19 期中答案

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、0

2、1

3、2

4、$\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{sin2x}{2}+C$.

5、$f'(x)=\underline{3^x\sec x(\ln 3+\tan x)}$

二、选择答案。D、B、C、B

三、计算题（每题 8 分，共 24 分）

1、解：法一：先在两边取对数，得

$\ln y=\tan x$,两边同时取对数,$\dfrac{y'}{y}=\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}$

所以,$\dfrac{dy}{dx}=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x})$

法二：y=$x^{\tan x}=e^{\tan x\ln x}$,所以$\dfrac{dy}{dx}=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x})$

2、解:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\dfrac{dt}{dx}=2(1+t^2)$

3、解：把方程两边分别对x求导，得$y+x\dfrac{dy}{dx}-e^{-y}\dfrac{dy}{dx}=1$,解得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y}{x-e^{-y}}$

将$x=0$，代入原方程解得$y=0$,切点为（0, 0），所以$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1.$

切线方程为：$x+y=0.$

四、计算题（每题 8 分，共 24 分）

1、解：原极限=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot 3x}=\dfrac{1}{6}$

2、解：由莱布尼茨公式得：

$$y^{(8)}=(x\cos x)^{(8)}=C_8^0x(\cos x)^{(8)}+C_8^1x'(\cos x)^{(7)}=8\sin x+x\cos x.$$

3、解：$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x}=xe^{3x}.$

$f^{'}(x)=e^{3x}(1+3x).$

五、解答题（每题 8 分，共 16 分）

1、解：由导数的定义知，$f^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=1.$

$f^{'}(0)$存在，等于1.

2、证明：令$F(x)=xf(x)$,显然$F(x)$在$[0,1]$上连续，在（0, 1）内可导.

$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理知，存在$\xi\in$（0, 1），使得$F^{'}(\xi)=f(\xi)+\xi f^{'}(\xi)=0.$

证毕.

附加题

证明：已知$\boldsymbol{f(x)}$在$[\boldsymbol{a,b}]$上连续，在$(\boldsymbol{a,b})$内可导.

由拉格朗日中值定理知，$\exists\boldsymbol{\xi}\in$（a, b）使得

$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)}$

令$\boldsymbol{g(x)=e^x}$,显然$\boldsymbol{g(x)}$在$[\boldsymbol{a,b}]$上连续，在$(\boldsymbol{a,b})$内可导.

由柯西中值定理知，$\exists\boldsymbol{\eta}\in$（a, b）使得

$$\boldsymbol{\frac{f^{'}(\eta)}{e^{\eta}}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}}$$

将$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)}$代入$\boldsymbol{\dfrac{f^{'}(\eta)}{e^{\eta}}=\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}}$式中得：

$\boldsymbol{\dfrac{f^{'}(\eta)}{e^{\eta}}=\dfrac{f^{'}(\xi)(b-a)}{e^b-e^a}}$.即$\boldsymbol{\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}}$.证毕

20 期中答案

一、　填空题（4 分×5=20 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}3x^2+a, & x\le 0\\ \dfrac{\sin^2 4x}{x^2}, & x>0\end{cases}$，当 $a=$ 16 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2、$\dfrac{d}{dx}\left(x^x\right)=$ $x^x\left(\ln x+1\right)$.

3、设 $y=3^{\sin 2x}$，则 $dy=\boldsymbol{2\ln 3\cos 2x3^{\sin 2x}dx}$.

4、曲线 $y=\ln x$ 上一点，其横坐标 $x=2$ 为，则曲线在该点处的切线方程为

$\boldsymbol{y=\dfrac{x}{2}+\ln 2-1}$。

5、已知 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$，则 $f^{(n)}(0)=\boldsymbol{(-2)^n}$.

二、单项选择题（4 分×4=16 分）

1、设 $f(x)=\ln|x|$，则 $f'(x)$。　A

（A）$=\dfrac{1}{x}$；　（B）$=\dfrac{1}{|x|}$；　（C）不存在；　（D）以上都不对。

2、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中最高阶的是　　　　（ D ）

（A）x^2+x^6；（B）$\sin x-\tan x$；（C）$1-\cos^2 x$；（D）$1-\cos x^2$.

3、设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-mx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $m=$（ C ）

（A）$\dfrac{1}{2}$；（B）2；（C）-2；（D）$-\dfrac{1}{2}$。

4、点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}3x+4, x>1\\ 12-5x, x\le 1\end{cases}$ 的　　D

（A）可去间断点；（B）跳跃间断点；（C）第二类间断点；（D）连续点。

三、（8 分×3=24 分）

1、计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

解：原式 $\boldsymbol{=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=2\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{4}{3}}$

2、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k})$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^k}=\begin{cases}0，k>2\\ \dfrac{1}{2}, k=2\\ \infty, k<2\end{cases}$。

3、证明：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

证：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1=1-1=0$

所以，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

四、（8 分×3=24 分）

1、求函数 $y=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$ 的导数。

解：$y'=\left(x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)\right)'=\arctan\frac{x}{a}+x\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}-\frac{a}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}$

$=\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}-\frac{ax}{a^2+x^2}=\arctan\frac{x}{a}$

2、设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^2-t^3 \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{2t-3t^2}{2t}=1-\frac{3}{2}t$，$\frac{d^2y}{dx^2}==\frac{d}{dt}(1-\frac{3}{2}t)\frac{1}{2t}=-\frac{3}{4t}$

3、设函数 $y=y(x)$ 由 $y-xe^y=1$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解：$y-xe^y=1$ 两边同时求导得：$y'-e^y-xe^yy'=0$

故 $y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$ 将 $x=0,y=1$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e$

五、（**8 分×2=16 分**）

1、设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$。

解：当 $x\neq 0$，$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

所以，$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

2、构造函数 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$ 应用罗尔定理。