20

## 一、 填空题（4 分×5=20 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}3x^2+a, & x\le 0\\ \dfrac{\sin^2 4x}{x^2}, & x>0\end{cases}$，当 $a=$__16___时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2、$\dfrac{d}{dx}\left(x^x\right)=$___$x^x\left(\ln x+1\right)$_____.

3、设 $y=3^{\sin 2x}$，则 $dy=\mathbf{2\ln 3\cos 2x3^{\sin 2x}dx}$.

4、曲线 $y=\ln x$ 上一点, 其横坐标 $x=2$ 为, 则曲线在该点处的切线方程为 $\boldsymbol{y=\frac{x}{2}+\ln 2-1}$。

5、已知 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$，则 $f^{(n)}(0)=\mathbf{(-2)^n}$.

## 二、单项选择题（4 分×4=16 分）

1、设 $f(x)=\ln|x|$，则 $f'(x)$。 A

（A） $=\dfrac{1}{x}$；（B） $=\dfrac{1}{|x|}$；（C）不存在；（D）以上都不对。

2、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中最高阶的是 （ D ）

（A） $x^2+x^6$；（B） $\sin x-\tan x$；（C） $1-\cos^2 x$；（D） $1-\cos x^2$.

3、设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-mx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $m=$（ C ）

（A） $\dfrac{1}{2}$；（B）2；（C） $-2$；（D） $-\dfrac{1}{2}$。

4、点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}3x+4, x>1\\ 12-5x, x\le 1\end{cases}$ 的 D

（A）可去间断点；（B）跳跃间断点；（C）第二类间断点；（D）连续点。

## 三、（8 分×3=24 分）

1、计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

解：原式 $\boldsymbol{=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=2\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{4}{3}}$

2、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^k}=\begin{cases}0，k>2\\ \dfrac{1}{2}, k=2\\ \infty, k<2\end{cases}$。

3、证明：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

证：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1=1-1=0$

所以，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

四、(**8 分×3=24 分**)

1、求函数 $\mathrm{y}=x\arctan\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$ 的导数。

解：$\mathrm{y}'=\left(x\arctan\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{2}\ln(a^2+x^2)\right)'=\arctan\dfrac{x}{a}+x\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\dfrac{1}{a}-\dfrac{a}{2}\dfrac{2x}{a^2+x^2}$

$=\arctan\dfrac{x}{a}+\dfrac{ax}{a^2+x^2}-\dfrac{ax}{a^2+x^2}=\arctan\dfrac{x}{a}$

2、设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^2-t^3\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{dx}=\dfrac{2t-3t^2}{2t}=1-\dfrac{3}{2}t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{dx^2}==\dfrac{d}{dt}(1-\dfrac{3}{2}t)\dfrac{1}{2t}=-\dfrac{3}{4t}$

3、设函数 $y=y(x)$ 由 $y-xe^y=1$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解：$y-xe^y=1$ 两边同时求导得：$y'-e^y-xe^y y'=0$

故 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$ 将 $x=0,y=1$ 代入得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e$

五、(**8 分×2=16 分**)

1、设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

解：当 $\boldsymbol{x\neq 0}$，$\boldsymbol{f'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}$，

当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0}$

所以，$\boldsymbol{f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}}$

2、设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=f\left(2\right)=0$,证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\xi\cdot f'(\xi)\text{-}2f(\xi)=0$。

构造函数$F(x)=x^{-2}f(x)$，$[1,2]$上应用罗尔定理。

21

一、-1、$e^{-2}$、$2\sqrt{x}$、$x+y=1$、-1、$-\frac{7}{6}$、2、二、-1

二、1、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

2、

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le x_n\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2},\quad \therefore\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$$

3、

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln\sqrt{1+x^2}+\arctan x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln\sqrt{1+x^2}+\arctan x\cdot\frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

三、1、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\csc^3 t$$

2、求导：$3y^2y'+4x-y-xy'=0$ 将$x=0$时$y=-1$代入得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{1}{3}$

3、$x=1$处连续：$f(1-0)=f(1+0)=f(1)\Rightarrow a+b=1$

$x=1$处可导：$f'_-(1)=f'_+(1)$，

又$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{ax+b-1}{x-1}=a$，得$a=2$，$b=-1$

四、1、

$f(a)=a\Rightarrow c=a$, $f(b)=b\Rightarrow c=b$,

$f(a)\ne a$且$f(b)\ne b$时，构造函数$\mathrm{F}(x)=f(x)-x$用零点定理

2、构造函数$\mathrm{F}(x)=e^x f(x)$用罗尔定理