西安交通大学考试题

成绩	

课　程 计算方法 A

系　别 ____________　　**考试日期** 2007 年 1 月 24 日

专业班号 ____________

姓　名 ________　**学　号** ________　**期中** □　**期末** □

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一．（24 分）填空

（1）（4 分）设 $f(x)=x^4+3x+1$，

则 $f\left[2^0,2^1,...,2^4\right]$=_____，　$f\left[2^0,2^1,...,2^4,2^5\right]$=_____

（2）（4 分）设 $x_i(i=0,1,...,4)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为相应的四次插值基函数，则

$\sum_{i=0}^{4}x_i^4 l_i(0)=$__________，　$\sum_{i=0}^{4}\left(x_i^4+2\right)l_i(x)=$__________

（3）（4 分）满足条件 $p(0)=1$，$p(0)=p'(1)=0$，$p(2)=2$ 的插值多项式

$p(x)=$______________________，误差项 $R(x)$=______________________

（4）（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，则

$\|A\|_1=$____，$\|A\|_2=$____，$\|A\|_\infty=$____，$Cond_1(A)=$____

（5）（6 分）欲用迭代法求解线性方程组 $Ax=b$，设 A 是对称正定矩阵。

（a）雅可比迭代法收敛的一个充分条件是__________________________

（b）高斯-赛德尔方法是否收敛？_____

（c）为使超松驰迭代法收敛，松弛因子 ω 的取值范围是_____________

二．（10 分）用矩阵 $A=LU$ 分解求解方程 $Ax=b$

其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

解：

$A=LU=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$， $y=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

三．（10 分）求 $y=e^x$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最优平方逼近一次多项式。

解：（1）（5 分）其正规方程组为

（2）（5 分）

$y=e^x\approx$ ______________________________

四．（12 分）

（1）（4 分）请构造在区间 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\omega(x)\equiv 1$ 的最高次项系数为 1 的正交多项式：

$g_0(x)=$ ______________________________

$g_1(x)=$ ______________________________

$g_2(x)=$ ______________________________

（2）（4 分）确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$ 中的系数 A_0, A_1 与节点 x_0, x_1，使其具有最高代数精度。

（3）（4 分）用广义佩亚诺定理确定其误差项。

五．（8 分）已知方程 $e^{2x}+x-4=0$ 在 0.6 附近有一根，

（1）给出一个收敛的简单迭代法的迭代格式 $x_{k+1}=$ ____________________

（2）收敛的理由是：

六．（12 分）用反幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1.5\end{pmatrix}$ 在-2 附近的特征值与其对应的特征向量，用半次迭代法取初始向量 $z_0=Le$，$e=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，取四位小数运算，迭代一次半。

解：

七．（8 分）用待定系数法确定常微分方程初值问题求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1})$$

中的系数，并用广义佩亚诺定理导出其局部截断误差估计式。

解：

八．（8 分）给定热传导方程第一类初、边值问题如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

其中，$f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ 都是已知连续函数，且满足

$\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0)$。

解：

（1） 最简显示差分格式：

稳定性条件：

截断误差：

（2） 最简隐式差分格式：

稳定性条件：

截断误差：

九．（8 分）设 $A \in R^{n\times n}$ 是实对称正定矩阵，$\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$，$\forall x \in R^n$ 。

求证 $\|x\|_A$ 是向量 x 的一种范数。

证明：