西安交通大学考试题

成绩	

课　　程 计算方法 A

系　　别 ________　　考 试 日 期　2010 年 1 月 20 日

专业班号 ________

姓　　名 ________　　学　　号 ________　　期中 ☐　　期末 ☐

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一．（8 分）用 $A = GG^T$ 分解求解方程组 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解：

$$G = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix},\qquad y = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix},\qquad x = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

二．（8 分）欲用迭代法求解如下方程组：

$$x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 11$$
$$4x_1 + 8x_3 + 3x_4 = 6$$
$$3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$$

（1） 写出高斯-赛德尔迭代法、超松弛迭代法（$\omega = 0.5$）的迭代格式；

解：

（2） 给定初始点 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$，用高斯-赛德尔迭代法计算 $x^{(1)}$。

解：

（3） 对任意的初始值 $x^{(0)}$，以上两迭代法是否收敛？为什么？

解：

三.（8 分）已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_i 处的函数值及其导数值如下表所示：

x	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1
$f'(x)$	1		-1

求其 *Hermit*（带导数）插值多项式及其误差估计式。

解：

1. 差商表

2. *Hermit* 插值多项式

3. 误差估计式

四．（8 分）求函数 $y=\ln(x)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上的最优平方逼近一次式。

解：

正规方程组如下：

$p(x)=$

五．（8 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上的最优一致逼近一次式及最大偏差。

解：

六．（8 分）

（1）试导出在区间 $\left[-1,1\right]$ 上关于权函数 $\omega(x)=1+x^2$ 的正交多项式 $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$。

（2）试确定如下的高斯型求积公式和误差估计式。

$$\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

解：

（1）$g_0(x)=$

$g_1(x)=$

$g_2(x)=$

（2）

七．（8 分）构造一个迭代方法，用以证明

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{k\text{个根号}}=3$$

解：

八．（8 分）已知 n 阶矩阵 A 的一个特征值的近似值 $\bar{\lambda}$，欲用反幂法求该特征值更精确的近似值和相应的特征向量，用半次迭代法选取初始向量，请写出反幂法的计算过程。

解：

九．（8 分）对于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

给定阿达姆斯显示公式、阿达姆斯隐式公式及其误差项如下：

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right), \qquad R[y] = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(\xi_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right), \qquad R[y] = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\bar{\xi}_i)$$

试用以上两个公式推导出预测—修正—校正—修正公式。

解：

十．（8 分）对于方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

若用迭代法

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega(Ax^{(k)}-b)$$

求以上方程组的解，试确定使迭代法收敛的 ω 的取值范围，并求出使迭代法收敛速度最快的最优 ω 之值 ω_{opt}。