自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

学号________ 姓名________

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工科数学分析(上)期中 考试学期 20-21-1 得分 ______

适用专业 选学工科数分各类专业 考试形式 闭 卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

一、 填空题(本题共 8 小题,每题 4 分,共 32 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x\tan x}=$ ______.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t\cos 2x}$, 则 $f'(x)=$ ______.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 ______.

4. 设当$x\to 1$时，$1-\dfrac{m}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}$是$x-1$的等价无穷小，则 $m=$___.

5. 函数 $f(x)=x^2 3^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ______.

6. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y-xy-\mathrm{e}=0$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$ ______.

7. 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t} \\ y=\arctan t \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ______.

8. 设函数 $y=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中$n$为正整数，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ ______.

二、 计算下列各题(本题共 5 小题,每小题 8 分,满分 40 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cos 2x$ 是与 ax^n 等价的无穷小, 求 n 与 a.

4. 确定 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内处处可导，并求它的导函数.

5. 求 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 在 $x=1$ 处的七阶带Lagrange余项的Taylor 公式.

三、 (**本题** 8 **分**) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-2f(1-\sin x)=6x+o(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(5,f(5))$ 处的切线方程.

四、 (**本题** 7 **分**) 设有方程 $x^n+nx-1=0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n, 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

五、 (**本题 7 分**) 证明 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续, 但在 $(a,1)$ $(a>0)$ 上一致连续.

六、 (**本题 6 分**) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=\xi$.

(2) 在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 η,ζ，使得 $\dfrac{1}{f'(\eta)}+\dfrac{1}{f'(\zeta)}=4$.