期末总复习

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{e^{-x}-1} = $ <u>-2</u>

解: "等价无穷小" $\longrightarrow$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-x} = -2$

2. $\int f'(x)\,dx = $ <u>$f(x)+C$</u>

定积分别忘了"$+C$"

3. $(e^{3x})^{(n)} = $ <u>$3^n e^{3x}$</u>

$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx} \quad (k\neq 0)$

4. 函数 $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+4$ 在 $[0,2]$ 上的最小值是 ______

$y' = x^2+2x-3 = (x+3)(x-1) \rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)\searrow$, $(1,2)\nearrow \Rightarrow y_{min} = f(1) = \frac{7}{3}$

5. 函数 $y = xe^x$ 的拐点是 <u>$(-2, -2e^{-2})$</u>

$y' = (x+1)e^x \quad y'' = (x+2)e^x$ 令 $y''=0$ 则 $x=-2$

6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x + x\cos^2 x)\,dx = $ ______

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx + 0 = 2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$

7. 若 $y=\sqrt{1+x^2}$, $dy\big|_{x=2} = $ <u>$\frac{2\sqrt{5}}{5}dx$</u>

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow y'\big|_{x=2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow dy\big|_{x=2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}dx$

8. 曲线 $\begin{cases} x^2=2+y^2 \\ z=0 \end{cases}$ 绕y轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $x^2+z^2=2+y^2$

9. 曲线 $f(x)=\frac{\sin x}{(x+1)(x-2)}$ 有 3 条渐近线

① 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)(x-2)}\sin x=0$

(无穷小×有界)

② 铅垂渐近线：间断点 $x=-1$，$x=2$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$　$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\infty$ $\Rightarrow$ $x=-1$，$x=2$ 铅垂渐近线

③斜渐近线：不存在

二、计算题

1. 设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\Big/a(1-\cos t)=-\frac{1-\cos t}{(1-\cos t)^2}\Big/a(1-\cos t)=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$

2. 计算不定积分 $\int xe^{2x}dx$

解 $I=\frac{1}{2}\int x\,de^{2x}$

$=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

3. 计算定积分 $\int_1^5\frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx$

解：令 $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow x=\frac{1+t^2}{2}$

$I=\int_1^3\frac{\frac{1+t^2}{2}-1}{1+t}\cdot t\,dt$

$=\int_1^3\frac{t(t-1)}{2}dt=\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^3=\frac{7}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\,dt}{\sin^6 x}$

解: $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\,dt}{x^6}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x^4)}{6x^5}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x^4}{6x^5} = \dfrac{1}{3}$

5. 设方程 $e^{xy}+x^2y-y^3=0$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$

解: 方程对x求导 $e^{xy}(y+xy')+2xy+x^2y'-3y^2\cdot y'=0$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{ye^{xy}+2xy}{xe^{xy}+x^2-3y^2}$

$x=0$时 $y=1$ $\Rightarrow y'(0) = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

6. 求过点 $p(2,4,0)$ 并且与直线 $L_1: \begin{cases} x+2z-1=0 & \vec{n_1} \\ y-3z-2=0 & \vec{n_2} \end{cases}$ 平行的直线方程

$\vec{n_1} = (1,0,2)$

$\vec{n_2} = (0,1,-3)$

$\Rightarrow \vec{s} = \vec{n_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0+0+\vec{k}-0+3\vec{j}-2\vec{i}$

$= (-2,3,1)$

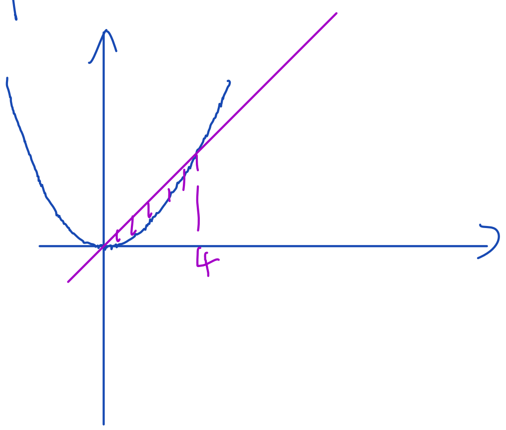
$\Rightarrow$ 直线方程: $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{1}$

二、解答与证明题

1. 求由曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=x$ 所围成的平面图形面积

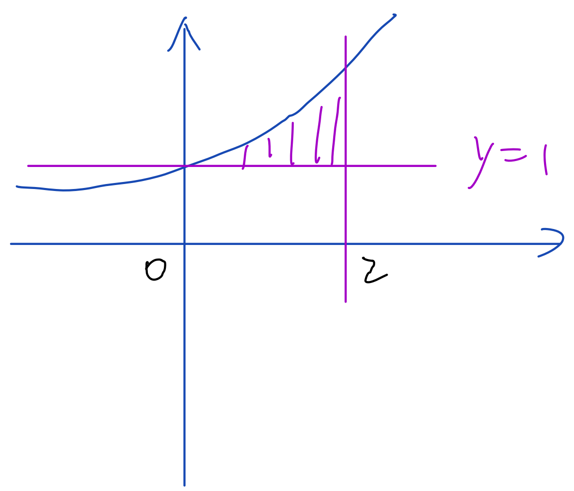
解：

$$S=\frac{1}{2}\times4\times4-\int_1^4\frac{1}{4}x^2\,dx=\frac{21}{4}$$



2. 求由 $y=e^x$, $y=1$ 和 $x=2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成立体体积

解：



$$V=\int_0^2\pi e^{2x}\,dx-\pi\times1^2\times2$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-2\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-1)-2\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}e^4-\frac{5}{2}\pi$$

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$

求证：(1) $\exists c\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(c)=c$

(2) 对于 $\forall\lambda$，$\exists\xi\in(0,c)$ 使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

解：(1) 令 $F(x)=f(x)-x$

$\because F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导连续

且 $F(1)=f(1)-1=-1$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore F(1)\cdot F(\frac{1}{2})<0$ $\Rightarrow \exists c\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $f(c)=c$

(2) [分析]：$f'(\xi)-1=\lambda(f(\xi)-\xi)$

$\Rightarrow$ 令 $F(x)=f(x)-x$ $\Rightarrow F'(\xi)=\lambda F(\xi)$

$$\Rightarrow \frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\lambda$$

$\Rightarrow g'(\xi_1)=-g'(\xi_2)$

令 $g(x)=\ln F(x)$，$g(\frac{1}{2})<0$ $\quad\xi\in(0,c)$

$$g'(\xi_1)=\frac{g(\xi)-g(0)}{\xi}=\frac{g(\xi)}{\xi}$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(c)-g(\xi)}{c-\xi}=-\frac{g(\xi)}{c-\xi}$$

$\because \xi>0$ $\quad\xi\in(0,c)$ $\therefore c-\xi>0$

$\therefore g'(\xi_1)$ 与 $g'(\xi_2)$ 异号且均 $\to\infty$

$\therefore g'(\xi)\in(-\infty,+\infty)$

即对 $\forall\lambda$ 不等式均成立

判断题 28'分 ×1

1. 有界数列必定收敛，无界数列必定发散 ×
2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件 ×
3. 初等函数处处连续 ✓
4. 函数极限存在的充要条件是函数左、右极限均存在且为常数 ×
5. 连续函数处处可导 ×
6. 无穷小量与无穷大量的乘积是无穷小量，无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量 ×
7. 一个三维空间中共有6个卦限 ×
8. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ✓
9. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ✓
10. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ✓
11. 空间直线只有平行，相交，异面 3种位置关系 ✓
12. 定积分中分部积分做法是基于乘积求导关系式确定的 ✓