20

一、填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{e^{-x}-1}=$ $\underline{\qquad -2 \qquad}$.

2、$\int(\sin 2x)'dx=$ $\underline{\qquad \text{sin2x+c} \qquad}$.

3、$(\cos 3x)^{(4)}=$ $\underline{\qquad \text{81cos3x} \qquad}$.

4、函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+4$ 在 $[0,2]$ 上的最小值是 $\underline{\qquad \dfrac{7}{3} \qquad}$.

5、曲线 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是 $\underline{\qquad (-\infty，2) \qquad}$.

6、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+x\cos^2 x)dx=$ $\underline{\qquad \dfrac{3\pi}{8} \qquad}$.

7、若 $y=\sqrt{1+x^2}$，$dy|_{x=2}=$ $\underline{\qquad \dfrac{2\sqrt{5}}{5}dx \qquad}$.

8、设方程 $e^{xy}+x^2-y=0$ 确定函数 $y=y(x)$，则 $y'(0)=$ $\underline{\qquad 1 \qquad}$.

9、曲线 $f(x)=\dfrac{\sin x}{(x+1)(x+2)}$ 有 $\underline{\qquad 3 \qquad}$ 条渐近线.

二、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-x}{x^3}\right)$

解：原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2、设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$$

3、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{\sin^6 x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^4)\cdot 2x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{3x^5}=\dfrac{1}{3}$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、计算 $\int\dfrac{\sin x}{3-2\cos x}dx$

解：$\int\dfrac{\sin x}{3-2\cos x}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{3-2\cos x}\mathrm{d}(3-2\cos x)=\dfrac{1}{2}\ln(3-2\cos x)+C$

2、计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{dx}$

解：

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\boldsymbol{t}\cos\boldsymbol{t}\boldsymbol{dt}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\boldsymbol{t}+1\boldsymbol{dt}=\left[\frac{1}{4}\sin 2\boldsymbol{t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{t}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{12}$$

3、计算 $\int xe^{2x}dx$

解：$\int xe^{2x}dx=\dfrac{1}{2}\int x\mathrm{d}(e^{2x})=\dfrac{1}{2}(xe^{2x}-\int e^{2x}dx)=\dfrac{1}{2}(xe^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{2x})+C$

四、计算题(本题共 3 小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 4 分，共 16 分)

1、$\int\dfrac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=-\dfrac{1}{8}\int\dfrac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)=-\dfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+c$

2、$\int\dfrac{dx}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{1}{(x+4)}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+2}{x+4}\right|+c$

3、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $[0,1]$ 上可导， $f(0)=f(1)=0,\ f(\dfrac{1}{2})=1$.

证明：（1）$\exists c\in(\dfrac{1}{2}$，1)，使 $f(c)=c$；

（2）对于 $\forall\lambda$，$\exists\xi\in(0,c)$，使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

证：（1）构造 $F(x)=f(x)-x$，函数 $F(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上连续，且

$F(\frac{1}{2})>0, F(1)<0$，故根据零点定理可知， $\exists c\in(\frac{1}{2},1)$，$s.t.F(c)=0$，即结论成立。

（2）构造$F(x)=e^{\lambda x}[f(x)-x]$

$\because f(x)$在$[0,1]$内连续，在$(0,1)$内可导，且$c\in(\frac{1}{2}$，1）

$\therefore F(x)$在$[0,c]$内连续，在$(0,c)$内可导. 且$F(0)=F(c)=0$,

由罗尔定理得，$\exists\xi\in$（0，c）使得$F'(\xi)=e^{\lambda x}[\lambda(f(\xi)-\xi)-f'(\xi)+1]=0$

即$\lambda(f(x)-x)-f'(x)+1=0$,

综上，$\forall\lambda$，$\exists\xi\in$（0，c），使得$f'(x)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

21

一、×、√、×、√、√ / ×、×、√、√、× / ×、×、√、×

二、1、① $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+x}{2-x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{2x}{2-x})^{\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{2x}{2-x}\cdot\frac{1}{x}}=e$

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-e^{-x}-e^{x}\right)=-2$

2、① $f'(x)=\tan x+x\sec^2 x$

② $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$。

3、① $\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int x\frac{2x}{1+x^2}dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+c$

② $\int\frac{5}{\sqrt{9+4x^2}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3^2+(2x)^2}}d(2x)=\frac{5}{2}\ln\left(2x+\sqrt{9+4x^2}\right)+c$

4、① $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\pi 2^2}{4}=\pi$

② $\int_{-1}^{1}(\sin x\cdot e^{x^2}+\sqrt[3]{x^2})dx=2\int_0^1\sqrt[3]{x^2}dx=\frac{6}{5}$

三、1、 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

单调增区间：$(-\infty,-1)$和$(2,+\infty)$；单调减区间：$(-1,2)$

极大值点：$x=-1$ 极大值 $f(-1)=21$；极小值点：$x=2$ 极小值 $f(2)=-6$；

2、$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}$

3、$y=1$是水平渐近线， $x=1,x=2$ 是垂直渐近线。

四、$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，$\begin{cases}a+b=1\\6a+2b=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{3}{2}\end{cases}$

$$1=\int_0^1[f(x)+f'(x)]e^x dx=\int_0^1 f(x)e^x dx+\int_0^1 e^x df(x)$$

五、$=\int_0^1 f(x)e^x dx+e^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)e^x dx=ef(1)-f(0)$

所以 $f(0)=-1$