19 上期末答案

一、填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\int \sec x dx = \ln\left|\sec \boldsymbol{x} + \tan \boldsymbol{x}\right| + \boldsymbol{C}$.

2、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \boldsymbol{x} d\boldsymbol{x} = \dfrac{3\boldsymbol{\pi}}{16}$.

3、设 $f(x) = x\cos x$，则 $f^{(2020)}(0) = 0$.

4、函数 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 5$ 在 $[0,2]$ 上的最小值是 -5

5、曲线 $y = 12x^2 - x^4$ 在区间 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 内是凹的.

6、$\int_{-1}^{1}(x^2 - x\sqrt{4-x^2})dx = \dfrac{2}{3}$

7、$\int_e^{+\infty} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\ln^2 \boldsymbol{x}} = 1$

8、曲线 $\begin{cases} z^2 = 5 + y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转面方程是 $z^2 = 5 + x^2 + y^2$.

9、函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ 的铅直渐近线为 $x = 1$.

二、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、已知 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \arcsin x$，求 $\boldsymbol{dy}$

解:

$$dy = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx \quad (3'+3'+2')$$

2、计算不定积分 $\int x\sin(3x+2)dx$

解：原不定积分 $= -\dfrac{1}{3}\int x d\cos(3x+2) = -\dfrac{1}{3}[x\cos(3x+2) - \int \cos(3x+2)dx]$

$$= \frac{1}{9}\sin(3x+2) - \frac{1}{3}x\cos(3x+2) + \mathrm{C} \quad (3'+3'+2')$$

3、计算定积分 $\int_0^4 \dfrac{d\boldsymbol{x}}{1+\sqrt{\boldsymbol{x}}}$

解：令 $\sqrt{x} = t$，原不定积分 $= 2\int_0^2 \dfrac{t}{1+t}dt = 2\int_0^2 1 - \dfrac{1}{1+t}dt = 4 - 2\ln 3 \quad (3'+3'+2')$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x t^2\cos t^2dt\right)^2}{\int_0^{x^2}\sin t^2dt}$

解：由洛必达法则知，原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2\cos x^2\int_0^x t^2\cos t^2}{2x\sin x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2\int_0^x t^2\cos t^2}{2x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t^2\cos t^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$ (3'+3'+2')

2、计算定积分 $\int_0^\pi\sqrt{1-\sin 2x}dx$

解: 原定积分 $=\int_0^\pi|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x-\sin xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin x-\cos xdx$

$$=\sin x+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$$ (3'+3'+2')

3、求过坐标原点 $O(0,0,0)$ 与点 $P(3,4,-6)$，并且与平面 $2x+5y-3z=7$ 垂直的平面方程。

解: $\vec{n}\perp\overrightarrow{OP}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{n}_1,\therefore\vec{n}=\overrightarrow{OP}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&4&-6\\2&5&-3\end{vmatrix}=(18,-3,7)$

因此平面方程为: $18x-3y+7z=0$ (3'+3'+2')

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

1、求由曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x-2y-4=0$ 所围成的平面图形的面积。

解: $A=\int_2^4(\dfrac{3}{2}x-2-\dfrac{1}{4}x^2)\,dx=\dfrac{1}{3}$ (5'+3')

2、求由 $y=\ln x$、$y=-1$ 和 $x=e$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成立体的体积。

解:

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e}x(1+\ln x)\,dx=\pi(x^2\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}xdx+e^2-\frac{1}{e^2})=\pi(\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2e^2})$$ (5'+3')

20 上期末答案

一、填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、−2; 2、$f(x)+C$； 3、$3^n e^{3x}$ ； 4、$\frac{7}{3}$； 5、$\left(2,2e^{-2}\right)$；

6、$\frac{3\pi}{8}$； 7、$\frac{2}{\sqrt{5}}dx$； 8、-5； 9、3 .

二、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、设$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ ，解：$\frac{dx}{dt}=a\left(1-\cos t\right),\frac{dy}{dt}=a\sin t$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a\left(1-\cos t\right)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)}=-\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)^2}.$$

2、$\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int xde^{2x}=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)+C$

3、解：令$t=\sqrt{2x-1},\int_1^5\frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx=\int_1^3\frac{\frac{t^2+1}{2}-1}{1+t}tdt=\frac{1}{2}\int_1^3\left(t^2-t\right)dt=\frac{7}{3}$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{\sin^6 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4)\cdot2x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4\cdot2x}{6x^5}=\frac{1}{3}$

2、解：方程两边对 x 求导$e^{xy}\left(y+xy'\right)+2xy+x^2y'-3y^2y'=0$；

当 x=0 时，y=1.（2 分）代入得：$1-3y'=0$，故$y'(0)=\frac{1}{3}$.

3、解：$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -7\end{pmatrix}$

四、计算题(本题共 3 小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 4 分，共 16 分)

1、$\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\Big|_0^4=\frac{8}{3}$

$$V_x=\pi\int_0^2\left(e^{2x}-1^2\right)dx=\frac{\left(e^4-5\right)}{2}\pi$$；$$V_x=2\pi\int_1^{e^2}y\left(2-\ln y\right)dy=\frac{\left(e^4-5\right)}{2}\pi$$

3、证明：(1) 设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$，在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上满足零点定理。

(2) $F(x)=e^{-\lambda x}g\left(x\right)=e^{-\lambda x}\left(f\left(x\right)-x\right)$ 在 $\left[0,\ c\right]$ 上满足罗尔定理。