20-21-3工科数学分析期中试卷 参考解答

一、填空题(本题共8小题, 每小题4分, 共32分)

1. $\frac{5}{2}$; 2. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$; 3. $\{1,1,1\}$;

4. $\begin{cases} x+y+3z=11 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases}$ 或 $\frac{x-1}{-13}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{2}$;

5. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$; 6. $-\pi$; 7. $\sqrt{3}$; 8. 2.

二、计算下列各题(本题共5小题, 每小题8分, 满分40分)

1. **解:** 曲面在点$(1,1,1)$的外法向量为$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,2z\}\big|_{1,1,1}=\{2,2,2\}$,

函数的梯度为$\nabla u=\left\{\frac{x}{3},\frac{y}{6},\frac{z}{9}\right\}\Big|_{(1,1,1)}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\right\}$,

故方向导数为$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}=\frac{11}{18\sqrt{3}}$.

2. **解:** 由方程组可得$\begin{cases} 2x+4yy'-z'=0 \\ 2x+2yy'+6zz'=0 \end{cases}$,

解上述方程组可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{6xz+x}{12yz+y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x}{12z+1}$.

3. **解:** 由$\begin{cases} f_x=\cos x-\sin(x-y)=0 \\ f_y=-\sin y+\sin(x-y)=0 \end{cases}$ 得驻点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

在边界$x=0\left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$上, $f=2\cos y$, 最小值为0, 最大值为2;

在边界$y=0\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$上, $f=\sin x+\cos x+1$, 最小值为2, 最大值为$\sqrt{2}+1$;

在边界$x=\frac{\pi}{2}\left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$上, $f=1+\cos y+\sin y$, 最小值为2, 最大值为$\sqrt{2}+1$;

在边界$y=\frac{\pi}{2}\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$上, $f=2\sin x$, 最小值为0, 最大值为2;

综上, 函数在区域的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 最小值为0.

4. **解:** 原式$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=1.$

5. **解法一:** 令$x=u,x+y=v$, 则$|J|=1$, $D':0\le v\le t,0\le u\le v$,

则$f(t)=\iint\limits_{D'}\mathrm{e}^{v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^t \mathrm{d}v\int_0^v \mathrm{e}^{v^2}\mathrm{d}u=\int_0^t v\mathrm{e}^{v^2}\mathrm{d}v$, 于是$f'(t)=t\mathrm{e}^{t^2}$.

解法二: 由$\int_0^{t-x}\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}y \xlongequal{x+y=u} \int_x^t \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u=\int_x^t \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$ 可得,

$f(t)=\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^t y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$, 则$f'(t)=t\mathrm{e}^{t^2}$.

三、(**本题**7**分**)

解: 由$\begin{cases} f_x=-8x(y-x^2)-x^6=0 \\ f_y=4(y-x^2)-2y=0 \end{cases}$ 得驻点$(0,0)$和$(-2,8)$,

因为$f_{xx}=-8y+24x^2-6x^5$, $f_{xy}=-8x$, $f_{yy}=2$, 所以在$(-2,8)$点, $A=224,B=16,C=2$, 由$AC-B^2>0$且$A>0$可得$(-2,8)$点为极小值点, 极小值为$f(-2,8)=-\frac{96}{7}$;

在$(0,0)$点, $A=0,B=0,C=2$, 则$AC-B^2=0$, 判断失效. 因为$f(0,0)=0$, 但沿$y=x^2$接近于$(0,0)$点时, $f=-x^4\left(\frac{1}{7}x^3+1\right)<0$, 沿$x=0$接近于$(0,0)$点时, $f=y^2>0$, 故$(0,0)$点不是极值点.

四、(**本题**8**分**)

解: (1) 切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{2,-2,0\}$, 故切平面方程为$x-y=1$.

(2) 原点到切平面的距离为$d_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-1)$, 解方程组$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ F_y=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ F_z=2z-2\lambda z=0 \\ (x-y)^2-z^2=1 \end{cases}$,

得驻点$\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0\right)$, 由问题的实际意义可知, 原点到曲面上的点距离的最小值必存在, 于是该距离的最小值为$d_2=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=d_1$, 得证.

五、 (本题7分)

解: 设$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, D_2为由$x^2+y^2=1$及$x=1, y=1$所围成的区域, 则

$$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8},$$

故$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

六、 (本题6分)

解: 因为$x^4+y^4-1<[x^4+y^4]\le x^4+y^4$,

且$\iint\limits_{x^2+y^2\le n^2}(x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^n\rho^5(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}n^6$,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le n^2}(x^4+y^4-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}n^6-\pi n^2,$$

所以由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}n^6}{n^6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}n^6-\pi n^2}{n^6}=\frac{\pi}{4}$ 及夹逼定理, 可得所求极限值为$\frac{\pi}{4}$.