

## 18 工答案

一、客观题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分)

1、 $\frac{1}{2}$ ; 2、 $-\frac{1}{x}$ ; 3、 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f \cdot dx$ ; 4、 $-x+y+3z+1=0$ ; 5、 $y=x$ ;

6、 $(-2, 4)$ ; 7、 $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ; 8、 $x^2(-\ln x + C)$ 。

二、判断级数的敛散性 (本题共 2 小题, 每小题 4 分, 满分 8 分)

1、因为  $\sqrt{n} \tan \frac{\pi}{n^2} \sim \sqrt{n} \frac{\pi}{n^2} = \frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}$  收敛 ( $p = \frac{3}{2} > 1$ ), 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \tan \frac{\pi}{n^2}$  收敛;

2、因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+2)^2 (n+1)!} \frac{(n+1)^2 n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2 n!}$  收

敛。

三、计算题 (本题共 3 小题, 每小题 8 分, 满分 24 分)

1、令  $F = \sin(xy) + xz^2 - 3yz - 2$ ,

$$F_x = y \cos(xy) + z^2, \quad F_y = x \cos(xy) - 3z, \quad F_z = 2xz - 3y,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y \cos(xy) + z^2}{2xz - 3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x \cos(xy) - 3z}{2xz - 3y}.$$

$$y = \ln x = \ln(3 + (x-3)) = \ln\left(3\left(1 + \frac{(x-3)}{3}\right)\right)$$

2、
$$= \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{(x-3)}{3}\right) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x-3)^n}{3^n}, x \in (0, 6]$$

3、 $y'' + 5y' + 4y = 0$  特征方程  $r^2 + 5r + 4 = 0$ , 特征根  $r_1 = -1, r_2 = -4$

齐次通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$ , 设非齐次特解为  $y^* = A x e^{-x}$  带入得  $A = \frac{2}{3}$

故非齐次通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{2}{3} x e^{-x}$

四、计算题 (本题共 3 小题, 每小题 8 分, 满分 24 分)

1、 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y f'_1 + 8x f'_2$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3f'_1 + 3y 3x f''_{11} + 8x 3x f''_{21} = 3f'_1 + 9xy f''_{11} + 24x^2 f''_{12}$

2、 $\iint_D (3y-1) d\sigma = \int_0^3 dy \int_{-y}^{3-2y} (3y-1) dx = \int_0^3 (3y-1)(3-y) dy = 9$

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ z_y &= 2x - 2y = 0 \end{aligned} \quad \text{得驻点 } (0,0)(2,2)$$

3、

$$A = z_{xx} = 6x - 8, B = z_{xy} = 2, C = z_{yy} = -2$$

$(0,0)$  是极大值点, 取得极大值 1,  $(2,2)$  不是极值点

五、计算题(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

$$1、 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx^{n-1}}{3^n} \text{ 收敛域 } (-3,3)$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx^{n-1}}{3^n} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{3^n} \right)' \\ &= \left( \frac{\frac{x}{3}}{1 + \frac{x}{3}} \right)' = \left( \frac{x}{3+x} \right)' = \frac{3}{(3+x)^2}, x \in (-3,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2、 \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_D \rho e^{\rho} d\rho d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \rho e^{\rho} d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho e^{\rho} d\rho = 2\pi e^2 \end{aligned}$$