Übung 1 *Newton Interpolation*

a) Interpolieren Sie die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p \in P_2$) zwischen den Stützstellen $t_0 = \frac{1}{4}$, $t_1 = 1$, und $t_2 = 4$.

b Skizzieren Sie die Graphen von f und p (per Hand oder mit Gnuplot).

(3 Punkte)

Übung 2 *Komplexität der Interpolation*

Sei $p \in P_n$ das Interpolationspolynom zu den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, ..., t_n$ mit den zugehörigen Werten $y_0, ..., y_n$. Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Operationen

- zur Berechnung der Koeffizienten von p
- und zur Auswertung von p an einer beliebigen Stelle $t = \xi$

a) bezüglich der Lagrange-Basis,

b) bezüglich der Newton-Basis und

c) bezüglich der Monom-Basis.

Hinweis: Die sehr naive Auswertung des Polynoms $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ (in der Monom-Basis) erfordert $O(n^2)$ Mutliplikationen und n Additionen. Dagegen wird beim **Hornerschema**

$$p(t) = a_0 + (t \cdot (a_1 + t \cdot (\dots (a_{n-1} + t \cdot a_n) \dots)))$$

von innen nach außen ausgewertet. Wieviele Additionen und Multiplikationen sind dafür notwendig?

(4 Punkte)

Übung 3 *Äquidistante Stützstellen*

Beweisen Sie, dass man bei äquidistanten Stützstellen $x_i = x_0 + jh$, $j = 0, \dots, n$, $h > 0$ die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms in

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} k! \cdot h^k \cdot f[x_0, \dots, x_k] \qquad \text{mit } s = \frac{x - x_0}{h}$$

umwandeln kann, wobei der Binomialkoeffizient durch

$$\binom{s}{k} = \frac{s \cdot (s-1) \cdots (s-k+1)}{k!}$$

auch für eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ definiert ist. **(4 Punkte)**

Übung 4 *Dividierte Differenzen*
Beweisen Sie, dass bei dividierten Differenzen gilt:

$$y[x_0, ...x_{n-1}, x] = y[x, x_0, ..., x_{n-1}].$$

(3 Punkte)

Übung 5 *Lagrange Interpolation*
Alle in dieser Aufgabe zu programmierende Funktionen sollen einen `template` Parameter akzeptieren, der es erlaubt den Typ zur näherungsweisen Repräsentation der reellen Zahlen zu setzen. Matrizen und Vektoren sollen durch die Klassen der `HDNum` C++ Bibliothek repräsentiert werden.

a) Schreiben Sie eine Funktion, welche für gegebene Stützstellen $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ und Werte $(y_i)_{i=1}^n$ einer eindimensionalen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Zugehörige Interpolationspolynom an der Stelle x auswertet (z.B. in Lagrange Darstellung).

b) Schreiben Sie ein Programm, dass die Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $I = [-1, 1]$ mit äquidistanten Stützstellen $x_i = -1 + ih, \;\; i = 0, ..., n$, mit $h = 2/n$, für $n = 5, 10, 20$ durch ein Polynom p_n vom Grad n interpoliert.

   Werten Sie die Interpolationspolynome mit Hilfe des Horner-Schemas auf einem dichten Gitter (1000 Gitterpunkte) aus, stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und vergleichen Sie sie mit den richtigen Funktionsverläufen.

(6 Punkte)