sofern dieser Eigenwert dem Betrage nach einfach ist und seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist. Der Rayleigh-Quotient liefert im Grenzwert den entsprechenden Eigenwert.

Implementieren Sie dieses Verfahren, welches den größten Eigenwert und dazu entsprechenden Eigenvektor berechnet. Wenden Sie es auf das Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

Hinweise:

- Es wird die Numerikbibliothek *HDNUM* benötigt. Download über die Webseite der Vorlesung: `http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numerik0_ss2013/`
- Kompilieren:

```
g++ -I../hdnum/ -o knotenfluss knotenfluss.cc
```

  Dieser Kompilierbefehl funktioniert, wenn `knotenfluss.cc` z.B. in einem Verzeichnis `Blatt4/` parallel zum Verzeichnis `hdnum/` liegt.
- Bitte den C++ *Style Guide* beachten!
- Zum Einstieg können Sie folgende Vorlage verwenden:

```
// g++ -I../hdnum/ -o knotenfluss knotenfluss.cc
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include "hdnum.hh"

// Funktion zum Aufstellen der Matrix
template<class NumberType>
void FlussMatrix( hdnum::DenseMatrix<NumberType> &A ){
  int M( A.rowsize() );
  int N( A.colsize() );
  if(M!=N)
    HDNUM_ERROR("Matrix muss quadratisch sein!");
  // TODO: Elemente der Fluss-Matrix hier berechnen!
}

// Funktion zur Berechnung der Frobenius-Norm einer Matrix
template<class NumberType>
NumberType FrobeniusNorm( const hdnum::DenseMatrix<NumberType> &A ){
  int M(A.rowsize());
  int N(A.colsize());
  if(M!=N)
    HDNUM_ERROR("Matrix muss quadratisch sein!");
  NumberType result=0.0;
  // TODO: Die Frobenius-Norm der Matrix A hier berechnen und der Variable result zuweisen!
  return result;
}

// Funktion zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes
template<class NumberType>
NumberType MaxEigenwert( const hdnum::DenseMatrix<NumberType> &A ){
  // TODO: Berechen Sie den betragsgrößten Eigenwert und den dazugehörigen Eigenvektor
}

// Hauptprogramm
int main(int argc, char ** argv){

  // Anzahl der Knoten
  const int N(10);
  // Größe der Matrix
  const int n(??);
  // Datentyp für die Matrix
  typedef double REAL;
  // Matrix initialisieren
  hdnum::DenseMatrix<REAL> H(n,n);

  // pretty-printing einmal setzen für alle Matrizen
  H.scientific(false);
  H.width(15);

  FlussMatrix(H);
  std::cout << "H = " << H << std::endl;
  // TODO:
  // Verschiedene Matrixnormen berechen
  // den größten Eigenwert berechnen
  return 0;
}
```

(8 Punkte)