20

一、填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、-2；　2、$f(x)+C$；　3、$3^n e^{3x}$；4、$\frac{7}{3}$；　5、$\left(2,2e^{-2}\right)$；

6、$\frac{3\pi}{8}$；　7、$\frac{2}{\sqrt{5}}dx$；　8、$x^2+z^2=2+y^2$；　9、3 .

二、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、设$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，解：$\frac{dx}{dt}=a\left(1-\cos t\right),\frac{dy}{dt}=a\sin t$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a\left(1-\cos t\right)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)}=-\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)^2}.$$

2、$\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int xde^{2x}=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)+C$

3、解：令 $t=\sqrt{2x-1},\int_1^5\frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx=\int_1^3\frac{\frac{t^2+1}{2}-1}{1+t}tdt=\frac{1}{2}\int_1^3\left(t^2-t\right)dt=\frac{7}{3}$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{\sin^6 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4)\cdot2x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4\cdot2x}{6x^5}=\frac{1}{3}$

2、解：方程两边对 x 求导 $e^{xy}\left(y+xy'\right)+2xy+x^2y'-3y^2y'=0$；

当 x=0 时，y=1. 代入得：$1-3y'=0$，故 $y'(0)=\frac{1}{3}$.

3、解：方向向量为$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\left(-2,3,1\right)$，所以直线方程为：$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{1}$.

四、计算题(本题共 3 小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 4 分，共 16 分)

1、$\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\Big|_0^4=\frac{8}{3}$

2、$V_x=\pi\int_0^2\left(e^{2x}-1^2\right)dx=\frac{\left(e^4-5\right)}{2}\pi$；$V_x=2\pi\int_1^{e^2}y\left(2-\ln y\right)dy=\frac{\left(e^4-5\right)}{2}\pi$

3、证明：(1)设$g(x)=f(x)-x$，在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上满足零点定理。

（2）$F(x)=e^{\lambda x}g(x)=e^{\lambda x}\left(f(x)-x\right)$在$[0,\mathrm{c}]$上满足罗尔定理。

21

一、×、√、×、√、√ / ×、×、√、√、× / ×、×、√、×

二、1、①$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+x}{2-x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{2x}{2-x})^{\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{2x}{2-x}\cdot\frac{1}{x}}=e$

②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-e^{-x}-e^{x}\right)=-2$

2、① $f'(x)=\tan x+x\sec^2 x$

② $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$。

3、①$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int x\frac{2x}{1+x^2}dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+c$

②$\int\frac{5}{\sqrt{9+4x^2}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3^2+(2x)^2}}d(2x)=\frac{5}{2}\ln\left(2x+\sqrt{9+4x^2}\right)+c$

4、①$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\pi 2^2}{4}=\pi$

②$\int_{-1}^{1}(\sin x\cdot e^{x^2}+\sqrt[3]{x^2})dx=2\int_0^1\sqrt[3]{x^2}dx=\frac{6}{5}$

三、1、 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

单调增区间：$(-\infty,-1)$和$(2,+\infty)$；单调减区间：$(-1,2)$

极大值点：$x=-1$极大值$f(-1)=21$；极小值点：$x=2$极小值$f(2)=-6$；

2、$\mathrm{A}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}$

3、$\vec{a}=(1,1,2),\vec{n}=(2,-1,1)$，$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}\right)=\frac{\vec{a}\bullet\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\frac{1}{2},\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}\right)=\frac{\pi}{3}$

直线和平面的夹角为$\frac{\pi}{6}$

四、$y' = 3ax^2 + 2bx$，$y'' = 6ax + 2b$，$\begin{cases} a+b=1 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$

$$1 = \int_0^1 [f(x) + f'(x)]e^x dx = \int_0^1 f(x)e^x dx + \int_0^1 e^x df(x)$$

五、$= \int_0^1 f(x)e^x dx + e^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)e^x dx = ef(1) - f(0)$

所以 $f(0)=-1$