

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、设 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a, & x \leq 0 \\ \frac{\sin^2 4x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$, 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、设 $y = 3^{\sin 2x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4、曲线 $y = \ln x$ 上一点, 其横坐标 $x = 2$, 则曲线在该点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5、已知 $f(x) = e^{-2x}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题（每题 4 分，共 16 分）

1、设 $f(x) = |x|$, 则 $f'(x)$ ()

- (A) $=x$; (B) $=|x|$; (C) 不存在; (D) 以上都不对。

2、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是 ()

- (A) $x^2 + x^6$; (B) $\sin x - \tan x$; (C) $1 - \cos^2 x$; (D) $1 - \cos x^2$.

3、设 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - mx)^{\frac{1}{x}} = e^2$, 则 $m =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$; (B) 2; (C) -2; (D) $-\frac{1}{2}$ 。

4、点 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x > 1 \\ 12 - 5x, & x \leq 1 \end{cases}$ 的 ()

- (A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 第二类间断点; (D) 连续点。

三、计算题（每题 8 分，共 24 分）

1、计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

2、计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k})$

3、证明：当 $x \rightarrow 0$ 时， $\ln(1+x) - x = o(e^x - 1)$

四、计算题（每题 8 分，共 24 分）

1、求函数 $y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$ 的导数。

2、设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ ，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

3、设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定，求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

五、解答题（每题 8 分，共 16 分）

1、设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$ 。

2、设 $f(x), g(x)$ 都在区间 I 可导，

证明 $f(x)$ 的任意两个零点之间必有方程 $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$ 的根

21

一、填空题（每题 4 分，共 36 分）

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\sin x}{x} - x \sin \frac{1}{x}) =$ _____

2、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^x =$ _____

3、 d _____ $= \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

4、曲线 $y = e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 _____

5、已知 $f(x) = \sin x$ ，则 $f^{(10)}(\frac{\pi}{2}) =$ _____

6、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 8x + 7x^7}{3 + 4x^5 - 6x^7} =$ _____

7、 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x^2}-1$ 是 x 的_____阶无穷小 (填数字)

8、 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{1-x}}-1}$ 的第_____类间断点。

9、设 $f'(0)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{2h} =$ _____

二、计算题 (每题 8 分, 共 24 分)

1、计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin^3 x}$

2、设 $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

3、求函数 $y = \arctan x \cdot \ln \sqrt{1+x^2}$ 的导数。

三、计算题 (每题 8 分, 共 24 分)

1、设 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

2、设函数 $y = y(x)$ 由 $y^3 + 2x^2 - xy + 1 = 0$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

3、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$, 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取

什么值?

四、解答题 (每题 8 分, 共 16 分)

1、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(x) \in [a, b]$, 证明至少存在一点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = c$ 。

2、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = f(1) = 0$,

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。