Übung 1 *QR-Zerlegung von A*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$, Rang$(A) = n$. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$
Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

b) $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$.

c) Welche Nachteile sehen Sie darin, die Normalengleichung $A^T A$ über eine LR-Zerlegung zu lösen?

d) $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max\limits_i |r_{ii}|}{\min\limits_k |r_{kk}|}$.

Bemerkung: Für eine rechteckige Matrix A ist die Kondition allgemein definiert als

$$\text{cond}(A) := \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|} .$$

(5 Punkte)

Übung 2 *Curve-Fitting*

Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

z_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

Gesucht ist ein reelles Polynom $P(z)$ ersten oder zweiten Grades, der den Fehler

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} |P(z_i) - y_i|^2$$

minimiert.
Zur Erinnerung: Ein reelles Polynom der Ordnung k hat die Gestalt: $P_k(z) = x_0 + x_1 z + ... + x_k z^k$ mit Koeffizienten $x_0, ..., x_k \in \mathbb{R}$.

a) Formulieren Sie das Problem um in die Gestalt: Finden Sie ein $x = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ so dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimal ist, d.h. gebe jeweils (für $k = 1$ und $k = 2$) die zugehörige Matrix A sowie den Vektor b an.

b) Stellen Sie die Normalengleichung für $k = 1$ und $k = 2$ auf.

c) Ist die Lösung der Normalengleichung eindeutig?

Sie brauchen die Normalengleichung aus b) hier nicht lösen. **(4 Punkte)**

Übung 3 *QR-Zerlegung von A*
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

per Hand mit Hilfe des Householder-Verfahrens. **(4 Punkte)**

Übung 4 *Curve-Fitting (Praktische Übung)*

Zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

(wobei $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{Rang}(A) = n$) soll die LR-Zerlegung eingesetzt werden. Laden Sie die Datei `incomplete.tar` von der Vorlesungs-Webseite herunter und entpacke sie mit dem Befehl

```
tar xvf incomplete.tar
```

Das vorgegebene Hauptprogramm `curvefitting.cc` sollte (nachdem Sie die Funktion `solveLeastSquares()` erfolgreich implementiert haben) die Aufgabe 2 aus diesem Übungsblatt lösen.

Für die dort angegebenen Wertepaare erhält man für das gesuchte Polynom ersten Grades die Matrix A aus `A6_linear.dat` und die rechte Seite b aus `b6.dat`. Analog erhält man für das gesuchte Polynom zweiten Grades die Matrix A aus `A6_quadratic.dat`. Im Hauptprogram wird die

Funktion

```
template<typename NUMBER>
void solveLeastSquares(hdnum::DenseMatrix<NUMBER> &A,
                       hdnum::Vector<NUMBER> &b,
                       hdnum::Vector<NUMBER> &x)
```

aufgerufen, welche die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ unseres linearen Ausgleichsproblems liefern soll.

a) Implementieren Sie diese Funktion in der Headerdatei `solveLeastSquares.hh` mit der man die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bekommt. Benutzen Sie dazu die LR-Zerlegung, die wir schon vorher implementiert haben.

b) Tragen Sie nun die Eingabedateien `A6_linear.dat`, `A6_quadratic.dat` und `b6.dat` die entsprechenden Matrizen aus Aufgabe 2a) ein. Sollten Sie die Aufgabe nicht bearbeitet haben, so rechnen Sie bitte mit den bereits in den Dateien befindlichen Werten. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie den Defekt

$$d = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2.$$

c) Stellen Sie die gegebenen Wertepaare und die berechneten Polynome in graphischer Form dar, z.B mit Gnuplot.

(6 Punkte)