# 1、计算

1). $y=\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$, 求 $y^{(100)}(x)$

2)、设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，当 $n>2$ 时，计算 $f^{(n)}(0)$

3). 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+x^{\tan x}$, $(a>0)$, 求 $dy$

4). 设 $xy+2=e^{x+y}$，求 $y''$.

2、设$y=f(x)$的反函数为$x=\varphi(y)$，$f,\varphi$都二阶可导，且$f'\neq 0$，试用$f',f''$表示$\varphi''(y)$.

3、设$f(x)$有一阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$，

$f''(0)$存在，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

(1) .问 $a$ 取何值时 ,$g(x)$处处连续 .

(2)、对（1）中确定的$a$，证明$g(x)$有一阶连续导数.

4、设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)[1+|\sin x|]$, 证明：
$F(x)$在$x=0$处可导的充要条件是$f(0)=0$

5、如果以每秒$50cm^3$的匀速给一个气球充气，假设气球内气压保持常值，且形状始终为球形，问当气球的半径为$5cm$时，半径增加的速率是多少？

6. 设 $a_1, a_2, \cdots a_n$满足$a_1 - \dfrac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1} = 0$，证明：方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$

在$(0, \dfrac{\pi}{2})$内至少有一个根。

7、设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 $(a,b)$内可导，且$f(a) = f(b) = 2a, f(\dfrac{a+b}{2}) = a+b$，证明：在$[a,b]$内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi) = 1$

8. 设$f(x)$在$[0,\ 1]$上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=0$，

证明：存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

9. 设$f(x)$在$[0,\ 1]$上可导，且$f(1)=1$，$f(0)=0$，

证明：对所有满足 $\alpha+\beta=1$的正数$\alpha,\beta$，存在

相异的$\xi$，$\eta\in(0,\ 1)$，使 $\alpha f'(\xi)+\beta f'(\eta)=1$.

10.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0$, $f(1)=1$,证明:

(1) $\exists\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=1-\xi$;

(2)存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$,使$f'(\eta)f'(\zeta)=1$

11.设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导且$ab\neq 0$,

证明$\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3\eta^2}f'(\eta)$

12.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内二阶可导,

且 $f(a)=f(c)=f(b)=0$, 其中$c\in(a,b)$,

证明: (1) 至少存在两个不同的点$\xi_1,\ \xi_2\in(a,b)$,使

$$f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0,\ i=1,2.$$

(2) 存在$\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=f(\xi)$.

13.设函数$f(x)$在$[a,b]$上单调连续，在$(a,b)$内可导,

且$a=f(a)<f(b)=b$,证明:$\exists$互异的$\xi_i\in(a,b)$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)=n$$