习题 1−1

1. 设 $A=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty)$,

$A\cap B=[-10, -5)$,

$A\backslash B=(-\infty, -10)\cup(5, +\infty)$,

$A\backslash(A\backslash B)=[-10, -5)$.

2. 设 A、B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明 因为

$$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A \text{ 或 } x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C \text{ 或 } x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C,$$

所以 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 因为

$$y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists x\in A\cup B, \text{ 使 } f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow(\text{因为 } x\in A \text{ 或 } x\in B)\ y\in f(A)\text{或 } y\in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B),$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2)因为

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B$, 使 $f(x)=y\Leftrightarrow$(因为 $x\in A$ 且 $x\in B$) $y\in f(A)$且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$,

所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y\rightarrow X$, 使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$, 其中 I_X、I_Y分别是 X、Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x\in X$, 有 $I_X x=x$; 对于每一个 $y\in Y$, 有 $I_Y y=y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g=f^{-1}$.

证明 因为对于任意的 $y\in Y$, 有 $x=g(y)\in X$, 且 $f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 即 Y 中任意元素都是 X 中某元素的像, 所以 f 为 X 到 Y 的满射.

又因为对于任意的 $x_1\neq x_2$, 必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 否则若 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g[f(x_1)]=g[f(x_2)]\Rightarrow x_1=x_2$.

因此 f 既是单射, 又是满射, 即 f 是双射.

对于映射 $g: Y\rightarrow X$, 因为对每个 $y\in Y$, 有 $g(y)=x\in X$, 且满足 $f(x)=f[g(y)]=I_y y=y$, 按逆映射的定义, g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, $A\subset X$. 证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当 f 是单射时, 有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证明 (1)因为 $x\in A\Rightarrow f(x)=y\in f(A)\Rightarrow f^{-1}(y)=x\in f^{-1}(f(A))$,
所以 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

(2)由(1)知 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

另一方面, 对于任意的 $x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow$存在 $y\in f(A)$, 使 $f^{-1}(y)=x\Rightarrow f(x)=y$. 因为 $y\in f(A)$且 f 是单射, 所以 $x\in A$. 这就证明了 $f^{-1}(f(A))\subset A$. 因此 $f^{-1}(f(A))=A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;

解 由 $3x+2\geq 0$ 得 $x>-\frac{2}{3}$. 函数的定义域为$[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

解 由 $1-x^2\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$. 函数的定义域为$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$.

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

解 由 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geq 0$ 得函数的定义域 $D=[-1, 0)\cup(0, 1]$.

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 由 $4-x^2>0$ 得 $|x|<2$. 函数的定义域为$(-2, 2)$.

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;

解 由 $x\geq 0$ 得函数的定义 $D=[0, +\infty)$.

(6) $y=\tan(x+1)$;

解 由 $x+1\neq\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$得函数的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(7) $y=\arcsin(x-3)$;

解 由$|x-3|\leq 1$ 得函数的定义域 $D=[2, 4]$.

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

解 由 $3-x\geq 0$ 且 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, 3)$.

(9) $y=\ln(x+1)$;

解 由 $x+1>0$ 得函数的定义域 $D=(-1, +\infty)$.

(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同? 为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(4)$f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, $x<0$ 时, $g(x)=-x$.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$;

(2)$y=x+\ln x$, $(0, +\infty)$.

证明 (1)对于任意的 $x_1, x_2\in(-\infty, 1)$, 有 $1-x_1>0$, $1-x_2>0$. 因为当 $x_1<x_2$ 时,

$$y_1-y_2=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

所以函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在区间$(-\infty, 1)$内是单调增加的.

(2)对于任意的 $x_1, x_2\in(0, +\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时, 有

$$y_1-y_2=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

所以函数 $y=x+\ln x$ 在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l, l)$内的奇函数, 若 $f(x)$在$(0, l)$内单调增加, 证明 $f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

证明 对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$且 $x_1<x_2$, 有$-x_1, -x_2\in(0, l)$且$-x_1>-x_2$.

因为 $f(x)$在$(0, l)$内单调增加且为奇函数, 所以

$$f(-x_2)<f(-x_1),\ -f(x_2)<-f(x_1),\ f(x_2)>f(x_1),$$

这就证明了对于$\forall x_1, x_2\in(-l, 0)$, 有 $f(x_1)< f(x_2)$, 所以 $f(x)$在$(-l, 0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l, l)$上的, 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设 $F(x)=f(x)+g(x)$. 如果 $f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果 $f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$. 如果 $f(x)$和 $g(x)$都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$和 $g(x)$都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$是偶函数, 而 $g(x)$是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)$y=x^2(1-x^2)$;

(2)$y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4)$y=x(x-1)(x+1)$;

(5)$y=\sin x-\cos x+1$;

(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1)因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

(2)由 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

(4)因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$是奇函数.

(5)由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(6)因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数, 指出其周期:

(1)$y=\cos(x-2)$;

(2)$y=\cos 4x$;

(3)$y=1+\sin \pi x$;

(4)$y=x\cos x$;

(5)$y=\sin^2 x$.

解 (1)是周期函数, 周期为 $l=2\pi$.

(2)是周期函数, 周期为 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3)是周期函数, 周期为 $l=2$.

(4)不是周期函数.

(5)是周期函数, 周期为 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$;

(4) $y=2\sin 3x$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;

(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1)由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$, 所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2)由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\frac{1-y}{1+y}$, 所以 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3)由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$, 所以 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4)由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$, 所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5)由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$, 所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6)由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$, 所以 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数 $f(x)$在 X 上有界, 则存在正数 M, 使$|f(x)|\le M$, 即$-M\le f(x)\le M$. 这这就证明了 $f(x)$在 X 上有下界$-M$ 和上界 M.

再证充分性. 设函数 $f(x)$在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2, 即 $K_1\le f(x)\le K_2$. 取 $M=\max\{|K_1|, |K_2|\}$,

则 $$-M\le K_1\le f(x)\le K_2\le M,$$

即 $$|f(x)|\le M.$$

这就证明了 $f(x)$在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解 (1)$y=\sin^2 x$, $y_1=\sin^2\frac{\pi}{6}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $y_2=\sin^2\frac{\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$.

(2)$y=\sin 2x$, $y_1=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$, $y_1=e^{0^2}=1$, $y_2=e^{1^2}=e$.

(5)$y=e^{2x}$, $y_1=e^{2\cdot 1}=e^2$, $y_2=e^{2\cdot(-1)}=e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$的定义域 $D=[0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;

(4)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1)由 $0\le x^2\le 1$ 得$|x|\le 1$, 所以函数 $f(x^2)$的定义域为$[-1, 1]$.

(2)由 $0\le\sin x\le 1$ 得 $2n\pi\le x\le(2n+1)\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2\cdots$), 所以函数 $f(\sin x)$的定义域为

$$[2n\pi, (2n+1)\pi]\ (n=0, \pm1, \pm2\cdots).$$

(3)由 $0\le x+a\le 1$ 得$-a\le x\le 1-a$, 所以函数 $f(x+a)$的定义域为$[-a, 1-a]$.

(4)由 $0\le x+a\le 1$ 且 $0\le x-a\le 1$ 得: 当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时, $a\le x\le 1-a$; 当 $a>\frac{1}{2}$ 时, 无解. 因此当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时函数的定义域为$[a, 1-a]$, 当 $a>\frac{1}{2}$ 时函数无意义.

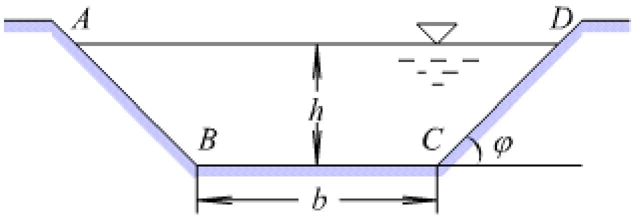
18. 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -1 & |x|>1 \end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases} 1 & |e^x|<1 \\ 0 & |e^x|=1 \\ -1 & |e^x|>1 \end{cases}$, 即 $f[g(x)]=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$.

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e^1 & |x|<1 \\ \mathrm{e}^0 & |x|=1 \\ e^{-1} & |x|>1 \end{cases}$, 即 $g[f(x)]=\begin{cases} e & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ e^{-1} & |x|>1 \end{cases}$.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角φ=40°(图 1–37). 当过水断面 ABCD 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 L(L=AC+CD+DB)与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

图 1–37



解 $Ab=DC=\frac{h}{\sin 40^\circ}$, 又从 $\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]=S_0$ 得 $BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$, 所以

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h>0,\ \frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0$$

确定, 定义域为 $0<h<\sqrt{S_0\cot 40^\circ}$.

20. 收敛音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

(1)将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2)将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3)某一商行订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

解 (1)当 $0\le x\le 100$ 时, $p=90$.

令 $0.01(x_0-100)=90-75$, 得 $x_0=1600$. 因此当 $x\ge 1600$ 时, $p=75$.

当 $100<x<1600$ 时,

$p=90-(x-100)\times 0.01=91-0.01x$.

综合上述结果得到

$$p=\begin{cases} 90 & 0\le x\le 100 \\ 91-0.01x & 100<x<1600 \\ 75 & x\ge 1600 \end{cases}.$$

(2) $P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0\le x\le 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1600 \\ 15x & x\ge 1600 \end{cases}$.

(3) $P=31\times 1000-0.01\times 1000^2=21000$(元).

习题 1−2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$;

(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$;

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;

(5) $x_n=n(-1)^n$.

解 (1)当 $n\to\infty$时，$x_n=\frac{1}{2^n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(2)当 $n\to\infty$时，$x_n=(-1)^n\frac{1}{n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3)当 $n\to\infty$时，$x_n=2+\frac{1}{n^2}\to 2$，$\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})=2$.

(4)当 $n\to\infty$时，$x_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5)当 $n\to\infty$时，$x_n=n(-1)^n$ 没有极限.

2. 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε，当$\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$|x_n-0|=\frac{|\cos\frac{n\pi}{2}|}{n}\le\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，也就是 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则$\forall n>N$，有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时，$N=[\frac{1}{\varepsilon}]=1000$.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

(1)分析 要使$|\dfrac{1}{n^2}-0|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只须$n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即$n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$，当$n>N$时，有$|\dfrac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2)分析 要使$|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，只须$\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\dfrac{1}{4\varepsilon}]$，当$n>N$时，有$|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3)分析 要使$|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$，只须$n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4)分析 要使$|0.99\cdots9-1|=\dfrac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，只须$\dfrac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon$，即$n>1+\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=[1+\lg\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当$\forall n>N$时，有$|0.99\cdots9-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而

$$||u_n|-|a||\le|u_n-a|<\varepsilon.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限. 例如$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为数列$\{x_n\}$有界，所以存在M，使$\forall n\in\mathbf{Z}$，有$|x_n|\le M$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\boldsymbol{N}$，当$n>N$时，有$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 从而当$n>N$时，有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| \le M|y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$若 $x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$, $x_{2k+1}\to a$ $(k\to\infty)$, 证明: $x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

证明　因为 $x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$, $x_{2k+1}\to a$ $(k\to\infty)$, 所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists K_1$, 当 $2k>2K_1$ 时, 有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$;

$\exists K_2$, 当 $2k+1>2K_2+1$ 时, 有$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{2K_1, 2K_2+1\}$, 只要 $n>N$, 就有$|x_n-a|<\varepsilon$. 因此 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

习题 1–3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

证明 (1)分析 $|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|$, 要使$|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 只须$|x-3|<\dfrac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{1}{3}\varepsilon$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有$|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2)分析 $|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$, 要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只须$|x-2|<\dfrac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{1}{5}\varepsilon$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3)分析 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|=|x-(-2)|$, 要使$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$, 只须$|x-(-2)|<\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时, 有$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4)分析 $\left|\dfrac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2|x-(-\dfrac{1}{2})|$, 要使$\left|\dfrac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 只须$|x-(-\dfrac{1}{2})|<\dfrac{1}{2}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{1}{2}\varepsilon$, 当$0<|x-(-\dfrac{1}{2})|<\delta$ 时, 有$\left|\dfrac{1-4x^3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^3}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证明 (1)分析 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$, 要使$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, 只须$\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$, 即$|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\, X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，当$|x|>X$时，有$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2)分析 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，要使$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只须$\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\, X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>X$时，有$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当$x\to2$时，$y=x^2\to4$. 问δ等于多少，使当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$？

解 由于$x\to2$, $|x-2|\to0$，不妨设$|x-2|<1$，即$1<x<3$. 要使$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$，只要$|x-2|<\dfrac{0.001}{5}=0.0002$，取$\delta=0.0002$，则当$0<|x-2|<\delta$时，就有$|x^2-4|<0.001$.

4. 当$x\to\infty$时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$，问$X$等于多少，使当$|x|>X$时，$|y-1|<0.01$?

解 要使$\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<0.01$，只$|x|>\sqrt{\dfrac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397}$，$X=\sqrt{397}$.

5. 证明函数$f(x)=|x|$ 当$x\to0$时极限为零.

6. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to0$时的左、右极限，并说明它们在$x\to0$时的极限是否存在.

证明 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^-}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在.

因为

$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)\ne\lim_{x\to0^+}\varphi(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

7. 证明: 若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的极限都存在且都等于A，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明 因为 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$， $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$，所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists X_1>0$，使当 $x<-X_1$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\exists X_2>0$，使当 $x>X_2$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1, X_2\}$，则当$|x|>X$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$.

8. 根据极限的定义证明：函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设 $f(x)\to A(x\to x_0)$，则$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

因此当 $x_0-\delta<x<x_0$ 和 $x_0<x<x_0+\delta$ 时都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时左右极限都存在并且都等于 A.

再证明充分性. 设$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$，则$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta_1>0$，使当$x_0-\delta_1<x<x_0$时，有$|f(x)-A<\varepsilon$；

$\exists\delta_2>0$，使当$x_0<x<x_0+\delta_2$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$x_0-\delta_1<x<x_0$及$x_0<x<x_0+\delta_2$，从而有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

即$f(x)\to A(x\to x_0)$.

9. 试给出 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解 $x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理：如果 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限存在，则存在 $X>0$ 及 $M>0$，使当$|x|>X$ 时，$|f(x)|<M$.

证明 设 $f(x)\to A(x\to\infty)$，则对于$\varepsilon=1, \exists X>0$，当$|x|>X$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon=1$. 所以

$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

这就是说存在 $X>0$ 及 $M>0$，使当$|x|>X$ 时，$|f(x)|<M$，其中 $M=1+|A|$.

习题 1–4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 不一定.

例如, 当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)=2x$, $\beta(x)=3x$ 都是无穷小, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{2}{3}$, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无穷小.

2. 根据定义证明:

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$ 当 $x\to 3$ 时为无穷小;

(2) $y=x\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时为无穷小.

证明 (1)当 $x\neq 3$ 时 $|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$. 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有

$$|y|=\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to 3$ 时 $y=\frac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2)当 $x\neq 0$ 时 $|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|$. 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时, 有

$$|y|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x-0|<\delta=\varepsilon,$$

所以当 $x\to 0$ 时 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y|>10^4$?

证明 分析 $|y|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|\geq\frac{1}{|x|}-2$, 要使$|y|>M$, 只须 $\frac{1}{|x|}-2>M$, 即 $|x|<\frac{1}{M+2}$.

证明 因为$\forall M>0$, $\exists\delta=\frac{1}{M+2}$, 使当 $0<|x-0|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,

所以当 $x\to 0$ 时, 函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

取 $M=10^4$, 则 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$. 当 $0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$ 时, $|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1)因为$\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$，而当$x\to\infty$ 时$\frac{1}{x}$是无穷小，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$.

(2)因为$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x\ (x\neq1)$，而当$x\to0$时$x$为无穷小，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表:

6. 函数$y=x\cos x$在$(-\infty, +\infty)$内是否有界？这个函数是否为当$x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解 函数$y=x\cos x$在$(-\infty, +\infty)$内无界.

这是因为$\forall M>0$，在$(-\infty, +\infty)$内总能找到这样的x，使得$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi)=2k\pi\cos2k\pi=2k\pi\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当k充分大时，就有$|y(2k\pi)|>M$.

当$x\to+\infty$ 时，函数$y=x\cos x$不是无穷大.

这是因为$\forall M>0$，找不到这样一个时刻N，使对一切大于N的x，都有$|y(x)|>M$. 例如

$$y(2k\pi+\frac{\pi}{2})=(2k\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

对任何大的N，当k充分大时，总有$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}>N$，但$|y(x)|=0<M$.

7. 证明：函数$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0, 1]$上无界，但这函数不是当$x\to0^+$时的无穷大.

证明 函数$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0, 1]$上无界. 这是因为

$\forall M>0$，在$(0, 1]$中总可以找到点x_k，使$y(x_k)>M$. 例如当

$$x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\ (k=0, 1, 2, \cdots)$$

时，有

$$y(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

当k充分大时，$y(x_k)>M$.

当$x\to0^+$ 时，函数$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不是无穷大. 这是因为

$\forall M>0$，对所有的$\delta>0$，总可以找到这样的点x_k，使$0<x_k<\delta$，但$y(x_k)<M$. 例如可取

$$x_k=\frac{1}{2k\pi}\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

当k充分大时，$x_k<\delta$，但$y(x_k)=2k\pi\sin2k\pi=0<M$.

习题 1–5

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=0$ (分子次数低于分母次数，极限为零)

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^2})=1\times 2=2$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\frac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})=\frac{1}{5}$.

(14) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\frac{0}{16}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$ (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ (当 $x\to 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量).

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x=0$ (当 $x\to\infty$时, $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小, 而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1–6

1. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x}=\omega\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}=3$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

(4) $\lim_{x\to 0}x\cot x$;

解 $\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

解法一 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$.

解法二 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数).

解 $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=x$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

解 $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=\left\{\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\right\}^{-1}=e^{-1}$.

(2) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

解 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\right]^{2}=e^{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}$ (k 为正整数).

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I′.

解

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$;

证明 因为$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$,

由极限存在准则 I, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

证明 因为

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

(3)数列$\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cdots$ 的极限存在;

证明 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$).

先证明数列$\{x_n\}$有界. 当 $n=1$ 时 $x_1=\sqrt{2}<2$, 假定 $n=k$ 时 $x_k<2$, 当 $n=k+1$ 时,

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2,$$

所以 $x_n<2(n=1, 2, 3, \cdots)$, 即数列$\{x_n\}$有界.

再证明数列单调增.

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

而 $x_n-2<0$, $x_n+1>0$，所以 $x_{n+1}-x_n>0$，即数列$\{x_n\}$单调增.

因为数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以此数列是有极限的.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$;

证明　当$|x|\le 1$ 时，则有

$1+x\le 1+|x|\le (1+|x|)^n$,

$1+x\ge 1-|x|\ge (1-|x|)^n$,

从而有　$1-|x|\le\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$.

因为　$\lim\limits_{x\to 0}(1-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)=1$,

根据夹逼准则，有

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

证明　因为$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$，所以$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

习题 1–7

1. 当 $x\to 0$ 时, $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比, 哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$,

所以当 $x\to 0$ 时, x^2-x^3 是高阶无穷小, 即 $x^2-x^3=o(2x-x^2)$.

2. 当 $x\to 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$, (2)$\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)=3$,

所以当 $x\to 1$ 时, $1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x)=1$,

所以当 $x\to 1$ 时, $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当 $x\to 0$ 时, 有:

(1) $\arctan x\sim x$;

(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证明 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=1$ (提示: 令 $y=\arctan x$, 则当 $x\to 0$ 时, $y\to 0$),

所以当 $x\to 0$ 时, $\arctan x\sim x$.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$,

所以当 $x\to 0$ 时, $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n>m\\ \infty & n<m\end{cases}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}$.

(4)因为

$$\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)=-2\tan x\sin^2\frac{x}{2}\sim -2x\cdot(\frac{x}{2})^2=-\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2}-1=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\sim\frac{1}{3}x^2\ (x\to 0),$$

$$\sqrt{1+\sin x}-1=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+1}\sim\sin x\sim x\ (x\to 0),$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2\cdot x}=-3.$$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$ (自反性);

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\beta\sim\alpha$(对称性);

(3)若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, 则$\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明 (1) $\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$, 所以$\alpha\sim\alpha$;

(2) 若$\alpha\sim\beta$, 则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, 从而$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$. 因此$\beta\sim\alpha$;

(3) 若$\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$, $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\frac{\beta}{\gamma}\cdot\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$. 因此$\alpha\sim\gamma$.

习题 1–8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x & -1\le x\le 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$.

解 (1)已知多项式函数是连续函数, 所以函数 $f(x)$在$[0, 1)$和$(1, 2]$内是连续的.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$

所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, 从而函数 $f(x)$在 $x=1$ 处是连续的.

综上所述，函数 $f(x)$在$[0, 2]$上是连续函数.

(2)只需考察函数在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性.

在 $x=-1$ 处, 因为$f(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 1=1\ne f(-1)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x=-1=f(-1)$, 所以函数在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1=f(1)$, 所以函数在 $x=1$ 处连续.

综合上述讨论, 函数在$(-\infty, -1)$和$(-1, +\infty)$内连续, 在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=k$, $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$;

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$, $x=0$;

(4) $y=\begin{cases} x-1 & x\le 1 \\ 3-x & x>1 \end{cases}$, $x=1$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在 $x=2$ 和 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=2$ 和 $x=1$ 是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$, 所以 $x=2$ 是函数的第二类间断点;

因为$\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$，所以 x=1 是函数的第一类间断点，并且是可去间断点．在 x=1 处，令 y=−2，则函数在 x=1 处成为连续的.

(2)函数在点 $x=k\pi(k\in Z)$和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$处无定义，因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty$ $(k\neq0)$，故 $x=k\pi(k\neq0)$是第二类间断点；

因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$ $(k\in Z)$，所以 x=0 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 是第一类间断点且是可去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$，则函数在 x=0 处成为连续的；

令 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，y=0，则函数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

(3)因为函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 在 x=0 处无定义，所以 x=0 是函数 $y=\cos^2\frac{1}{x}$ 的间断点．又因为 $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在，所以 x=0 是函数的第二类间断点.

(4)因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$，所以$x$=1是函数的第一类不可去间断点.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$.

在分段点x=−1 处，因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，所以$x$=−1 为函数的第一类不可去间断点.

在分段点x=1 处，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，所以$x$=1 为函数的第一类不可去间断点.

4. 证明：若函数 $f(x)$在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$时，$f(x)\neq0$.

证明 不妨设 $f(x_0)>0$．因为$f(x)$在 x_0 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$，由极限的局部保号性定理，存在 x_0 的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，使当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时 $f(x)>0$，从而当 $x\in U(x_0)$时，$f(x)>0$．这就是说，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$时，$f(x)\neq0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$的例子:

(1)$x=0, \pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$是 $f(x)$的所有间断点，且它们都是无穷间断点;

(2)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续，但$|f(x)|$在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义，但仅在一点连续.

解 函数 $f(x)=\csc(\pi x)+\csc\frac{\pi}{x}$ 在点 $x=0, \pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm\frac{1}{n}, \cdots$处是间断的, 且这些点是函数的无穷间断点.

解(2)函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbf{Q}\\ 1 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处不连续，但$|f(x)|=1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

解(3)函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbf{Q}\\ -x & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义，它只在 $x=0$ 处连续.

习题 1–9

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim_{x\to 0}f(x)$，$\lim_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim_{x\to 2}f(x)$.

解 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$，函数在$(-\infty, +\infty)$内除点 $x=2$ 和 $x=-3$ 外是连续的，所以函数 $f(x)$的连续区间为$(-\infty, -3)$、$(-3, 2)$、$(2, +\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处，$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$.

在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty,\quad \lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

2. 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\},\ \psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证明 已知 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此 $$\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|],$$

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)+|\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0),$$

所以$\varphi(x)$在点 x_0 也连续.

同理可证明$\psi(x)$在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 (1)因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数, $f(x)$在点 $x=0$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{0^2-2\cdot 0+5}=\sqrt{5}.$$

(2)因为函数 $f(x)=(\sin 2x)^3$ 是初等函数, $f(x)$在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^3=f(\frac{\pi}{4})=(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})^3=1.$$

(3)因为函数 $f(x)=\ln(2\cos 2x)$是初等函数, $f(x)$在点 $x=\frac{\pi}{6}$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=f(\frac{\pi}{6})=\ln(2\cos 2\cdot\frac{\pi}{6})=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5\cdot 1-4}+\sqrt{1}}=2.$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{a+a}{2}\cdot 1=\cos a .$$

(7) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}=1 .$$

4. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$;

(4) $\lim_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(5) $\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$;

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

解 (1) $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(2) $\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}=\ln(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})=\ln 1=0$.

(3) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^{x}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(4) $\lim_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$.

(5) $(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3}}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}=-\frac{3}{2},$$

所以 $\lim_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\geq 0 \end{cases}$ 应当如何选择数 a，使得 $f(x)$成为在$(-\infty, +\infty)$内的连续函数？

解 要使函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，只须 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，即只须

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)=a.$$

因为 $\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}e^x=1$，$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(a+x)=a$，所以只须取 $a=1$.

习题 1–10

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$, 则 $f(x)$是闭区间$[1, 2]$上的连续函数.

因为 $f(1)=-3$, $f(2)=25$, $f(1)f(2)<0$, 所以由零点定理, 在$(1, 2)$内至少有一点ξ $(1<\xi<2)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $x=\xi$ 是方程 $x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0$, $b>0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=a\sin x+b-x$, 则 $f(x)$是$[0, a+b]$上的连续函数.

$f(0)=b$, $f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\leq 0$.

若 $f(a+b)=0$, 则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根;

若 $f(a+b)<0$, 则 $f(0)f(a+b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(0, a+b)$, 使 $f(\xi)=0$, 这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根.

总之, 方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

3. 设函数 $f(x)$对于闭区间$[a, b]$上的任意两点 x、y, 恒有$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明: 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明 设 x_0 为(a, b)内任意一点. 因为

$$0\leq\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\leq\lim_{x\to x_0}L|x-x_0|=0,$$

所以 $$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0,$$

即 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

因此 $f(x)$在(a, b)内连续.

同理可证 $f(x)$在点 a 处左连续, 在点 b 处右连续, 所以 $f(x)$在$[a, b]$上连续.

因为 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 由零点定理, 至少有一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

4. 若 $f(x)$在$[a, b]$上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 显然 $f(x)$在$[x_1, x_n]$上也连续. 设 M 和 m 分别是 $f(x)$在$[x_1, x_n]$上的最大值和最小值.

因为 $x_i\in[x_1, x_n]$ $(1\leq i\leq n)$, 所以有 $m\leq f(x_i)\leq M$, 从而有

$$n\cdot m\leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq n\cdot M,$$

$$m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \le M.$$

由介值定理推论，在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

5. 证明：若 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$必在$(-\infty, +\infty)$内有界.

证明 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，只要$|x|>X$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ 即 } A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

又由于 $f(x)$在闭区间$[-X, X]$上连续，根据有界性定理，存在 $M>0$，使$|f(x)|\le M$, $x\in[-X, X]$.

取 $N=\max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$，则$|f(x)|\le N$, $x\in(-\infty, +\infty)$，即 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

6. 在什么条件下, (a, b)内的连续函数 $f(x)$为一致连续？

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________的条件.

(2)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的________条件.

(3) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的________条件.

(4)$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的________条件.

解　(1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设$f(x)=2^x+3^x-2$. 则当$x\to 0$时, 有(　　　).

$(A)f(x)$与x是等价无穷小;　　$(B)f(x)$与x同阶但非等价无穷小;

$(C)f(x)$是比x高阶的无穷小;　　$(D)f(x)$是比x低阶的无穷小.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

$$=\ln 2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}+\ln 3\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln 2+\ln 3\ (\text{令 } 2^x-1=t,\ 3^x-1=u)\ .$$

所以$f(x)$与x同阶但非等价无穷小. 故应选B.

3. 设$f(x)$的定义域是$[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;

(4) $f(\cos x)$.

解　(1)由$0\le e^x\le 1$得$x\le 0$, 即函数$f(e^x)$的定义域为$(-\infty, 0]$.

(2) 由$0\le \ln x\le 1$得$1\le x\le e$, 即函数$f(\ln x)$的定义域为$[1, e]$.

(3) 由$0\le \arctan x\le 1$得$0\le x\le \tan 1$, 即函数$f(\arctan x)$的定义域为$[0, \tan 1]$.

(4) 由$0\le \cos x\le 1$得$2n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

即函数 $f(\cos x)$的定义域为$[\,2n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}\,]$, $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases},$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)\ge 0$, 所以 $f[f(x)]=f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$;

因为 $g(x)\le 0$, 所以 $g[g(x)]=0$;
因为 $g(x)\le 0$, 所以 $f[g(x)]=0$;

因为 $f(x)\ge 0$, 所以 $g[f(x)]=-f^{2}(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$.

5. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:
(1)$y=|\sin x|$;
(2)$y=\sin|x|$;
(3) $y=2\sin\frac{x}{2}$.

6. 把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为α的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为 r, 高为 h, 依题意有

$$R(2\pi-\alpha)=2\pi r,\quad r=\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}=R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}.$$

圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\cdot R\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi\alpha-a^2}\quad(0<\alpha<2\pi).$$

7. 根据函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 要使$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$, 只需$|x-3|<\varepsilon$, 取$\delta=\varepsilon$, 当

$0<|x-3|<\delta$时，就有$|x-3|<\varepsilon$，即$|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

8. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 (1)因为$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $$\lim_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=e.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$ (提示：用等价无穷小换).

(5) $$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$$，因为

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3})^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x})$$

$$=\frac{1}{3}[\ln a\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)}+\ln b\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)}+\ln c\lim_{v\to 0}\frac{1}{\ln(1+v)}]$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}\ ,$$

所以 $\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}\ .$

提示: 求极限过程中作了变换 $a^x-1=t$, $b^x-1=u$, $c^x-1=v$.

(6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$, 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=e\ ,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin^2 x-1)}{\cos x(\sin x+1)}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin x+1}=0\ ,$$

所以 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1\ .$

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ a+x^2 & x\le 0\end{cases}$, 要使 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 应怎样选择数 a ?

解 要使函数连续, 必须使函数在 $x=0$ 处连续.

因为 $f(0)=a$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$,

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$在 $x=0$ 处连续. 因此选取 $a=0$ 时, $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续.

10. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0\end{cases}$, 求 $f(x)$的间断点, 并说明间断点所属类形.

解 因为函数 $f(x)$在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 是函数的一个间断点.

因为 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$ (提示 $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$),

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$ (提示 $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$),

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(x+1)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}$，
所以 $x=0$ 也是函数的间断点，且为第一类间断点.

11. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

12. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x)=\sin x+x+1$，则函数 $f(x)$在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续.

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-1-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}$，$f(\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}$，$f(-\frac{\pi}{2})\cdot f(\frac{\pi}{2})<0$，

所以由零点定理，在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 这说明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 L: $y=kx+b$，使得当 $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)时，曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$到直线 L 的距离 $d(M, L)\to 0$，则称 L 为曲线 $y=f(x)$的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时，称 L 为斜渐近线.

(1)证明：直线 L: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty,x\to-\infty)}}[f(x)-kx].$$

(2)求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

证明 (1) 仅就 $x\to\infty$的情况进行证明.

按渐近线的定义，$y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

必要性：设 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$，

于是有 $$\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

同时有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

充分性：如果 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$，则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0,$$

因此 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$的渐近线.

(2)因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=2$,

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-2x]=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=2\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=2\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}-1=1,$$

所以曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y=2x+1$.

习题 2−1

(1) $y=x^4$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(3) $y=x^{1.6}$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$;

(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;

(7) $y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$;

解 (1) $y'=(x^4)'=4x^{4-1}=4x^3$.

(2) $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y'=(x^{1.6})'=1.6x^{1.6-1}=1.6x^{0.6}$.

(4) $y'=(\dfrac{1}{\sqrt{x}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y'=(\dfrac{1}{x^2})'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$.

(6) $y'=(x^3\sqrt[5]{x})'=(x^{\frac{16}{5}})'=\dfrac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\dfrac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y'=(\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}})'=(x^{\frac{1}{6}})'=\dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m), 求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

解 $v=(s)'=3t^2$, $v|_{t=2}=12$(米/秒).

9. 如果 $f(x)$为偶函数, 且 $f(0)$存在, 证明 $f(0)=0$.

证明 当 $f(x)$为偶函数时, $f(-x)=f(x)$, 所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{-x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0),$$

从而有 $2f'(0)=0$, 即 $f'(0)=0$.

10. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\dfrac{2}{3}\pi$, $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以斜率分别为

$$k_1=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ k_2=\cos\pi=-1.$$

11. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程式.

解 $y'=-\sin x$, $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$ 处, 切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\dfrac{\pi}{3})$,

法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}(x-\dfrac{\pi}{3})$.

12. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解 $y'=e^x$, $y'|_{x=0}=1$, 故在(0, 1)处的切线方程为

$y-1=1\cdot(x-0)$, 即 $y=x+1$.

13. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 $y'=2x$, 割线斜率为 $k=\frac{y(3)-y(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$.

令 $2x=4$, 得 $x=2$.

因此抛物线 $y=x^2$ 上点(2, 4)处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1)$y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

解 (1)因为

$$y(0)=0,\ \lim_{x\to -0}y=\lim_{x\to -0}|\sin x|=\lim_{x\to -0}(-\sin x)=0,\ \lim_{x\to +0}y=\lim_{x\to +0}|\sin x|=\lim_{x\to +0}\sin x=0,$$

所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

而 $y'_-(0)\neq y'_+(0)$, 所以函数在 $x=0$ 处不可导.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$, 又 $y(0)=0$, 所以函数在在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以函数在点 $x=0$ 处可导, 且 $y'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

解 因为

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,\ \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b,\ f(1)=a+b,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处连续, 必须 $a+b=1$.

又因为当 $a+b=1$ 时

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2,\ f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处可导, 必须 $a=2$, 此时 $b=-1$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 求 $f_+'(0)$及 $f_-'(0)$, 又 $f'(0)$是否存在?

解 因为

$$f_-'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{-x-0}{x}=-1,\ f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

而 $f_-'(0)\ne f_+'(0)$, 所以 $f'(0)$不存在.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时, $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$;

当 $x>0$ 时, $f(x)=x$, $f'(x)=1$;

因为 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$,

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x-0}{x}=1$, 所以 $f'(0)=1$, 从而

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}.$$

18. 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

解 由 $xy=a^2$ 得 $y=\dfrac{a^2}{x}$, $k=y'=-\dfrac{a^2}{x^2}$.

设(x_0, y_0)为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

令 $y=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $x=\dfrac{y_0x_0^2}{a^2}+x_0=2x_0$, 为切线在 x 轴上的距.

令 $x=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $y=\dfrac{a^2}{x_0}+y_0=2y_0$, 为切线在 y 轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2|x_0y_0|=2a^2.$$

习题 2−2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$(\cot x)'=-\csc^2 x$; $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

解 $(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

$(\csc x)'=(\frac{1}{\sin x})'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$;

(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$;

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$;

(4) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$;

(6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\frac{\ln x}{x}$;

(8) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$;

(10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

解 (1) $y'=(\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12)'=(4x^{-5}+7x^{-4}-2x^{-1}+12)'$

$=-20x^{-6}-28x^{-5}+2x^{-2}=-\frac{20}{x^6}-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$.

(2) $y'=(5x^3-2^x+3e^x)'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=(2\tan x+\sec x-1)'=2\sec^2 x+\sec x\cdot\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=(\sin x\cdot\cos x)'=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos 2x$.

(5) $y'=(x^2\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(6) $y'=(3e^x\cos x)'=3e^x\cdot\cos x+3e^x\cdot(-\sin x)=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=(\frac{\ln x}{x})'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=(\frac{e^x}{x^2}+\ln 3)'=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=(x^2\ln x\cos x)'=2x\cdot\ln x\cos x+x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x+x^2\ln x\cdot(-\sin x)$

$2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$.

(10) $s'=(\frac{1+\sin t}{1+\cos t})'=\frac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y=\sin x-\cos x$, 求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$,求 $\frac{d\rho}{d\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$和 $f'(2)$.

解 (1)$y'=\cos x+\sin x$,

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

(2) $\frac{d\rho}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$$\frac{d\rho}{d\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\frac{\pi}{2}).$$

(3) $f'(x)=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2}{5}x$, $f'(0)=\frac{3}{25}$, $f'(2)=\frac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1)该物体的速度 $v(t)$;

(2)该物体达到最高点的时刻.

解 (1)$v(t)=s'(t)=v_0-gt$.

(2)令 $v(t)=0$, 即 $v_0-gt=0$, 得 $t=\frac{v_0}{g}$, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y'=2\cos x+2x$, $y'|_{x=0}=2$, 又当 $x=0$ 时, $y=0$, 所以所求的切线方程为

$$y=2x,$$

所求的法线方程为

$$y=-\frac{1}{2}x, \text{ 即 } x+2y=0.$$

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x+5)^4$

(2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=e^{-3x^2}$;

(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$;

(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan(x^2)$;

(8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$;

(10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^{4-1}\cdot(2x+5)'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)\cdot(4-3x)'=-\sin(4-3x)\cdot(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-3x^2)'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=\left[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(a^2-x^2)'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2(x^2)\cdot(x^2)'=2x\sec^2(x^2)$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot(\arcsin x)'=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(1-2x)$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;

(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(1-2x)'=\dfrac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x^2)'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y'=(e^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'=e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{x}{2})'\cos 3x+e^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)(3x)'$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(-\frac{1}{x^2})=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\frac{\cos 2x\cdot 2\cdot x-\sin 2x\cdot 1}{x^2}=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(a^2+x^2)']$

$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x)]=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=\frac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x+\tan x)'=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$.

(10) $y'=\frac{1}{\csc x-\cot x}\cdot(\csc x-\cot x)'=\frac{-\csc x\cot x+\csc^2 x}{\csc x-\cot x}=\csc x$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$;

(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$;

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5)$y=\sin^n x\cos nx$;

(6) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$;

(7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

(8) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

(9) $y\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y'=2\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'=2\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot(\dfrac{x}{2})'$

$$=2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\ .$$

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot(\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\csc x$.

(3) $y'=\sqrt{1+\ln^2 x}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot(1+\ln^2 x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

(4) $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot(\arctan\sqrt{x})'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'$

$=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

(5) $y'=n\sin^{n-1}x\cdot(\sin x)'\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot(nx)'$

$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\cos nx+\sin^n x\cdot(-\sin nx)\cdot n$

$=n\sin^{n-1}x\cdot(\cos x\cdot\cos nx-\sin x\cdot\sin nx)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

(6) $y'=\dfrac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot(\dfrac{x+1}{x-1})'=\dfrac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(7) $y'=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(\arccos x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{\arccos x+\arcsin x}{(\arccos x)^2}$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot[\ln(\ln x)]'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

(9) $y'=\dfrac{(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot(\dfrac{1-x}{1+x})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

9. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$可导, 且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$, 试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[f^2(x)+g^2(x)]'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$

$=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

10. 设 $f(x)$可导, 求下列函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=f'(x^2)\cdot 2x=2x\cdot f'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$

$=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x+f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x)$;

(2) $y=\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}$;

(3) $y=\mathrm{th}(\ln x)$;

(4) $y=\mathrm{sh}^3 x+\mathrm{ch}^2 x$;

(5) $y=\mathrm{th}(1-x^2)$;

(6) $y=\mathrm{arch}(x^2+1)$;

(7) $y=\mathrm{arch}(e^{2x})$;

(8) $y=\arctan(\mathrm{th}\, x)$;

(9) $y=\ln\mathrm{ch}x+\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2 x}$;

(10) $y=\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

解 (1) $y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\, x)\cdot\mathrm{ch}\, x$.

(2) $y'=\mathrm{ch}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}+\mathrm{sh}\, x\cdot e^{\mathrm{ch}\, x}\cdot\mathrm{sh}\, x=e^{\mathrm{ch}\, x}(\mathrm{ch}\, x+\mathrm{sh}^2 x)$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x\cdot\mathrm{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y'=3\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}\, x+2\mathrm{ch}\, x\cdot\mathrm{sh}\, x=\mathrm{sh}\, x\cdot\mathrm{ch}\, x\cdot(3\mathrm{sh}\, x+2)$.

(5) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(1-x^2)=\dfrac{-2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)}}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot(e^{2x})'=\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot(\mathrm{th}\,x)'=\dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}\right)}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$

$=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x}=\dfrac{1}{1+2\mathrm{sh}^2x}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\cdot(\mathrm{ch}\,x)'-\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^4x}\cdot(\mathrm{ch}^2x)'=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^4x}\cdot2\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{sh}x$

$=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}\,x\cdot(\mathrm{ch}^2x-1)}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}^3x}{\mathrm{ch}^3x}=\mathrm{th}^3x$.

(10) $y'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left[\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'$

$=\mathrm{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}\mathrm{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

12. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;

(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$;

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;

(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2x\cdot\cos(x^2)\cdot2x=\sin2x\cdot\sin(x^2)+2x\cdot\sin^2x\cdot\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x^2+4}\arctan\dfrac{x}{2}$.

(4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^n-\ln x\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y'=\dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\dfrac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$.

(6) $y'=\sec\frac{1}{x}\cdot(\cos\frac{1}{x})'=\sec\frac{1}{x}\cdot(-\sin\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$.

(7) $y'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-\sin^2\frac{1}{x})'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot(-2\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(x+\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin\frac{x}{2}$.

(10) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot(\frac{2t}{1+t^2})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+t^2)-2t\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}$

$$=\frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}\ .$$

习题 2−3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\dfrac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\dfrac{1}{x}$, $y''=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y=x\cos x$; $y'=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos x-\sin x)$

$y''=-e^{-t}(\cos x-\sin x)+e^{-t}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} .$$

(6) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=-\dfrac{2x}{1-x^2}$,

$$y''=-\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} .$$

(7) $y'=\sec^2 x$,

$y''=2\sec x\cdot(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$.

(8) $y'=\dfrac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$,

$$y''=-\frac{6x\cdot(x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3} .$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(10) $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$$y''=\frac{[e^x(x-1)+e^x]\cdot x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot(2x)=e^{x^2}(1+2x^2)$,

$$y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot(1+2x^2)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

(12) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=-\frac{1}{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2})'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2})}=-\frac{x}{(1+x)^2\sqrt{1+x}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120(2+10)^3=207360$.

3. 若 $f''(x)$存在, 求下列函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1)$y'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+2x\cdot 2xf'(x^2)=2f'(x^2)+4x^2f'(x^2)$.

(2) $y'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$,

$$y''=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

4. 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$;

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}(-\frac{y''}{(y')^3})=\frac{d}{dx}(-\frac{y''}{(y')^3})\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A、ω是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

解 $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos\omega t$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$ 就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2A\sin\omega t=0.$$

6. 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda$,$C_1$, C_2 是常数)满足关系式:

$$y''-\lambda^2 y=0 .$$

解　$y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$,

$y''=C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x}$.

$y''-\lambda^2 y=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-\lambda^2(C_1 e^{\lambda x}+C_2 e^{-\lambda x})$

$=(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})-(C_1\lambda^2 e^{\lambda x}+C_2\lambda^2 e^{-\lambda x})=0$.

7. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式:

$$y''-2y'+2y=0 .$$

解　$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$.

$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x=0$.

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$　($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

(3) $y=x\ln x$;

(4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1x^0=n!$.

(2) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$,

$y''=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$,

$y'''=2^2\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})$,

$y^{(4)}=2^3\cos(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})=2^3\sin(2x+3\cdot\frac{\pi}{2})$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}]$.

(3) $y'=\ln x+1$,

$y''=\frac{1}{x}=x^{-1}$,

$y'''=(-1)x^{-2}$,

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3}$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+2)x^{-n+1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.

(4) $y'=e^x+xe^x$,

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$,

$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x$,

$\cdots$,

$y^{(n)}=ne^x+xe^x=e^x(n+x)$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y=x\operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 (1)令 $u=e^x$, $v=\cos x$, 有

$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x$;

$v'=-\sin x$, $v''=-\cos x$, $v'''=\sin x$, $v^{(4)}=\cos x$,

所以 $y^{(4)}=u^{(4)}\cdot v+4u'''\cdot v'+6u''\cdot v''+4u'\cdot v'''+u\cdot v^{(4)}$

$=e^x[\cos x+4(-\sin x)+6(-\cos x)+4\sin x+\cos x]=-4e^x\cos x$.

(2)令 $u=x$, $v=\mathrm{sh}\, x$, 则有

$u'=1$, $u''=0$;

$v'=\mathrm{ch}\, x$, $v''=\mathrm{sh}\, x$, $\cdots$, $v^{(99)}=\mathrm{ch}\, x$, $v^{(100)}=\mathrm{sh}\, x$,

所以 $y^{(100)}=u^{(100)}\cdot v+C_{100}^{1}u^{(99)}\cdot v'+C_{100}^{2}u^{(98)}\cdot v''+\cdots C_{100}^{98}u''\cdot v^{(98)}+C_{100}^{99}u'\cdot v^{(99)}+u\cdot v^{(100)}$

$=100\mathrm{ch}\, x+x\,\mathrm{sh}\, x$.

(3)令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$;

$v^{(48)}=2^{48}\sin(2x+48\cdot\dfrac{\pi}{2})=2^{48}\sin 2x$,

$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x$, $v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x$,

所以 $y^{(50)}=u^{(50)}\cdot v+C_{150}^{1}u^{(49)}\cdot v'+C_{50}^{2}u^{(48)}\cdot v''+\cdots C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$

$=C_{50}^{48}u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49}u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$

$=\dfrac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{28}\sin 2x+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+x^2\cdot(-2^{50}\sin 2x)$

$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\dfrac{1225}{2}\sin 2x)$.

习题 2−4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2-2x y+9=0$;

(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$.;

(4) $y=1-xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2y y'-2y-2x y'=0,$$

于是 $(y-x)y'=y$,

$$y'=\frac{y}{y-x}.$$

(2)方程两边求导数得

$$3x^2+3y^2y'-2ay-3axy'=0,$$

于是 $(y^2-ax)y'=ay-x^2$,

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y+x y'=e^{x+y}(1+y'),$$

于是 $(x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y$,

$$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=-e^y-xe^y y',$$

于是 $(1+xe^y)y'=-e^y$,

$$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

于是 $y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$,

在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处 $y'=-1$.

所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所求法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)\text{, 即 } x-y=0.$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$;

(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$;

(4) $y=1+xe^y$.

解 (1)方程两边求导数得

$$2x-2yy'=0,$$

$$y'=\frac{x}{y},$$

$$y''=(\frac{x}{y})'=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-x\frac{x}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2)方程两边求导数得

$$2b^2x+2a^2yy'=0,$$

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y})}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3)方程两边求导数得

$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y'),$$

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}=\frac{\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)}=-1-\frac{1}{y^2},$$

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=\frac{2}{y^3}(-1-\frac{1}{y^2})=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

(4)方程两边求导数得

$$y'=e^y+x\,e^yy',$$

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{1-(y-1)}=\frac{e^y}{2-y},$$

$$y''=\frac{e^yy'(2-y)-e^y(-y')}{(2-y)^2}=\frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=(\frac{x}{1+x})^x$;

(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;

(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1)两边取对数得

$$\ln y=x\ln|x|-x\ln|1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\ln(1+x)-x\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是 $$y'=(\frac{x}{1+x})^x[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}].$$

(2)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{5}\ln|x-5|-\frac{1}{25}\ln(x^2+2),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}=[\frac{1}{x-5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2+2}].$$

(3)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1},$$

于是 $$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}]$$

(4)两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)},$$

于是 $$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)}]=\frac{1}{4}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{2}{x}+2\cot x+\frac{e^x}{e^x-1}].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2\\y=bt^2\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\y=\theta\cos\theta\end{cases}$.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3b}{2a}t$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. 已知 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$,

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$, 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$, 在 t=2 处.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}$.

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}$, $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0=0$,

所求切线方程为

$$y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}),\text{ 即 } 2\sqrt{2}x+y-2=0;$$

所求法线方程为

$$y=-\frac{1}{-2\sqrt{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}),\text{ 即 } \sqrt{2}x-4y-1=0.$$

(2) $y'_t=\frac{6at(1+t^2)-3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{6at}{(1+t^2)^2}$, $x'_t=\frac{3a(1+t^2)-3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{3a-3at^2}{(1+t^2)^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6at}{3a-3at^2}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

当 t=2 时, $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$, $x_0=\frac{6}{5}a$, $y_0=\frac{12}{5}a$,

所求切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}(x-\frac{6}{5}a),\text{ 即 } 4x+3y-12a=0;$$

所求法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}(x-\frac{6}{5}a),\text{ 即 } 3x-4y+6a=0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t. \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t} \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$, 设 $f''(t)$存在且不为零.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-1}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{\dfrac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{\dfrac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{-\dfrac{2}{3}\cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$.

解(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-t^3)'}{(1-t^2)'}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{1-3t^2}{-2t}\right)'}{-2t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t^3}+\dfrac{3}{t}\right)'}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2}t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{1}{2}t\right)'}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{1+t^2}{4t})'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s, 问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解 设波的半径为 r, 对应圆面积为 S, 则 $S=\pi r^2$, 两边同时对 t 求导得

$$S_t'=2\pi r r'.$$

当 t=2 时, r=6·2=12, r'_t=6,

故 $S_t'|_{t=2}=2\cdot 12\cdot 6\pi=144\pi$ (米 ^{2}/秒).

11. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中, 其速率为 4m^2/min . 当水深为 5m 时, 其表面上升的速度为多少?

解 水深为 h 时, 水面半径为 $r=\frac{1}{2}h$, 水面面积为 $S=\frac{1}{4}h^2\pi$,

水的体积为 $V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{4}h^2\pi=\frac{\pi}{12}h^3$,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt},\ \frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

已知 h=5(m), $\frac{dV}{dt}=4$ (m^3/min), 因此 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}$ (m/min).

12. 溶液自深 18cm 直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 设在 t 时刻漏斗在的水深为 y, 圆柱形筒中水深为 h. 于是有

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2 y=5^2 h.$$

由 $\frac{r}{6}=\frac{y}{18}$, 得 $r=\frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi(\frac{y}{3})^2 y=5^2 h,$$

即 $$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3^3}y^3=5^2 h.$$

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2}y^2 y_t'=5^2 h'.$$

当 y=12 时, y'_t=−1 代入上式得

$$h_t'=\frac{-\frac{1}{3^2}\cdot 12^2\cdot(-1)}{5^2}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ (\text{cm/min})..$$

2–7

1. 已知 $y=x^3-x$, 计算在 $x=2$ 处当Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的Δy 及 dy.

解 $\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=1}=[(2+1)^3-(2+1)]-(2^3-2)=18$,

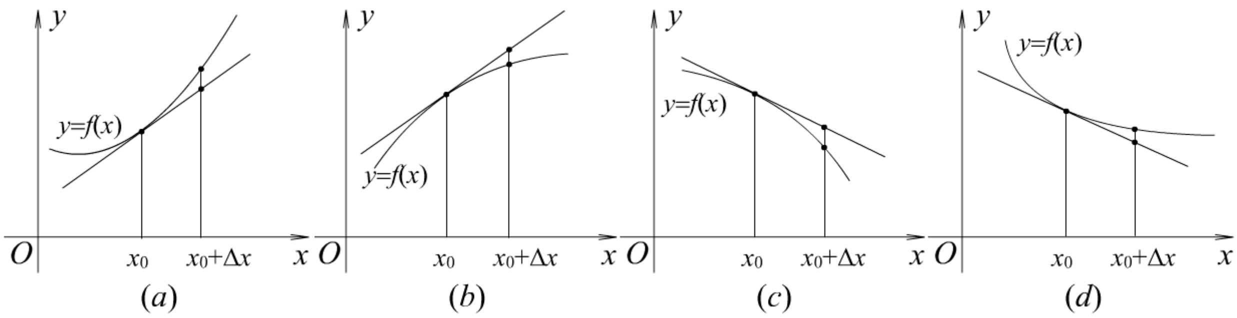
$dy|_{x=2,\ \Delta x=1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=1}=11$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=[(2+0.1)^3-(2+0.1)]-(2^3-2)=1.161$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.1}=1.1$;

$\Delta y|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=[(2+0.01)^3-(2+0.01)]-(2^3-2)=0.110601$,

$dy|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=(3x^2-1)\Delta x|_{x=2,\ \Delta x=0.01}=0.11$.



2. 设函数 $y=f(x)$的图形如图所示, 试在图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 dy、Δy 及$\Delta y-$ dy 并说明其正负.

解 $(a)\Delta y>0$, $dy>0$, $\Delta y-dy>0$.

$(b)\Delta y>0$, $dy>0$, $\Delta y-dy<0$.

$(c)\Delta y<0$, $dy<0$, $\Delta y-dy<0$.

$(d)\Delta y<0$, $dy<0$, $\Delta y-dy>0$.

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$;

(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2 e^{2x}$;

(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ $(A, \omega, \varphi$是常数) .

解 (1)因为 $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $dy=(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

(2)因为 $y'=\sin2x+2x\cos2x$, 所以 $dy=(\sin2x+2x\cos2x)dx$.

(3)因为 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, 所以 $dy=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

(4) $dy=y'dx=[\ln^2(1-x)]'dx=[2\ln(1-x)\cdot\dfrac{-1}{(1-x)}]dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx$.

(5)$dy=y'dx=(x^2e^{2x})'dx=(2x\ e^{2x}+2\ x^2e^{2x})dx=2x(1+x)\ e^{2x}$.

(6) $dy=y'dx=[e^{-x}\cos(3-x)]dx=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$.

(7) $dy=y'dx=(\arcsin\sqrt{1-x^2})'dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot(-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$.

(8) $dy=d\tan^2(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)d\tan(1+2x^2)=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)d(1+2x^2)$

$=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x\ dx=8x\cdot\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)dx$.

(9) $dy=d\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})^2}d(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})$

$=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})^2}\cdot\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx=-\dfrac{4x}{1+x^4}dx$.

(10) $dy=d[A\sin(\omega t+\varphi)]=A\cos(\omega t+\varphi)d(\omega t+\varphi)=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dx$.

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

(1) $d(\qquad)=2dx$;

(2) $d(\qquad)=3xdx$;

(3) $d(\qquad)=\cos tdt$;

(4) $d(\qquad)=\sin\omega xdx$;

(5) $d(\qquad)=\dfrac{1}{x+1}dx$;

(6) $d(\qquad)=e^{-2x}dx$;

(7) $d(\qquad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(8) $d(\qquad)=\sec^2 3xdx$.

解 (1) $d(\ 2x+C\ )=2dx$.

(2) $d(\dfrac{3}{2}x^2+C\ )=3xdx$.

(3) $d(\ \sin t+C\ )=\cos tdt$.

(4) $d(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\ )=\sin\omega xdx$.

(5) $d(\ \ln(1+x)+C\ )=\dfrac{1}{x+1}dx$.

(6) $d(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C\ )=e^{-2x}dx$.

(7) $d(\ 2\sqrt{x}+C\ )=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

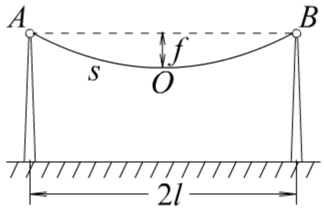
(8) $d(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\ )=\sec^2 3xdx$.

5. 如图所示的电缆 $A\overset{\frown}{O}B$ 的长为 s, 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,

则电缆长可按下面公式计算:

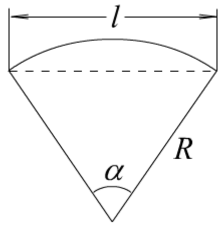
$$s=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2}),$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少？



解 $\Delta S\approx dS=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2})'df=\frac{8}{3l}f\Delta f$.

6. 设扇形的圆心角 α=60°, 半径 R=100cm(如图), 如果 R 不变, α 减少 30′, 问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变, R 增加 1cm, 问扇形面积大约改变了多少？



解 (1)扇形面积 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$,

$$\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_\alpha d\alpha=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha .$$

将 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta\alpha=-30'=-\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot(-\frac{\pi}{360})\approx -43.63\ (\text{cm}^2).$$

(2) $\Delta S\approx dS=(\frac{1}{2}\alpha R^2)'_R dR=\alpha R\Delta R$.

将 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta R=1$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1\approx 104.72\ (\text{cm}^2).$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) cos29°;

(2) tan136°.

解 (1)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\cos x$ 时, 有 $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\cdot\Delta x$, 所以

$$\cos 29°=\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180})\approx\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.87467 .$$

(2)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\tan x$ 时, 有 $\tan(x+\Delta x)\approx\tan x+\sec^2 x\cdot\Delta x$, 所以

$$\tan 136°=\tan(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{180})\approx\tan\frac{3\pi}{4}+\sec^2\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=-1+2\cdot\frac{\pi}{180}\approx -0.96509 .$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) arcsin0.5002;

(2) arccos 0.4995.

解 (1)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\arcsin x$ 时, 有

$$\arcsin(x+\Delta x)\approx\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x,$$

所以

$$\arcsin 0.5002=\arcsin(0.5+0.0002)\approx\arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot 0.0002$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0002\approx 30°47''.$$

(2)已知 $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$, 当 $f(x)=\arccos x$ 时, 有

$$\arccos(x+\Delta x)\approx\arccos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\Delta x,$$

所以

$$\arccos 0.4995=\arccos(0.5-0.0005)\approx\arccos 0.5-\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}\cdot(-0.0005)$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.0005\approx 60°2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

(1) $\tan x\approx x$ (x 是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x)\approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$,

并计算 tan45′ 和 ln1.002 的近似值.

(1)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\tan x$, $x_0=0$, $\Delta x=x$, 则有

$\tan x=\tan(0+x)\approx\tan 0+\sec^2 0\cdot x=\sec^2 0\cdot x=x$.

(2)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$\ln(1+x)\approx\ln 1+(\ln x)'|_{x=1}\cdot x=x$.

(3)已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=x$, 则有

$$\frac{1}{1+x}\approx 1+\left(\frac{1}{x}\right)'\bigg|_{x=1}\cdot x=1-x.$$

$\tan 45'\approx 45'\approx 0.01309$;

$\ln(1.002)=\ln(1+0.002)\approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;

(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1)设 $f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$,

$$\sqrt[3]{996}=\sqrt[3]{1000-4}=10\cdot\sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}}\approx 10(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1000})\approx 9.987.$$

(2)设 $f(x)=\sqrt[n]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x)\approx f(1)+f'(1)x=1+\frac{1}{n}x$, 于是

$$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{64+1}=2\cdot\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64})\approx 2.0052\,.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2%以内, 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 球的体积为 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$, $dV=\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D$, 因为计算球体体积时, 要求精度在 2%以内, 所以其相对误差不超过 2%, 即要求

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\pi D^2\cdot\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\cdot\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\le 2\%\,,$$

所以 $\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\le\frac{2}{3}\%$,

也就是测量直径的相对误差不能超过 $\frac{2}{3}\%$.

12. 某厂生产如图所示的扇形板, 半径 R=200mm, 要求中心角 α 为 55°. 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α, 如果测量弦长 l 时的误差 δ_l=0.1mm, 问此而引起的中心角测量误差 δ_x 是多少?

解 由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得 $\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400}$,

当 α=55°时, $l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin 27.5°\approx 184.7$,

$$\delta'_\alpha=|\alpha'_l|\cdot\delta_l=\left|2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{l}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\right|\cdot\delta_l\,.$$

当 l=184.7, δ_l=0.1 时,

$$\delta_\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{184.7}{400})^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot 0.1\approx 0.00056\ (\text{弧度}).$$

总 习 题 二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 连续的____________条件. $f(x)$在点 x_0 连续是 $f(x)$在点 x_0 可导的____________条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f_-'(x_0)$及右导数 $f_+'(x_0)$都存在且相等是 $f(x)$在点 x_0 可导的_______条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 可微的____________条件.

解 (1)充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在; (B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在; (D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

解 正确结论是 D.

提示: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ $(\Delta x=-h)$.

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的做标 x 为, 于是分布在区间$[0, x]$上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$,应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$.

在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

于是, 在点 x_0 处的线密度为

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=m'(x_0).$$

4. 根据导数的定义, 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}.$$

5. 求下列函数 $f(x)$的 $f_-'(0)$及 $f_+'(0)$,又 $f'(0)$是否存在?

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x) & x\ge 0\end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

解 (1)因为 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$,

$$f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=\lim_{x\to +0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

而且 $f_-'(0)=f_+'(0)$, 所以 $f'(0)$存在, 且 $f'(0)=1$.

(2)因为 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

$$f_+'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

而 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 所以 $f'(0)$不存在.

6. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, 所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续;

因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, 所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不导数.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=\sqrt[x]{x}\quad (x>0)$.

解(1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot(\frac{1+x}{1-x})'=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot(\tan\frac{x}{2})'+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'$

$\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot(e^x+\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}})=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$, $\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$, $y'=\sqrt[x]{x}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$.

8. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$;

(2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=-2\cos x\sin x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}$,

$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}-2\cos x\sin x\cdot\frac{1}{x}-\cos^2 x\cdot\frac{1}{x^2}$

$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}$.

(2) $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$y''=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$.

9. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y=\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$,

$$y'=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1},\quad y''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},\quad y'''=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)(1+x)^{\frac{1}{m}-3},\cdots,$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)\cdots(\frac{1}{m}-n+1)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}=-1+2(1+x)^{-1}$,

$y'=2(-1)(1+x)^{-2}$, $y''=2(-1)(-2)(1+x)^{-3}$, $y'''=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$, $\cdots$,

$$y^{(n)}=2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数 $y=y(x)$由方程 $e^y+xy=e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解　方程两边求导得

$e^y y'+y+xy'=0$, 　(1)

于是 $$y'=-\frac{y}{x+e^y};$$

$$y''=(-\frac{y}{x+e^y})'=-\frac{y'(x+e^y)-y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}. \text{ ——(2)}$$

当 $x=0$ 时, 由原方程得 $y(0)=1$, 由(1)式得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$, 由(2)式得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$.

解 (1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{(a\sin^3\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\tan\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\cdot\csc\theta.$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{(\arctan t)'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{1}{t})'}{[\ln\sqrt{1+t^2}]'}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线$\begin{cases}x=2e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$在 t=0 相的点处的切线方程及法线方程.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}}$.

当 t=0 时, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$, x=2, y=1.

所求切线的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$;

所求法线的方程为 $y-1=2(x-2)$.

13. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过 t 小时, 两船之间的距离为 S, 则有

$$S^2=(16-8t)^2+(6t)^2,$$

$$2S\frac{dS}{dt}=-16(16-8t)+72t,$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-16(16-8t)+72t}{2S}.$$

当 t=1 时, S=10,

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8 \text{ (km/h)},$$

即下午一点正两船相离的速度为-2.8km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求$\sqrt[3]{1.02}$的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则有 $f(1+\Delta x)-f(1)\approx f'(1)\Delta x=\frac{1}{3}\Delta x$, 或 $f(1+\Delta x)\approx 1+\frac{1}{3}\Delta x$ 于是

$$\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}=1+\frac{1}{3}\cdot 0.02=1.007.$$

15. 已知单摆的振动周期$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 g=980 cm/s^2, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20cm, 为使周期 T 增大 0.05s, 摆长约需加长多少?

解 因为$\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{gL}}\cdot\Delta L$,

所以 $\Delta L\approx\frac{0.05\sqrt{gL}}{\pi}\Big|_{L=20}=2.23$ (cm),

即摆长约需加长 2.23cm.

习题 3−1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上的正确性.

解 因为 $y=\ln\ \sin\ x$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上连续, 在$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$内可导, 且$y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})$, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点$\xi\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$, 使得 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得$\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$.

因此确有$\xi=\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$, 使 $y'(\xi)=\cot\xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0, 1]$上的正确性.

解 因为$y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0, 1]$上连续, 在$(0, 1)$内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点$\xi\in(0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由 $y'(x)=12x^2-10x+1=0$ 得 $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$.

因此确有$\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续, 在$(0,\frac{\pi}{2})$可导, 且 $F'(x)=1-\sin x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内不为 0, 所以由柯西中值定理知至少存在一点$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

令$\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}$, 即$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{2}{\pi-2}$.

化简得$\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$. 易证$0<\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1<1$, 所以$\sin x=\frac{8}{(\pi-2)^2+4}-1$在$(0,\frac{\pi}{2})$内有解, 即确实存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证明 因为函数 $y=px^2+qx+r$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$, 即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

化间上式得

$$p(b-a)(b+a)=2p\xi(b-a),$$

故 $\xi=\frac{a+b}{2}$.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1)=f(2)=0$, 所以由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1\in(1, 2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在 $\xi_2\in(2, 3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$; 存在 $\xi_3\in(3, 4)$, 使 $f'(\xi_3)=0$. 显然 ξ_1、ξ_2、ξ_3 都是方程 $f'(x)=0$ 的根. 注意到方程 $f'(x)=0$ 是三次方程, 它至多能有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程 $f'(x)=0$ 的全部根.

6. 证明恒等式: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $(-1\le x\le 1)$.

证明 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

所以 $f(x)\equiv C$, 其中 C 是一常数.

因此 $f(x)=f(0)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, 即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0, 证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

证明 设 $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$, 由于 $F(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续, 在 $(0, x_0)$ 内可导, 且 $F(0)=F(x_0)=0$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi\in(0, x_0)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi_1\in(x_1, x_2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在一点 $\xi_2\in(x_2, x_3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$.

又由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1, ξ_2) 内可导, 且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 根据罗尔定理, 至少

存在一点$\xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(x_1, x_3)$, 使 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$, $n>1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b) .$$

证明 设 $f(x)=x^n$, 则 $f(x)$在$[b, a]$上连续, 在(b, a)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(b, a)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$

因为 $nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)< na^{n-1}(a-b)$,

所以 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n< na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} .$$

证明 设$f(x)=\ln x$, 则$f(x)$在区间$[b, a]$上连续, 在区间(b, a)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(b, a)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } \ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b) .$$

因为$b<\xi<a$, 所以

$$\frac{1}{a}(a-b)<\ln a-\ln b<\frac{1}{b}(a-b), \text{ 即 } \frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} .$$

11. 证明下列不等式:

(1)$|\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$;

(2)当 $x>1$ 时, $e^x>e\cdot x$.

证明 (1)设$f(x)=\arctan x$, 则$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a) ,$$

所以 $|\arctan b-\arctan a|=\frac{1}{1+\xi^2}|b-a|\leq|b-a|$, 即$|\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$.

(2)设$f(x)=e^x$, 则$f(x)$在区间$[1, x]$上连续, 在区间$(1, x)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(1, x)$, 使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1), \text{ 即 } e^x-e=e^{\xi}(x-1).$$

因为$\xi>1$, 所以

$$e^x-e=e^{\xi}(x-1)>e(x-1), \text{ 即 } e^x>e\cdot x.$$

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x)=x^5+x-1$, 则 $f(x)$是$[0, +\infty)$内的连续函数.

因为 $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(0)f(1)<0$, 所以函数在$(0, 1)$内至少有一个零点, 即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, $f'(x)$存在零点, 但$f'(x)=5x^4+1\neq0$, 矛盾. 这说

明方程只能有一个正根.

13. 设 $f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 证明在(a, b)内有一点ξ, 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 设$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续, 在$(a, b)$内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a, b)$, 使

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),$$

即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=(b-a)\left[\begin{vmatrix} [f(a)]' & f(\xi) \\ [g(a)]' & g(\xi) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}\right].$$

因此

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明: 若函数.$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内满足关系式 $f'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=1$ 则 $f(x)=e^x$.

证明 令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, 则在$(-\infty, +\infty)$内有

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^2}{e^{2x}}\equiv 0,$$

所以在$(-\infty, +\infty)$内$\varphi(x)$为常数.

因此$\varphi(x)=\varphi(0)=1$, 从而 $f(x)=e^x$.

15. 设函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\ (0<\theta<1).$$

证明 根据柯西中值定理

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}\ (\xi_1\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n\cdot 0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\ (\xi_2\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}),$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}=\frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}-n(n-1)\cdot 0^{n-2}}=\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}}\ (\xi_3\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_2\text{ 之间}),$$

依次下去可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}-n(n-1)\cdots 2\cdot 0}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\ (\xi_n\text{ 介于 }0$$

与ξ_{n-1}之间),

所以 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$

由于ξ_n可以表示为$\xi_n=\theta x$ $(0<\theta<1)$, 所以$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ $(0<\theta<1)$.

习题 3–2

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(14) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to +0}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x}{1}=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{3\cos 3x}{5\sec^{2}5x}=-\frac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^{2}x}{-2}=-\frac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{m}-a^{m}}{x^{n}-a^{n}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{mx^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^{2}7x\cdot7}{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^{2}2x\cdot2}=\frac{7}{2}\lim\limits_{x\to+0}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}=\frac{7}{2}\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sec^{2}2x\cdot2}{\sec^{2}7x\cdot7}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^{2}x}{\sec^{2}3x\cdot3}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2}3x}{\cos^{2}x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot3}{2\cos x(-\sin x)}$

$=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^{2}})}{\frac{1}{1+x^{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^{2}}{x+x^{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^{2})}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\ln(1+x^{2})}{1-\cos^{2}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{2}}{1-\cos^{2}x}$ (注: $\cos x\cdot\ln(1+x^{2})\sim x^{2}$)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{-2\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$.

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sec^{2}2x\cdot2}=\frac{1}{2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^{2}e^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{1}=+\infty$ (注: 当 $x\to0$ 时, $t=\frac{1}{x^{2}}\to+\infty$).

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

(14)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}$,

而 $$\lim_{x\to\infty}x(\ln(1+\frac{a}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot(-\frac{a}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1}=a,$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}=e^a.$$

.

(15)因为 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\ln x}=e^0=1.$$

(16)因为 $\lim\limits_{x\to+0}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}=e^{-\tan x\ln x}$,

而 $$\lim_{x\to+0}\tan x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim_{x\to+0}e^{-\tan x\ln x}=e^0=1.$$

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$, 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在, 不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot 0=0$, 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2\sin\dfrac{1}{x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 不能用洛必达法则.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}} & x\le 0\end{cases}$ 在点 x=0 处的连续性.

解 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$,

因为 $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}$,

而 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1]=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$.

因此 $f(x)$在点 x=0 处连续.

习题 3−3

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 因为 $f(4)=-56$,

$f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21$,

$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74$,

$f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66$,

$f^{(4)}(4)=24$,

所以按$(x-4)$的幂展开的多项式为

$$x^4-5x^3+x^2-3x+4$$

$$=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 因为

$f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3)$,

$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2)$,

$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3)$,

$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2)$,

$f^{(5)}(x)=360(2x-3)$,

$f^{(6)}(x)=720$;

$f(0)=1$, $f'(0)=-9$, $f''(0)=60$, $f'''(0)=-270$, $f^{(4)}(0)=720$, $f^{(5)}(0)=-1080$, $f^{(6)}(0)=720$,

所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$=1-9x+30x^3-45x^3+30x^4-9x^5+x^6$.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为 $f(4)=\sqrt{4}=2$ $f'(4)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}$, $f''(4)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=4}=-\frac{1}{32}$,

$$f'''(4)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{3}{8\cdot 32},\ f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

所以 $$\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4\quad(0<\theta<1).$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f'(x)=x^{-1},\ f''(x)=(-1)x^{-2},\ f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3},\ \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$f^{(k)}(2)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$$

所以

$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(x)=x^{-1},\ f'(x)=(-1)x^{-2},\ f''(x)=(-1)(-2)x^{-3},\ \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}}=-k!\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

所以 $$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n]+\frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\sec^2 x,$$

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\cdot\tan^3 x+8\sec^4 x\cdot\tan x+8\sec^4 x\cdot\tan x=\frac{8\sin x(\sin^2 x+2)}{\cos^5 x};$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2,$$

所以 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x)+2]}{3\cos^5(\theta x)}x^4\ (0<\theta<1)$.

7. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$f'(x)=e^x+x\,e^x$,

$f''(x)=e^x+e^x+x\,e^x=2e^x+x\,e^x$,

$f'''(x)=2e^x+e^x+x\,e^x=3e^x+x\,e^x$, $\cdots$,

$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x$;

$f^{(k)}(0)=k\ (k=1, 2, \cdots, n)$,

所以 $$xe^x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots\frac{1}{(n-1)!}x^n+o(x^n).$$

8. 验证当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 所产生的误差小于 0.01, 并求 $\sqrt{e}$ 的近似值, 使误差小于 0.01.

解 因为公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 右端为 e^x 的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x)=\frac{e^{\xi}}{4!}x^4,$$

所以当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的误差

$$|R_3(x)|=|\frac{e^{\xi}}{4!}x^4|\le\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}(\frac{1}{2})^4\approx 0.0045<0.01.$$

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2})^3\approx 1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\sin 18°$.

解 (1)设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则 $f(x)$在 $x_0=27$ 点展开成三阶泰勒公式为

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}(x-27)+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot 27^{-\frac{5}{3}})(x-27)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})(x-27)^4\ (\xi\text{介于 27 与 } x \text{ 之间}).$$

于是 $$\sqrt[3]{30}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot 3+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9}\cdot 27^{-\frac{5}{3}})\cdot 3^2+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}})\cdot 3^3$$

$$\approx 3(1+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^{10}})\approx 3.10724,$$

其误差为

$$|R_3(30)|=|\frac{1}{4!}\cdot(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}})\cdot 3^4|<\frac{1}{4!}\cdot\frac{80}{81}\cdot 27^{-\frac{11}{3}}\cdot 3^4=\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}=1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 已知

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{\sin\xi}{4!}x^4\ (\xi\text{介于 0 与 } x \text{ 之间}),$$

所以 $$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3\approx 0.3090,$$

其误差为

$$|R_3(\frac{\pi}{10})|=|\frac{\sin\xi}{4!}(\frac{\pi}{10})^4|<\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{4!}(\frac{\pi}{10})^4=2.03\times 10^{-4}.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解 (1) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}.$$

因为 $\sqrt[3]{1+3t}=1+t+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t}=1-\frac{1}{2}t+o(t)$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{t\to+0}\frac{[1+t+o(t)]-[1-\frac{1}{2}t+o(t)]}{t}=\lim_{t\to+0}[\frac{3}{2}+\frac{o(t)}{t}]=\frac{3}{2}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)]-[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)]}{x^3[1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1+\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+e^{-1}}=0\,.$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-[1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)]}{[(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4))]x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4!}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4-\frac{11}{24}x^6+x^2\cdot o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4!}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}-\frac{11}{24}x^2+\frac{o(x^4)}{x^2}}=\frac{\frac{3}{4!}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}\,.$$

习题 3−4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 单调性.

解 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{1}{1+x^2}\leq 0$, 且仅当 $x=0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$的单调性.

解 因为 $f'(x)=1-\sin x\geq 0$, 所以 $f(x)=x+\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;

(2) $y=2x+\frac{8}{x}$ $(x>0)$;

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$;

(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a.>0)$;

(7) $y=x^n e^{-x}$ $(n>0, x\geq 0)$;

(8)$y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$, $x_2=3$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

可见函数在$(-\infty, -1]$和$[3, +\infty)$内单调增加, 在$[-1, 3]$内单调减少.

(2) $y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}=0$,令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=2$, $x_2=-2$(舍去).

因为当 $x>2$ 时, $y>0$; 当 $0<x<2$ 时, $y'<0$, 所以函数在$(0, 2]$内单调减少, 在$[2, +\infty)$内单调增加.

(3) $y'=\frac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, 不可导点为 $x=0$.

列表得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	−	不存在	−	0	+	0	−
y	↘		↘	0	↗		↘

可见函数在$(-\infty, 0)$，$(0, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$内单调减少，在$[\frac{1}{2}, 1]$上单调增加.

(4)因为 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，所以函数在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

(5) $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=4(x-\frac{1}{2})(x+1)^2$. 因为当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$y'<0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y'>0$，所以函数在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调减少，在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加.

(6) $y'=\frac{-(x-\frac{2a}{3})}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$，驻点为 $x_1=\frac{2a}{3}$，不可导点为 $x_2=\frac{a}{2}$, $x_3=a$.

列表得

x	$(-\infty, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	−	不存在	+
y	↗		↗		↘		↗

可见函数在 $(-\infty, \frac{a}{2})$，$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}]$, $(a, +\infty)$内单调增加，在$[\frac{2a}{3}, a)$ 内单调减少.

(7)$y'=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$，驻点为 $x=n$. 因为当 $0<x<n$ 时，$y'>0$；当 $x>n$ 时，$y'<0$，所以函数在$[0, n]$上单调增加，在$[n, +\infty)$内单调减少.

(8) $y=\begin{cases} x+\sin 2x & k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-\sin 2x & k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi \end{cases}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$,

$$y'=\begin{cases} 1+2\cos 2x & k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 1-2\cos 2x & k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi \end{cases} \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

y'是以π为周期的函数，在$[0, \pi]$内令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{5\pi}{6}$，不可导点为 $x_3=\frac{\pi}{2}$.

列表得

x	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
y'	+	0	−	不存在	+	0	−
y	↗		↘		↗		↘

根据函数在$[0, \pi]$上的单调性及y'在$(-\infty, +\infty)$的周期性可知函数在$[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}]$上单调增加, 在$[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$上单调减少$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

4. 证明下列不等式:

(1)当$x>0$时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$;

(2)当$x>0$时, $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$;

(3)当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\sin x+\tan x>2x$;

(4)当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$;

(5)当$x>4$时, $2^x>x^2$;

证明 (1)设$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则$f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

所以$f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的, 从而当$x>0$时$f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0,$$

也就是 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2)设$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, 则$f(x)$在$[0, +\infty)$内是连续的. 因为

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

所以$f(x)$在$(0, +\infty)$内是单调增加的, 从而当$x>0$时$f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0,$$

也就是 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3)设$f(x)=\sin x+\tan x-2x$, 则$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$内连续,

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{(\cos x-1)[(\cos^2 x-1)-\cos x]}{\cos^2 x}.$$

因为在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x-1<0$, $\cos^2 x-1<0$, $-\cos x<0$, 所以 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\sin x+\tan x-2x>0,$$

也就是 $\sin x+\tan x>2x$.

(4)设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$, 则 $f(x)$在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>x$, $\tan x+x>0$, 所以 $f'(x)$在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 即

$$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0,$$

也就是 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^2$.

(5)设 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$, 则 $f(x)$在$[4, +\infty)$内连续, 因为

$$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

所以当 $x>4$ 时, $f'(x)>0$, 即 $f(x)$内单调增加.

因此当 $x>4$ 时, $f(x)>f(4)=0$, 即 $x\ln 2-2\ln x>0$, 也就是也就是 $2^x>x^2$.

5. 讨论方程 $\ln x=ax$ (其中 $a>0$)有几个实根?

解 设 $f(x)=\ln x-ax$. 则 $f(x)$在$(0, +\infty)$内连续, $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$, 驻点为 $x=\frac{1}{a}$.

因为当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$在 $(0,\frac{1}{a})$ 内单调增加; 当 $x>\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调减少. 又因为当 $x\to 0$ 及 $x\to+\infty$时, $f(x)\to-\infty$, 所以如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>0$, 即 $a<\frac{1}{e}$, 则方程有且仅有两个实根; 如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1<0$, 即 $a>\frac{1}{e}$, 则方程没有实根. 如果 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=0$, 即 $a=\frac{1}{e}$, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如 $f(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上,

$$f'(x)=1+\cos x\geq 0,$$

这就明 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的. $f''(x)=-\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内不保持确定的符号,

故 $f'(x)$在$(-\infty, +\infty)$内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;

(2) $y=\text{sh}\, x$;

(3) $y=1+\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$;

(4) $y=x\arctan x$;

解 (1)$y'=4-2x$, $y''=-2$,

因为 $y''<0$, 所以曲线在$(-\infty, +\infty)$内是凸的.

(2)$y'=\text{ch}\, x$, $y''=\text{sh}\, x$. 令 $y''=0$, 得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时, $y''=\text{sh}\, x<0$; 当 $x>0$ 时, $y''=\text{sh}\, x>0$, 所以曲线在$(-\infty, 0]$内是凸的, 在$[0, +\infty)$内是凹的.

(3) $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2}{x^3}$.

因为当 $x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$(0, +\infty)$内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$, $y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}$.

因为在$(-\infty, +\infty)$内, $y''>0$, 所以曲线 $y=x\text{arctg}\, x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1).$y=x^3-5x^2+3x+5$;

(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;

(6) $y=x^4(12\ln x-7)$,

解 (1)$y'=3x^2-10x+3$, $y''=6x-10$. 令 $y''=0$, 得 $x=\dfrac{5}{3}$.

因为当 $x<\dfrac{5}{3}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\dfrac{5}{3}$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty, \dfrac{5}{3}]$ 内是是凸的, 在 $[\dfrac{5}{3}, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(\dfrac{5}{3}, \dfrac{20}{27})$.

(2)$y'=e^{-x}-x\,e^{-x}$, $y''=-e^{-x}-e^{-x}+x\,e^{-x}=e^{-x}(x-2)$. 令 $y''=0$, 得 $x=2$.

因为当 $x<2$ 时, $y''<0$; 当 $x>2$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$(-\infty, 2]$内是凸的, 在$[2, +\infty)$内是凹的, 拐点为$(2, 2e-^2)$.

(3)$y'=4(x+1)^3+e^x$, $y''=12(x+1)^2+e^x$.

因为在$(-\infty, +\infty)$内, $y''>0$, 所以曲线 $y=(x+1)^4+e^x$ 的在$(-\infty, +\infty)$内是凹的, 无拐点.

(4) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$， $y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1, x_2=1$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	ln2 拐点	$\cup$	ln2 拐点	$\cap$

可见曲线在$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$内是凸的, 在$[-1, 1]$内是凹的, 拐点为$(-1, \ln 2)$和$(1, \ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$, $y''=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}(1-2x)$. 令 $y''=0$ 得, $x=\frac{1}{2}$.

因为当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $y''>0$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $y''<0$, 所以曲线 $y=e^{\text{arctg}\ x}$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内是凹的, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内是凸的, 拐点是 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$, $y''=144x^2\cdot\ln x$. 令 $y''=0$, 得 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y''<0$; 当 $x>1$ 时, $y''>0$, 所以曲线在$(0, 1]$内是凸的, 在$[1, +\infty)$内是凹的, 拐点为$(1, -7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n$ $(x>0, y>0, x\neq y, n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0, y>0, x\neq y)$.

证明 (1)设 $f(t)=t^n$, 则 $f'(t)=nt^{n-1}$, $f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t)=t^n$ 在区间$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的 $x>0, y>0, x\neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n.$$

(2)设 $f(t)=e^t$, 则 $f'(t)=e^t$, $f''(t)=e^t$. 因为 $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t)=e^t$ 在$(-\infty, +\infty)$内是凹的. 由定义, 对任意的 $x, y\in(-\infty, +\infty)$, $x\neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y).$$

(3)设 $f(t)=t\ln t$，则 $f'(t)=\ln t+1$， $f''(t)=\frac{1}{t}$.

因为当 $t>0$ 时，$f''(t)>0$，所以函数 $f(t)=t\ln t$ 的图形在$(0, +\infty)$内是凹的. 由定义，对任意的 $x>0, y>0, x\neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\frac{x+y}{2}),$$

即 $$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

10. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证明 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$， $y''=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$，得 $x_1=-1$， $x_2=2-\sqrt{3}$， $x_3=2+\sqrt{3}$.

例表得

x	$(-\infty. -1)$	-1	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$	-1	$\cup$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}$	$\cap$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}$	$\cup$

可见拐点为$(-1, -1)$，$(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})})$，$(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})})$. 因为

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},\quad \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

所以这三个拐点在一条直线上.

11. 问 a、b 为何值时，点$(1, 3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 $y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b$. 要使$(1, 3)$成为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，必须$y(1)=3$且$y''(1)=0$，即 $a+b=3$ 且 $6a+2b=0$，解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$.

12. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d, 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$为拐点, 且点$(-2, 44)$在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$. 依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}，即\begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1$, $b=-3$, $c=-24$, $d=16$.

13. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx^3-12kx$, $y''=12k(x-1)(x+1)$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$.

因为在 $x_1=-1$ 的两侧 y''是异号的, 又当 $x=-1$ 时 $y=4k$, 所以点$(-1, 4k)$是拐点.

因为 $y'(-1)=8k$, 所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$. 要使法线过原点, 则$(0, 0)$应满足法线方程, 即 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$, $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

同理, 因为在 $x_1=1$ 的两侧 y''是异号的, 又当 $x=1$ 时 $y=4k$, 所以点$(1, 4k)$也是拐点.

因为$y'(1)=-8k$, 所以过拐点$(-1, 4k)$的法线方程为 $y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点, 则$(0, 0)$应满足法线方程, 即 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$, $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$是否为拐点? 为什么?

解 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 由 $f'''(x)$的连续性, 存在 x_0 的某一邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在此邻域内有 $f'''(x)>0$. 由拉格朗日中值定理, 有

$$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0) \ (\xi\text{介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

即

$$f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0).$$

因为当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f''(x)>0$, 所以$(x_0, f(x_0))$是拐点.

习题 3−5

1. 求函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$;

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y=x+\tan x$.

解 (1)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)$, 驻点为 $x_1=-1$, $x_2=3$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	17 极大值	↘	−47 极小值	↗

可见函数在 $x=-1$ 处取得极大值 17, 在 $x=3$ 处取得极小值−47.

(2)函数的定义为$(-1, +\infty)$, $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$, 驻点为 $x=0$. 因为当$-1<x<0$ 时, $y'<0$; 当 $x>0$ 时, $y'>0$, 所以函数在 $x=0$ 处取得极小值, 极小值为 $y(0)=0$.

(3)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$,

$$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1),\ y''=-12x^2+4,$$

令 $y'=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

因为 $y''(0)=4>0$, $y''(-1)=-8<0$, $y''(1)=-8<0$, 所以 $y(0)=0$ 是函数的极小值, $y(-1)=1$ 和 $y(1)=1$ 是函数的极大值.

(4)函数的定义域为$(-\infty, 1]$,

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)},$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$.

因为当 $x<\frac{3}{4}$ 时, $y'>0$; 当 $\frac{3}{4}<x<1$ 时, $y'<0$, 所以 $y(1)=\frac{5}{4}$ 为函数的极大值.

(5)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\frac{-5(x-\frac{12}{5})}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$, 驻点为 $x=\frac{12}{5}$.

因为当 $x<\frac{12}{5}$ 时, $y'>0$; 当 $x>\frac{12}{5}$ 时, $y'<0$, 所以函数在 $x=\frac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y(\frac{12}{5})=\frac{\sqrt{205}}{10}$.

(6)函数的定义为$(-\infty, +\infty)$, $y'=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为 $x_1=0$, $x_2=-2$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$\frac{8}{3}$极小值	↗	4极大值	↘

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$y'=e^x(\cos x-\sin x)$, $y''=-e^x\sin x$.

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi$, $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

因为 $y''(\frac{\pi}{4}+2k\pi)<0$, 所以 $y(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极大值.

因为 $y''[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]>0$, 所以 $y[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi]=-e^{\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极小值.

(8)函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为$(0, +\infty)$,

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=e$.

因为当 $x<e$ 时, $y'>0$; 当 $x>e$ 时, $y'<0$, 所以 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为函数 $f(x)$的极大值.

(9)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$, $y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为$y'<0$, 所以函数在$(-\infty, +\infty)$是单调减少的, 无极值.

(10)函数 $y=x+\operatorname{tg} x$ 的定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).
因为 $y'=1+\sec^2 x>0$, 所以函数 $f(x)$无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$, 那么这函数没有极值 .

证明 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac<0$, 知 $a\neq0$. 于是配方得到

$$y'=3ax^2+2bx+c=3a(x^2+\frac{2b}{3a}x+\frac{c}{3a})=3a(x^2+\frac{b}{3a})^2+\frac{3ac-b^2}{3a},$$

因 $3ac-b^2>0$, 所以当 $a>0$ 时, $y'>0$; 当 $a<0$ 时, $y'<0$. 因此 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 是单调函数, 没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$, $f''(x)=-a\sin x-3\sin x$.

要使函数 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 必有 $f'(\frac{\pi}{3})=0$, 即 $a\cdot\frac{1}{2}-1=0$, $a=2$.

当 $a=2$ 时, $f''(\frac{\pi}{3})=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0$. 因此, 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 而且取得极大值, 极大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\leq x\leq4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\leq x\leq3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\leq x\leq1$.

解 (1)$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=1$. 计算函数值得

$y(-1)=-5$, $y(0)=0$, $y(1)=-1$, $y(4)=80$,

经比较得出函数的最小值为 $y(-1)=-5$, 最大值为 $y(4)=80$.

(2)$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=-2$(舍去), $x_3=2$. 计算函数值得

$y(-1)=-5$, $y(0)=2$, $y(2)=-14$, $y(3)=11$,

经比较得出函数的最小值为 $y(2)=-14$, 最大值为 $y(3)=11$.

(3) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, 令 $y'=0$, 得 $x=\frac{3}{4}$. 计算函数值得

$y(-5)=-5+\sqrt{6}$, $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$, $y(1)=1$,

经比较得出函数的最小值为 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$, 最大值为 $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$.

5. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\le x\le 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$, 函数 $f(x)$在 $1\le x\le 4$ 内的驻点为 $x=3$.
比较函数值:

$$f(1)=-29,\quad f(3)=-61,\quad f(4)=-47,$$

函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=-29$.

6. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}$ $(x<0)$在何处取得最小值？

解 $y'=2x+\frac{54}{x^2}$, 在$(-\infty, 0)$的驻点为 $x=-3$. 因为

$$y''=2-\frac{108}{x^3},\quad y''(-3)=2+\frac{108}{27}>0,$$

所以函数在 $x=-3$ 处取得极小值. 又因为驻点只有一个, 所以这个极小值也就是最小值, 即函数在 $x=-3$ 处取得最小值, 最小值为 $y(-3)=27$.

7. 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ $(x\ge 0)$在何处取得最大值？

解 $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在$(0, +\infty)$内的驻点为 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时 $y'<0$, 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值. 又因为函数在$(0, +\infty)$内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌20cm长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

解 设宽为 x 长为 y, 则 $2x+y=20$, $y=20-2x$, 于是面积为

$$S=xy=x(20-2x)=20x-2x^2.$$

$$S'=20-4x=4(10-x),\ S''=-4.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=10$.

因为 $S''(10)-4<0$, 所以 $x=10$ 为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为 5 米, 长为 10 米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V, 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解 由 $V=\pi r^2h$, 得 $h=V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

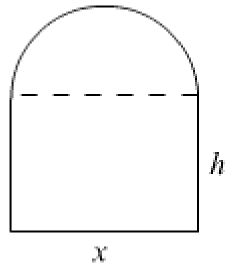
$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}\ (0<x<+\infty),$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}.$$

令 $S'=0$，得驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

因为 $S''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}>0$，所以 S 在驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值，也就是最小值. 这时相应的高为 $h=\dfrac{V}{\pi r_0^2}=2r$. 底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图)，截面的面积为 5m^2，问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？



解 设矩形高为 h，截面的周长 S，则 $xh+\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{x}{2})^2\pi=5$，$h=\dfrac{5}{x}-\dfrac{\pi}{8}x$. 于是

$$S=x+2h+\frac{x\pi}{2}=x+\frac{\pi}{4}x+\frac{10}{x}\ (0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

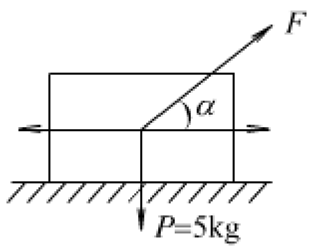
$$S'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$.

因为 $S''=\dfrac{20}{x^3}>0$，所以 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，同时也是最小值点.

因此底宽为 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

11. 设有重量为 5kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 F 与水平线的交角 α 为多少时，才可使力 F 的大小为最小？



解 由 $F\cos\alpha=(m-F\sin\alpha)\mu$ 得

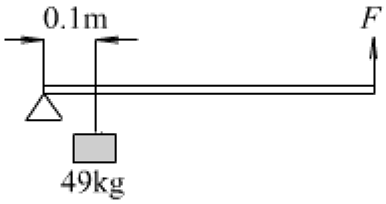
$$F=\frac{\mu m}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\ (0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}),$$

$$F'=\frac{\mu m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2},$$

驻点为 $\alpha=\arctan\mu$.

因为 F 的最小值一定在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内取得，而 F 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内只有一个驻点 $\alpha=\arctan\mu$，所以 $\alpha=\arctan\mu$ 一定也是 F 的最小值点．从而当 $\alpha=\arctan0.25=14°$ 时，力 F 最小．

12. 有一杠杆，支点在它的一端．在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体．加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图)．如果杠杆的线密度为 5kg/m，求最省力的杆长?



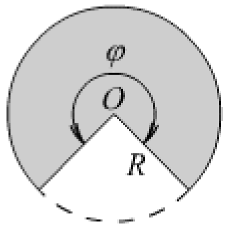
解 设杆长为 x (m)，加于杠杆一端的力为 F，则有

$$xF=\frac{1}{2}x\cdot5x+49\cdot0.1\text{，即 }F=\frac{5}{2}x+\frac{4.9}{x}(x>0)\text{．}$$

$$F'=\frac{5}{2}-\frac{4.9}{x^2}\text{，}$$

驻点为 x=1.4．由问题的实际意义知，F 的最小值一定在$(0, +\infty)$内取得，而 F 在$(0, +\infty)$内只有一个驻点 x=1.4，所以 F 一定在 x=1.4m 处取得最小值，即最省力的杆长为 1.4m.

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图)，问留下的扇形的中心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大?



解 漏斗的底周长 l、底半径 r、高 h 分别为

$$l=R\cdot\varphi,\ \ r=\frac{R\varphi}{2\pi},\ \ h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\ .$$

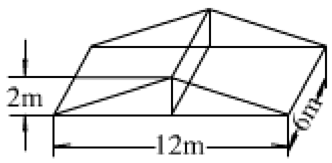
漏斗的容积为

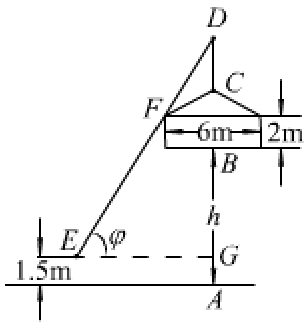
$$V=\frac{1}{3}hr^2\pi=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\quad(0<\varphi<2\pi).$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{\varphi(8\pi^2-3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}\text{，驻点为 }\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\ .$$

由问题的实际意义，V 一定在$(0, 2\pi)$内取得最大值，而 V 在$(0, 2\pi)$内只有一个驻点，所以该驻点一定也是最大值点．因此当 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5m，吊臂长 15m，现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架，水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图)，问能否吊得上去?





解 设吊臂对地面的倾角为φ时, 屋架能够吊到的最大高度为 h. 在直角三角形ΔEDG中

$$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi,$$

故
$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}.$$

令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx 54°$.

因为 $h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$, 所以$\varphi=54°$为极大值点, 同时这也是最大值点.

当$\varphi=54°$时, $h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}\approx 7.5\,\text{m}$.

所以把此屋最高能水平地吊至 7. 5m 高, 现只要求水平地吊到 6m 处, 当然能吊上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入?

解 房租定为 x 元, 纯收入为 R 元.

当 $x\leq 1000$ 时, $R=50x-50\times 100=50x-5000$, 且当 $x=1000$ 时, 得最大纯收入 45000 元.

当 $x>1000$ 时,

$$R=[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot x-[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot 100=-\frac{1}{50}x^2+72x-7000,$$

$$R'=-\frac{1}{25}x+72.$$

令 $R'=0$ 得$(1000, +\infty)$内唯一驻点 $x=1800$. 因为 $R''=-\frac{1}{25}<0$, 所以 1800 为极大值点, 同时也是最大值点. 最大值为 $R=57800$.

因此, 房租定为 1800 元可获最大收入.

习题 3–8

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

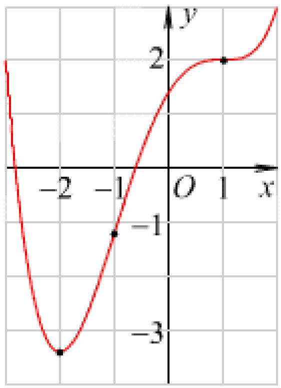
(2) $y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2$, $y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1)$,

令 $y'=0$, 得 $x=-2, x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1, x=1$.

(3)列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	$-$	0	+
$y=f(x)$	↘∪	$-\frac{17}{5}$ 极小值	↗∪	$-\frac{6}{5}$ 拐点	↗∩	2 拐点	↗∪

(4)作图:



2. $y=\frac{x}{1+x^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2)奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论 $x\geq 0$ 时函数的图形.

(3) $y'=\frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$,

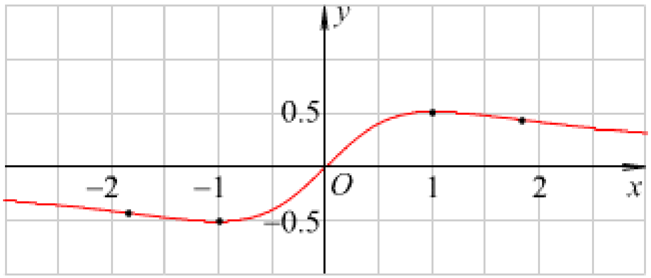
当 $x\geq 0$ 时, 令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=0$, $x=\sqrt{3}$.

(4)列表

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	$-$	$-$	$-$
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	+
$y=f(x)$	0 拐点	↗∩	$\frac{1}{2}$ 极大值	↘∩	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	↘∪

(5)有水平渐近线 $y=0$;

(6)作图:



3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ $y''=4e^{-(x-1)^2}[x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})]$,

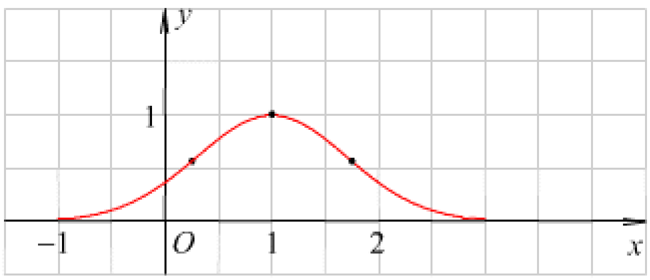
令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)列表

x	$(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	↗∪	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↗∩	1 极大值	↘∩	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↘∪

(4)有水平渐近线 $y=0$;

(5)作图:



4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

解 (1)定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$;

(2) $y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$,

$y''=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$,

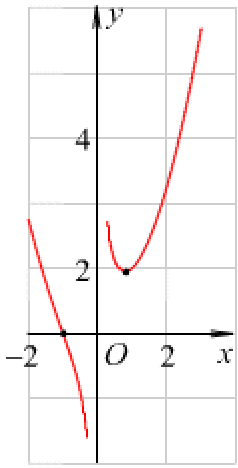
令 $y'=0$, 得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$.

(3)列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	无	$-$	0	+
y''	+	0	$-$	无	+	+	+
$y=f(x)$	↘∪	0 拐点	↘∩	无	↘∪	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 极小值	↗∪

(4)有铅直渐近线 $x=0$;

(5)作图:



5. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 (1)定义域为 $x\neq\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2)是偶函数，周期为 2π. 可先作$[0,\pi]$上的图形，再根据对称性作出$[-\pi,0)$内的图形，最后根据周期性作出$[-\pi,\pi]$以外的图形;

(3) $y'=\dfrac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}$, $y''=\dfrac{\cos x\cdot(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x}$,

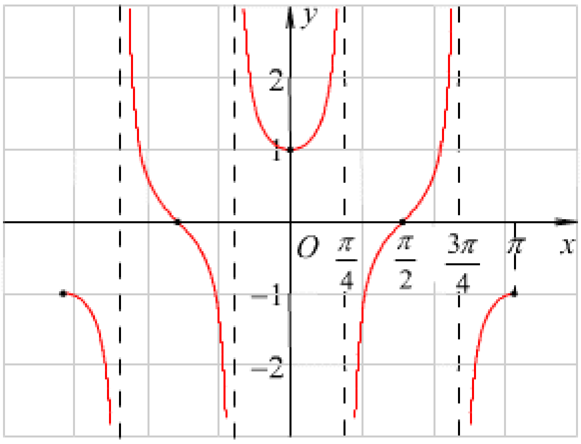
在$[0,\pi]$上，令 $y'=0$，得 $x=0, x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4)列表

x	0	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4},\pi)$	π
y'	0	+	无	+	+	+	无	+	0
y''	+	+	无	$-$	0	+	无	$-$	$-$
$y=f(x)$	1 极小值	↗∪	无	↗∩	0 拐点	↗∪	无	↗∩	-1 极大值

(5)有铅直渐近线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$;

(6)作图:


y
2
1
O
π/4
π/2
3π/4
π
x
−1
−2

习题 3–7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0, 2)处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{4x}{y},\quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0,\,2)}=0,\ y''|_{(0,\,2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点(x, y)处的曲率及曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\cdot\tan x=\tan x$, $y''=\sec^2 x$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{|\cos x|}=|\sec x|.$$

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4$, $y''=2$.

令 $y'=0$, 得顶点的横坐标为 $x=2$.

$$y'|_{x=2}=0,\ y''|_{x=2}=2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}.$$

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解 $y'=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 x)'}=-\tan t$, $y''=\frac{(-\tan x)'}{(a\cos^3 x)'}=\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}$.

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cdot\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}=\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^3 t}\right|=\frac{2}{3|a\sin 2t|},$$

$$K\Big|_{t=t_0}=\frac{2}{3|a\sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-\frac{1}{x^2}|}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $\rho'=0$, 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho<0$; 当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho>0$, 所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是ρ的极小值点, 同时也最小值点. 当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小, 最小曲率半径为 $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. 证明曲线 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ 在点 (x, y)处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

解 $y'=\mathrm{sh}\frac{x}{a}$, $y''=\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

在点 (x, y)处的曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{x}{a}|}=\frac{(\mathrm{ch}^2\frac{x}{a})^{3/2}}{|\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{x}{a}|}=a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m)作俯冲飞行, 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200m$/s 飞行员体重 $G=70$Kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\frac{2x}{10000}=\frac{x}{5000}$, $y''=\frac{1}{5000}$; $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=\frac{1}{5000}$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{\frac{1}{5000}}=5000 .$$

向心力 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{70\times200^2}{5000}=560$ (牛顿).

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

$79\times9.8+560=1246$(牛顿).

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m . 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为 $y=ax^2$, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

$$a=\frac{0.25}{25}=0.01,$$

于是抛物线方程为 $y=0.01x^2$.

$y'=0.02x$, $y''=0.02$.

$$\rho|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02}=50 .$$

向心力为 $F=\frac{mV^2}{\rho}=\frac{5\times10^3(\frac{21.6\times10^3}{3600})^2}{50}=3600$ (牛顿).

因为汽车重为 5 吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

$5\times10^3\times9.8-3600=45400$(牛顿).

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4},1)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内零点的个数为________.

解 应填写 2.

提示: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

在$(0, +\infty)$内, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为 $f''(x)<0$, 所以曲线 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内是凸的, 且驻点 $x=e$ 一定是最大值点, 最大值为 $f(e)=k>0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 所以曲线经过 x 轴两次, 即零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在$[0, 1]$上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$或 $f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为(　　).

$(A)f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; 　　$(B)f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

$(C)f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$; 　　$(D)f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 选择 B .

提示: 因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$在$[0, 1]$上单调增加, 从而 $f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi\in[0, 1]$, 所以

$$f'(1)> f(1)-f(0)>f'(0).$$

3. 列举一个函数 $f(x)$满足: $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a,b)内除某一点外处处可导, 但在(a, b)内不存在点 ξ, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$, $x\in[-1, 1]$.

易知 $f(x)$在$[-1, 1]$上连续, 且当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=-1$; $f'(0)$不存在, 即 $f(x)$在$[-1, 1]$上除 $x=0$ 外处处可导.

注意 $f(1)-f(-1)=0$, 所以要使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$成立, 即 $f'(\xi)=0$, 是不可能的.

因此在$(-1, 1)$内不存在点 ξ, 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)\cdot a$, ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间.

当 $x\to\infty$ 时, $\xi\to\infty$, 于是

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{x\to\infty} f'(\xi)\cdot a=a\lim_{\xi\to\infty} f'(\xi)=ak .$$

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在$[0, 1]$上不可能有两个零点.

证明 　$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当 $x\in(0, 1)$时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$在$[0, 1]$上单调减少. 因此, $f(x)$ 在$[0, 1]$上至多有一个零点.

6. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$, 证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在$(0,1)$内至少有一个零点.

证明 设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，则 $F(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且 $F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理，在$(0, 1)$内至少有一个点ξ，使 $F(\xi)=0$. 而 $F'(x)=f(x)$，所以 $f(x)$在$(0, 1)$内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$在$[0, a]$上连续，在$(0, a)$内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0, a)$，使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明 设 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$在$[0, a]$上连续，在$(0, a)$内可导，且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理，在$(0, a)$内至少有一个点ξ，使 $F(\xi)=0$. 而 $F(x)=f(x)+x f'(x)$，所以 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点$\xi\in(a, b)$使 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明 对于 $f(x)$和 $\ln x$ 在$[a, b]$上用柯西中值定理，有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},\ \xi\in(a, b),$$

即
$$f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a},\ \xi\in(a, b).$$

9. 设 $f(x)$、$g(x)$都是可导函数，且$|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

证明 由条件$|f'(x)|<g'(x)$得知，$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，且有 $g'(x)>0$，$g(x)$是单调增加的，当 $x>a$ 时，$g(x)>g(a)$.

因为 $f(x)$、$g(x)$都是可导函数，所以 $f(x)$、$g(x)$ 在$[a, x]$上连续，在(a, x)内可导，根据柯西中值定理，至少存在一点$\xi\in(a, x)$，使 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因此，$\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|<1$，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$ (其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$).

解 (1) $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-x^x)'}{(1-x+\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-x^{x+1}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{x+1}(\ln x+1+\frac{1}{x})(\ln x+1)-x^x}{-1}=2.$$

(2) $$\lim_{x\to0}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{[x-\ln(1+x)]'}{[x\ln(1+x)]'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})},$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln\arctan x+\ln\frac{2}{\pi})}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(4)令 $y=[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$. 则 $\ln y=nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$，因为

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\cdot(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)\cdot(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$.

即 $\lim_{x\to\infty}\ln y=\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$，从而 $\lim_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}=\lim_{x\to\infty}y=a_1\cdot a_2\cdots a_n$.

11. 证明下列不等式:

(1)当$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$；

(2):当$x>0$时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

证明 (1)令$f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

因为$f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>\dfrac{x-\tan x}{x^2}>0$，

所以在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内$f(x)$为单调增加的. 因此当$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$时有]

$$\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}，即\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2)要证$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$，即证$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

设$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$.

因为当$x>0$时，$\ln(1+x)>0$，$1-\dfrac{1}{1+x^2}>0$，所以$f'(x)>0$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加.

因此，当$x>0$时，$f(x)>f(0)$，而$f(0)=0$，从而$f(x)>0$，即$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

12. 设$f(x)=\begin{cases}x^{2x} & x>0\\ x+2 & x\le 0\end{cases}$，求$f(x)$的极值.

解 $x=0$是函数的间断点.

当$x<0$时，$f'(x)=1$；当$x>0$时，$f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$.

令$f'(x)=0$，得函数的驻点$x=\dfrac{1}{e}$.

列表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	2 极大值	↘	$e^{-\frac{2}{e}}$ 极小值	↗

函数的极大值为$f(0)=2$，极小值为$f(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆$x^2-xy+y^2=3$上纵坐标最大和最小的点.

解 $2x-y-xy'+2yy'=0$，$y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$. 当$x=\dfrac{1}{2}y$时，$y'=0$.

将 $x=\frac{1}{2}y$ 代入椭圆方程，得 $\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y^2+y^2=3$, $y=\pm 2$.

于是得驻点 $x=-1$，$x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在，且在驻点处取得，又当 $x=-1$ 时, $y=-2$，当 $x=1$ 时, $y=2$，所以纵坐标最大和最小的点分别为$(1, 2)$和$(-1, -2)$.

14. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$，则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x\,,$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\,,$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)\,.$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$；当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$，所以唯一驻点 $x=e$ 为最大值点.

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$,

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}\ (0<x<\pi),$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)\cdot\sin x-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cos x(3\sin^2 x+\cos^2 x+1)}{\sin^2 x}\,.$$

在$(0, \pi)$内，令$\rho'=0$，得驻点 $x=\frac{\pi}{2}$.

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\rho'<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\rho'>0$，所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 是ρ的极小值点，同时也是ρ的最小值点，最小值为 $\rho\frac{(1+\cos^2\frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$.

16. 证明方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根. 并求此正根的近似值, 使精确到本世纪末 10^{-3}.

解 设 $f(x)=x^3-5x-2$，则

$f'(x)=3x^2-5$, $f''(x)=6x$.

当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$, 所以在$(0, +\infty)$内曲线是凹的, 又 $f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x-2)=+\infty$, 所以在$(0, +\infty)$内方程 $x^3-5x-2=0$ 只能有一个根.

(求根的近似值略)

17. 设 $f''(x_0)$存在, 证明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

证明 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]+[f(x_0)-f'(x_0-h)]}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f'(x_0-h)}{h}]=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$存在, 且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$, 证明 $f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

证明 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

所以 $f(x)=o[(x-x_0)^n]$ $(x\to x_0)$.

19. 设 $f(x)$在(a, b)内二阶可导, 且 $f''(x)\geq0$. 证明对于(a, b)内任意两点 x_1, x_2 及 $0\leq t\leq1$, 有 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

证明 设$(1-t)x_1+tx_2=x_0$. 在 $x=x_0$ 点的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$ (其中ξ介于 x 与 x_0 之间).

因为 $f''(x)\geq0$, 所以

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

因此

$$f(x_1)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\quad f(x_2)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0).$$

于是有

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq(1-t)[f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)]+t[f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)]$$

$=(1-t)f(x_0)+t\,f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+t\,x_2]-f'(x_0)[(1-t)x_0+t\,x_0]$

$=f(x_0)+f'(x_0)x_0-f'(x_0)x_0$

$=f(x_0)$,

即　　$f(x_0)\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$,

所以　　$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ $(0\leq t\leq 1)$.

20. 试确定常数 a 和 b, 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 $f(x)$是有任意阶导数的, 它的 5 阶麦克劳公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{3!}x^3+\frac{-a-16b}{5!}x^5+o(x^5)\,.$$

要使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小, 就是要使极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}[\frac{1-a-b}{x^4}+\frac{a+4b}{3!x^2}+\frac{-a-16b}{5!}+\frac{o(x^5)}{x^5}]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases},$$

解之得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

因为当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\frac{-a-16b}{5!}=\frac{1}{30}\neq 0\,,$$

所以当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时, $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

习题 4–1

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{1}{x^2}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

(2) $\int x\sqrt{x}dx$;

解 $\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C$.

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}dx$;

解 $\int x^2\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{7}{3}}dx=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+C$.

(5) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}+C$.

(6) $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx$;

解 $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx=\int x^{\frac{n}{m}}dx=\frac{1}{\frac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1}+C=\frac{m}{n+m}x^{\frac{m+n}{m}}+C$.

(7) $\int 5x^3dx$;

解 $\int 5x^3dx=5\int x^3dx=\frac{5}{4}x^4+C$.

(8) $\int(x^2-3x+2)dx$;

解 $\int(x^2-3x+2)dx=\int x^2dx-3\int xdx+2\int dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

(9) $\int\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ (g 是常数);

解 $\int\frac{dh}{\sqrt{2gh}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}dh=\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot 2h^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$.

(10) $\int(x-2)^2dx$;

解 $\int(x-2)^2dx=\int(x^2-4x+4)dx=\int x^2dx-4\int xdx+4\int dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+C$.

(11) $\int(x^2+1)^2dx$;

解 $\int(x^2+1)^2dx=\int(x^4+2x^2+1)dx=\int x^4dx+2\int x^2dx+\int dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x+C$.

(12) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$;

解 $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx=\int(x^2-\sqrt{x}+\sqrt{x^3}-1)dx=\int x^2dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx-\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+C$.

(13) $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}})dx=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

(14) $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

解 $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=x^3+\arctan x+C$.

(15) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$;

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x-\arctan x+C$.

(16) $\int(2e^x+\frac{3}{x})dx$;

解 $\int(2e^x+\frac{3}{x})dx=2\int e^xdx+3\int\frac{1}{x}dx=2e^x+3\ln|x|+C$.

(17) $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$;

解 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=3\arctan x-2\arcsin x+C$.

(18) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$;

解 $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx=\int(e^x-x^{-\frac{1}{2}})dx=e^x-2x^{\frac{1}{2}}+C$.

(19) $\int 3^x e^x dx$;

解 $\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C=\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$.

(20) $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$;

解 $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int[2-5(\frac{2}{3})^x]dx=2x-5\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln\frac{2}{3}}+C=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x+C$.

(21) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$;

解 $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+C$.

(22) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;

解 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

(23) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$;

解 $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\tan x+C$.

(24) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$;

解 $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$.

(25) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

解 $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x})dx=-\cot x-\tan x+C$.

(26) $\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$.

2. 一曲线通过点$(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 设该曲线的方程为$y=f(x)$, 则由题意得

$$y'=f'(x)=\frac{1}{x},$$

所以 $$y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$$

又因为曲线通过点$(e^2, 3)$, 所以有=3−2=1

$3=f(e^2)=\ln|e^2|+C=2+C$,

$C=3-2=1$.

于是所求曲线的方程为

$y=\ln|x|+1$.

3. 一物体由静止开始运动, 经 t 秒后的速度是 $3t^2$(m/s), 问

(1)在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2)物体走完 360m 需要多少时间?

解 设位移函数为 $s=s(t)$, 则 $s'=v=3t^2$, $s=\int 3t^2dt=t^3+C$.

因为当 $t=0$ 时, $s=0$, 所以 $C=0$. 因此位移函数为 $s=t^3$.

(1)在 3 秒后物体离开出发点的距离是 $s=s(3)=3^3=27$.

(2)由 $t^3=360$, 得物体走完 360m 所需的时间 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11$s.

4. 证明函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x\mathrm{sh}x$ 和 $e^x\mathrm{ch}x$ 都是 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

证明 $\dfrac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}=\dfrac{e^x}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}=\dfrac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$.

因为

$$(\frac{1}{2}e^{2x})'=e^{2x},$$

所以 $\frac{1}{2}e^{2x}$ 是 $\dfrac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

因为

$$(e^x\mathrm{sh}x)'=e^x\mathrm{sh}x+e^x\mathrm{ch}x=e^x(\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x)=e^x(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2})=e^{2x},$$

所以 $e^x\mathrm{sh}x$ 是 $\dfrac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

因为

$$(e^x\mathrm{ch}x)'=e^x\mathrm{ch}x+e^x\mathrm{sh}x=e^x(\mathrm{ch}\ x+\mathrm{sh}\ x)=e^x(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2})=e^{2x},$$

所以 $e^x\mathrm{ch}x$ 是 $\dfrac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

习题 4–2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立(例如: $dx=\frac{1}{4}d(4x+7)$:

(1) $dx=\quad d(ax)$;

解 $dx=\frac{1}{a}d(ax)$.

(2) $dx=\quad d(7x-3)$;

解 $dx=\frac{1}{7}d(7x-3)$.

(3) $xdx=\quad d(x^2)$;

解 $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$.

(4) $x\mathrm{d}x=\quad d(5x^2)$;

解 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{10}d(5x^2)$.

(5) $xdx=\quad d(1-x^2)$;

解 $xdx=-\frac{1}{2}d(1-x^2)$.

(6) $x^3dx=\quad d(3x^4-2)$;

解 $x^3dx=\frac{1}{12}d(3x^4-2)$.

(7) $e^{2x}dx=\quad d(e^{2x})$;

解 $e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})$.

(8) $e^{-\frac{x}{2}}dx=\quad d(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

解 $e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\ d(1+e^{-\frac{x}{2}})$.

(9) $\sin\frac{3}{2}xdx=\quad d(\cos\frac{3}{2}x)$;

解 $\sin\frac{3}{2}xdx=-\frac{2}{3}d(\cos\frac{3}{2}x)$.

(10) $\frac{dx}{x}=\quad d(5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}d(5\ln|x|)$.

(11) $\frac{dx}{x}=\quad d(3-5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x}= -\frac{1}{5}\ d(3-5\ln|x|)$.

(12) $\frac{dx}{1+9x^2}=\quad d(\arctan 3x)$;

解 $\frac{dx}{1+9x^2}=\frac{1}{3}\ d(\arctan 3x)$.

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\quad d(1-\arctan x)$;

解 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(-1)\ d(1-\arctan x)$.

(14) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\quad d(\sqrt{1-x^2})$.

解 $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=(-1)\ d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t}dt$;

解 $\int e^{5t}dt=\frac{1}{5}\int e^{5x}d5x=\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

(2) $\int(3-2x)^3dx$;

解 $\int(3-2x)^3dx=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^3d(3-2x)=-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$.

(3) $\int\frac{1}{1-2x}dx$;

解 $\int\frac{1}{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-2x}d(1-2x)=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

解 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}=-\frac{1}{3}\int(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(5) $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx$;

解 $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\frac{1}{a}\int\sin axd(ax)-b\int e^{\frac{x}{b}}d(\frac{x}{b})=-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$.

(6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

解 $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$.

(7) $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx$;

解 $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx=\int\tan^{10}xd\tan x=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$.

(8) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$;

解 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{1}{\ln x\ln\ln x}d\ln x=\int\frac{1}{\ln\ln x}d\ln\ln x=\ln|\ln\ln x|+C$.

(9) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

解 $\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}=\int\frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\sqrt{1+x^2}$

$=-\int\frac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\cos\sqrt{1+x^2}=-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$.

(10) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$;

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\int\frac{1}{\tan x}d\tan x=\ln|\tan x|+C$.

(11) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$;

解 $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{1}{1+e^{2x}}de^x=\arctan e^x+C$.

(12) $\int xe^{-x^2}dx$;

解 $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

(13) $\int x\cdot\cos(x^2)dx$;

解 $\int x\cdot\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

(14) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;

解 $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$.

(15) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx$;

解 $\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{1-x^4}d(1-x^4)=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$.

(16) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$;

解 $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt=-\frac{1}{\omega}\int\cos^2(\omega t+\varphi)d\cos(\omega t+\varphi)=-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$.

(17) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\cos^{-3}x d\cos x=\frac{1}{2}\cos^{-2}x+C=\frac{1}{2}\sec^2 x+C$.

(18) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

解 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}d(-\cos x+\sin x)$

$=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(19) $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;

解 $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}d(\frac{2}{3}x)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$.

(20) $\int\frac{x^3}{9+x^2}dx$；

解 $\int\frac{x^3}{9+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{9+x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int(1-\frac{9}{9+x^2})d(x^2)=\frac{1}{2}[x^2-9\ln(9+x^2)]+C$.

(21) $\int\frac{1}{2x^2-1}dx$；

解 $\int\frac{1}{2x^2-1}dx=\int\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}dx=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1})dx$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x-1}d(\sqrt{2}x-1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x+1}d(\sqrt{2}x+1)$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x-1|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+1|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}|+C$.

(22) $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$；

解 $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|+C=\frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}|+C$.

(23) $\int\cos^3 xdx$；

解 $\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 xd\sin x=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

(24) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt$；

解 $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{2}\int[1+\cos 2(\omega t+\varphi)]dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi)+C$.

(25) $\int\sin 2x\cos 3xdx$；

解 $\int\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C$.

(26) $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx$；

解 $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{1}{2}x)dx=\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{1}{2}x+C$.

(27) $\int\sin 5x\sin 7xdx$；

解 $\int\sin 5x\sin 7xdx=-\frac{1}{2}\int(\cos 12x-\cos 2x)dx=-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

(28) $\int \tan^3 x \sec x dx$;

解 $\int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot \sec x \tan x dx = \int \tan^2 x d\sec x$

$= \int (\sec^2 x - 1) d\sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$.

(29) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

解 $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int 10^{2\arccos x} d\arccos x = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x} d(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$.

(30) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$;

解 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)} d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x} d\arctan\sqrt{x} = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$.

(31) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2} d\arcsin x = -\frac{1}{\arcsin x} + C$.

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$;

解 $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{(x\ln x)^2} d(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x} + C$.

(33) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x} dx$;

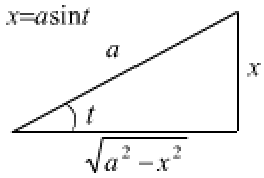
解 $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x} dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x} \cdot \sec^2 x dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x} d\tan x$

$= \int \ln\tan x d\ln\tan x = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$.

(34) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ($a>0$);

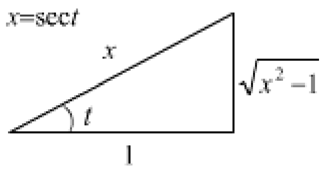
解 $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\xlongequal{令x=a\sin t}\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos tdt=a^2\int\sin^2 tdt=a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt$,

$=\frac{1}{2}a^2t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.



(35) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

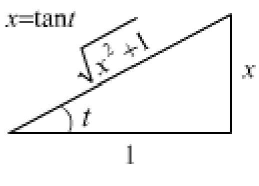
解 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{令x=\sec t}\int\frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan tdt=\int dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$.



或 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\frac{1}{x}=\arccos\frac{1}{x}+C$.

(36) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

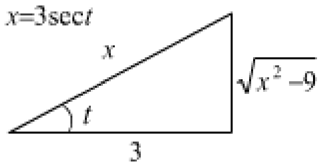
解 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\xlongequal{令x=\tan t}\int\frac{1}{\sqrt{(\tan^2 t+1)^3}}d\tan t=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.



(37) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx\overset{令x=3\sec t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{\sqrt{9\sec^2 t-9}}{3\sec t}d(3\sec t)=3\int\tan^2 tdt$

$=3\int(\frac{1}{\cos^2 t}-1)dt=3\tan t-3t+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$.



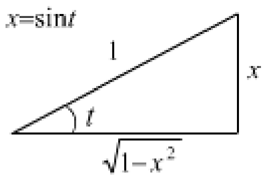
(38) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}\overset{令\sqrt{2x}=t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{1+t}tdt=\int(1-\frac{1}{1+t})dt=t-\ln(1+t)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$.

(39) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}\overset{令x=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{1+\cos t}\cos tdt=\int(1-\frac{1}{1+\cos t})dt=\int(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2})dt$

$=t-\tan\frac{t}{2}+C=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$.

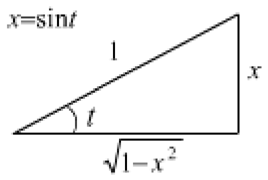


(40) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}\overset{令x=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\sin t+\cos t}\cdot\cos tdt=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t+\sin t+\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin t+\cos t}d(\sin t+\cos t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-x^2}+x|+C .$$



习题 4–3

求下列不定积分:

1. $\int x\sin xdx$;

解 $\int x\sin xdx=-\int xd\cos x=-x\cos x-\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

2. $\int\ln xdx$;

解 $\int\ln xdx=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

3. $\int\arcsin xdx$;

解 $\int\arcsin xdx=x\arcsin x-\int xd\arcsin x$

$$=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

4. $\int xe^{-x}dx$;

解 $\int xe^{-x}dx=-\int xde^{-x}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C.$$

5. $\int x^2\ln xdx$;

解 $\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int\ln xdx^3=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3d\ln x$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$$

6. $\int e^{-x}\cos xdx$;

解 因为

$$\int e^{-x}\cos xdx=\int e^{-x}d\sin x=e^{-x}\sin x-\int\sin xde^{-x}=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin xdx$$

$$=e^{-x}\sin x-\int e^{-x}d\cos x=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x+\int\cos xde^{-x}$$

$$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos xdx,$$

所以 $$\int e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)+C=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C.$$

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$;

解 因为

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=2\int e^{-2x}d\cos\frac{x}{2}=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-2\int\cos\frac{x}{2}de^{-2x}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+4\int e^{-2x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8\int e^{-2x}d\sin\frac{x}{2}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-8\int\sin\frac{x}{2}de^{-2x}$$

$$=2e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+8e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+16\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

所以 $$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2})+C.$$

8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$;

解 $\int x\cos\frac{x}{2}dx=2\int xd\sin\frac{x}{2}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

9. $\int x^2\arctan xdx$;

解 $\int x^2\arctan xdx=\frac{1}{3}\int\arctan xdx^3=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx^2=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

10. $\int x\tan^2 xdx$

解 $\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x\sec^2 xdx-\int xdx=-\frac{1}{2}x^2+\int xd\tan x$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x-\int\tan xdx=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C.$$

11. $\int x^2\cos xdx$;

解 $\int x^2\cos xdx=\int x^2d\sin x=x^2\sin x-\int\sin x\cdot 2xdx=x^2\sin x+2\int xd\cos x$

$=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos xdx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.

12. $\int te^{-2t}dt$;

解 $\int te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}\int tde^{-2t}=-\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}dt$

$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C=-\frac{1}{2}e^{-2t}(t+\frac{1}{2})+C$.

13. $\int\ln^2 xdx$;

解 $\int\ln^2 xdx=x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx$

$=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

14. $\int x\sin x\cos xdx$;

解 $\int x\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\int xd\cos 2x=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2xdx$

$=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

解 $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\int x^2 d\sin x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin xdx$

$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+\int xd\cos x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\int\cos xdx$

$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C$.

16. $\int x\ln(x-1)dx$;

解 $\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x-1}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\cdot\frac{1}{x-1})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$.

17. $\int(x^2-1)\sin 2xdx$;

解 $\int(x^2-1)\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int(x^2-1)d\cos 2x=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\cdot 2xdx$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd\sin 2x$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx$

$=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

18. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

解 $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx=-\int\ln^3 xd\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x+\int\frac{1}{x}d\ln^3 x=-\frac{1}{x}\ln^3 x+3\int\frac{1}{x^2}\ln^2 xdx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-3\int\ln^2 xd\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x+3\int\frac{1}{x}d\ln^2 x$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x+6\int\frac{1}{x^2}\ln xdx=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-6\int\ln xd\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x+6\int\frac{1}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3 x-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C$.

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;

解 $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\xlongequal{令\sqrt[3]{x}=t}3\int t^2e^tdt=3\int t^2de^t$

$=3t^2e^t-6\int te^tdt=3t^2e^t-6\int tde^t$

$=3t^2e^t-6te^t+6\int e^tdt$

$=3t^2e^t-6te^t+6e^t+C$

$=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

20. $\int\cos\ln xdx$;

解 因为

$\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+\int x\cdot\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\cos\ln x+\int\sin\ln xdx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx,$$

所以 $$\int\cos\ln xdx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$$

21. $\int(\arcsin x)^2dx$;

解 $$\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

22. $\int e^x\sin^2 xdx$.

解 $$\int e^x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int e^x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx,$$

而 $$\int e^x\cos 2xdx=\int\cos 2xde^x=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2xdx$$

$$=e^x\cos 2x+2\int\sin 2xde^x=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\cos 2xdx,$$

$$\int e^x\cos 2xdx=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C,$$

所以 $$\int e^x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C.$$

习题 4–4

求下列不定积分:

1. $\int\frac{x^3}{x+3}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\frac{x^3+27-27}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)(x^2-3x+9)-27}{x+3}dx$

$=\int(x^2-3x+9)dx-27\int\frac{1}{x+3}dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;

解 $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{1}{x^2+3x-10}d(x^2+3x-10)=\ln|x^2+3x-10|+C$.

3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

解 $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int(x^2+x+1)dx+\int\frac{x^2+x-8}{x^3-x}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\int\frac{8}{x}dx-\int\frac{4}{x+1}dx-\int\frac{3}{x-1}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

4. $\int\frac{3}{x^3+1}dx$;

解 $\int\frac{3}{x^3+1}dx=\int(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1})dx=\int(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1})dx$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}d(x^2-x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})$

$=\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

5. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

解 $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2}\int(\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x+3})dx$

$=\frac{1}{2}(\ln|x+2|-3\ln|x+3|-\ln|x+1|)+C$.

6. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

解 $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x+1}+C$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$.

7. $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$;

解 $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

8. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1})dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

9. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1})dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

10. $\int\frac{1}{x^4+1}dx$;

解 $\int\frac{1}{x^4+1}dx=\int\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx$

$$=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}[\int\frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\int\frac{d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}]+\frac{1}{4}(\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C .$$

11. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$;

解 $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx ,$$

因为

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}d(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) ,$$

而 $\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}dx$

由递推公式

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}] ,$$

得 $\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}dx$

$$=\frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}(\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} ,$$

所以 $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

$$=-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

12. $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$;

解 $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{1}{4-\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{4\tan^2 x+3}d\tan x$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\tan^2 x+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d\tan x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C\ .$$

13. $\int\frac{1}{3+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{1}{3+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\sec^2\frac{x}{2})}$

$$=\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{2+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C\ .$$

或 $\int\frac{1}{3+\cos x}dx\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{3+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$

$$=\int\frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C\ .$$

14. $\int\frac{1}{2+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{1}{2+\sin x}dx=\int\frac{dx}{2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}(\csc^2\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2})}$

$$=-\int\frac{d(\cot\frac{x}{2})}{\cot^2\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}+1}=-\int\frac{d(\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{(\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

或 $$\int\frac{1}{2+\sin x}dx\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{u^2+u+1}du=\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

15. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

解 $$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}=\int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C\,.$$

或 $$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{u+1}du=\ln|u+1|+C=\ln|\tan\frac{x}{2}+1|+C\,.$$

16. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

解 $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\overset{令u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1}{3u^2+2u+2}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}du=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\,.$$

或 $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}\overset{\text{令}u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{3u^2+2u+2}du=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

17. $\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

解 $$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx\overset{\text{令}\sqrt[3]{x+1}=u}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{1+u}\cdot 3u^2du=3\int(u-1+\frac{1}{1+u})du$$

$$=\frac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C.$$

18. $\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx$;

解 $$\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx=\int[(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1]dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C.$$

19. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

解 $$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx\overset{\text{令}\sqrt{x+1}=u}{=\!=\!=\!=}\int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2udu=2\int(u-2+\frac{2}{u+1})du$$

$$=2(\frac{1}{2}u^2-2u+2\ln|u+1|)+C$$

$$=(x+1)-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

20. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\overset{\text{令}x=u^4}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{u^2+u}\cdot 4u^3du$$

$$=4\int(u-1+\frac{1}{1+u})du=2u^2-4u+4\ln|1+u|+C$$

$$=2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C\,.$$

21. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;

解 令 $\frac{1-x}{1+x}=u$，则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$， $dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$，

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du=2\int(\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{1+u^2})du$$

$$=\ln|\frac{u-1}{u+1}|+2\arctan u+C$$

$$=\ln|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\,.$$

22. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=u$，则 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$， $dx=-\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}$，代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int du=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C\,.$$

总习题四

求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

1. $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$;

解 $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx-\int\frac{1}{e^{2x}-1}de^x=\frac{1}{2}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+1}|+C$.

2. $\int\frac{x}{(1-x)^3}dx$;

解 $\int\frac{x}{(1-x)^3}dx=-\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\int\frac{1}{(x-1)^3}dx=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+C$.

3. $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}dx$ (a>0);

解 $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(a^3)^2-(x^3)^2}d(x^3)=\frac{1}{6a^3}\ln|\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}|+C$.

4. $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\frac{1}{x+\sin x}d(x+\sin x)=\ln|x+\sin x|+C$.

5. $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx$;

解 $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx=\int\ln\ln x d\ln x=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$.

6. $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}d(\sin^2 x)=\frac{1}{2}\arctan\sin^2 x+C$.

7. $\int\tan^4 xdx$;

解 $\int\tan^4 xdx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}d\tan x=\int\tan^2 x\sin^2 xd\tan x$

$$=\int\frac{\tan^4 x}{\tan^2 x+1}d\tan x=\int(\tan^2 x-1+\frac{1}{\tan^2 x+1})d\tan x$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+\arctan\tan x+c=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+c.$$

8. $\int\sin x\sin 2x\sin 3xdx$;

解 $\int\sin x\sin 2x\sin 3xdx=-\frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos x)\sin 3xdx$

$$=-\frac{1}{2}\int\cos 3x\sin 3xdx+\frac{1}{2}\int\cos x\sin 3xdx$$

$$=\frac{1}{6}\int\cos 3xd(\cos 3x)+\frac{1}{4}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{12}\cos^2 3x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

9. $\int\frac{dx}{x(x^6+4)}$;

解 $\int\frac{dx}{x(x^6+4)}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+4})dx=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$.

10. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx(a>0)$;

解 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}du=a\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+(\sqrt{x})^2})+C=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$.

12. $\int x\cos^2 xdx$;

解 $\int x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int(x+x\cos 2x)dx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

13. $\int e^{ax}\cos bxdx$;

解 因为

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int\cos bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bxde^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bxdx,$$

所以 $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx)+C$

$=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\overset{令\sqrt{1+e^x}=u}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{u}d\ln(u^2-1)=2\int\frac{1}{u^2-1}du=\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du$.

$=\ln|\frac{u-1}{u+1}|+c=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+c$.

15. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

解 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\overset{令x=\sec t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{\sec^2 t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan tdt=\int\cos tdt=\sin t+C$

$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

16. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;

解 $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}\overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=}\int\frac{1}{(a\cos t)^5}\cdot a\cos tdt$

$=\frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\cos^4 t}dt=\frac{1}{a^4}\int(\tan^2 t+1)d\tan t$

$=\frac{1}{3a^4}\tan^3 t+\frac{1}{a^4}\tan t+C$

$=\frac{1}{3a^4}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}+\frac{1}{a^4}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$.

17. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

解 $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{令x=\tan t}\int\frac{1}{\tan^4 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt$

$=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}d\sin t$

$=\int(\frac{1}{\sin^4 t}-\frac{1}{\sin^2 t})d\sin t=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C$

$=-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

18. $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;

解 $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx\xlongequal{令\sqrt{x}=t}\int t\sin t\cdot 2tdt=2\int t^2\sin tdt$

$=-2\int t^2 d\cos t=-2t^2\cos t+2\int\cos t\cdot 2tdt$

$=-2t^2\cos t+4\int td\sin t=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin tdt$

$=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C$

$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$.

19. $\int\ln(1+x^2)dx$;

解 $\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.

20. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$;

解 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}d\tan x=\int(\tan x-\frac{\tan x}{\tan^2 x+1})d\tan x$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)+C$.

21. $\int\arctan\sqrt{x}dx$;

解 $\int\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int x\cdot\frac{1}{1+x}d\sqrt{x}$

$=x\arctan\sqrt{x}-\int(1-\cdot\frac{1}{1+x})d\sqrt{x}$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$

$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

22. $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx=\int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\sqrt{2}\int\csc\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=\sqrt{2}\ln|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}|+C$.

23. $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}dx^4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}[\frac{x^4}{1+x^8}+\arctan x^4]+C$.

提示：已知递推公式

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}].$$

24. $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$;

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8}{x^8+3x^4+2}dx^4\overset{令x^4=t}{=\!=\!=}\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{t^2+3t+2}dt$

$=\frac{1}{4}\int(1-\frac{3t+2}{t^2+3t+2})dt=\frac{1}{4}\int(1-\frac{4}{t+2}+\frac{1}{t+1})dt$

$=\frac{1}{4}t-\ln|t+2|+\frac{1}{4}\ln|t+1|+C$

$=\frac{1}{4}x^4+\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C$.

25. $\int\frac{dx}{16-x^4}$;

解 $\int\frac{dx}{16-x^4}=\int\frac{1}{(4-x^2)(4+x^2)}dx=\frac{1}{8}\int(\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{4+x^2})dx$

$=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\ln|\frac{2+x}{2-x}|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2})+C$

$=\frac{1}{32}\ln|\frac{2+x}{2-x}|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C$.

26. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-1+\frac{1}{\cos^2 x})dx=\sec x-x+\tan x+C$.

27. $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$=\int xd\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C$.

28. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

解 $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos xdx-\int e^{\sin x}\cdot\tan x\cdot\sec xdx$

$=\int xe^{\sin x}d\sin x-\int e^{\sin x}d\sec x$

$=\int xde^{\sin x}-\sec x\cdot e^{\sin x}+\int\sec xde^{\sin x}$

$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\sec x\cdot e^{\sin x}+\int\sec x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos xdx$

$=xe^{\sin x}-\sec x\cdot e^{\sin x}+C$.

29. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;

解 $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx\overset{令x=t^6}{=\!=\!=}\int\frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}\cdot 6t^5dt=6\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt$

$=6\ln\frac{t}{t+1}+C=\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$.

30. $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$;

解 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}\overset{令1+e^x=t}{=\!=\!=}\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t-1}dt=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2})dt$

$=\ln(t-1)-\ln t+\frac{1}{t}+C$

$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C$.

31. $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$;

解 $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{1+(e^x-e^{-x})^2}d(e^x-e^{-x})$

$=\arctan(e^x-e^{-x})+C$

$=\arctan(2\mathrm{sh}x)+C$.

32. $\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;

解 $\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx=\int\frac{x}{(e^x+1)^2}d(e^x+1)=-\int xd\frac{1}{e^x+1}$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x+1}dx=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x(e^x+1)}de^x$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1})de^x$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\ln e^x-\ln(e^x+1)+C$

$=\frac{xe^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)+C$.

33. $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

解 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\cdot[\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})]'dx$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int\sqrt{1+x^2}\cdot[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

34. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$;

解 因为

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx \xlongequal{令x=\tan t} \int\frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t dt = \int\cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

所以 $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \int \ln x d(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

35. $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$;

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx \xlongequal{令x=\sin t} \int t\cdot\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int(t+t\cos 2t)dt$

$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\int t\sin 2t = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}\int\sin 2t dt$$

$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + C$$

$$= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C_1.$$

36. $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

解 $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^2\arccos x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x^2\arccos x d\sqrt{1-x^2}$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2\arccos x)'dx$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot(2x\arccos x-x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2\int x\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x dx-\int x^2dx$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\int\arccos x d\sqrt{(1-x^2)^3}$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arccos x-\frac{2}{3}\int(1-x^2)dx$$

$$=-x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arccos x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^3+C$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+1)\arccos x-\frac{1}{9}x(x^2+6)+C.$$

37. $\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx$;

解 $\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x(1+\sin x)}d\sin x=\int(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x})d\sin x$

$=\ln|\sin x|-\ln|1+\sin x|+C=-\ln|\csc x+1|+C$.

38. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$;

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=-\int\frac{1}{\sin x\cos x}d\cot x=-\int\frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}d\cot x=-\int\cot x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}d\cot x$

$=-\int(\frac{1}{\cot x}+\cot x)d\cot x=-\ln|\cot x|-\frac{1}{2}\cot^2 x+C=\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$.

39. $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1}{(2+\frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{(u^2+3)u}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2u}{u^2+3}du+\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\ln(u^2+3)+\frac{1}{3}\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\tan^3\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}|+C\ .$$

40. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x-\cos x)\sin x\cos x}{\sin x^2-\cos^2 x}du=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{2\sin^2 x-1}dx+\int\frac{\cos^2 x\sin x}{2\cos^2 x-1}dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x-1}d\sin x-\int\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}d\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{2\sin^2 x-1})d\sin x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{2\cos^2 x-1})d\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}|-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\ln|\frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\cos x+1}|+C\ .$$

习题 5–1

1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$, 两直线 $x=a$、$x=b(b>a)$及横轴所围成的图形的面积.

解 第一步: 在区间$[a, b]$内插入 $n-1$ 个分点 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \cdots, n-1$), 把区间$[a, b]$分成 n 个长度相等的小区间, 各个小区间的长度为: $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ ($i=1, 2, \cdots, n$).

第二步: 在第 i 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \cdots, n$)上取右端点 $\xi_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, 作和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[(a+\frac{b-a}{n}i)^2+1]\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[a^2+\frac{2a(b-a)}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2+1]$$

$$=\frac{(b-a)}{n}[na^2+\frac{2a(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n]$$

$$=(b-a)[a^2+\frac{a(b-a)(n+1)}{n}+\frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1].$$

第三步: 令$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}=\frac{b-a}{n}$, 取极限得所求面积

$$S=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a^2+\frac{a(b-a)(n+1)}{n}+\frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1]$$

$$=(b-a)[a^2+a(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^2+1]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a.$$

2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b xdx$ ($a<b$);

(2) $\int_0^1 e^x dx$.

解 (1)取分点为 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \cdots, n-1$), 则 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 在第 i 个小区间上取右端点 $\xi_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 于是

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=(b-a)^2\lim_{n\to\infty}[a(b-a)+\frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}]=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

(2)取分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$, 则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 在第 i 个小区间上取右端点 $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 于是

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-(e^{\frac{1}{n}})^n]}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-e]}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}=e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义, 说明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx=1$;

(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0$;

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

解 (1) $\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y=2x$、x 轴及直线 $x=1$ 所围成的面积, 显然面积为 1.

(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 表示由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 、x 轴及 y 轴所围成的四分之一圆的面积, 即圆 $x^2+y^2=1$ 的面积的 $\frac{1}{4}$:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}.$$

(3)由于 $y=\sin x$ 为奇函数, 在关于原点的对称区间$[-\pi, \pi]$上与 x 轴所夹的面积的代数和为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ 表示由曲线 $y=\cos x$ 与 x 轴上$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$一段所围成的图形的面积. 因为 $\cos x$ 为偶函数, 所以此图形关于 y 轴对称. 因此图形面积的一半为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$, 即

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx.$$

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力, 已知闸门上水的压强 p(单位面积上的压力大小)是水深 h 的函数, 且有 $p=9\cdot8h$ (kN/m^2). 若闸门高 H=3m, 宽 L=2m, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P.

解 建立坐标系如图. 用分点 $x_i=\frac{H}{n}i$ (i=1, 2, $\cdots$, n–1)将区间[0, H]分为 n 分个小区间, 各小区间的长为 $\Delta x_i=\frac{H}{n}$ (i=1, 2, $\cdots$, n).

在第 i 个小区间[x_{i-1}, x_i]上, 闸门相应部分所受的水压力近似为

ΔP_i=9.8$x_i l\cdot\Delta x_i$.

闸门所受的水压力为

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}9.8x_i\cdot L\cdot\Delta x_i=9.8L\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{H}{n}i\cdot\frac{H}{n}=9.8L\cdot H^2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}=4.8L\cdot H^2.$$

将 L=2, H=3 代入上式得 P=88.2(千牛).

5. 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$;

(2) $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$.

证明 (1) $\int_a^b kf(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx$.

(2) $\int_a^b 1\cdot dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}(b-a)=b-a$.

6. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4(x^2+1)dx$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)dx$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x dx$;

(4) $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$.

解 (1)因为当 1≤x≤4 时, 2≤x^2+1≤17, 所以

$$2\cdot(4-1)\le\int_1^4(x^2+1)dx\le17\cdot(4-1),$$

即 $$6\le\int_1^4(x^2+1)dx\le51.$$

(2)因为当$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$时, $1\le1+\sin^2x\le2$, 所以

$$1\cdot(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4})\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)dx\le2\cdot(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}),$$

即 $$\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)dx\le2\pi.$$

(3)先求函数$f(x)=x\arctan x$在区间$[\frac{1}{\sqrt3},\sqrt3]$上的最大值$M$与最小值$m$.

$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$. 因为当$\frac{1}{\sqrt3}\le x\le\sqrt3$时, $f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)=x\arctan x$ 在区间$[\frac{1}{\sqrt3},\sqrt3]$上单调增加. 于是

$$m=f(\frac{1}{\sqrt3})=\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\pi}{6\sqrt3},\quad M=f(\sqrt3)=\sqrt3\arctan\sqrt3=\frac{\pi}{\sqrt3}.$$

因此 $$\frac{\pi}{6\sqrt3}(\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3})\le\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}x\arctan x dx\le\frac{\pi}{\sqrt3}(\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}),$$

即 $$\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}x\arctan x dx\le\frac{2\pi}{3}.$$

(4)先求函数$f(x)=e^{x^2-x}$在区间[0, 2]上的最大值M与最小值m.

$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$, 驻点为$x=\frac{1}{2}$.

比较$f(0)=1$, $f(2)=e^2$, $f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$,得$m=e^{-\frac{1}{4}}$, $M=e^2$. 于是

$$e^{-\frac{1}{4}}(2-0)\le\int_0^2e^{x^2-x}dx\le e^2\cdot(2-0),$$

即 $$-2e^2\le\int_2^0e^{x^2-x}dxdx\le-2e^{-\frac{1}{4}}.$$

7. 设 $f(x)$及 $g(x)$在$[a, b]$上连续, 证明:

(1)若在$[a, b]$上, $f(x)\geq 0$, 且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 0$;

(2)若在$[a, b]$上, $f(x)\geq 0$, 且 $f(x)\not\equiv 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx>0$;

(3)若在$[a, b]$上, $f(x)\leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$, 则在$[a, b]$上 $f(x)\equiv g(x)$.

证明 (1)假如 $f(x)\not\equiv 0$, 则必有 $f(x)>0$. 根据 $f(x)$在$[a, b]$上的连续性, 在$[a, b]$上存在一点 x_0, 使 $f(x_0)>0$, 且 $f(x_0)$为 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

再由连续性, 存在$[c, d]\subset[a, b]$, 且 $x_0\in[c, d]$, 使当 $x\in[c, d]$时, $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx\geq\int_c^d f(x)dx\geq\frac{f(x_0)}{2}(d-c)>0.$$

这与条件 $\int_a^b f(x)dx=0$ 相矛盾. 因此在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 0$.

(2)证法一 因为 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 所以在$[a, b]$上存在一点 x_0, 使 $f(x_0)>0$, 且 $f(x_0)$为 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

再由连续性, 存在$[c, d]\subset[a, b]$, 且 $x_0\in[c, d]$, 使当 $x\in[c, d]$时, $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_c^d f(x)dx\geq\frac{f(x_0)}{2}(d-c)>0.$$

证法二 因为 $f(x)\geq 0$, 所以 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. 假如 $\int_a^b f(x)dx>0$ 不成立. 则只有 $\int_a^b f(x)dx=0$, 根据结论(1), $f(x)\equiv 0$, 矛盾. 因此 $\int_a^b f(x)dx>0$.

(3)令 $F(x)=g(x)-f(x)$, 则在$[a, b]$上 $F(x)\geq 0$ 且

$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=0,$$

由结论(1), 在$[a, b]$上 $F(x)\equiv 0$, 即 $f(x)\equiv g(x)$.

4. 根据定积分的性质及第 7 题的结论, 说明下列积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(2) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$?

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?

(4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$？

(5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x)dx$？

解 (1)因为当 $0\le x\le 1$ 时, $x^2\ge x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx \ge \int_0^1 x^3 dx$.

又当 $0<x<1$ 时, $x^2>x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$.

(2)因为当 $1\le x\le 2$ 时, $x^2\le x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx \le \int_1^2 x^3 dx$.

又因为当 $1<x\le 2$ 时, $x^2<x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$.

(3)因为当 $1\le x\le 2$ 时, $0\le \ln x<1$, $\ln x\ge (\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx \ge \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

又因为当 $1<x\le 2$ 时, $0<\ln x<1$, $\ln x>(\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

(4)因为当 $0\le x\le 1$ 时, $x\ge \ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx \ge \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

又因为当 $0<x\le 1$ 时, $x>\ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

(5)设 $f(x)=e^x-1-x$, 则当 $0\le x\le 1$ 时 $f'(x)=e^x-1>0$, $f(x)=e^x-1-x$ 是单调增加的. 因此当 $0\le x\le 1$ 时, $f(x)\ge f(0)=0$, 即 $e^x\ge 1+x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx \ge \int_0^1 (1+x) dx$.

又因为当 $0<x\le 1$ 时, $e^x>1+x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x) dx$.

习题 5–2

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 x=0 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y'=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt=\sin x$，当 x=0 时, y'=sin0=0;

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y'=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin u du$，$y=\int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t)$=sin t , $y'(t)$=cos t , $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\cos t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y'+\cos x=0,$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}.$$

4. 当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值？

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$，令 $I'(x)$=0，得 x=0.

因为当 x<0 时, $I'(x)$<0; 当 x>0 时, $I'(x)$>0,
所以 x=0 是函数 $I(x)$的极小值点.

5. 计算下列各导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$;

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 (1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt \xlongequal{令x^2=u} \frac{d}{du}\int_0^u\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}$

$=\sqrt{1+u^2}\cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt + \frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt + \frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

$=-\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)' + \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}\cdot(x^3)'$

$=-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt = -\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt + \frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x)' + \cos(\pi\cos^2 x)(\cos x)'$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x) - \sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x) - \sin x\cdot\cos(\pi - \pi\sin^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x) + \sin x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$

$=(\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$.

6. 计算下列各定积分:

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$;

解 $\int_0^a(3x^2-x+1)dx = (x^3-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_0^a = a^3-\frac{1}{2}a^2+a$.

(2) $\int_{1}^{2}(x^2+\frac{1}{x^4})dx$;

解 $\int_{1}^{2}(x^2+\frac{1}{x^4})dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3})\Big|_1^2=\frac{1}{3}(2^3-2^{-3})-\frac{1}{3}(1^3-1^{-3})=2\frac{5}{8}$.

(3) $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$;

解 $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_{4}^{9}(x^{\frac{1}{2}}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9$

$=(\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}9^2)-(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}4^2)=45\frac{1}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\frac{dx}{a^2+x^2}$;

解 $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{1}{a}\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{a}\arctan 0=\frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

解 $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=(x^3+\arctan x)\,|_{-1}^{0}$

$=-(-1)^3-\arctan(-1)=1+\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}$;

解 $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\,|_{-e-1}^{-2}=\ln 1-\ln e=-1$.

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$;

解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta=(\tan\theta-\theta)\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$;

解 $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$

$=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=4$.

(12) $\int_{0}^{2}f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2 & x>1\end{cases}$.

解 $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x^2dx=(\frac{1}{2}x^2+x)\,|_{0}^{1}+(\frac{1}{6}x^3)\,|_{1}^{2}=\frac{8}{3}$.

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{k}\sin k\pi-\frac{1}{k}\sin k(-\pi)=0-0=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k(-\pi)$

$$=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k\pi=0 .$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2k}\sin 2kx)\,|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k\neq l$. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]dx$

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\cos(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}-[-\frac{1}{2(k-l)}\cos(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]dx$

$$=[\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]dx$.

$$=[-\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0 .$$

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{xe^{2x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{1+2x^2}=2$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1]\\ x & x\in[1,2]\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0, 2]上的表达式, 并讨论$\varphi(x)$在(0, 2)内的连续性.

解 当 $0\le x\le1$ 时, $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$;

当 $1<x\le2$ 时, $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}$.

因此 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x\le1\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6} & 1<x\le2\end{cases}$.

因为 $\varphi(1)=\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to1-0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{3}$,

$\lim\limits_{x\to1+0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$,

所以$\varphi(x)$在 $x=1$ 处连续, 从而在(0, 2)内连续.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & x<0\text{或}x>\pi\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在$(-\infty, +\infty)$内的表达式.

解 当 $x<0$ 时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0;$$

当 $0\le x\le \pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^x=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2};$$

当 $x>\pi$时,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin tdt+\int_\pi^x 0dt=-\frac{1}{2}\cos t\,|_0^\pi$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0=1.$$

因此 $$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x\le\pi\\ 1 & x\ge\pi\end{cases}.$$

12. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导且 $f'(x)\le 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明在(a, b)内有 $F'(x)\le 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在$\xi\in[a, x]$, 使$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}f(x)$$

$$=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}f(\xi)(x-a)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)].$$

由 $f'(x)\le 0$ 可知 $f(x)$在$[a, b]$上是单调减少的, 而 $a\le\xi\le x$, 所以 $f(x)-f(\xi)\le 0$. 又在(a, b)内, $x-a>0$, 所以在(a, b)内

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\le 0.$$

习题 5–2

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y'=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt=\sin x$, 当 $x=0$ 时, $y'=\sin 0=0$; 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $y'=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin u du$, $y=\int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t)=\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\cot t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y'+\cos x=0,$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}.$$

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值?

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$, 令 $I'(x)=0$, 得 $x=0$. 因为当 $x<0$ 时, $I'(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $I'(x)>0$, 所以 $x=0$ 是函数 $I(x)$的极小值点.

5. 计算下列各导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$;

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 (1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt \xlongequal{令x^2=u} \frac{d}{du}\int_0^u\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}\cdot 2x=2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$$

$$=-\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)'+\frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}\cdot(x^3)'$$

$$=-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}.$$

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt=-\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\cos(\pi\sin^2 x)(\sin x)'+\cos(\pi\cos^2 x)(\cos x)'$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cdot\cos(\pi-\pi\sin^2 x)$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)+\sin x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$

$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$

6. 计算下列各定积分:

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$;

解 $\int_0^a(3x^2-x+1)dx=(x^3-\frac{1}{2}x^2+x)|_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a$.

(2) $\int_1^2(x^2+\frac{1}{x^4})dx$;

解 $\int_1^2(x^2+\frac{1}{x^4})dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3})|_1^2=\frac{1}{3}(2^3-2^{-3})-\frac{1}{3}(1^3-1^{-3})=2\frac{5}{8}$.

(3) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$;

解 $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_4^9(x^{\frac{1}{2}}+x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)|_4^9=(\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}9^2)-(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}4^2)=45\frac{1}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\,\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\,\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{dx}{a^2+x^2}$;

解 $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a}=\frac{1}{a}\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{a}\arctan 0=\frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

解 $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^0(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx=(x^3+\arctan x)|_{-1}^0=-(-1)^3-\arctan(-1)=1+\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}$;

解 $\int_{-e-1}^{-2}\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x||_{-e-1}^{-2}=\ln 1-\ln e=-1$.

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$;

解 $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\cos x|_0^{\pi}+\cos x|_{\pi}^{2\pi}=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=4$.

(12) $\int_0^2 f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2 & x>1\end{cases}$.

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 x^2dx=(\frac{1}{2}x^2+x)|_0^1+(\frac{1}{6}x^3)|_1^2=\frac{8}{3}$.

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{k}\sin k\pi-\frac{1}{k}\sin k(-\pi)=0-0=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k(-\pi)=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k\pi=0$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx)|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2k}\sin 2kx)|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k\neq l$. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$.

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]dx$

$=[-\frac{1}{2(k+l)}\cos(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}-[-\frac{1}{2(k-l)}\cos(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]dx$

$=[\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]dx$.

$=[-\frac{1}{2(k+l)}\sin(k+l)x]_{-\pi}^{\pi}+[\frac{1}{2(k-l)}\sin(k-l)x]_{-\pi}^{\pi}=0$.

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+2x^2}=2$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1]\\ x & x\in[1,2]\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0, 2]上的表达式，并讨论$\varphi(x)$在(0, 2)内的连续性.

解 当 $0\le x\le 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$；

当 $1<x\le 2$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}$.

因此 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6} & 1<x\le 2\end{cases}$.

因为$\varphi(1)=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1-0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1+0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$，
所以$\varphi(x)$在 $x=1$ 处连续，从而在(0, 2)内连续.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x<0\text{或}x>\pi\end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在$(-\infty, +\infty)$内的表达式.

解 当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0$；

当 $0\le x\le\pi$时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \dfrac{1}{2}\sin tdt=-\dfrac{1}{2}\cos t|_0^x=-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}$；

当 $x>\pi$时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^\pi \dfrac{1}{2}\sin tdt+\int_\pi^x 0dt=-\dfrac{1}{2}\cos t|_0^\pi=-\dfrac{1}{2}\cos\pi+\dfrac{1}{2}\cos 0=1$.

因此 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x\le\pi\\ 1 & x\ge\pi\end{cases}$.

12. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导且 $f'(x)\le 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明在(a, b)内有 $F'(x)\le 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在$\xi\in[a, x]$, 使$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}f(x)=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}f(\xi)(x-a)$$

$$=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)].$$

由 $f'(x)\le 0$ 可知 $f(x)$在$[a, b]$上是单调减少的, 而 $a\le\xi\le x$, 所以 $f(x)-f(\xi)\le 0$. 又在(a, b)内, $x-a>0$, 所以在(a, b)内

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\le 0.$$

习题 5−3

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})dx$;

解 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})dx=-\cos(x+\frac{\pi}{3})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

解 $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{-2}(11+5x)^{-2}\Big|_{-2}^{1}=-\frac{1}{10}\cdot 16^{-2}+\frac{1}{10}\cdot 1^{-2}=\frac{51}{512}$.

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$;

解 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}s\cos^3\varphi d\sin\varphi=-\frac{1}{4}\cos^3\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}\cos^3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cos^3 0=\frac{1}{4}$.

(4) $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta$;

解 $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}d\theta+\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\cos\theta=\theta\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$

$=\pi+(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_{0}^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}$.

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu$;

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=\frac{1}{2}u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\sin 2u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(6) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$;

解 $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx\overset{令x=\sqrt{2}\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$

$=(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$;

解 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy=\sqrt{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-y^2}dy\overset{令y=2\sin x}{=\!=\!=\!=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\cdot 2\cos xdx$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=2\sqrt{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2y)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\overset{令x=\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^2 t}-1)dt=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$;

解 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos tdt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{a^4}{8}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{a^4}{32}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4\pi}{16}.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

解 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}\overset{令x=\tan t}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 tdt$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

解 $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}\overset{令\sqrt{5-4x}=u}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{8}\int_3^1(5-u^2)du=-\frac{1}{8}(5u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_3^1=\frac{1}{6}$.

(12) $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

解 $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\overset{令\sqrt{x}=u}{=\!=\!=\!=}\int_1^2\frac{1}{1+u}\cdot 2udu=2\int_1^2(1-\frac{1}{1+u})du=2(u-\ln|1+u|)\Big|_1^2=2(1+\ln\frac{2}{3})$.

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$;

解 $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}\overset{令\sqrt{1-x}=u}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{u-1}\cdot(-2u)du=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{u-1})du=2(u+\ln|u-1|)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=1-2\ln 2$.

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}$;

解 $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{\sqrt{3a^2-x^2}}d(3a^2-x^2)=-\sqrt{3a^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}a}=a(\sqrt{3}-1)$.

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

解 $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}d(-\frac{t^2}{2})=-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}}$.

(16) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

解 $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}d\ln x=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^2}=2(\sqrt{3}-1)$.

(17) $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

解 $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-2}^0\frac{1}{1+(x+1)^2}dx=\arctan(x+1)\Big|_{-2}^0=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$.

(18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)d\sin x=(\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$.

(19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sqrt{1-\cos^2 x}dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{\cos x}(-\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0-\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$

(20) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

解 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$.

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$;

解 因为 $x^4\sin x$ 在区间$[-\pi, \pi]$上是奇函数，所以$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx=0$.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta$;

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)d\theta$

$=(3\theta+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$

$=\frac{2}{3}(\arcsin x)^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^3}{324}$.

(4) $\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx$.

解 因为函数 $\frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$ 是奇函数，所以 $\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} dx=0$.

3. 证明: $\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)dx=2\int_0^a \varphi(x^2)dx$，其中$\varphi(u)$为连续函数.

证明 因为被积函数$\varphi(x^2)$是 x 的偶函数，且积分区间$[-a, a]$关于原点对称，所以有

$\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)dx=2\int_0^a \varphi(x^2)dx$.

4. 设 $f(x)$在$[-b, b]$上连续，证明$\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{b} f(-x)dx$.

证明 令 $x=-t$，则 $dx=-dt$，当 $x=-b$ 时 $t=b$，当 $x=b$ 时 $t=-b$，于是

$\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{b}^{-b} f(-t)(-1)dt=\int_{-b}^{b} f(-t)dt$,

而 $\int_{-b}^{b} f(-t)dt=\int_{-b}^{b} f(-x)dx$,

所以 $\int_{-b}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{b} f(-x)dx$.

5. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续., 证明$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

证明 令 $x=a+b-t$, 则 $dx=d\,t$, 当 $x=a$ 时 $t=b$, 当 $x=b$ 时 $t=a$, 于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-1)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt,$$

而 $$\int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx,$$

所以 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

6. 证明: $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} (x>0)$.

证明 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 当 $x=x$ 时 $t=\frac{1}{x}$, 当 $x=1$ 时 $t=1$, 于是

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt,$$

而 $$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx,$$

所以 $$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

7. 证明: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

证明 令 $1-x=t$, 则 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$,

即 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

8. 证明: $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

证明 $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x dx$,

而 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x dx \overset{令x=\pi-t}{=\!=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi-t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$$

所以 $$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

9. 设 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数, 证明$\int_a^{a+1} f(x)dx$的值与 a 无关.

证明 已知 $f(x+l)=f(x)$.

$$\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^l f(x)dx+\int_l^{a+l} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx+\int_l^{a+l} f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\,,$$

而 $$\int_l^{a+l} f(x)dx\overset{令x=t+l}{=\!=\!=\!=}\int_0^a f(t+l)dt=\int_0^a f(x+l)dx=\int_0^a f(x)dx\,,$$

所以 $$\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx\,.$$

因此 $\int_a^{a+1} f(x)dx$ 的值与 a 无关.

10. 若 $f(t)$是连续函数且为奇函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数; 若 $f(t)$是连续函数且为偶函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证明 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

若 $f(t)$是连续函数且为奇函数, 则 $f(-t)=-f(t)$, 从而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt\overset{令t=-u}{=\!=\!=\!=}\int_0^x f(-u)(-1)du=\int_0^x f(u)dx=\int_0^x f(x)dx=F(x)\,,$$

即 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数.

若 $f(t)$是连续函数且为偶函数, 则 $f(-t)=f(t)$, 从而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt\overset{令t=-u}{=\!=\!=\!=}\int_0^x f(-u)(-1)du=-\int_0^x f(u)dx=-\int_0^x f(x)dx=-F(x)\,,$$

即 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

11. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

解 $\int_0^1 xe^{-x}dx=-\int_0^1 xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=1-2e^{-1}$.

(2) $\int_1^e x\ln xdx$;

解 $\int_1^e x\ln xdx=\frac{1}{2}\int_1^e \ln xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_0^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$.

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega tdt$ (ω为常数);

解 $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega tdt=-\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} td\cos\omega t=-\frac{1}{\omega}t\cos\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega tdt$

$$=-\frac{2\pi}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=-\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$;

解 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}xd\cot x=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot xdx=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$=(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9})\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\ln xd\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-2\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=8\ln 2-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=8\ln 2-4\sqrt{x}\Big|_1^4=4(2\ln 2-1).$$

(6) $\int_0^1 x\arctan xdx$;

解 $\int_0^1 x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan xdx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\sin x=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx$

$$=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\cos x=e^{\pi}+2e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}+2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$,

于是

(8) $\int_1^2 x\log_2 xdx$;

解 $\int_1^2 x\log_2 xdx=\frac{1}{2}\int_1^2\log_2 xdx^2=\frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x\ln 2}dx$

$$=2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$

(9) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$;

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2 d\sin 2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x^3\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2xdx\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}xd\cos 2x\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2xdx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.

(10) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;

解法一 $\int_1^e \sin(\ln x)dx \xlongequal{令\ln x=t} \int_0^1 \sin t\cdot e^t dt$.

因为 $\int_0^1 \sin t\cdot e^t dt=\int_0^1 \sin t de^t=e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\cos tdt$

$=e\cdot\sin 1-\int_0^1\cos tde^t=e\cdot\sin 1-e^t\cos t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\sin tdt$

$=e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1-\int_0^1 e^t\sin tdt$,

所以 $\int_0^1 e^t\sin tdt=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

因此 $\int_1^e \sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

解法二 $\int_1^e \sin(\ln x)dx=x\cdot\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=e\cdot\sin 1-\int_1^e\cos(\ln x)dx$

$=e\cdot\sin 1-x\cdot\cos(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1-\int_0^e\sin(\ln x)dx$,

故 $\int_1^e \sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\cdot\sin 1-e\cdot\cos 1+1)$.

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|dx$;

解 $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^1\ln xdx+\int_1^e\ln xdx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1+x\ln x\Big|_1^e+\int_{\frac{1}{e}}^1 dx-\int_1^e dx$

$=-\frac{1}{e}+e+(1-\frac{1}{e})-(e-1)=2(1-\frac{1}{e})$.

(12) $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$ (m 为自然数);

解 $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx \xlongequal{令x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}tdt$.

根据递推公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2} xdx$,

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx=\begin{cases}\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & m\text{为奇数}\\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & m\text{为偶数}\end{cases}.$$

(13) $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m xdx$ (m 为自然数).

解 因为

$$\int_0^{\pi}x\sin^m xdx\overset{\text{令}x=\pi-t}{=\!=\!=\!=}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^m(\pi-t)(-1)dt=\int_0^{\pi}\pi\sin^m tdt-\int_0^{\pi}t\sin^m tdt,$$

所以 $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m xdx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx$ (用第 8 题结果).

根据递推公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} xdx$,

$$J_m=\begin{cases}\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2} & m\text{为偶数}\\ \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\pi & m\text{为奇数}\end{cases}.$$

习题 5–7

1. 判别下列各反常积分的收敛性, 如果收敛, 计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

解 因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{3}x^{-3})+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ 收敛, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

解 因为 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}-2=+\infty$, 所以反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 发散.

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx\ (a>0)$;

解 因为

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{a}e^{-ax})+\frac{1}{a}=\frac{1}{a},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$.

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}tdt\ (p>1)$;

解 因为

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}tdt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[e^{(1-p)t}+e^{-(1+p)t}]dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-p}e^{(1-p)t}-\frac{1}{1+p}e^{-(1+p)t}]\Big|_0^{+\infty}=\frac{p}{p^2-1},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}tdt$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{ch}tdt=\frac{p}{p^2-1}$.

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega tdt\ (p>0,\ \omega>0)$;

解 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega tdt=-\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}e^{-pt}d\cos\omega t$

$$=-\frac{1}{\omega}e^{-pt}\cos\omega t\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}\cos\omega t\cdot(-pe^{-pt})dt=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}d\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega^2}e^{-pt}\sin\omega t\Big|_0^{+\infty}+\frac{p}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\sin\omega t\cdot(-pe^{-pt})dt=\frac{1}{\omega}-\frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega tdt,$$

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega tdt=\frac{\omega}{p^2+w^2}$.

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$.

(7) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\lim_{x\to1^-}(-\sqrt{1-x^2})+1=1.$$

(8) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点. 因为

$$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2},$$

而
$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\Big|_0^1=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}-1=+\infty,$$

所以反常积分 $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散.

(9) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\int_1^2(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})dx=[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}]\Big|_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\lim_{x\to1^+}[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}]=2\frac{2}{3}.$$

(10) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解 这是无界函数的反常积分, $x=e$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}d\ln x=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e=\lim_{x\to e^-}\arcsin(\ln x)=\frac{\pi}{2}.$$

2. 当 k 为何值时, 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时, 这反常积分发散? 又当 k 为何值时, 这反常积分取得最小值?

解 当 $k<1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-k+1}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$;

当 k=1 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$；

当 k>1 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-k+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}$.

因此当 k>1 时，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛；当 $k\le 1$ 时，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 发散.

当 k>1 时，令 $f(k)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}=\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}$，则

$$f'(k)=-\frac{1}{(k-1)^2}(\ln 2)^{1-k}-\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}\ln\ln 2=-\frac{(\ln 2)^{1-k}\ln\ln 2}{(k-1)^2}(k-1+\frac{1}{\ln\ln 2}).$$

令 $f'(k)$=0 得唯一驻点 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$.

因为当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(k)$<0，当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时 $f'(k)$>0，所以 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 为极小值点，同时也是最小值点，即当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，这反常积分取得最小值

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$.

解 因为

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^n de^{-x}=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1},$$

所以 $I_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot\cdot 2\cdot I_1$.

又因为 $I_1=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$,

所以 $I_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdot\cdot 2\cdot I_1=n!$.

总习题五

1. 填空:

(1)函数 $f(x)$在$[a, b]$上(常义)有界是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的______条件, 而 $f(x)$在$[a, b]$上连续是 $f(x)$在$[a, b]$上可积______的条件;

解 函数 $f(x)$在$[a, b]$上(常义)有界是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的___必要___条件, 而 $f(x)$在$[a, b]$上连续是 $f(x)$在$[a, b]$上可积___充分___的条件;

(2)对$[a, +\infty)$上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在$[a, +\infty)$上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的______条件;

解 对$[a, +\infty)$上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在$[a, +\infty)$上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的___充分___条件;

(3)绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定______;

解 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定___收敛___;

(4)函数 $f(x)$在$[a, b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a, b]$上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ______存在.

解 函数 $f(x)$在$[a, b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a, b]$上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ___不一定___存在.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots(\frac{n}{n})^p]\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)-\frac{1}{n}\cdot n\ln n]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\ln 1-\ln n)+(\ln 2-\ln n)+\cdots+(\ln n-\ln n)]\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x dx$

$=(x\ln x)\Big|_0^1-\int_0^1 dx=(x\ln x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1=-1$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$连续;

解法一 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{\xi\to a}xf(\xi)=af(a)$ (用的是积分中值定理).

解法二 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)dt}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt+xf(x)}{1}=af(a)$ (用的是洛必达法则).

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}$.

3. 下列计算是否正确, 试说明理由:

(1) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\frac{d(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2}=(-\arctan\frac{1}{x})\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}$;

解 计算不正确, 因为$\frac{1}{x}$在[−1, 1]上不连续.

(2)因为$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+x+1}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}-\int_{-1}^1\frac{dt}{t^2+t+1}$，所以$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+x+1}=0$.

解 计算不正确, 因为$\frac{1}{t}$在[−1, 1]上不连续.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^A\frac{x}{1+x^2}dx=0$.

解 不正确, 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{x}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{1+x^2}dx\neq\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx.$$

4. 设 $p>0$, 证明 $\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1$.

证明 $1>\frac{1}{1+x^p}=\frac{1+x^p-x^p}{1+x^p}=1-\frac{x^p}{1+x^p}>1-x^p$. 因为

$$\int_0^1(1-x^p)dx<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<\int_0^1 dx,$$

而 $\int_0^1 dx=1$, $\int_0^1(1-x^p)dx=(x-\frac{x^{p+1}}{p+1})_0^1=\frac{p}{1+p}$,

所以 $\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1$.

5. 设 $f(x)$、$g(x)$在区间$[a, b]$上均连续, 证明:

(1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$;

证明 因为$[f(x)-\lambda g(x)]^2\geq0$, 所以$\lambda^2g^2(x)-2\lambda f(x)g(x)+f^2(x)\geq0$, 从而

$$\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq0.$$

上式的左端可视为关于λ的二次三项式, 因为此二次三项式大于等于 0, 所以其判别式小于等于 0, 即

$$4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leq0,$$

亦即 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$.

(2) $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

证明 $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\leq\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

又 $\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}=\left([\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}+[\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\right)^2$,

所以 $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 且 $f(x)>0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2$.

证明 已知有不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$, 在此不等式中, 取

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$，则有

$$\int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2\cdot dx\cdot\int_a^b[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2dx\geq[\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx]^2,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2.$$

7. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\tan\frac{x}{2})-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(x\tan\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx+\ln 2=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$;

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx.$$

令 $\frac{\pi}{4}-x=u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-u)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos udu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx,$$

所以 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dx=\ln\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}\sqrt{2}.$$

(3) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

解 令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos tdt}{\sin t+\cos t}.$$

又令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t dt}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{\sin u+\cos u},$$

所以 $$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$;

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1).$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x(\sec^2 x+1)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

8. 设 $f(x)$为连续函数，证明 $\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x[\int_0^t f(u)du]dt$.

证明 $$\int_0^x[\int_0^t f(u)du]dt=t\int_0^t f(u)du\Big|_0^x-\int_0^x td[\int_0^t f(u)du]$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x f(t)(x-t)dt.$$

9. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x)>0$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}$, $x\in[a, b]$. 证明:

(1)$F'(x)\geq 2$;

(2)方程 $F(x)=0$ 在区间(a, b)内有且仅有一个根.

证明 (1) $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$.

(2)因为 $f(x)>0$, $a<b$, 所以

$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)}<0,\ F(b)=\int_a^b f(t)dt>0,$$

由介值定理知 $F(x)=0$ 在(a, b)内有根. 又 $F''(x)\geq 2$, 所以在(a, b)内仅有一个根.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & x\geq 0\\ \frac{1}{1+e^x} & x<0\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

解 $\int_0^2 f(x-1)dx \xlongequal{令x-1=t} \int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$

$$=\int_{-1}^0 \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt+\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt=-\ln(e^{-t}+1)\Big|_{-1}^0+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln(1+e).$$

11. 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续, $g(x)$在区间$[a, b]$上连续且不变号. 证明至少存在一点 $x\in[a, b]$, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad (积分第值定理).$$

证明 若 $g(x)=0$, 则结论题然成立.

若 $g(x)\neq 0$, 因为 $g(x)$不变号, 不妨设 $g(x)>0$.

因 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 所以 $f(x)$在$[a, b]$上有最大值 M 和最小值 m 即

$m\leq f(x)\leq M$,

因此有 $m g(x)\leq f(x)g(x)\leq M g(x)$.

根据定积分的性质, 有

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx,$$

或
$$m\leq\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M.$$

因为 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 根据介值定理, 至少存在一点 $x\in(a, b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi),$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

*12.(1)证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx, (n>1)$

证明 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}d(e^{-x^2})$

$$=-\frac{1}{2}[(x^{n-1}e^{-x^2})|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}d(x^{n-1})]$$

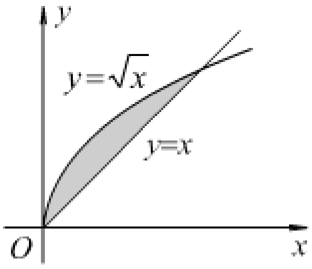
$$=\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-2}e^{-x^2}dx(n>1)$$

(2)证明 $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(n+1)(n\in N)$

习题 6−2

1. 求图 6−21 中各画斜线部分的面积:

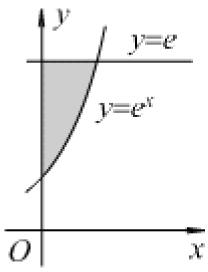
(1)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2)



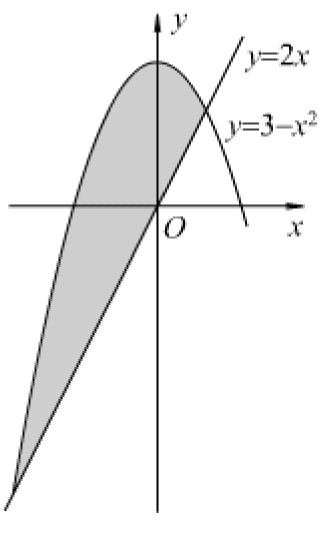
解法一 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_0^1(e-e^x)dx=(ex-e^x)|_0^1=1,$$

解法二 画斜线部分在 y 轴上的投影区间为[1, e]. 所求的面积为

$$A=\int_1^e\ln ydy=y\ln y|_1^e-\int_1^e dy=e-(e-1)=1.$$

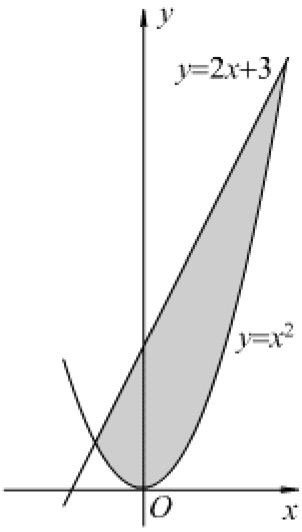
(3)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[−3, 1]. 所求的面积为

$$A=\int_{-3}^{1}[(3-x^2)-2x]dx=\frac{32}{3}.$$

(4)



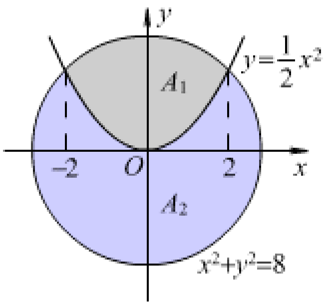
解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为[−1, 3]. 所求的面积为

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算);

解:



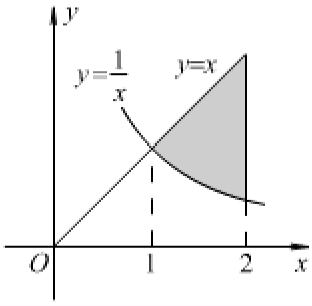
$$A_1=2\int_0^2(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2)dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_0^2x^2dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx-\frac{8}{3}$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2tdt-\frac{8}{3}=2\pi+\frac{4}{3}.$$

$$A_2=(2\sqrt{2})^2\pi-S_1=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;

解:

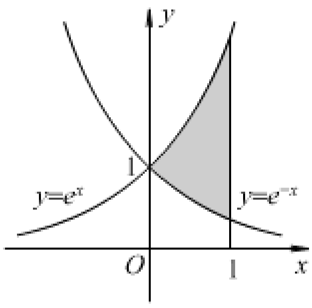


所求的面积为

$$A=\int_0^2(x-\frac{1}{x})dx=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

(3) $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 与直线 $x=1$;

解:

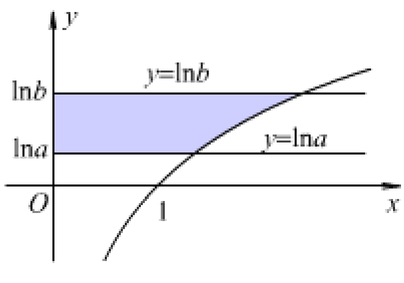


所求的面积为

$$A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\frac{1}{e}-2.$$

(4)$y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a$, $y=\ln b$ $(b>a>0)$.

解

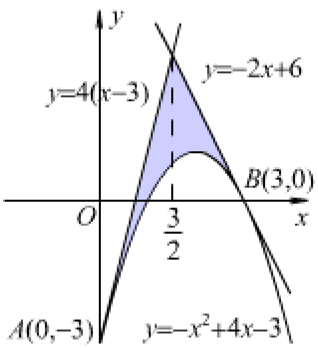


所求的面积为

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a$$

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点(0, −3)和(3, 0)处的切线所围成的图形的面积.

解:



$y'=-2x+4$.

过点(0, −3)处的切线的斜率为 4, 切线方程为 $y=4(x-3)$.

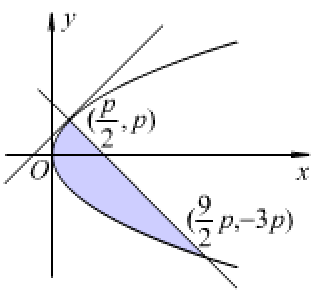
过点(3, 0)处的切线的斜率为−2, 切线方程为 $y=-2x+6$.

两切线的交点为$(\frac{3}{2}, 3)$, 所求的面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^2+4x-3]dx=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点$(\frac{p}{2}, p)$处的法线所围成的图形的面积.

解



$2y\cdot y'=2p$.

在点$(\frac{p}{2}, p)$处, $y'=\frac{p}{y}\Big|_{(\frac{p}{2}, p)}=1$, 法线的斜率 $k=-1$,

法线的方程为 $y-p=-(x-\frac{p}{2})$, 即 $x=\frac{3p}{2}-y$.

求得法线与抛物线的两个交点为$(\frac{p}{2},p)$和$(\frac{9}{2}p,-3p)$.

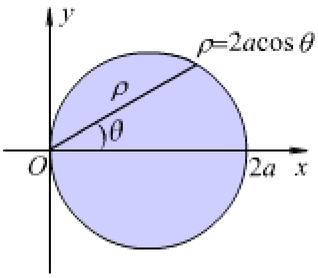
法线与抛物线所围成的图形的面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}(\frac{3p}{2}-y-\frac{y^2}{2p})dy=(\frac{3p}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6p}y^3)\Big|_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线 所围成的图形的面积;

(1)$\rho=2a\cos\theta$;

解:

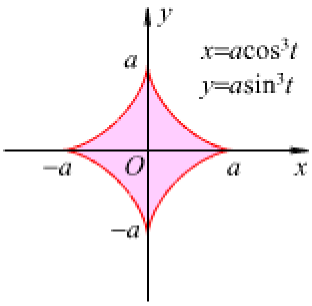


所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\pi a^2.$$

(2)$x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$;

解



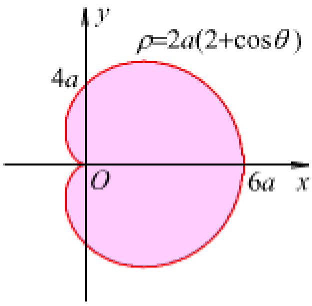
所求的面积为

$$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin^3t)d(a\cos^3t)=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2t\sin^4tdt$$

$$=12a^2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6tdt]=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(3)$\rho=2a(2+\cos\theta)$

解

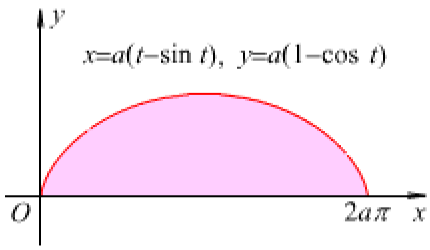


所求的面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2d\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=18\pi a^2 .$$

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\leq t\leq 2\pi)$与横轴 所围成的图形的面积.

解:



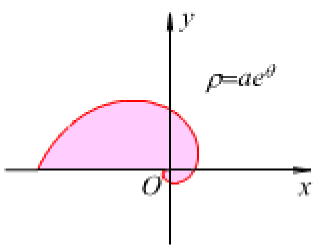
所求的面积为

$$A=\int_0^{2a\pi}ydx=\int_0^{2a}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2a}(1-\cos t)^2dt$$

$$=a^2\int_0^{2a}(1-2\cos t+\frac{1+\cos t}{2})dt=3a^2\pi .$$

7. 求对数螺线$\rho=ae^{\theta}(-\pi\leq\theta\leq\pi)$及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形面积.

解



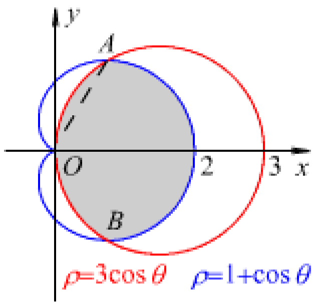
所求的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(ae^{\theta})^2d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}d\theta=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi}).$$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积.

(1)$\rho=3\cos\theta$ 及$\rho=1+\cos\theta$

解

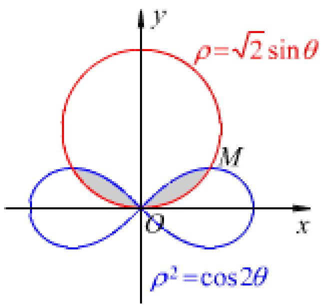


曲线$\rho=3\cos\theta$ 与$\rho=1+\cos\theta$交点的极坐标为$A(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3})$，$B(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3})$. 由对称性, 所求的面积为

$$A=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2d\theta]=\frac{5}{4}\pi.$$

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos2\theta$.

解



曲线 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $\rho^2=\cos2\theta$ 的交点 M 的极坐标为 $M(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6})$. 所求的面积为

$$A=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sqrt{2}\sin\theta)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

9. 求位于曲线 $y=e^x$ 下方, 该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

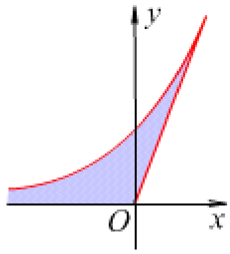
解 设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^x$ 相切于 $A(x_0, y_0)$点, 则有

$$\begin{cases} y_0=kx_0 \\ y_0=e^{x_0} \\ y'(x_0)=e^{x_0}=k \end{cases},$$

求得 $x_0=1$, $y_0=e$, $k=e$.

所求面积为

$$\int_0^e(\frac{1}{e}y-\ln y)dy=\frac{1}{2e}y^2\Big|_0^e-y\ln y\Big|_0^e+\int_0^e y\cdot\frac{1}{y}dy=\frac{e}{2}.$$



10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值.

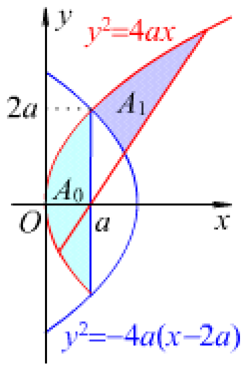
解 设弦的倾角为 α. 由图可以看出, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积为

$$A=A_0+A_1.$$

显然当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, $A_1=0$; 当 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时, $A_1>0$.

因此, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值为

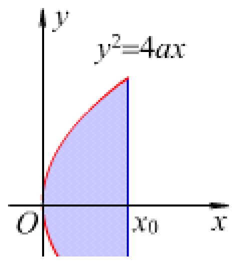
$$A_0=2\int_0^a\sqrt{2ax}dx=\frac{8}{3}\sqrt{a}\sqrt{x^3}\Big|_0^a=\frac{8}{3}a^2.$$



11. 把抛物线 $y^2=4ax$ 及直线 $x=x_0(x_0>0)$所围成的图形绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 所得旋转体的体积为

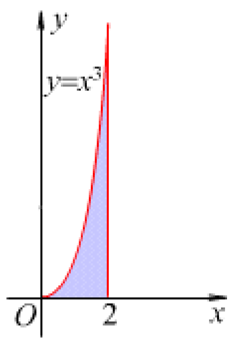
$$V=\int_0^{x_0}\pi y^2dx=\int_0^{x_0}\pi 4axdx=2a\pi x^2\Big|_0^{x_0}=2a\pi x_0^2.$$



12. 由 $y=x^3$, $x=2$, $y=0$ 所围成的图形, 分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_x=\int_0^2\pi y^2dx=\int_0^2\pi x^6dx=\frac{1}{7}\pi x^7\Big|_0^2=\frac{128}{7}\pi.$$



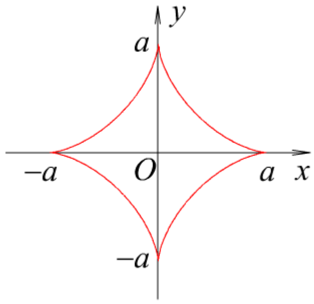
绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_y=2^2\cdot\pi\cdot 8-\int_0^8 \pi x^2 dy=32\pi-\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=32\pi-\frac{3}{5}\pi\sqrt[3]{y^5}\Big|_0^8=\frac{64}{5}\pi\,.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成的图形，绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

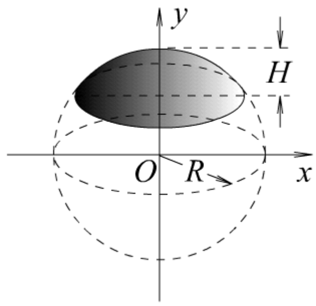
解 由对称性，所求旋转体的体积为



$$V=2\int_0^a \pi y^2 dx=2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3 dx$$

$$=2\pi\int_0^a (a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx=\frac{32}{105}\pi a^3\,.$$

14. 用积分方法证明图中球缺的体积为 $V=\pi H^2(R-\frac{H}{3})$.



证明 $V=\int_{R-H}^{R}\pi x^2(y)dy=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-y^2)dy$

$$=\pi(R^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{R-H}^{R}=\pi H^2(R-\frac{H}{3})\,.$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2$，$x=y^2$，绕 y 轴;

解 $V=\pi\int_0^1 y dy-\pi\int_0^1 (y^2)^2 dy=\pi(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{5}y^5)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\pi\,.$

(2) $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $x=0$, $x=a$, $y=0$，绕 x 轴;

解 $V=\int_0^a \pi y^2(x)dx=\pi\int_0^a a^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}dx \xlongequal{令x=au} \pi a^3\int_0^1 \mathrm{ch}^2 u du$

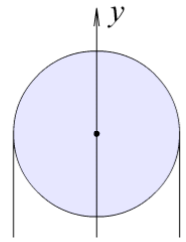
$$=\frac{\pi a^3}{4}\int_0^1(e^{2u}+2+e^{-2u})du=\frac{\pi a^3}{4}(\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u})\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}(2+\mathrm{sh}2).$$

(3) $x^2+(y-5)^2=16$, 绕 x 轴.

解 $V=\pi\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-x^2})^2dx-\pi\int_{-4}^{4}(5-\sqrt{16-x^2})^2dx$

$$=40\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx=160\pi^2.$$

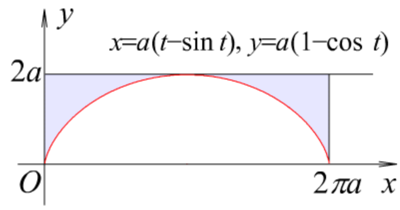


(4)摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱, $y=0$, 绕直线 $y=2a$.

解 $V=\pi\int_0^{2a\pi}(2a)^2dx-\pi\int_0^{2a\pi}(2a-y)^2dy$

$$=8a^3\pi^2-\pi\int_0^{2\pi}[a(1+\cos t)^2]^2da(t-\sin t)$$

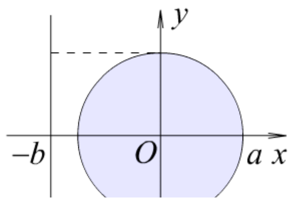
$$=8a^3\pi^2-a^3\pi\int_0^{2a}(1+\cos t)\sin^2 tdt=7a^3\pi^2.$$



16. 求圆盘 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$旋转所成旋转体的体积.

解 $V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-y^2})^2dy-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-y^2})^2dy$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}dy=2a^2b\pi^2.$$

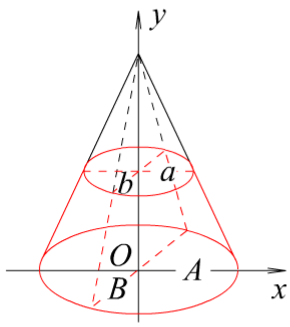


17. 设有一截锥体, 其高为 h, 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$, 求这截锥体的体积.

解 建立坐标系如图. 过 y 轴上 y 点作垂直于 y 轴的平面, 则平面与截锥体的截面为椭圆, 易得其长短半轴分别为

$$A-\frac{A-a}{h}y,\ B-\frac{B-b}{h}y.$$

截面的面积为$(A-\frac{A-a}{h}y)\cdot(B-\frac{B-b}{h}y)\pi$.

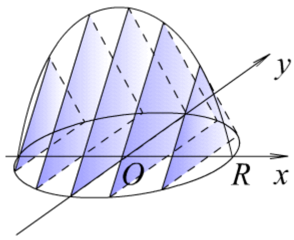


于是截锥体的体积为

$$V=\int_0^h (A-\frac{A-a}{h}y)\cdot(B-\frac{B-b}{h}y)\pi dy=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.

解 设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, 由已知条件知, 它是边长为$\sqrt{R^2-x}$ 的等边三角形的面积, 其值为



$$A(x)=\sqrt{3}(R^2-x^2),$$

所以 $$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明 由平面图形 $0\le a\le x\le b$, $0\le y\le f(x)$绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

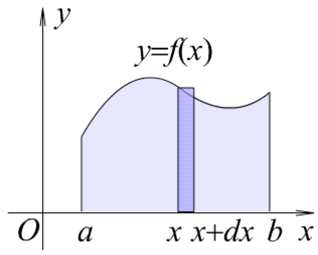
$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

证明 如图, 在 x 处取一宽为 dx 的小曲边梯形, 小曲边梯形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积近似为 $2\pi x\cdot f(x)dx$, 这就是体积元素, 即

$dV=2\pi x\cdot f(x)dx$,

于是平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)dx=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$



20. 利用题 19 和结论, 计算曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

$$V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin xdx=-2\pi\int_0^{\pi}xd\cos x=2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=2\pi^2.$$

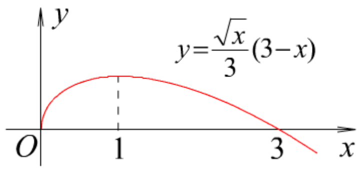
21. 计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解 $$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,$$

令$\sqrt{1+x^2}=t$, 即 $x=\sqrt{t^2-1}$, 则

$$s=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3 dt+\int_2^3\frac{1}{t^2-1}dt=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

22. 计算曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 1≤x≤3 的一段弧的长度.



解 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x\sqrt{x}$, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}$,

$$y'^2=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x,\ \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}),$$

所求弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x})\Big|_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解 由 $\begin{cases} y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2=\frac{x}{3} \end{cases}$ 得两曲线的交点的坐标为 $(2,\frac{\sqrt{6}}{3})$, $(2,-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

所求弧长为 $s=2\int_1^2\sqrt{1+y'^2}dx$.

因为

$$2yy'=2(x-1)^2,\ y'=\frac{(x-1)^2}{y},\ y'^2=\frac{(x-1)^4}{y^2}=\frac{(x-1)^4}{\frac{2}{3}(x-1)^3}=\frac{3}{2}(x-1).$$

所以

$$s=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}dx=\frac{2}{3\sqrt{2}}\int_1^2\sqrt{3x-1}d(3x-1)=\frac{8}{9}[(\frac{5}{2})^{\frac{3}{2}}-1].$$

24. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$的弧长.

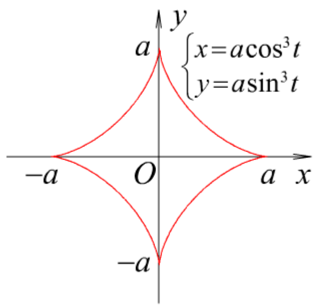
解 $$s=\int_0^y\sqrt{1+x'^2(y)}dy=\int_0^y\sqrt{1+(\frac{y}{p})^2}dy=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{p}[\frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})]\Big|_0^y$$

$$=\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

25. 计算星形线 $x=a\cos^3t$， $y=a\sin^3t$ 的全长.

解 用参数方程的弧长公式.



$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3a\cos^2t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2t\cdot\cos t]^2}dt$$

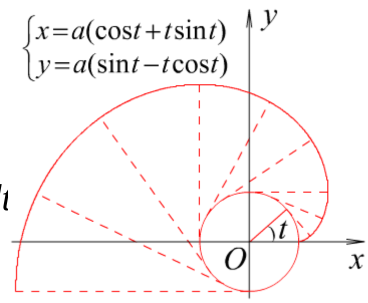
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=6a.$$

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直，使细线与圆周始终相切，细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线，它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

计算这曲线上相应于 t 从 0 变到π的一段弧的长度.

解 由参数方程弧长公式



$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt$$

$$=a\int_0^{\pi}tdt=\frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$上求分摆线第一拱成 1: 3 的点的坐标.

解 设 t 从 0 变化到 t_0 时摆线第一拱上对应的弧长为 $s(t_0)$，则

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{t_0}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}dt$$

$$=2a\int_0^{t_0}\sin\frac{t}{2}dt=4a(1-\cos\frac{t_0}{2}).$$

当 $t_0=2\pi$时，得第一拱弧长 $s(2\pi)=8a$. 为求分摆线第一拱为 1: 3 的点为 $A(x, y)$，令

$$4a(1-\cos\frac{t_0}{2})=2a\,,$$

解得$t_0=\frac{2\pi}{3}$, 因而分点的坐标为:

横坐标$x=a(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})a\,,$

纵坐标$y=a(1-\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{2}a\,,$

故所求分点的坐标为$((\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{3}{2}a)$.

28. 求对数螺线$\rho=e^{a\theta}$相应于自θ=0 到θ=φ的一段弧长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{(e^{a\theta})^2+(ae^{a\theta})^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta}-1)\,.$$

29. 求曲线$\rho\theta$=1 相应于自$\theta=\frac{3}{4}$至$\theta=\frac{4}{3}$的一段弧长.

解 按极坐标公式可得所求的弧长

$$s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{(\frac{1}{\theta})^2+(-\frac{1}{\theta^2})^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}\,.$$

30. 求心形线ρ=a(1+cos θ)的全长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\,.$$

习题 6−3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F(单位: N)与伸长量 s(单位: cm)成正比, 即 $F=ks$ (k 为比例常数). 如果把弹簧由原长拉伸 6cm, 计算所作的功.

解 将弹簧一端固定于 A, 另一端在自由长度时的点 O 为坐标原点, 建立坐标系. 功元素为 $dW=ksds$, 所求功为

$$W=\int_0^6 ksds=\frac{1}{2}ks^2\Big|_0^6=18\text{k}(\text{牛}\cdot\text{厘米}).$$

2. 直径为 20cm、高 80cm 的圆柱体内充满压强为 10N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变, 要使蒸汽体积缩小一半, 问需要作多少功?

解 由玻−马定律知:

$$PV=k=10\cdot(\pi 10^2\cdot 80)=80000\pi\,.$$

设蒸气在圆柱体内变化时底面积不变, 高度减小 x 厘米时压强 为 $P(x)$牛/厘米^2, 则

$$P(x)\cdot[(\pi 10^2)(80-x)]=80000\pi\,,\ P(x)=\frac{800}{80-\pi}\,.$$

功元素为 $dW=(\pi\cdot 10^2)P(x)dx$,

所求功为

$$W=\int_0^{40}(\pi\cdot 10^2)\cdot\frac{800}{80-\pi}dx=80000\pi\int_0^{40}\frac{1}{80-\pi}dx=800\pi\ln 2\ (\text{J}).$$

3. (1)证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=\frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度, R 是地球的半径;

(2)一颗人造地球卫星的质量为 173kg, 在高于地面 630km 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 g=9.8m/s^2, 地球半径 R=6370km.

证明 (1)取地球中心为坐标原点, 把质量为 m 的物体升高的功元素为

$$dW=\frac{kMm}{y^2}dy\,,$$

所求的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{kMm}{y^2}dy=k\cdot\frac{mMh}{R(R+h)}\,.$$

(2) $W=6.67\times10^{-11}\cdot\dfrac{173\times5.98\times10^{24}\times630\times10^{3}}{6370\times10^{3}(6370+630)\times10^{3}}=9.75\times10^{5}$ (kJ).

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动, 媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时, 克服媒质阻力所作的功.

解 因为 $x=ct^3$, 所以

$$v=x'(t)=3cx^2,\ \text{阻力}\ f=-kv^2=-9kc^2t^4.\ \text{而}\ t=(\frac{x}{c})^{\frac{2}{3}},\ \text{所以}$$

$$f(x)=-9kc^2(\frac{x}{c})^{\frac{4}{3}}=-9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}.$$

功元素 $dW=-f(x)dx$, 所求之功为

$$W=\int_0^a[-f(x)]dx=\int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}dx=9kc^{\frac{2}{3}}\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

解 设锤击第二次时铁钉又击入 $h$cm, 因木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 x(cm)成正比, 即 $f=kx$, 功元素 $dW=f\,dx=kxdx$,

击第一次作功为

$$W_1=\int_0^1 kxdx=\frac{1}{2}k,$$

击第二次作功为

$$W_2=\int_1^{1+h} kxdx=\frac{1}{2}k(h^2+2h).$$

因为 $W_1=W_2$, 所以有

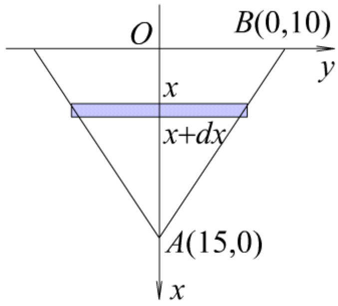
$$\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}k(h^2+2h),$$

解得 $h=\sqrt{2}-1$ (cm).

6. 设一锥形贮水池, 深 15m, 口径 20m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功?

解 在水深 x 处, 水平截面半径为 $r=10-\frac{2}{3}x$, 功元素为

$$dW=x\cdot\pi r^2 dx=\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2 dx,$$



所求功为

$$W=\int_0^{15}\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2 dx$$

$$=\pi\int_0^{15}(100x-40x^2+\frac{4}{9}x^3)dx$$

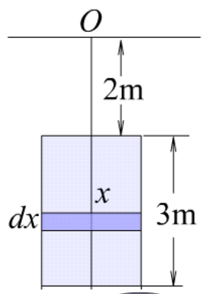
=1875(吨米)=57785.7(kJ).

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图, 水面超过门顶 2m. 求闸门上所受的水压力.

解 建立 x 轴, 方向向下, 原点在水面.

水压力元素为

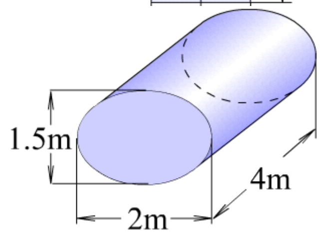
$$dP=1\cdot x\cdot 2dx=2xdx,$$



闸门上所受的水压力为

$$P=2\int_2^5 xdx=x^2\Big|_2^5=21\text{(吨)}=205.8\text{(kN)}.$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.



解 建立坐标系如图, 则椭圆的方程为

$$\frac{(x-\frac{3}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1.$$

压力元素为

$$dP=1\cdot x\cdot 2y(x)dx=x\cdot\frac{8}{3}\sqrt{(\frac{3}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^{\frac{3}{2}}x\cdot\frac{8}{3}\sqrt{(\frac{3}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}dx=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}(1+\sin t)\cdot\frac{3}{4}\cos t\cdot\frac{3}{4}\cos tdx$$

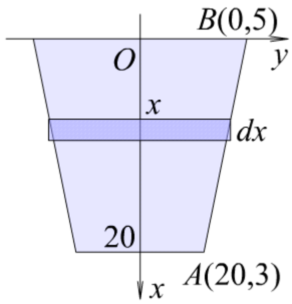
$$=\frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dx=\frac{9}{16}\pi\text{ (吨)=17.3(kN).}$$

(提示: 积分中所作的变换为 $x-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\sin t$)

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10m 和 6m, 高为 20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解 建立坐标系如图. 直线 AB 的方程为

$$y=5-\frac{1}{10}x,$$



压力元素为

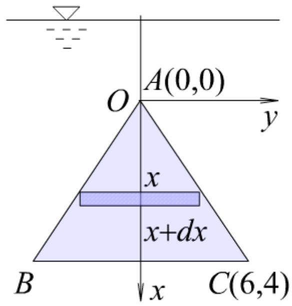
$$dP=1\cdot x\cdot 2y(x)dx=x\cdot(10-\frac{1}{5}x)dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^{20}x\cdot(10-\frac{1}{5}x)dx=1467\text{ (吨)=14388(千牛).}$$

10. 一底为 8cm、高为 6cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3cm, 试求它每面所受的压力.

解 建立坐标系如图.



腰 AC 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$, 压力元素为

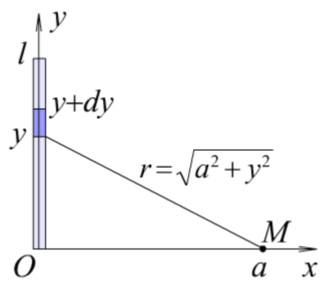
$$dP=(x+3)\cdot 2\cdot\frac{2}{3}x\cdot dx=\frac{4}{3}x(x+3)dx,$$

所求压力为

$$P=\int_0^6\frac{4}{3}x(x+3)dx=\frac{4}{3}(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)\Big|_0^6=168\text{ (克)=1.65(牛).}$$

11. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 建立坐标系如图. 在细直棒上取一小段 dy, 引力元素为



$$dF = G\cdot\frac{m\mu dy}{a^2+y^2} = \frac{Gm\mu}{a^2+y^2}dy,$$

dF 在 x 轴方向和 y 轴方向上的分力分别为

$$dF_x = -\frac{a}{r}dF,\quad dF_y = \frac{y}{r}dF.$$

$$F_x = \int_0^l \left(-\frac{a}{r}\cdot\frac{Gm\mu}{a^2+y^2}\right)dy = -aGm\mu\int_0^l \frac{1}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2}}dy = -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

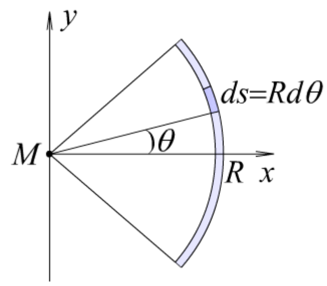
$$F_y = \int_0^l \frac{y}{r}\cdot\frac{Gm\mu}{a^2+y^2}dy = Gm\mu\int_0^l \frac{1}{(a^2+y^2)\sqrt{a^2+y^2}}dy = Gm\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 F. 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 根据对称性，$F_y=0$.

$$dF_x = \frac{G\cdot m\cdot \mu ds}{R^2}\cdot\cos\theta$$

$$= \frac{Gm\mu(Rd\theta)}{R^2}\cdot\cos\theta = \frac{Gm\mu}{R}\cos\theta d\theta,$$



$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{Gm\mu}{R}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{2Gm\mu}{R}\int_0^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向自 M 点起指向圆弧中点.

总 习 题 六

1. 一金属棒长 3m, 离棒左端 xm 处的线密度为 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (kg/m). 问 x 为何值时, [0, x]一段的质量为全棒质量的一半?

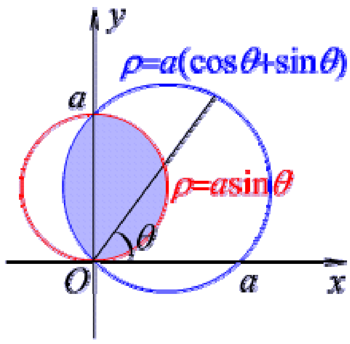
解 x 应满足 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt$.

因为 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=[2\sqrt{t+1}]_0^x=2\sqrt{x+1}-2$, $\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}[2\sqrt{t+1}]_0^3=1$,

所以 $\quad 2\sqrt{x+1}-2=1$,

$$x=\frac{5}{4}\text{(m)}.$$

2. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$, $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$所围图形公共部分的面积.



解 $S=\frac{1}{2}\cdot\pi(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} a^2(\cos\theta+\sin\theta)^2 d\theta$

$$=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)d\theta=\frac{\pi-1}{4}a^2 .$$

3. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0, 0), 且当 $x\in[0, 1]$时, $y\geq 0$. 试确定 a、b、c 的值, 使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0, 0), 所以 $c=0$, 从而

$$y=ax^2+bx .$$

抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}.$$

令 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，得 $b=\frac{8-6a}{9}$.

该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$$

$$=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(\frac{8-6a}{9})^2+\frac{a}{2}(\frac{8-6a}{9})].$$

令 $\frac{dV}{d}=\pi[\frac{2a}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{6a-8}{81}+\frac{1}{18}(8-12a)]=0$，得 $a=-\frac{5}{3}$，于是 $b=2$.

4. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$, x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

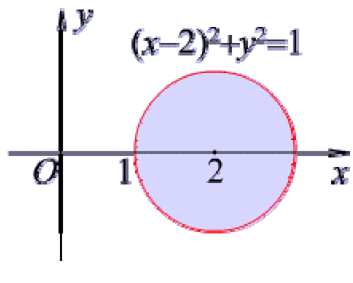
解 所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^4 x\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4=\frac{512}{7}\pi.$$

5. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 $V=2\cdot 2\pi\int_1^3 x\cdot\sqrt{1-(x-2)^2}dx$

$$\underline{\underline{令x-2=\sin t}}\ 4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)\cos^2 t dt=4\pi^2.$$



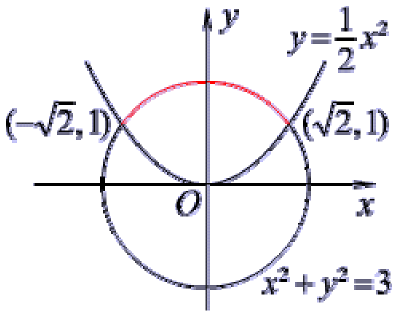
6. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所需截下的有限部分的弧长.

解 由 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ 解得抛物线与圆的两个交点为 $(-\sqrt{2},1)$，$(\sqrt{2},1)$，于是所求的

弧长为

$$s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}dx=2[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^{\sqrt{2}}$$

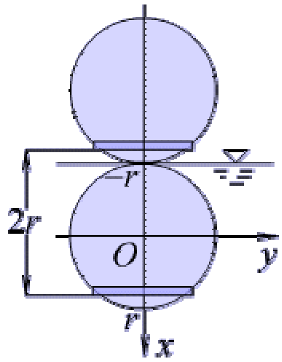
$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$



7. 半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

解 建立坐标系如图. 将球从水中取出时，球的各点上升的高度均为 $2r$. 在 x 处取一厚度为 dx 的薄片，在将球从水中取出的过程中，薄片在水下上升的高度为 $r+x$，在水上上升的高度为 $r-x$. 在水下对薄片所做的功为零，在水上对薄片所做的功为

$$dW=g\pi(r-x)(r^2-x^2)dx,$$

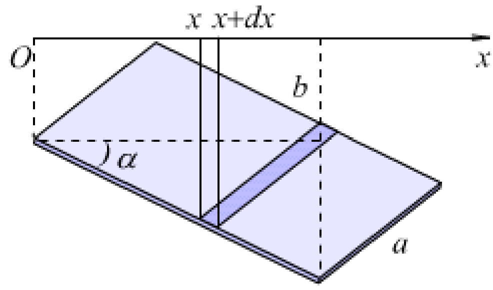


对球所做的功为

$$W=g\pi\int_{-r}^{r}(r-x)(r^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi r^2 g.$$

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 α 角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深 h 处，设 $a>b$，液体的比重为 ρ，试求薄板每面所受的压力.

解 在水面上建立 x 轴，使长边与 x 轴在同一垂面上，长边的上端点与原点对应. 长边在 x 轴上的投影区间为 $[0, b\cos\alpha]$，在 x 处 x 轴到薄板的距离为 $h+x\tan\alpha$. 压力元素为



$$dP=\rho g\cdot(h+x\tan\alpha)\cdot a\cdot\frac{dx}{\cos\alpha}=\frac{\rho g a}{\cos\alpha}(h+x\tan\alpha)dx,$$

薄板各面所受到的压力为

$$P=\frac{\rho ga}{\cos\alpha}\int_0^{b\cos\alpha}(h+x\tan\alpha)dx=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha).$$

9. 设星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取弧微分 ds 为质点，则其质量为

$$(\sqrt{x^2+y^2})^3 ds=\sqrt{(x^2+y^2)^3}ds,$$

其中 $ds=\sqrt{[(a\cos^3 t)']^2+[(a\sin^3 t)']^2}dt=3a\sin t\cos t dt$.

设所求的引力在 x 轴、y 轴上的投影分别为 F_x、F_y，则有

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G\cdot\frac{1\cdot\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=3Ga^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t dt=\frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G\cdot\frac{1\cdot\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=3Ga^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^4 t dt=\frac{3}{5}Ga^2,$$

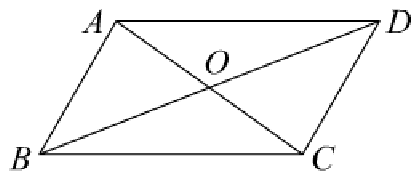
所以 $\boldsymbol{F}=(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2)$.

习题 7-1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明这是平行四边形.



证明 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$,

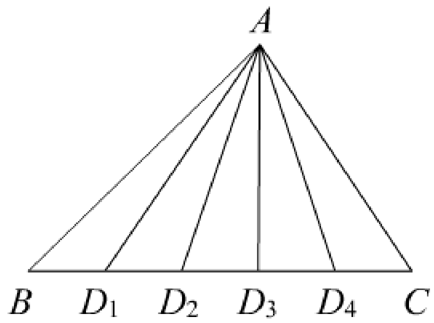
而 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$,

所以 $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}$.

这说明四边形 $ABCD$ 的对边 $AB=CD$ 且 $AB//CD$,

从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

3. 把ΔABC 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4, 再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$ 、 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$ 、 $\overrightarrow{D_2A}$ 、 $\overrightarrow{D_3A}$ 、 $\overrightarrow{D_4A}$.



解 $\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_1}=-\boldsymbol{c}-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_2}=-\boldsymbol{c}-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_3}=-\boldsymbol{c}-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_4}=-\boldsymbol{c}-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}$.

4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,0)-(0,1,2)=(1,-2,-2)$, $-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6, 7, -6)$的单位向量.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6, 7, -6)$的单位向量为 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$ 或 $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=(-\frac{6}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11})$.

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$A(1, -2, 3)$; $B(2, 3, -4)$; $C(2, -3, -4)$; $D(-2, -3, 1)$.

解 A 在第四卦限, B 在第五卦限, C 在第八卦限, D 在第三卦限.

7. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置:

$A(3, 4, 0)$; $B(0, 4, 3)$; $C(3, 0, 0)$; $D(0, -1, 0)$.

解 在 xOy 面上, 的点的坐标为$(x, y, 0)$; 在 yOz 面上, 的点的坐标为$(0, y, z)$; 在 zOx 面上, 的点的坐标为$(x, 0, z)$.

在 x 轴上, 的点的坐标为$(x, 0, 0)$; 在 y 轴上, 的点的坐标为$(0, y, 0)$, 在 z 轴上, 的点的坐标为$(0, 0, z)$.

A 在 xOy 面上, B 在 yOz 面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. 求点(a, b, c)关于(1)各坐标面; (2)各坐标轴; (3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点(a, b, c)关于 xOy 面的对称点为$(a, b, -c)$; 点(a, b, c)关于 yOz 面的对称点为$(-a, b, c)$; 点(a, b, c)关于 zOx 面的对称点为$(a, -b, c)$.

(2)点(a, b, c)关于 x 轴的对称点为$(a, -b, -c)$; 点(a, b, c)关于 y 轴的对称点为$(-a, b, -c)$; 点(a, b, c)关于 z 轴的对称点为$(-a, -b, c)$.

(3)点(a, b, c)关于坐标原点的对称点为$(-a, -b, -c)$.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 在 xOy 面、yOz 面和 zOx 面上, 垂足的坐标分别为$(x_0, y_0, 0)$、$(0, y_0, z_0)$和$(x_0, 0, z_0)$.

在 x 轴、y 轴和 z 轴上, 垂足的坐标分别为$(x_0, 0, 0)$, $(0, y_0, 0)$和$(0, 0, z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解 在所作的平行于 z 轴的直线上, 点的坐标为(x_0, y_0, z); 在所作的平行于 xOy 面的平面上, 点的坐标为(x, y, z_0).

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

解 因为底面的对角线的长为$\sqrt{2}a$, 所以立方体各顶点的坐标分别为

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0),\ (\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0),\ (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0),\ (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0),$$

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a),\ (\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a),\ (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a),\ (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a).$$

12. 求点 $M(4, -3, 5)$到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离就是点$(4, -3, 5)$与点$(4, 0, 0)$之间的距离, 即

$$d_x=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}.$$

点 M 到 y 轴的距离就是点$(4, -3, 5)$与点$(0, -3, 0)$之间的距离, 即

$$d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}.$$

点 M 到 z 轴的距离就是点$(4, -3, 5)$与点$(0, 0, 5)$之间的距离, 即

$$d_z=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$和 $C(0, 5, 1)$等距离的点.

解 设所求的点为 $P(0, y, z)$与 A、B、C 等距离, 则

$$|\overrightarrow{PA}|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2,$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

$$|\overrightarrow{PC}|^2=(y-5)^2+(z-1)^2.$$

由题意, 有

$$|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2,$$

即
$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases}$$

解之得 $y=1$, $z=-2$, 故所求点为$(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰三角直角三角形.

解 因为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2},$$

所以 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

因此ΔABC 是等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1)=(-1, \sqrt{2}, 1)$;

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{3\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

16. 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\alpha=0$; (2)$\cos\beta=1$; (3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$, 问这些向量与

坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1)当 $\cos\alpha=0$ 时, 向量垂直于 x 轴, 或者说是平行于 yOz 面.

(2)当 $\cos\beta=1$ 时, 向量的方向与 y 轴的正向一致, 垂直于 zOx 面.

(3)当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时, 向量垂直于 x 轴和 y 轴, 平行于 z 轴, 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 60°, 求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, −4, 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设点 A 的坐标为(x, y, z). 由已知得

$$\begin{cases}2-x=4\\-1-y=-4\\7-z=7\end{cases},$$

解得 $x=-2, y=3, z=0$. 点 A 的坐标为 $A(-2, 3, 0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,
所以 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量 $7\boldsymbol{j}$.

习题 7−2

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, 求(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$; (3)$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}\,.$$

(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6\times3=-18$,

$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$.

(3) $\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量, 且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$,

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$,

于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})=-\dfrac{1}{2}(1+1+1)=-\dfrac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1, -1, 2)$、$M_2(3, 3, 1)$和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1, 3+1, 1-2)=(2, 4, -1)$, $\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3, 1-3, 3-1)=(0, -2, 2)$.

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\,,$$

$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{36+16+16}=2\sqrt{17}$,

$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{17}}(6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$ 为所求向量.

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$沿直线称动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功(长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

解 $\boldsymbol{F}=(0, 0, -100\times9.8)=(0, 0, -980)$, $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3, 4-1, 2-8)=(-2, 3, -6)$.

$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=(0, 0, -980)\cdot(-2, 3, -6)=5880$(焦耳).

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着. 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

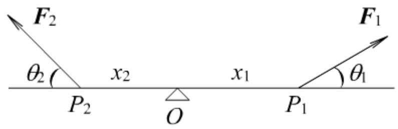
解 因为有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 再注意到对力矩正负的

规定可得, 使杠杆保持平衡的条件为

$$x_1|\boldsymbol{F}_1|\cdot\sin\theta_1-x_2|\boldsymbol{F}_2|\cdot\sin\theta_2=0,$$

即

$$x_1|\boldsymbol{F}_1|\cdot\sin\theta_1=x_2|\boldsymbol{F}_2|\cdot\sin\theta_2.$$



6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4, -3, 4)$在向量 $\boldsymbol{b}=(2, 2, 1)$上的投影.

解

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}(4,-3,4)\cdot(2,2,1)=\frac{1}{3}(4\times2-3\times2+4\times1)=2\,.$$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3, 5, -2)$, $\boldsymbol{b}=(2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(3\lambda+2\mu,\ 5\lambda+\mu,\ -2\lambda+4\mu)$,

$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂 $\Leftrightarrow\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{k}$

$$\Leftrightarrow(3\lambda+2\mu,\ 5\lambda+\mu,\ -2\lambda+4\mu)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0,$$

即$-2\lambda+4\mu=0$, 所以 $\lambda=2\mu$. 当 $\lambda=2\mu$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 设 AB 是圆 O 的直径, C 点在圆周上, 则 $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$, $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|$.

因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$,

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$, $\angle C=90°$.

9. 设已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 计算: (1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (3)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-3)\times(-1)+1\times3=8$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2\times1+(-3)\times(-2)=8$,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{c}-8\boldsymbol{b}=8(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=8[(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})]=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}\,.$$

(2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\,.$$

(3) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\,,$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-8\times1+(-5)\times(-2)+1\times0=2.$$

10. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, 求 ΔOAB 的面积.

解 根据向量积的几何意义, $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ 表示以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的面积, 于是 ΔOAB 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|\,.$$

因为$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-3)^3+(-3)^2+1^2}=\sqrt{19}$,

所以三角形ΔOAB的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{19}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geq|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3为任意实数, 并指出等号成立的条件.

解 设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, 则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

于是 $$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geq|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中当$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1$时, 即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行是等号成立.

习题 7–3

1. 一动点与两定点(2, 3, 1)和(4, 5, 6)等距离, 求这动点的轨迹方程.

解 设动点为 $M(x, y, z)$, 依题意有

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2,$$

即
$$4x+4y+10z-63=0.$$

2. 建立以点(1, 3, −2)为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 球的半径 $R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$,

球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即
$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0.$$

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解 由已知方程得

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+2z+1)=1+4+1,$$

即
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以(1, −2, −1)为球心, 以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点(2, 3, 4)的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样曲面?

解 设点(x, y, z)满足题意, 依题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得

$$(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=\frac{116}{9},$$

它表示以 $(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3})$ 为球心, 以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

5. 将 zOx 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将方程中的 z 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 得旋转曲面的方程 $y^2+z^2=5x$.

6. 将 zOx 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将方程中的 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 得旋转曲面的方程 $x^2+y^2+z^2=9$.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 双曲线绕 x 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

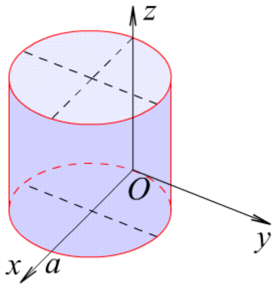
$$4x^2-9y^2-9z^2=36.$$

双曲线绕 y 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

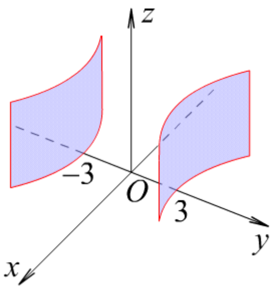
$$4x^2+4z^2-9y^2=36.$$

8. 画出下列方程所表示的曲面:

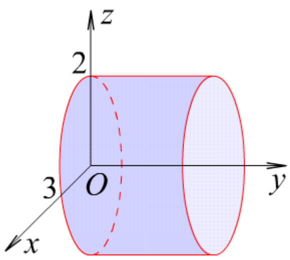
(1) $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$;



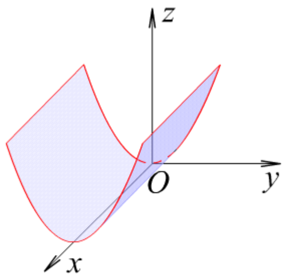
(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;



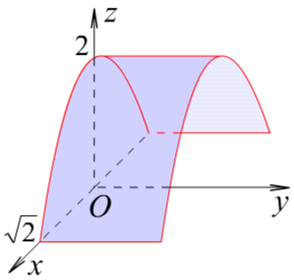
(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;



(4)$y^2-z=0$;



(5)$z=2-x^2$.



9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1)$x=2$;

解在平面解析几何中, $x=2$ 表示平行于 y 轴的一条直线; 在空间解析几何中, $x=2$ 表示一张平行于 yOz 面的平面.

(2)$y=x+1$;

解 在平面解析几何中, $y=x+1$ 表示一条斜率是 1, 在 y 轴上的截距也是 1 的直线; 在空间解析几何中，$y=x+1$ 表示一张平行于 z 轴的平面.

(3)$x^2+y^2=4$;

解 在平面解析几何中, $x^2+y^2=4$ 表示中心在原点, 半径是 4 的圆; 在空间解析几何中, $x^2+y^2=4$ 表示母线平行于 z 轴, 准线为 $x^2+y^2=4$ 的圆柱面.

(4)$x^2-y^2=1$.

解 在平面解析几何中, $x^2-y^2=1$ 表示双曲线; 在空间解析几何中, $x^2-y^2=1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;

解 这是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的, 或是 zOx 面上的椭圆

$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$绕 x 轴旋转一周而形成的.

(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

解 这是 xOy 面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$绕 y 轴旋转一周而形成的, 或是 yOz 面上的双曲线 $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$绕 y 轴旋转一周而形成的.

(3)$x^2-y^2-z^2=1$;

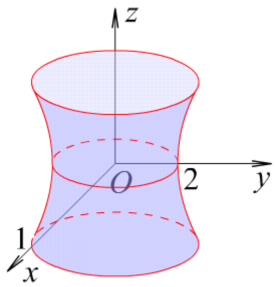
解 这是 xOy 面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的, 或是 zOx 面上的双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的.

(4)$(z-a)^2=x^2+y^2$.

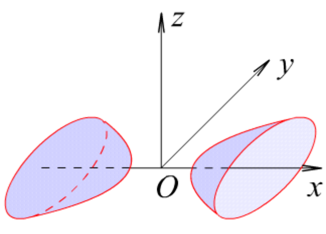
解 这是 zOx 面上的曲线$(z-a)^2=x^2$ 绕 z 轴旋转一周而形成的, 或是 yOz 面上的曲线$(z-a)^2=y^2$ 绕 z 轴旋转一周而形成的.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

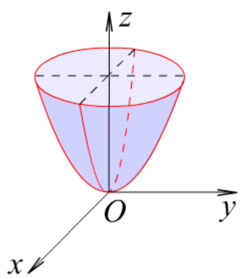
(1)$4x^2+y^2-z^2=4$;



(2)$x^2-y^2-4z^2=4$;

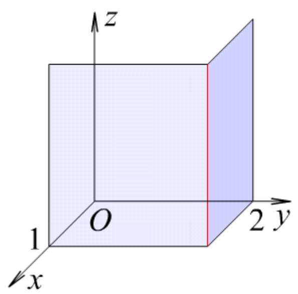


(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.


z
O
y
x

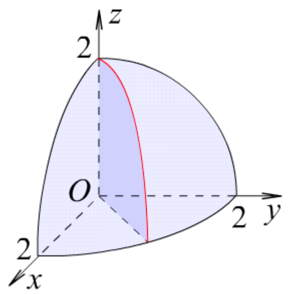
习题 7–4

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

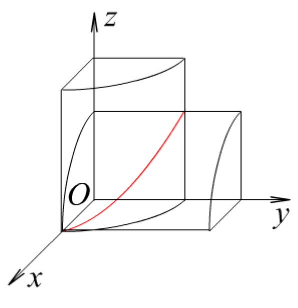


(1) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x-y=0 \end{cases}$;



(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases}$.



2. 指出下方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$;

解 在平面解析几何中, $\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ 表示直线 y=5x+1 与 y=2x−3 的交点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{3})$; 在空间解析几何中, $\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ 表示平面 y=5x+1 与 y=2x−3 的交线, 它表示过点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{3}, 0)$, 并且行于 z 轴.

(2) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$.

解 在平面解析几何中, $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$ 表示椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 与其切线 y=3 的交点(0, 3); 在空间解析几何中, $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$ 表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 与其切平面 y=3 的交线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 把方程组中的 x 消去得方程 $3y^2-z^2=16$, 这就是母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

把方程组中的 y 消去得方程 $3x^2+2z^2=16$, 这就是母线平行于 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 由 $x+z=1$ 得 $z=1-x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得方程 $2x^2-2x+y^2=8$, 这是母线平行于 z 轴, 准线为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线的柱面方程, 于是所求的投影方程为

$$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}.$$

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$;

解 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得 $2x^2+z^2=9$, 即 $\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$.

令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$, 则 $z=3\sin t$.

故所求参数方程为

$$x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\quad y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, z=3\sin t.$$

(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ z=0\end{cases}$.

解 将 $z=0$ 代入$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 得$(x-1)^2+y^2=3$.

令 $x=1+\sqrt{3}\cos t$, 则 $y=\sqrt{3}\sin t$,

于是所求参数方程为

$$x=1+\sqrt{3}\cos t,\quad y=\sqrt{3}\sin t, z=0.$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由前两个方程得 $x^2+y^2=a^2$, 于是螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}.$$

由第三个方程得 $\theta=\frac{z}{b}$ 代入第一个方程得

$$\frac{x}{a}=\cos\frac{z}{b},\text{ 即 } z=b\arccos\frac{x}{a},$$

于是螺旋线在 zOx 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases}z=b\arccos\frac{x}{a}\\ y=0\end{cases}.$$

由第三个方程得 $\theta=\frac{z}{b}$ 代入第二个方程得

$$\frac{y}{a}=\sin\frac{z}{b},\text{ 即 } z=b\arcsin\frac{y}{a},$$

于是螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases}x=0\\ z=b\arcsin\frac{y}{a}\end{cases}.$$

7. 求上半球$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$与圆柱体$x^2+y^2\le ax(a>0)$的公共部分在$xOy$面和$zOx$面上的投影.

解 圆柱体$x^2+y^2\le ax$在xOy面上的投影为$x^2+y^2\le ax$, 它含在半球$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$在$xOy$面上的投影$x^2+y^2\le a^2$内, 所以半球与圆柱体的公共部分在$xOy$面上的投影为$x^2+y^2\le ax$.

为求半球与圆柱体的公共部分在zOx面上的投影, 由圆柱面方程$x^2+y^2=ax$得$y^2=ax-x^2$, 代入半球面方程$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 得$z=\sqrt{a^2-ax}$ $(0\le x\le a)$, 于是半球与圆柱体的公共部分在zOx面上的投影为

$$0\le z\le\sqrt{a^2-ax}\ (0\le x\le a),\ \text{即}\ z^2+ax\le a^2,\ 0\le x\le a,\ z\ge 0.$$

8. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$在三坐标面上的投影.

解 令$z=4$得$x^2+y^2=4$, 于是旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$在xOy面上的投影为$x^2+y^2\le 4$.

令$x=0$得$z=y^2$, 于是旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$在yOz面上的投影为$y^2\le z\le 4$.

令$y=0$得$z=x^2$, 于是旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 4)$在zOx面上的投影为$x^2\le z\le 4$.

习题 7−5

1. 求过点(3, 0, −1)且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(3, -7, 5)$, 所求平面的方程为

$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$, 即 $3x-7y+5z-4=0$.

2. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(2, 9, -6)$, 所求平面的方程为

$2(x-2)+9(y-9)-6(z-6)=0$, 即 $2x+9y-6z-121=0$.

3. 求过(1, 1, −1)、(−2, −2, 2)、(1, −1, 2)三点的平面方程.

解 $\boldsymbol{n}_1=(1, -1, 2)-(1, 1, -1)=(0, -2, 3)$, $\boldsymbol{n}_1=(1, -1, 2)-(-2, -2, 2)=(3, 1, 0)$, 所求平面的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}\,,$$

所求平面的方程为

$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$, 即 $x-3y-2z=0$.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

(1)$x=0$;

解 $x=0$ 是 yOz 平面.

(2)$3y-1=0$;

解 $3y-1=0$ 是垂直于 y 轴的平面, 它通过 y 轴上的点 $(0, \frac{1}{3}, 0)$.

(3)$2x-3y-6=0$;

解 $2x-3y-6=0$ 是平行于 z 轴的平面, 它在 x 轴、y 轴上的截距分别是 3 和−2.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$;

解 $x-\sqrt{3}y=0$ 是通过 z 轴的平面, 它在 xOy 面上的投影的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(5)$y+z=1$;

解 $y+z=1$ 是平行于 x 轴的平面, 它在 y 轴、z 轴上的截距均为 1.

(6)$x-2z=0$;

解 $x-2z=0$ 是通过 y 轴的平面.

(7)$6x+5-z=0$.

解 $6x+5-z=0$ 是通过原点的平面.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 此平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(2, -2, 1)$.

此平面与 yOz 面的夹角的余弦为

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{i}|}=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^1}}=\frac{2}{3};$$

此平面与 zOx 面的夹角的余弦为

$$\cos\beta=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{j}|}=\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^1}}=-\frac{2}{3};$$

此平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{k}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^1}}=\frac{1}{3}.$$

6. 一平面过点$(1, 0, -1)$且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2, 1, 1)$和 $\boldsymbol{b}=(1, -1, 0)$, 试求这平面方程.

解 所求平面的法线向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

所求平面的方程为

$(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0$, 即 $x+y-3z-4=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1$, $2x-y-z=0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.

解 解线性方程组

$$\begin{cases}x+3y+z=1\\ 2x-y-z=0\\ -x+2y+2z=3\end{cases}$$

得 $x=1$, $y=-1$, $z=3$. 三个平面的交点的坐标为$(1, -1, 3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1)平行于 zOx 面且经过点$(2, -5, 3)$;

解 所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{j}=(0, 1, 0)$, 于是所求的平面为

$0\cdot(x-2)-5(y+5)+0\cdot(z-3)=0$, 即 $y=-5$.

(2)通过 z 轴和点$(-3, 1, -2)$;

解 所求平面可设为 $Ax+By=0$.

因为点$(-3, 1, -2)$在此平面上, 所以

$-3A+B=0$,

将 $B=3A$ 代入所设方程得

$Ax+3Ay=0$,

所以所求的平面的方程为

$x+3y=0$,

(3)平行于 x 轴且经过两点$(4, 0, -2)$和$(5, 1, 7)$.

解 所求平面的法线向量可设为 $\boldsymbol{n}=(0, b, c)$. 因为点$(4, 0, -2)$和$(5, 1, 7)$都在所求平面上,

所以向量 $\boldsymbol{n}_1=(5, 1, 7)-(4, 0, -2)=(1, 1, 9)$与 $\boldsymbol{n}$ 是垂直的，即

$$b+9c=0, b=-9c\ ,$$

于是 $\boldsymbol{n}=(0, -9c, c)=-c(0, 9, -1)$.

所求平面的方程为

$$9(y-0)-(z+2)=0,\ 即\ 9y-z-2=0.$$

9. 求点(1, 2, 1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解 点(1, 2, 1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离为

$$d=\frac{|1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\ .$$

习题 7–6

1. 求过点(4, −1, 3)且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

解 所求直线的方向向量为$\boldsymbol{s}=(2, 1, 5)$, 所求的直线方程为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点$M_1(3, -2, 1)$和$M_2(-1, 0, 2)$的直线方程.

解 所求直线的方向向量为$\boldsymbol{s}=(-1, 0, 2)-(3, -2, 1)=(-4, 2, 1)$, 所求的直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{x-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$.

解 平面$x-y+z=1$和$2x+y+z=4$的法线向量为$\boldsymbol{n}_1=(1, -1, 1)$, $\boldsymbol{n}_2=(2, 1, 1)$, 所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

在方程组$\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$中, 令$y=0$, 得$\begin{cases}x+z=1\\2x+z=4\end{cases}$, 解得$x=3$, $z=-2$. 于是点(3, 0, −2)为所求直线上的点.

所求直线的对称式方程为

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3};$$

参数方程为

$$x=3-2t,\ y=t,\ z=-2+3t.$$

4. 求过点(2, 0, −3)且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

解 所求平面的法线向量$\boldsymbol{n}$可取为直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$的方向向量, 即

$$\boldsymbol{n}=(1,-2,4)\times(3,5,-2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 4\\3 & 5 & -2\end{vmatrix}=-16\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}.$$

所平面的方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,\ 即\ 16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.

解 直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z=0\end{cases}$与$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的方向向量分别为

$$s_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\ ,\quad s_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}\ .$$

两直线之间的夹角的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{s}_1,\hat{\ }\boldsymbol{s}_2)=\frac{\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}=\frac{3\times10+4\times(-5)+(-1)\times10}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0\ .$$

6. 证明直线$\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$与直线$\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$平行.

解 直线$\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$与$\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}\ ,\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}\ .$$

因为 $\boldsymbol{s}_2=-3\boldsymbol{s}_1$, 所以这两个直线是平行的.

7. 求过点(0, 2, 4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 因为两平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1, 0, 2)$与 $\boldsymbol{n}_2=(0, 1, -3)$不平行, 所以两平面相交于一直线, 此直线的方向向量可作为所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$, 即

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\ .$$

所求直线的方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}\ .$$

8. 求过点(3, 1, −2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解 所求平面的法线向量与直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(5, 2, 1)$垂直. 因为点(3, 1, −2)和(4, −3, 0)都在所求的平面上, 所以所求平面的法线向量与向量 $\boldsymbol{s}_2=(4, -3, 0)-(3, 1, -2)=(1, -4, 2)$也是垂直的. 因此所求平面的法线向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-22\boldsymbol{k}\ .$$

所求平面的方程为

$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$, 即 $8x-9y-22z-59=0$.

9. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$的方向向量为

$$s=(1,1,3)\times(1,-1,-1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}),$$

平面 $x-y-z+1=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1, -1, -1)$.

因为

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)=0,$$

所以 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, 从而直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角为 0.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$;

解 所给直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-2, -7, 3)$, 所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(4, -2, -2)$.

因为 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$, 所以 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, 从而所给直线与所给平面平行. 又因为直线上的点$(-3, -4, 0)$不满足平面方程 $4x-2y-2z=3$, 所以所给直线不在所给平面上.

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$;

解 所给直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3, -2, 7)$, 所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(3, -2, 7)$.

因为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$, 所以所给直线与所给平面是垂直的.

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

解 所给直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3, 1, -4)$, 所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$.

因为$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3\times1+1\times1+(-4)\times1=0$, 所以$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, 从而所给直线与所给平面平行. 又因为直线上的点$(2, -2, 3)$满足平面方程 $x+y+z=3$, 所以所给直线在所给平面上.

11. 求过点$(1, 2, 1)$而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

直线$\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$的方向向量为

$$s_1=(2,-1,1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

所求平面的法线向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

所求平面的方程为

$$-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0, \text{ 即 } x-y+z=0.$$

12. 求点$(-1, 2, 0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1, 2, -1)$. 过点$(-1, 2, 0)$并且垂直于已知平面的直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}.$$

将此方程化为参数方程 $x=-1+t, y=2+2t, z=-t$, 代入平面方程 $x+2y-z+1=0$ 中, 得

$$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

解得 $t=-\frac{2}{3}$. 再将 $t=-\frac{2}{3}$ 代入直线的参数方程, 得 $x=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. 于是点$(-1, 2, 0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为点 $(-\frac{5}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.

解 直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

过点 P 且与已知直线垂直的平面的方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0, \text{ 即 } y+z-1=0.$$

解线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0, \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

得 $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{3}{2}$.

点 $P(3, -1, 2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离就是点 $P(3, -1, 2)$与点 $(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 间的距离,

即 $$d=\sqrt{(3-1)^2+(-1+\frac{1}{2})^2+(2-\frac{3}{2})}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

解 设点 M_0 到直线 L 的距离为 d, L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{MN}$, 根据向量积的几何意义, 以 $\overrightarrow{M_0M}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$|\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|,$$

又以 $\overrightarrow{M_0M}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $d\cdot|\overrightarrow{MN}|=d\cdot|\boldsymbol{s}|$. 因此

$$d\cdot|\boldsymbol{s}|=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|,\quad d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

为在平面束中找出与已知平面垂直的平面, 令 $(4\ -1,\ 1)\cdot(2+3\lambda,\ -4-\lambda,\ 1-2\lambda)=0$, 即

$$4\cdot(2+3\lambda)+(-1)\cdot(-4-\lambda)+1\cdot(1-2\lambda)=0.$$

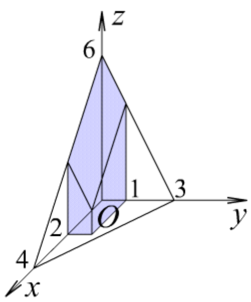
解之得 $\lambda=-\frac{13}{11}$. 将 $\lambda=-\frac{13}{11}$ 代入平面束方程中, 得

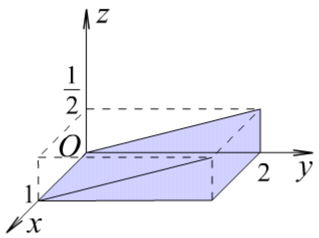
$$17x+31y-37z-117=0.$$

故投影直线的方程为 $\begin{cases}4x-y+z=1\\17x+31y-37z-117=0\end{cases}$.

16. 画出下列各曲面所围成的立体图形:

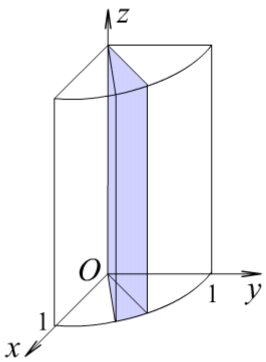
(1) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=1,\ 3x+4y+2z-12=0$;



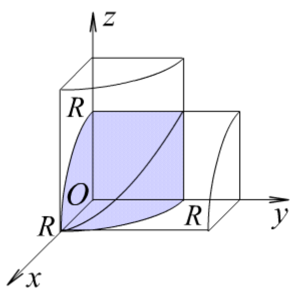


(2)x=0, z=0, x=1, y=2, $z=\dfrac{y}{4}$;

(3)z=0, z=3, x−y=0, $x-\sqrt{3}y=0$, x^2+y^2=1(在第一卦限内);



(4)x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2(在第一卦限内).



总习题七

1. 填空

(1)设在坐标系$[O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$中点$A$和点$M$的坐标依次为$(x_0, y_0, z_0)$和$(x, y, z)$, 则在$[A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$坐标系中, 点$M$的坐标为____________, 向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为____________.

解 $M(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$.

提示: 自由向量与起点无关, 它在某一向量上的投影不会因起点的位置的不同而改变.

(2)设数λ_1、λ_2、λ_3不全为0, 使$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个向量是___________的.

解 共面.

(3)设$\boldsymbol{a}=(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}=(4, -1, 10)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$, 且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则$\lambda=$____________.

解 3.

提示: 因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

又因为由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=2\times4+1\times(-1)+2\times10-\lambda(2^2+1^2+2^2)=27-9\lambda$, 所以$\lambda=3$.

(4)设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$都是单位向量, 且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$____________.

解 $-\frac{3}{2}$.

提示: 因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$,

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$,

于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(1+1+1)=-\frac{3}{2}$.

(5)设$|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{c}|=5$, 且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$____________.

解 36.

提示: $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=3\cdot3\cdot4=36$.

2. 在y轴上求与点$A(1, -3, 7)$和点$B(5, 7, -5)$等距离的点.

解 设所求点为$M(0, y, 0)$, 则有

$1^2+(y+3)^2+7^2=5^2+(y-7)^2+(-5)^2$,

即 $(y+3)^2=(y-7)^2$,

解得$y=2$, 所求的点为$M(0, 2, 0)$.

3. 已知ΔABC的顶点为$A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$和$C(-1,1,2)$, 求从顶点C所引中线的长度.

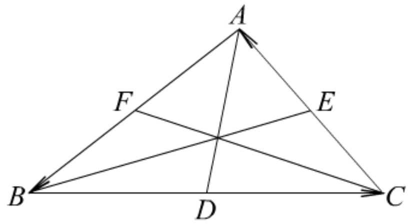
解 线段AB的中点的坐标为$(\frac{3+5}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-1+7}{2})=(4, -1, 3)$. 所求中线的长度为

$$d=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}.$$

4. 设ΔABC的三边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 三边中点依次为$D$、$E$、$F$, 试用向量$\boldsymbol{a}$、

$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$，并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$



解 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

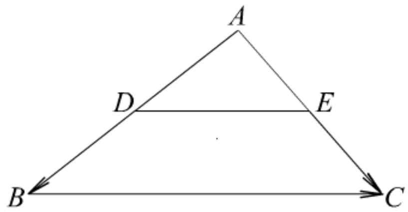
$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\frac{3}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

证明 设 D, E 分别为 AB, AC 的中点，则有

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

从而 $DE//BC$，且 $|DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

6. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, $\boldsymbol{a}=(3, -5, 8)$, $\boldsymbol{b}=(-1, 1, z)$，求 z.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2, -4, 8+z)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4, -6, 8-z)$. 因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

解得 $z=1$.

7. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=3+1+2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=7$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=3+1-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=1$.

设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{3-1}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

8. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 求 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

解 因为 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,

所以 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,

即 $7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0$, $7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0$,

又以上两式可得

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}},$$

于是 $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$, $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}=(2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}=(1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 最小？并求出此最小值.

解 $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$.

因为当 $0<(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 为单调减函数. 求 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 的最小值也就是求 $f(z)=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$ 的最大值.

令 $f'(z)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}}=0$, 得 $z=-4$.

当 $z=-4$ 时, $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

10. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{6}$, 求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $a-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $a-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积为

$$|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=5|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=5\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=30.$$

11. 设 $\boldsymbol{a}=(2, -3, 1)$, $\boldsymbol{b}=(1, -2, 3)$, $\boldsymbol{c}=(2, 1, 2)$, 向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$, $\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{r}=14$, 求 $\boldsymbol{r}$.

解 设 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$.

因为 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 即

$2x-3y+z=0$, $x-2y+3z=0$.

又因为 $\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{r}=14$, 所以 $\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=14$, 即

$2x+y+2z=42$.

解线性方程组

$$\begin{cases}2x-3y+z=0\\x-2y+3z=0\\2x+y+2z=42\end{cases},$$

得 x=14, y=10, z=2, 所以 $\boldsymbol{r}$=(14, 10, 2).

另解 因为 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\2 & -3 & 1\\1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 平行, 故可设 $\boldsymbol{r}=\lambda(7, 5, 1)$.

又因为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$, 所以 $\boldsymbol{r}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=14$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}=42$, 即

$$\lambda(7\times2+5\times1+1\times2)=42,\ \lambda=2,$$

所以 $\boldsymbol{r}$=(14, 10, 2).

12. 设 $\boldsymbol{a}$=(−1, 3, 2), $\boldsymbol{b}$=(2, −3, −4), $\boldsymbol{c}$=(−3, 12, 6), 证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面, 并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证明 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\-1 & 3 & 2\\2 & -3 & -4\end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-6)\times(-3)+0\times12+(-3)\times6=0,$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则有

$$(-\lambda+2\mu,\ 3\lambda-3\mu,\ 2\lambda-4\mu)=(-3, 12, 6),$$

即有方程组

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3\\3\lambda-3\mu=12\\2\lambda-4\mu=6\end{cases},$$

解之得λ=5, μ=1, 所以 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

13. 已知动点 $M(x,y,z)$到 xOy 平面的距离与点 M 到点(1, −1, 2)的距离相等, 求点 M 的轨迹方程.

解 根据题意, 有

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

或 $$z^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2,$$

化简得

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4(z-1),$$

这就是点 M 的轨迹方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1)$z=2(x^2+y^2)$;

解 旋转曲面的一条母线为 zOx 面上的曲线 $z=2x^2$, 旋转轴为 z 轴.

(2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$;

解 旋转曲面的一条母线为 xOy 面上的曲线 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$，旋转轴为 y 轴.

(3)$z^2=3(x^2+y^2)$;

解 旋转曲面的一条母线为 yOz 面上的曲线 $z=\sqrt{3}y$，旋转轴为 z 轴.

(4) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$.

解 旋转曲面的一条母线为 xOy 面上的曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，旋转轴为 x 轴.

15. 求通过点 $A(3, 0, 0)$和 $B(0, 0, 1)$且与 xOy 面成$\frac{\pi}{3}$角的平面的方程.

解 设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(a, b, c)$.

$\overrightarrow{BA}=(3,0,-1)$, xOy 面的法线向量为 $\boldsymbol{k}=(0, 0, 1)$.

按要求有 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{k}|}=\cos\frac{\pi}{3}$,

即
$$\begin{cases}3a-c=0\\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{2}\end{cases},$$

解之得 $c=3a$，$b=\pm\sqrt{26}a$. 于是所求的平面的方程为

$$(x-3)\pm\sqrt{26}y+3z=0,$$

即
$$x+\sqrt{26}y+3z=3,\ 或\ x-\sqrt{26}y+3z=3.$$

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点(1，−1，1)到直线$\begin{cases}y-z+1=0\\ x=0\end{cases}$的垂线，求此平面方程.

解 直线$\begin{cases}y-z+1=0\\ x=0\end{cases}$的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(0, 1, -1)\times(1, 0, 0)=(0, -1, -1)$.

设点(1，−1，1)到直线$\begin{cases}y-z+1=0\\ x=0\end{cases}$的垂线交于点$(x_0, y_0, z_0)$. 因为点$(x_0, y_0, z_0)$在直线

$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 上，所以$(x_0, y_0, z_0)=(0, y_0, y_0+1)$．于是，垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=(-1, y_0+1, y_0).$$

显然有 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_1=0$，即

$$-y_0-1-y_0=0,\quad y_0=-\frac{1}{2}.$$

从而 $\boldsymbol{s}_1=(-1, y_0+1, y_0)=(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$．

所求平面的法线向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{k}\times(-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},$$

所求平面的方程为

$$-\frac{1}{2}(x-1)-(y+1)=0\text{，即 } x+2y+1=0$$

17．求过点$(-1, 0, 4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解 过点$(-1, 0, 4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ 的平面的方程为

$$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0\text{，即 } 3x-4y+z-1=0.$$

将直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 化为参数方程 $x=-1+t$，$y=3+t$，$z=2t$，代入平面方程 $3x-4y+z-1=0$，得

$$3(-1+t)-4(3+t)+2t-1=0,$$

解得 $t=16$．于是平面 $3x-4y+z-1=0$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 的交点的坐标为$(15, 19, 32)$，这也是所求直线与已知直线的交点的坐标.

所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(15, 19, 32)-(-1, 0, 4)=(16, 19, 28),$$

所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

18．已知点 $A(1, 0, 0)$及点 $B(0, 2, 1)$，试在 z 轴上求一点 C，使ΔABC 的面积最小.

解 设所求的点为 $C(0, 0, z)$，则 $\overrightarrow{AC}=(-1, 0, z)$，$\overrightarrow{BC}=(0, -2, z-1)$．

因为 $$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & z \\ 0 & -2 & z-1 \end{vmatrix}=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以ΔABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}.$$

令 $\frac{dS}{dz}=\frac{1}{4}\cdot\frac{8z+2(z-1)}{\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}}=0$，得 $z=\frac{1}{5}$，所求点为 $C(0, 0, \frac{1}{5})$.

19. 求曲线 $\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\ z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=2-x^2-y^2\\ z=0\end{cases}，即 \begin{cases}x^2+y^2=x+y\\ z=0\end{cases}.$$

在 zOx 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2\\ y=0\end{cases}，即 \begin{cases}2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0\\ y=0\end{cases}.$$

在 yOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}z=(\pm\sqrt{2-y^2-z}-1)^2+(y-1)^2\\ x=0\end{cases}，即 \begin{cases}2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0\\ x=0\end{cases}.$$

20. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 锥面与柱面交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}2x=x^2+y^2\\ z=0\end{cases}，即 \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases},$$

所以，立体在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$.

锥面与柱面交线在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases}z=\sqrt{(\frac{1}{2}z^2)^2+y^2}\\ x=0\end{cases}，即 \begin{cases}(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2=1\\ x=0\end{cases},$$

所以，立体在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases}(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2\le 1\\ x=0\end{cases}$.

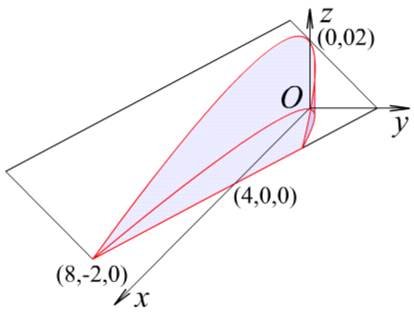
锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 与平面 $y=0$ 的交线为

$$\begin{cases}z=|x|\\ y=0\end{cases} 和 \begin{cases}z=\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases},$$

所以，立体在 zOx 面上的投影为

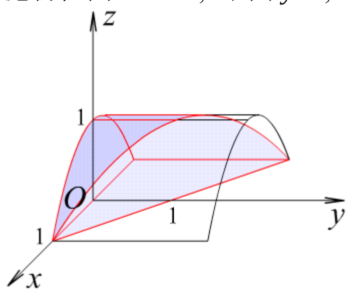
$$\begin{cases} x \le z \le \sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}.$$

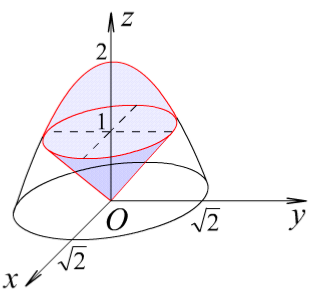
21. 画出下列各曲面所围立体的图形:



(1)抛物柱面 $2y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2)抛物柱面 $x^2=1-z$, 平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$;





(3)圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(4)旋转抛物面 $x^2+y^2=z$, 柱面 $y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $x=1$.

习题 8−1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1)$\{(x, y)|x\neq 0, y\neq 0\}$;

解 开集, 无界集, 导集为 $\mathbf{R}^2$, 边界为$\{(x, y)|x=0$ 或 $y=0\}$.

(2)$\{(x, y)|1<x^2+y^2\leq 4\}$;

解 既非开集, 又非闭集, 有界集, 导集为$\{(x, y)|1\leq x^2+y^2\leq 4\}$,
边界为$\{(x, y)|x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=4\}$.

(3)$\{(x, y)|y>x^2\}$;

解 开集, 区域, 无界集, 导集为$\{(x, y)| y\geq x^2\}$, 边界为$\{(x, y)| y=x^2\}$.

(4)$\{(x, y)|x^2+(y-1)^2\geq 1\}\cap\{(x, y)|x^2+(y-2)^2\leq 4\}$.

解 闭集, 有界集, 导集与集合本身相同,
边界为$\{(x, y)|x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x, y)|x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)\cdot(ty)\cdot(\tan\frac{tx}{ty})$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2 f(x,y).$$

3. 试证函数 $F(x, y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式:

$F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v)$.

证明 $F(xy, uv)=\ln((x, y)\cdot\ln(uv)$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v)$.

4. 已知函数 $f(u, v, w)=u^w+w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

解 $f(x+y, x-y, xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域:

(1)$z=\ln(y^2-2x+1)$;

解 要使函数有意义，必须 $y^2-2x+1>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|y^2-2x+1>0\}$.

(2) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

解 要使函数有意义，必须 $x+y>0, x-y>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|x+y>0, x-y>0\}$.

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

解 要使函数有意义，必须 $y\geq 0, x-\sqrt{y}\geq 0$ 即 $x\geq\sqrt{y}$，于是有 $x\geq 0$ 且 $x^2\geq y$,

故函数定义域为 $D=\{(x, y)| x\geq 0, y\geq 0, x^2\geq y\}$.

(4) $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

解 要使函数有意义，必须 $y-x>0, x\geq 0, 1-x^2-y^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)| y-x>0, x\geq 0, x^2+y^2<1\}$.

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$;

解 要使函数有意义，必须 $R^2-x^2-y^2-z^2\geq 0$ 且 $x^2+y^2+z^2-r^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y, z)| r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$.

(6) $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 要使函数有意义，必须 $x^2+y^2\neq 0$，且 $|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leq 1$ 即 $z^2\leq x^2+y^2$,

故函数定义域为 $D=\{(x, y, z)|z^2\leq x^2+y^2, x^2+y^2\neq 0\}$.

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$;

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})}=-\dfrac{1}{4}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{xy+1}+1)=2$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{e^{x^2y^2}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{1}=0$.

7. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$;

证明 如果动点 $p(x, y)$沿 $y=0$ 趋向(0, 0),

则 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1;$$

如果动点 $p(x, y)$沿 $x=0$ 趋向(0, 0),

则 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1.$$

因此, 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$不存在.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证明 如果动点 $p(x, y)$沿 $y=x$ 趋于(0, 0),

则 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1;$$

如果动点 $p(x, y)$沿 $y=2x$ 趋向(0, 0),

则 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=0.$$

因此, 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$不存在.

8. 函数 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处间断?

解 因为当 $y^2-2x=0$ 时, 函数无意义,

所以在 $y^2-2x=0$ 处, 函数 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$间断.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明 因为$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

所以 $$0\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0.$$

因此 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

证明 因为$|xy|\le\frac{x^2+y^2}{2}$, 故$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$.

对于任意给定的$\varepsilon>0$, 取$\delta=2\varepsilon$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时恒有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

10. 设$F(x, y)=f(x)$, $f(x)$在x_0处连续, 证明: 对任意$y_0\in\mathbf{R}$, $F(x, y)$在(x_0, y_0)处连续.

证明 由题设知, $f(x)$在x_0处连续, 故对于任意给定的$\varepsilon>0$, 取$\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

作(x_0, y_0)的邻域$U((x_0, y_0), \delta)$, 显然当$(x, y)\in U((x_0, y_0), \delta)$时, $|x-x_0|<\delta$, 从而

$$|F(x, y)-F(x_0, y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

所以$F(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续.

又因为y_0是任意的, 所以对任意$y_0\in\mathbf{R}$, $F(x, y)$在(x_0, y_0)处连续.

习题 8–2

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y-y^3x$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$.

(2) $s=\frac{u^2+v^2}{uv}$;

解 $\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}(\frac{u}{v}+\frac{v}{u})=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$, $\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}(\frac{u}{v}+\frac{v}{u})=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$.

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\ln x+\ln y})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x+\ln y}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$.

同理$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$

根据对称性可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)].$$

(5) $z=\ln\tan\frac{x}{y}$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}.$$

(6) $z=(1+xy)^y$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)}=e^{y\ln(1+xy)}[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}]$$

$$=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x.$$

(8) $u=\arctan(x-y)^z$;

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 试证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

解 因为 $\frac{\partial T}{\partial l}=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{g\cdot l}}$, $\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\sqrt{l}(-\frac{1}{2})\cdot g^{-\frac{3}{2}}=-\pi\cdot\frac{\sqrt{1}}{g\sqrt{g}}$, 所以

$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

3. 设 $z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$, 求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{y^2}$, 所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}+e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2z$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x,1)$.

解 因为 $f(x,1)=x+(1-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1}}=x$，所以 $f_x(x,1)=\dfrac{d}{dx}f(x,1)=1$.

5. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ 在点(2, 4, 5)处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少？

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1=\tan\alpha$，

故 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4y^3-8x^2y)=-16xy.$$

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{x^2+y^2})=-\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $z=y^x$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1).$$

7. 设 $f(x, y, z)=xy^2+yz^2+zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1)$, $f_{xz}(1, 0, 2)$, $f_{yz}(0, -1, 0)$及 $f_{zzx}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x=y^2+2xz$, $f_{xx}=2z$, $f_{xz}=2x$,

$f_y=2xy+z^2$, $f_{yz}=2z$,

$f_z=2yz+x^2$, $f_{zz}=2y$, $f_{zzx}=0$,

所以 $f_{xx}(0, 0, 1)=2$, $f_{xz}(1, 0, 2)=2$,

$f_{yz}(0, -1, 0)=0$, $f_{zzx}(2, 0, 1)=0$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

证明 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=e^{-kn^2t}\cdot\sin nx\cdot(-kn^2)=-kn^2e^{-kn^2t}\cdot\sin nx$,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx,$$

$$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证明 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$， $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$，

由对称性知

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

因此 $$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

$$=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

习题 8–3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$.

(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{y}xdy$.

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以 $$dz=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy).$$

(4) $u=x^{yz}$.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以 $$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$, $y=2$ 时的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以 $$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}dx+\cdot\frac{2}{3}dy\,.$$

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 因为 $\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x}$, $dz=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y$,

所以, 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119\,,$$

$$dz=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125\,.$$

4. 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 因为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y$

所以, 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时,

$$dz=e\cdot 0.15+e\cdot 0.1=0.25e$$

*5. 计算 $\sqrt{(102)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$, 由于

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}\approx\sqrt{x^3+y^3}+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}\,,$$

所以取 $x=1, y=2, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.03$ 可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot 0.02+3\cdot 2^2\cdot(-0.03)}{}2\sqrt{1+2^3}=2.95\,.$$

*6. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值(ln2=0.693).

解 设 $z=x^y$, 由于

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}\approx x^y+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y\,,$$

所以取 $x=2, y=1, \Delta x=-0.03, \Delta y=0.05$ 可得

$$(1.97)^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\cdot 0.05+1.97+0.0693\approx 2.093.$$

*7. 已知边长为 x=6m 与 y=8m 的矩形, 如果 x 边增加 5cn 而 y 边减少 10cm,

问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z\approx dz=\frac{dz}{dx}\Delta x+\frac{dz}{dy}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y),$$

当 $x=6, y=8, \Delta x=0.05, \Delta y=-0.1$ 时,

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0.05-8\cdot 0.1)=-0.05.$$

这个矩形的对角线大约减少 5cm.

*8. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高为 20cm, 内半径为 4 厘米, 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2h$,

$$\Delta V\approx dV=2\pi Rh\Delta R+\pi R^2\Delta h,$$

当 $R=4, h=20, \Delta R=\Delta h=0.1$ 时,

$$\Delta V\approx 2\times 3.14\times 4\times 20\times 0.1+3.14\times 4^2\times 0.1\approx 55.3(\text{cm}^3)$$

这个容器外壳的体积大约是 55.3cm^3.

*9. 设有直角三角形, 测得其两腰的长分别为 7±0.1cm 和 24±0.1cm, 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边的长度分别为 x 和 y, 则斜边的长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z|\approx|dz|\leq|\frac{\partial z}{\partial x}|\cdot|\Delta x|+|\frac{\partial z}{\partial y}|\cdot|\Delta y|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x|+y|\Delta y|).$$

令 $x=7, y=24, |\Delta x|\leq 0.1, |\Delta y|\leq 0.1$, 则得斜边长度 z 的绝对误差约为

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\cdot 0.1+24\cdot 0.1)=0.124\text{ cm}.$$

*10. 测得一块三角形土地的两边长分别为 63±0.1m 和 78±0.1m,这两边的夹角为 60°±1°, 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长为 x 和 y, 它们的夹角 z, 为则三角形面积为 $s=\frac{1}{2}xy\sin z$.

$$dS=\frac{1}{2}y\sin zdx+\frac{1}{2}x\sin zdy+\frac{1}{2}xy\cos zdz$$

$$|\Delta S|\approx|dS|\leq\frac{1}{2}y\sin z|dx|+\frac{1}{2}x\sin z|dy|+\frac{1}{2}xy\cos z|dz|.$$

令 x=63, y=78, $z=\frac{\pi}{3}$, $|dx|$=0.1, $|dy|$=0.1, $dz=\frac{\pi}{180}$，则

$$\delta s\approx\frac{78}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times0.1+\frac{63}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times0.1+\frac{63\times78}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}=27.55,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot63\cdot78\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2127.82,$$

$\frac{\delta s}{S}=\frac{27.55}{2127.82}$=1.29%，所以三角形面积的近似值为2127.82m^2，绝对误差为27.55 m^2，相对误差为1.29%.

*11. 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证明 设 u=x+y，则

$$|\Delta u|\approx|du|=|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y|=|\Delta x+\Delta y|\leq|\Delta x|+|\Delta y|.$$

所以两数之和的绝对误差$|\Delta u|$等于它们各自的绝对误差$|\Delta x|$与$|\Delta y|$的和.

*12. 利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证明 设 u=xy，$v=\frac{x}{y}$，则 $\Delta u\approx du=ydx+xdy$,

$$\Delta v\approx dv=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

由此可得相对误差;

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\approx\left|\frac{du}{u}\right|=\left|\frac{ydx+xdy}{xy}\right|=\left|\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right|\leq\left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|;$$

$$\left|\frac{\Delta v}{v}\right|=\left|\frac{dv}{v}\right|=\left|\frac{ydx-xdy}{y^2\cdot\frac{x}{y}}\right|=\left|\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right|\leq\left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

习题 8−4

1. 设 $z=u^2-v^2$, 而 $u=x+y$, $v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 1+2v\cdot 1=2(u+v)=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot(-1)=2(u-v)=4y.$$

2. 设 $z=u^2\ln v$, 而 $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=2u\ln v\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}(-2)=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t$, $y=t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cos t+e^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2$$

$$=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$, 而 $x+3t$, $y=4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$$

$$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

解 $$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$$

6. 设$u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x$, $z=\cos x$, 求$\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

$$=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)=e^{ax}\sin x.$$

7. 设$z=\arctan\frac{x}{y}$, 而 $x=u+v$, $y=u-v$, 验证$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

证明 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u})+(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v})$

$$=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{x}{y^2})\cdot(-1)$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u=f(x^2-y^2, e^{xy})$;

解 将两个中间变量按顺序编为 1, 2 号,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial(e^{xy})}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial(x^2-y^{2)}}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial(e^{xy})}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'.$$

(2) $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$;

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y})+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{z})=\frac{1}{y}f_1'$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y})+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{z})=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_1'\frac{\partial}{\partial z}(\frac{x}{z})+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\frac{y}{z})=-\frac{y}{z^2}\cdot f_2'.$$

(3) $u=f(x, xy, xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3'$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'$.

9. 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\frac{y}{x}$, $F(u)$为可导函数, 证明 $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

证明 $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}]+y\cdot[x+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}]$

$=x[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)]+y\cdot[x+F'(u)]$

$=xy+xF(u)+xy=z+xy$.

10. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中 $f(u)$为可导函数, 验证 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

证明 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot f'\cdot 2x}{f^2(u)}=\frac{-2xyf'}{f^2(u)}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-y\cdot f'\cdot(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{-2y^2f'}{f^2(u)}$,

所以 $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'}{f^2u}+\frac{2yf'}{f^2u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{f(u)}\ \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{y}{z}}=\frac{z}{y^2}$.

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$, 则 $z=f(u)$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f''$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4yf''.$$

12. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy, y)$;

解 令 $u=xy$, $v=y$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0=y\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1=x\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为$f(u, v)$是 u 和 v 的函数, 所以$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$也是 u 和 v 的函数, 从而$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$是以 u 和 v 为中间变量的 x 和 y 的函数.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial f}{\partial u})=y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u})$$

$$=y(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})=y(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 0)=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial f}{\partial u})=1\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 1)=\frac{\partial f}{\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})=x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=x(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=x(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 1)+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 1$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

(2) $z=f(x,\frac{x}{y})$;

解 令 $u=x$, $v=\frac{x}{y}$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为$f(u, v)$是u和v的函数, 所以$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$也是$u$和$v$的函数, 从而$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$是以$u$和$v$为中间变量的$x$和$y$的函数.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u})+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{1}{y}(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{2}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u})+\frac{d}{dy}(\frac{1}{y})\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{y^2})\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

(3) $z=f(xy^2, x^2y)$;

解 $z_x=f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot 2xy=y^2f_1'+2xyf_2'$,

$z_y=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot x^2=2xyf_1'+x^2f_2'$;

$z_{xx}=y^2[f_{11}''\cdot y^2+f_{12}''\cdot 2xy]+2yf_2''+2xy[f_{21}''\cdot y^2+f_{22}''\cdot 2xy]$

$=y^4f_{11}''+2xy^3f_{12}''+2yf_2''+2xy^3f_{21}''+4x^2y^2 f_{22}''$

$=y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+2yf_2''+4x^2y^2 f_{22}''$,

$z_{xy}=2y f_1'+y^2[f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''\cdot x^2]+2xf_2'+2xy[f_{21}''\cdot 2xy+f_{22}''\cdot x^2]$

$=2y f_1'+2xy^3f_{11}''+x^2y^2 f_{12}''+2xf_2'+4x^2y^2f_{21}''+2x^3yf_{22}''$

$=2y f_1'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2 f_{12}''+2xf_2'+2x^3yf_{22}''$,

$z_{yy}=2xf_1'+2xy[f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''\cdot x^2]+x^2[f_{21}''\cdot 2xy+f_{22}''\cdot x^2]$

$=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+2x^3y f_{12}''+2x^3yf_{21}''+x^4f_{22}''$

$=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4x^3y f_{12}''+x^4f_{22}''$.

(4) $z=f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$.

解 $z_x=f_1'\cdot\cos x+ f_3'\cdot e^{x+y}=\cos x\, f_1'+e^{x+y} f_3'$,

$z_y=f_2'\cdot(-\sin y)+ f_3'\cdot e^{x+y}=-\sin y\, f_2'+e^{x+y} f_3'$,

$z_{xx}=-\sin x\, f_1'+\cos x\cdot(f_{11}''\cdot\cos x+ f_{13}''\cdot e^{x+y})+e^{x+y} f_3'+e^{x+y}(f_{31}''\cdot\cos x+ f_{33}''\cdot e^{x+y})$

$=-\sin x\, f_1'+\cos^2 x\, f_{11}''+e^{x+y}\cos x\, f_{13}''+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}\cos x\, f_{31}''+e^{2(x+y)} f_{33}''$

$=-\sin x\, f_1'+\cos^2 x\, f_{11}''+2e^{x+y}\cos x\, f_{13}''+e^{x+y}f_3'+e^{2(x+y)} f_{33}''$,

$z_{xy}=\cos x[f_{12}''\cdot(-\sin y)+ f_{13}''\cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} [f_{32}''\cdot(-\sin y)+ f_{33}''\cdot e^{x+y}]$

$=-\sin y\cos x\, f_{12}''+e^{x+y}\cos x\, f_{13}'+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y\, f_{32}'+e^{2(x+y)}f_{33}'$

$=-\sin y\cos x\, f_{12}''+e^{x+y}\cos x\, f_{13}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y\, f_{32}''+e^{2(x+y)}f_{33}''$,

$z_{yy}=-\cos y\, f_2'-\sin y[f_{22}''\cdot(-\sin y)+ f_{23}''\cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y}[f_{32}''\cdot(-\sin y)+ f_{33}''\cdot e^{x+y}]$

$=-\cos y\, f_2'+\sin^2 y\, f_{22}''-e^{x+y}\sin y\, f_{23}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y}\sin y\, f_{32}''+ f_{33}''\cdot e^{2(x+y)}$

$=-\cos y\, f_2'+\sin^2 y\, f_{22}''-2e^{x+y}\sin y\, f_{23}''+e^{x+y} f_3'+f_{33}''\cdot e^{2(x+y)}$.

13. 设 $u=f(x, y)$的所有二阶偏导数连续, 而 $x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$,

证明 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial s})^2+(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

证明 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以

$$(\frac{\partial u}{\partial s})^2+(\frac{\partial u}{\partial t})^2=(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2 .$$

又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s})=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t})+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t})$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})+\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以 $$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

习题 8−5

1. 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y)=\sin y+e^x-xy^2$, 则 $F_x=e^x-y^2$, $F_y=\cos y-2xy$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^2-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$, 则

$$F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},\quad F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},\quad F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

解 令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$, 则

$$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot(-\frac{z}{y^2})=\frac{1}{y},\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$

证明 设 $F(x, y, z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$, 则

$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$,

$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2=2F_x$,

$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F_x}{-3F_x}=\frac{1}{3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2F_x}{-3F_x}=\frac{2}{3},$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_z}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

6. 设 $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$都是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

解 因为

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\ \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$

所以 $$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=(-\frac{F_y}{F_x})\cdot(-\frac{F_z}{F_y})\cdot(-\frac{F_x}{F_z})=-1.$$

7. 设$\varphi(u, v)$具有连续偏导数, 证明由方程$\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的函数$z=f(x, y)$满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_u\cdot c}{-\varphi_u\cdot a-\varphi_v\cdot b}=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_v\cdot c}{-\varphi_u\cdot a-\varphi_v\cdot b}=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v},$$

所以 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}+b\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}=c\,.$$

8. 设 $e^z-xyz=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z)=e^z-xyz$, 则

$$F_x=-yz\,,\ F_z=e^z-xy,\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z-xy)-yz(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{y^2z+(ye^z-xy^2-yze^z)\frac{yz}{e^z-xy}}{(e^z-xy)^2}=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}\,.$$

9. 设 $z^3-3xyz=a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z)=z^3-3xyz-a^3$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}\,,\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{yz}{z^2-xy})$$

$$=\frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(z^2-xy)-yz(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{(z+y\frac{xz}{z^2-xy})\cdot(z^2-xy)-yz(2z\frac{xz}{z^2-xy}-x)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}\,.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1)设$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$；

解 视 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx} \\ 2x+4y\dfrac{dy}{dx}+6z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}，即\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=-2x \\ 2y\dfrac{dy}{dx}+3z\dfrac{dz}{dx}=-x \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}，\ \frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}.$$

(2)设$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，求$\dfrac{dx}{dz},\dfrac{dy}{dz}$；

解 视 $x=x(z)$, $y=y(z)$, 方程两边对 z 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0 \\ 2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}+2z=0 \end{cases}，即\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}=-1 \\ 2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}=-2z \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{y-z}{x-y}，\ \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3)设$\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$，其中 f, g 具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

解 视 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, 方程两边对 x 求偏导得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x})+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1)+2g_2'\cdot yv\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}，即\begin{cases} (xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf_1' \\ g_1''\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\cdot\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1' \end{cases}.$$

解之得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}，\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

(4)设$\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$, 求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 视 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, 方程两边微分得

$$\begin{cases}dx=e^u du+\sin v du+u\cos v dv\\ dy=e^u du-\cos v du+u\sin v dv\end{cases}, \text{ 即}\begin{cases}(e^u+\sin v)du+u\cos v dv=dx\\ (e^u-\cos v)du+u\sin v dv=dy\end{cases},$$

从中解出 du, dv 得

$$du=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dx+\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dy,$$

$$dv=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dx+\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dy,$$

从而 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证明:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 由方程组$\begin{cases}y=f(x,t)\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$可确定两个一元隐函数$\begin{cases}y=y(x)\\ t=t(x)\end{cases}$, 方程两边对 x 求导可得

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}\\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}=0\end{cases},$$

移项得

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}\end{cases},$$

在 $D=\begin{vmatrix}1 & \dfrac{-\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 的条件下

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

习题 8−6

1. 求曲线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$, $z'(t)=2\cos\frac{t}{2}$.

因为点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 所对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$, 故在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=(1, 1, \sqrt{2})$.

因此在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处, 切线方程为

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot(x-\frac{\pi}{2}+1)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0, \text{ 即 } x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

2. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$, $y=\frac{1+t}{t}$, $z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$, $y'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $z'(t)=2t$.

在 $t=1$ 所对应的点处, 切向量 $\boldsymbol{T}=(\frac{1}{4}, -1, 2)$, $t=1$ 所对应的点为 $(\frac{1}{2}, 2, 1)$, 所以在 $t=1$ 所对应的点处, 切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}, \text{ 即 } \frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8};$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})-(y-2)+2(z-1)=0, \text{ 即 } 2x-8y+16z-1=0.$$

3. 求曲线 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 在点(x_0, y_0, z_0)处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为 x, 将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 的两边对 x 求导, 得

$$2y\frac{dy}{dx}=2m,\ 2z\frac{dz}{dx}=-1,$$

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{y}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2z}$.

曲线在点$(x_0, y_0, z_0,)$的切向量为$\boldsymbol{T}=(1,\ \frac{m}{y_0},\ -\frac{1}{2z_0})$, 所求的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}},$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$$

4. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在点(1, 1, 1)处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为x, 对x求导得,

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-3=0\\2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0\end{cases},\ 即\begin{cases}2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=-2x+3\\3\frac{dy}{dx}-5\frac{dz}{dx}=2\end{cases}.$$

解此方程组得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},\ \frac{dz}{dx}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

因为$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16}$, $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}$, 所以$\boldsymbol{T}=(1,\frac{9}{16},\frac{1}{16})$.

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}},\ 即\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0,\ 即\ 16x+9y-z-24=0.$$

5. 求出曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$上的点, 使在该点的切线平行于平面$x+2y+z=4$.

解 已知平面的法线向量为$\boldsymbol{n}=(1, 2, 1)$.

因为$x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 所以参数t对应的点处的切向量为$\boldsymbol{T}=(1, 2t, 3t^2)$. 又因为切线与已知平面平行, 所以

$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$, 即 $1+4t+3t^2=0$,

解得 $t=-1$, $t=-\frac{1}{3}$. 于是所求点的坐标为$(-1, 1, -1)$和$(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$.

6. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z)=e^z-z+xy-3$, 则

$\boldsymbol{n}=(F_x, F_y, F_z)|_{(2, 1, 0)}=(y, x, e^z-1)|_{(2, 1, 0)}=(1, 2, 0)$,

点$(2,1, 0)$处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2(y-1)+0\cdot(z-0)=0, \text{ 即 } x+2y-4=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}.$$

7. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2-1$, 则

$$\boldsymbol{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2ax, 2by, 2cz)=(ax, by, cz).$$

在点(x_0, y_0, z_0)处, 法向量为(ax_0, by_0, cz_0), 故切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即 $$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2-1$, 则

$$\boldsymbol{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 4y, 2z)=2(x, 2y, z).$$

已知切平面的法向量为(1, −1, 2). 因为已知平面与所求切平面平行, 所以

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{-1}=\frac{z}{2}, \text{ 即 } x=\frac{1}{2}z, \quad y=-\frac{1}{4}z,$$

代入椭球面方程得

$$(\frac{z}{2})^2+2(-\frac{z}{4})^2+z^2=1,$$

解得 $z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$, 则 $x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$, $y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$.

所以切点坐标为 $(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}})$.

所求切平面方程为

$$(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}})-(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}})+2(z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}})=0,$$

即 $$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

9. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点(−1, −2, 3)处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 $x\mathrm{O}y$ 面的法向为 $\boldsymbol{n}_1=(0, 0, 1)$.

令 $F(x, y, z)=3x^2+y^2+z^2-16$, 则点(−1, −2, 3)处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(F_x, F_y, F_z)|_{(-1, -2, 3)}=(6x, 2y, 2z)|_{(-1, -2, 3)}=(-6, -4, 6).$$

点(−1, −2, 3)处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+4^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证明 设$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则$\boldsymbol{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \frac{1}{2\sqrt{y}},\ \frac{1}{2\sqrt{z}})$.

在曲面上任取一点$M(x_0, y_0, z_0)$，则在点M处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}.$$

化为截距式，得$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$,

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

习题 8−7

1. 求函数$z=x^2+y^2$在点(1, 2)处沿从点(1, 2)到点$(2, 2+\sqrt{3})$的方向的方向导数

解 因为从点(1, 2)到点$(2, 2+\sqrt{3})$的向量为$\boldsymbol{l}=(1, \sqrt{3})$，故

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})=(\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2x|_{(1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=2y|_{(1,2)}=4,$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2. 求函数$z=\ln(x+y)$在抛物线$y^2=4x$上点(1, 2)处，沿这抛物线在该点处偏向x轴正向的切线方向的方向导数.

解 方程$y^2=4x$两边对x求导得$2yy'=4$，解得$y'=\frac{2}{y}$.

在抛物线$y^2=4x$上点(1, 2)处，切线的斜率为$y'(1)=1$，切向量为$\boldsymbol{l}=(1, 1)$，单位切向量为$\boldsymbol{e}_l=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha, \cos\beta)$.

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数$z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$在点$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在这点的内法线方向的方向导数.

解 令$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，则$F_x=\frac{2x}{a^2}$，$F_y=\frac{2y}{b^2}$.

从而点(x, y)处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm(F_x, F_y)=\pm(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}).$$

在$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处的内法向量为

$$\boldsymbol{n}=-(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2})\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}),$$

单位内法向量为

$$\boldsymbol{e}_n=(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})=(\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{2x}{a^2}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{\sqrt{2}}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{2y}{b^2}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{\sqrt{2}}{b},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1, 1, 2)处沿方向角为$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$的方向的方向导数.

解 因为方向向量为$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，又因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,2)}=(y^2-yz)\Big|_{(1,1,2)}=-1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,2)}=(2xy-xz)\Big|_{(1,1,2)}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,2)}=(3z^2-xy)\Big|_{(1,1,2)}=11,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+11\cdot\frac{1}{2}=5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5, 1, 2)到点(9, 4, 14)的方向的方向导数.

解　因为 $\boldsymbol{l}=(9-5, 4-1, 14-2)=(4, 3, 12)$, $\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13})$, 并且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=yz|_{(5,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=xz|_{(5,1,2)}=10,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=xy|_{(5,1,2)}=5,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导.

解　曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)对应的参数为 $t=1$, 在点(1, 1, 1)的切线正向为

$$\boldsymbol{l}=(1, 2t, 3t^2)|_{t=1}=(1, 2, 3),\quad \boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}),$$

又 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2x|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2y|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2z|_{(1,1,1)}=2,$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解　令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$, 则球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的外法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x, F_y, F_z)|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=(x_0, y_0, z_0)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0=x_0+y_0+z_0.$$

8. 设 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$, 求 $\mathbf{grad}\, f(0, 0, 0)$ 及 $\mathbf{grad}\, f(1, 1, 1)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2$, $\frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$.

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}=3,\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}=-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)}=-6,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,1,1)}=6,\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,1,1)}=3,\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,1,1)}=0,$$

所以 $\mathbf{grad}\, f(0, 0, 0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$,

$\mathbf{grad}\, f(1, 1, 1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

9. 设 u, v 都是 x, y, z 的函数, u, v 的各偏导数都存在且连续, 证明

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}\, u+\mathbf{grad}\, v$;

解 $$\mathbf{grad}(u+v)=\frac{\partial(u+v)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(u+v)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(u+v)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z})\boldsymbol{k}$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k})+(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k})$$

$$=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v.$$

(2) $\mathbf{grad}\,(uv)=v\mathbf{grad}\, u+u\mathbf{grad}\, v$;

解 $$\mathbf{grad}(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x})\boldsymbol{i}+(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y})\boldsymbol{j}+(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z})\boldsymbol{k}$$

$$=v(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k})+u(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k})$$

$=v\mathbf{grad}\, u+u\mathbf{grad}\, v$.

(3) $\mathbf{grad}\,(u^2)=2u\mathbf{grad}\, u$.

解 $$\mathbf{grad}(u^2)=\frac{\partial u^2}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u^2}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u^2}{\partial z}\boldsymbol{k}=2u\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+2u\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+2u\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=2u(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k})=2u\mathbf{grad}u.$$

10. 问函数 $u=xy^2z$ 在点 $p(1, -1, 2)$处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.

解 $\mathbf{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{grad}\, u(1,-1,2)=(y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k})\big|_{(1,-1,2)}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

$\mathbf{grad}\, u(1,-1,2)$为方向导数最大的方向，最大方向导数为

$$|\mathbf{grad}\, u(1,-1,2)|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}.$$

习题 8–8

1. 求函数 $f(x, y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=4-2x=0 \\ f_y(x,y)=-4-2y=0 \end{cases}$, 求得驻点为(2,–2), 由于

$A=f_{xx}(2, -2)=-2<0$, $B=f_{xy}(2, -2)=0$, $C=f_{yy}(2, -2)=-2$, $AC-B^2>0$,

所以在点(2, –2)处, 函数取得极大值, 极大值为

$f(2, -2)=8$.

2. 求函数 $f(x, y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=(6-2x)(4y-y^2)=0 \\ f_y(x,y)=(6x-x^2)(4-2y)=0 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$.

因此驻点为(0, 0), (0, 4), (3, 2), (6, 0), (6,4).

函数的二阶偏导数为

$f_{xx}(x, y)=-2(4y-y^2)$, $f_{xy}(x, y)=4(3-x)(2-y)$, $f_{yy}(x, y)=-2(6x-x^2)$.

在点(0, 0)处, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=24$, $f_{yy}=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 所以 $f(0, 0)$不是极值;

在点(0, 4)处, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=-24$, $f_{yy}=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 所以 $f(0, 4)$不是极值;

在点(3, 2)处, $f_{xx}=-8$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-18$, $AC-B^2=8\times18>0$, 又 $A<0$, 所以 $f(3, 2)=36$ 是函数的极大值;

在点(6, 0)处, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=-24$, $f_{yy}=0$, $AC-B^2=-24^2>0$, 所以 $f(6, 0)$不是极值;

在点(6, 4)处, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=24$, $f_{yy}=0$, $AC-B^2=-24^2>0$, 所以 $f(6, 4)$不是极值.

综上所述, 函数只有一个极值, 这个极值是极大值 $f(3, 2)=36$.

3. 求函数 $f(x, y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}$, 得驻点 $(\frac{1}{2},-1)$.

$A=f_{xx}(x, y)=4e^{2x}(x+y^2+2y+1)$, $B=f_{xy}(x, y)=4e^{2x}(y+1)$, $C=f_{yy}(x, y)=2e^{2x}$.

因为在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处, $A=2e>0$, $B=0$, $C=2e$, $AC-B^2=4e^2>0$,

所以函数在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$.

4. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 条件 $x+y=1$ 可表示为 $y=1-x$, 代入 $z=xy$, 于是问题化为 $z=x(1-x)$的无条件极值问题.

$\frac{dz}{dx}=1-2x$, $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$.

令 $\frac{dz}{dx}=0$, 得驻点 $x=\frac{1}{2}$. 因为 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$, 所以 $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值为 $z=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周界的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y, 则周长

$$S=x+y+l(0<x<l,\ 0<y<l).$$

因此, 本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 下的条件极值问题, 作函数

$$F(x, y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

解方程组 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0\\ F_y=1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=l^2\end{cases}$, 得唯一可能的极值点 $x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$.

根据问题性质可知这种最大周界的直角三角形一定存在, 所以斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 周界最大的是等腰直角三角形.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸方可使表面积最小.

解 设水池的长为 x, 宽为 y, 高为 z, 则水池的表面积为

$$S=xy+2xz+2yz(x>0, y>0, z>0).$$

本题是在条件 $xyz=k$ 下, 求 S 的最大值.

作函数 $F(x, y, z)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-k)$.

解方程组 $\begin{cases}F_x=y+2z+\lambda yz=0\\ F_y=x+2z+\lambda xz=0\\ F_z=2x+2y+\lambda xy=0\\ xyz=k\end{cases}$,

得唯一可能的极值点 $(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$.

由问题本身可知 S 一定有最小值, 所以表面积最小的水池的长和宽都应为

$\sqrt[3]{2k}$. 高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

7. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0$, $y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线距离平方之和为最小.

解 设所求点的坐标为(x, y), 则此点到 $x=0$ 的距离为$|y|$,到 $y=0$ 的距离为$|x|$, 到 $x+2y-16=0$ 的距离为 $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}$, 而距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2 .$$

解方程组 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}3x+y-8=0\\ 2x+9y-32=0\end{cases}$.

得唯一的驻点 $(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$, 根据问题的性质可知, 到三直线的距离平方之和最小的点一定存在, 故 $(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$ 即为所求.

8. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边为 x, 则另一边为$(p-x)$, 假设矩形绕 $p-x$ 旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$.

由 $\frac{dV}{dx}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0$, 求得唯一驻点 $x=\frac{2}{3}p$.

由于驻点唯一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

9. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, (x, y, z)是它的各面平行于坐标面的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长宽高分别为 $2x$, $2y$, $2z$, 体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令 $F(x, y, z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$.

解方程组$\begin{cases}F_x=8yz+2\lambda x=0\\F_y=8xz+2\lambda y=0\\F_z=8xy+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}$，即$\begin{cases}4yz+\lambda x=0\\4xz+\lambda y=0\\4xy+\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}$，

得唯一驻点$(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$.

由题意可知这种长方体必有最大体积，所以当长方体的长、宽、高都为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解 设椭圆上点的坐标(x, y, z)，则原点到椭圆上这一点的距离平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$，其中 x, y, z 要同时满足 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$.

令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$.

解方程组$\begin{cases}F_x=2x-2\lambda_1 x+\lambda_2=0\\F_y=2y-2\lambda_1 y+\lambda_2=0\\F_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$，

得驻点 $x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\mp\sqrt{3}$. 它们是可能的两个极值点，由题意这种距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值和最小值在两点处取得，因为在驻点处

$$d^2=x^2+y^2+z^2=2(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2})^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

所以 $d_1=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 为最长距离；$d_2=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 为最短距离.

总习题八

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)$f(x, y)$在(x, y)可微分是 $f(x, y)$在该点连续的______条件, $f(x, y)$在点连续是 $f(x, y)$在该点可微分的______条件.

解 充分; 必要.

(2)$z=f(x, y)$在点(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是 $f(x, y)$在该点可微分的______条件, $z=f(x, y)$在点(x, y)可微分是函数在该点的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的______条件.

解 必要; 充分.

(3)$z=f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在$(x, y)$存在且连续是 $f(x, y)$在该点可微分的______条件.

解 充分.

(4)函数$z=f(x, y)$的两个二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的______条件.

解 充分.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数 $f(x, y)$在点$(0, 0)$的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0)=3$, $f_y(0, 0)=-1$, 则有______.

$(A)dz|_{(0, 0)}=3dx-dy$.

(B)曲面 $z=f(x, y)$在点$(0, 0, f(0, 0))$的一个法向量为$(3, -1, 1)$.

(C)曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0, 0, f(0, 0))$的一个切向量为$(1, 0, 3)$.

(D)曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0, 0, f(0, 0))$的一个切向量为$(3, 0, 1)$.

解 (C).

3. 求函数 $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)$.

解 函数的定义域为$\{(x, y)|\ 0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$

因为$(\frac{1}{2},\ 0)\in D$, 故由初等函数在定义域内的连续性有

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)}\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}\bigg|_{(\frac{1}{2},0)}=\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}.$$

4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

解　因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^2}=0$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$, 求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}0.$$

因此 $f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1)$z=\ln(x+y^2)$;

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x+y^2})=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

(2)$z=x^y$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x).$$

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.001$, $\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\dfrac{(2.01)\times(1.03)}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\dfrac{2}{3}=0.02$.

因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9},$$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}\Delta y=0.03$.

8. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明 $f(x, y)$在点(0, 0)处连续且偏导数存在, 但不可微分.

证明 因为$0\leq\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leq\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$,

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, 即 $f(x, y)$在点(0, 0)处连续.

因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to}\frac{0}{\Delta x}=0$,

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to}\frac{0}{\Delta y}=0$,

所以 $f(x, y)$在点(0, 0)处的偏导数存在.

因为$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$,

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^{3/2}}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

所以 $f(x, y)$在点(0, 0)处不可微分.

9. 设 $u=x^y$, 而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都是可微函数, 求$\frac{du}{dt}$.

解 $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=yx^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t)$.

10. 设 $z=f(u, v, w)$具有连续偏导数, 而 $u=\eta-\xi$, $v=\zeta-\xi$, $w=x-\eta$, 求$\frac{\partial z}{\partial\xi}$, $\frac{\partial z}{\partial\eta}$, $\frac{\partial z}{\partial\zeta}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w}$,

$\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w}$,

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u, x, y)$, $u=xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_x=e^y f'_u+f'_x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^y f'_u+f'_x)=e^y f'_u+e^y\cdot\frac{\partial}{\partial y}(f'_u)+\frac{\partial}{\partial y}(f'_x)$$

$$=e^y f'_u+e^y(f''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{uy})+(f''_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{xy})$$

$$=e^y f'_u+e^y(xe^y f''_{uu}+f''_{uy})+(xe^y f''_{xu}+f''_{xy})$$

$$=e^y f'_u+xe^{2y} f''_{uu}+e^y f''_{uy}+xe^y f''_{xu}+f''_{xy}.$$

12. 设 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

而由 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$ 得

$$\begin{cases} dx=e^u\cos v du-e^u\sin v dv \\ dy=e^u\sin v du+e^u\cos v dv \end{cases},$$

解得 $du=e^{-u}\cos v dx+e^{-u}\sin v dy$, $dv=-e^{-u}\sin v dx+e^{-u}\cos v dy$,

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v$, $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v$.

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ve^{-u}\cos v+u(-e^{-u}\sin v)=e^{-u}(v\cos v-u\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ve^{-u}\sin v+ue^{-u}\cos v=e^{-u}(v\sin v+u\cos v).$$

另解 由 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$ 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{cases},$$

解得 $du = e^{-u}\cos v dx + e^{-u}\sin v dy$, $dv = -e^{-u}\sin v dx + e^{-u}\cos v dy$.

又由 $z=uv$ 得

$$dz = v du + u dv du$$

$$= v(e^{-u}\cos v dx + e^{-u}\sin v dy) + u(-e^{-u}\sin v dx + e^{-u}\cos v dy)$$

$$= e^{-u}(v\cos v - u\sin v)dx + e^{-u}(v\sin v + u\cos v)dy,$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u}(v\cos v - u\sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u}(v\sin v + u\cos v)$.

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=b\theta$在点$(a, 0, 0)$处的切线及法平面方程.

解 点$(a, 0, 0)$对应的参数为$\theta=0$, 所以点$(a, 0, 0)$处的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta}\right)\Bigg|_{\theta=0} = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\big|_{\theta=0} = (0, a, b),$$

所求的切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

法平面方程为

$a(y-0)+b(z-0)=0$, 即 $ay+bz=0$.

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出这法线的方程.

解 已知平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}_0=(1, 3, 1)$.

设所求的点为(x_0, y_0, z_0), 则曲面在该点的法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0, x_0, -1)$. 由题意知

$\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_0$, 即 $\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}$,

于是 $x_0=-3$, $y_0=-1$, $z_0=x_0y_0=3$,

即所求点为$(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta, \sin\theta)$, 求函数 $f(x, y)=x^2-xy-y^2$ 在点$(1, 1)$沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角θ, 使这导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解　由题意知 l 方向的单位向量为$(\cos\alpha, \cos\beta)=(\cos\theta, \sin\theta)$, 即方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\theta$, $\cos\beta=\sin\theta$.

因为

$$f_x(1, 1)=(2x-y)|_{(1, 1)}=1,$$

$$f_y(1, 1)=(-x+2y)|_{(1, 1)}=1,$$

所以在点(1, 1)沿方向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=f_x(1,\ 1)\cos\alpha+f_y(1,\ 1)\cos\beta=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}).$$

因此

(1)当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时, 方向导数最大, 其最大值为$\sqrt{2}$;

(2)当$\varphi=\frac{5\pi}{4}$时, 方向导数最小, 其最小值为$-\sqrt{2}$;

(3)当$\varphi=\frac{3\pi}{4}$及$\frac{7\pi}{4}$时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解　椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处有外法向量为$\boldsymbol{n}=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2})$, 其单位向量为

$$\boldsymbol{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}).$$

因为

$$u_x(x_0, y_0, z_0)=2x_0,\ u_y(x_0, y_0, z_0)=2y_0,\ u_z(x_0, y_0, z_0)=2z_0,$$

所以, 所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=u_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+u_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+u_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2})=\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设 $M(x, y, z)$为平面和柱面的交线上的一点, 则 M 到 xOy 平面的距离为 $d(x, y, z)=|z|$. 问题在于求函数 $f(x, y, z)=|z|^2=z^2$ 在约束条件$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和 $x^2+y^2=1$ 下的最不值.

作辅助函数:

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令 $$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z+\frac{\lambda}{5}=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1\\ x^2+y^2=1\end{cases},$$

解方程组得

$$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5},\ z=\frac{35}{12}.$$

因为可能的极值点只有$(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$这一个, 所以这个点就是所求之点.

18. 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

解 令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, 则

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\ F_y=\frac{2y}{b^2},\ F_z=\frac{2z}{c^2}.$$

椭球面上点 $M(x, y, z)$处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,\ 即\ \frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$X_0=\frac{a^2}{x},\ Y_0=\frac{b^2}{y},\ Z_0=\frac{c^2}{z}.$$

切平面与三个坐标面所围的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}.$$

现将问题化为求函数$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最小值的问题，或求函数$f(x,y,z)=xyz$在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最大值的问题.

作辅助函数$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$.

令
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases},$$

解方程组得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是，所求切点为$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{y}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，此时最小体积为$V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

习题 9−1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D, 薄板上分布有密度为 $\mu=\mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上全部电荷 Q.

解 板上的全部电荷应等于电荷的面密度 $\mu(x, y)$ 在该板所占闭区域 D 上的二重积分

$$Q=\iint_D \mu(x,y)d\sigma\,.$$

2. 设 $I_1=\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1=\{(x, y)|-1\le x\le 1, -2\le y\le 2\}$;

又 $I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 的关系.

解 I_1 表示由曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 与平面 $x=\pm1, y=\pm2$ 以及 $z=0$ 围成的立体 V 的体积.

I_2 表示由曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 与平面 $x=0, x=1, y=0, y=2$ 以及 $z=0$ 围成的立体 V_1 的体积.

显然立体 V 关于 yOz 面、xOz 面对称, 因此 V_1 是 V 位于第一卦限中的部分, 故

$V=4V_1$, 即 $I_1=4I_2$.

3. 利用二重积分的定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma=\sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

证明 由二重积分的定义可知,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域的面积.

此处 $f(x, y)=1$, 因而 $f(\xi, \eta)=1$, 所以

$$\iint_D d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\sigma\,.$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ (其中 k 为常数);

证明 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}k\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\,.$$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$,

其中 $D=D_1\cup D_2$, D_1、D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证明 将 D_1 和 D_2 分别任意分为 n_1 和 n_2 个小闭区域 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$,

$n_1+n_2=n$, 作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{i_1=1}^{n_1}f(\xi_{i_1},\eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1}+\sum_{i_2=1}^{n_2}f(\xi_{i_2},\eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2}\,.$$

令各 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$ 的直径中最大值分别为 λ_1 和 λ_2, 又 $\lambda=\max(\lambda_1\lambda_2)$, 则有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i_1=1}^{n_1}f(\xi_{i_1},\eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1}+\lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i_2=1}^{n_2}f(\xi_{i_2},\eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2}\,,$$

即 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma\,.$$

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2d\sigma$ 与, $\iint\limits_D (x+y)^3d\sigma$ 其中积分区域 D 是由 x 轴, y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

解 区域 D 为: $D=\{(x, y)|0\le x, 0\le y, x+y\le 1\}$, 因此当 $(x, y)\in D$ 时, 有 $(x+y)^3\le(x+y)^2$, 从而

$$\iint\limits_D (x+y)^3d\sigma\le\iint\limits_D (x+y)^2d\sigma\,.$$

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3d\sigma$ 其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

所围成;

解 区域 D 如图所示, 由于 D 位于直线 $x+y=1$ 的上方, 所以当$(x, y)\in D$ 时, $x+y\geq 1$, 从而$(x+y)^3\geq (x+y)^2$, 因而

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma .$$

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 D 是三角形闭区域, 三角顶点分别为(1, 0), (1, 1), (2, 0);

解 区域 D 如图所示, 显然当$(x, y)\in D$ 时, $1\leq x+y\leq 2$, 从而 $0\leq \ln(x+y)\leq 1$, 故有

$$[\ln(x+y)]^2\leq \ln(x+y),$$

因而 $$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma .$$

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 $D=\{(x, y)|3\leq x\leq 5. 0\leq y\leq 1\}$.

解 区域 D 如图所示, 显然 D 位于直线 $x+y=e$ 的上方, 故当$(x, y)\in D$ 时, $x+y\geq e$, 从而

$$\ln(x+y)\geq 1,$$

因而 $$[\ln(x+y)]^2\geq \ln(x+y),$$

故 $$\iint_D \ln(x+y) d\sigma \leq \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma .$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$;

解 因为在区域 D 上 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$, 所以

$$0\leq xy\leq 1, 0\leq x+y\leq 2,$$

进一步可得

$$0\leq xy(x+y)\leq 2,$$

于是 $$\iint_D 0 d\sigma \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq \iint_D 2 d\sigma ,$$

即 $$0\leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2 .$$

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)| 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$;

解 因为 $0\le\sin^2 x\le 1$, $0\le\sin^2 y\le 1$，所以 $0\le\sin^2 x\sin^2 y\le 1$. 于是可得

$$\iint\limits_D 0 d\sigma \le \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma \le \iint\limits_D 1 d\sigma ,$$

即

$$0\le \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma \le \pi^2 .$$

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)| 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$;

解 因为在区域 D 上, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$，所以 $1\le x+y+1\le 4$，于是可得

$$\iint\limits_D d\sigma \le \iint\limits_D (x+y+1)d\sigma \le \iint\limits_D 4d\sigma ,$$

即

$$2\le \iint\limits_D (x+y+1)d\sigma \le 8 .$$

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，其中 $D=\{(x, y)| x^2+y^2 \le 4\}$.

解 在 D 上，因为 $0\le x^2+y^2\le 4$，所以

$$9\le x^2+4y^2+9\le 4(x^2+y^2)+9\le 25.$$

于是

$$\iint\limits_D 9d\sigma \le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le \iint\limits_D 25d\sigma ,$$

$$9\pi 2^2 \le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le 25\cdot\pi\cdot 2^2 ,$$

即

$$36\pi \le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le 100\pi .$$

习题 9−2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ |x|\le 1, |y|\le 1\}$;

解 积分区域可表示为 D: $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$. 于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dy=\int_{-1}^{1}[x^2y+\frac{1}{3}y^3]_{-1}^{1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{1}{3})dx=[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域:

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2-x$. 于是

$$\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}dx$$

$$=\int_0^2(4+2x-2x^2)dx=[4x+x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^2=\frac{20}{3}.$$

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$;

解 $$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx=\int_0^1[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x]_0^1dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{4}+y+y^3)dy=[\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为(0, 0), (π, 0), 和(π, π)的三角形闭区域.

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le\pi$, $0\le y\le x$. 于是,

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^\pi xdx\int_0^x\cos(x+y)dy=\int_0^\pi x[\sin(x+y)]_0^x dx$$

$$=\int_0^\pi x(\sin 2x-\sin x)dx=-\int_0^\pi xd(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)$$

$$=-x(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)|_0^\pi+\int_0^\pi(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)dx=-\frac{3}{2}\pi.$$

.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\int_0^1 x[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1(\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}-\frac{2}{3}x^4)dx=\frac{6}{55}.$$

(2) $\iint\limits_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ -2\le y\le 2,\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\iint\limits_D xy^2 d\sigma\int_{-2}^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2 dx=\int_{-2}^2[\frac{1}{2}x^2y^2]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$=\int_{-2}^2(2y^2-\frac{1}{2}y^4)dy=[\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{10}y^5]_{-2}^2=\frac{64}{15}.$$

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ |x|+|y|\le 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$D=\{(x, y)|\ -1\le x\le 0, -x-1\le y\le x+1\}\cup\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, x-1\le y\le -x+1\}$.

于是

$$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma=\int_{-1}^0 e^x dx\int_{-x-1}^{x+1}e^y dy+\int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{-x+1}e^y dy$$

$$=\int_{-1}^0 e^x[e^y]_{-x-1}^{x+1}dx+\int_0^1 e^x[e^y]_{x-1}^{-x+1}dy=\int_{-1}^0(e^{2x+1}-e^{-1})dx+\int_0^1(e-e^{2x-1})dx$$

$$=[\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x]_{-1}^0+[ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}]_0^1=e-e^{-1}.$$

(4) $\iint\limits_D(x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le y\le 2,\ \frac{1}{2}y\le x\le y\}$. 于是

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)d\sigma=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^y(x^2+y^2-x)dx=\int_0^2[\frac{1}{3}x^3+y^2x-\frac{1}{2}x^2]_{\frac{y}{2}}^y dy$$

$$=\int_0^2(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2)dy=\frac{13}{6}.$$

3. 如果二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的被积函数$f(x, y)$是两个函数$f_1(x)$及$f_2(y)$的乘积, 即$f(x, y)= f_1(x)\cdot f_2(y)$, 积分区域$D=\{(x, y)|\ a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy]$$

证明 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=\int_a^b[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy]dx$,

而 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy$,

故 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b[f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy]dx$.

由于$\int_c^d f_2(y)dy$的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy]$$

4. 化二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域D是:

(1)由直线$y=x$及抛物线$y^2=4x$所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$D=\{(x, y)|\,0\le x\le 4, x\le y\le 2\sqrt{x}\ \}$, 或$D=\{(x, y)|\ \ 0\le y\le 4, \frac{1}{4}y^2\le x\le y\ \}$,

所以 $I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$或$I=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$.

(2)由x轴及半圆周$x^2+y^2=r^2(y\ge 0)$所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$D=\{(x, y)|-r\leq x\leq r, 0\leq y\leq\sqrt{r^2-x^2}\}$,

或 $D=\{(x, y)|\ 0\leq y\leq r, -\sqrt{r^2-y^2}\leq x\leq\sqrt{r^2-y^2}\}$,

所以 $I=\int_{-r}^{r}dx\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy$, 或 $I=\int_{0}^{r}dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$.

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$所围成的闭区域;

解　积分区域如图所示, 并且

$D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$,

或 $D=\{(x, y)|\ \frac{1}{2}\leq y\leq 1, -\frac{1}{y}\leq x\leq 2\}\cup\{(x, y)|1\leq y\leq 2, y\leq x\leq 2\}$,

所以 $I=\int_{1}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy$, 或 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx$.

(4)环形闭区域$\{(x, y)|\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4.　于是

$$I=\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_3}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_4}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4,

如图所示. 于是

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_4} f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

5. 设 $f(x, y)$在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b(b>a)$围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$D=\{(x, y)|a\le x\le b, a\le y\le x\}$, 或 $D=\{(x, y)|a\le y\le b, y\le x\le b\}$.

于是 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy$, 或 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

因此 $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy.$$

(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 2, y^2\le x\le 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 4,\ \frac{x}{2}\le y\le\sqrt{x}\}$，所以

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy .$$

(3) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；

解　由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$，所以

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

(4) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$；

解　由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 2-x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}\}$，所以

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx .$$

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；

解　由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\le x\le e,\ 0\le y\le\ln x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le y\le 1,\ e^y\le x\le e\}$，所以

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$$

(6) $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$ (其中 $a\ge 0$).

解　由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi, -\sin\frac{x}{2}\le y\le\sin x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x,y)|-1\le y\le 0, -2\arcsin y\le x\le\pi\}$$

$$\cup\{(x,y)|0\le y\le 1, \arcsin y\le x\le \pi-\arcsin y\},$$

所以 $\int_0^{\pi}dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3]dy=\frac{4}{3}.$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$V=\iint_D (6-2x-3y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy$$

$$=\int_0^1[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2]_0^1dx=\int_0^1(\frac{9}{2}-2x)dx=\frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)dy=\frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z, 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\le 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V=\iint_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=\iint_D(6-3x^2-3y^2)d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dy=8\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(2-x^2)^3}dx=6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域$D$是:

(1)$\{(x, y)| x^2+y^2\le a^2\}(a>0)$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2)$\{(x, y)|x^2+y^2\le 2x\}$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\cos\theta\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(3)$\{(x, y)| a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$, 其中$0<a<b$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(4)$\{(x, y)| 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$.

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1)$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$;

解 积分区域D如图所示. 因为

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le\sec\theta\}\cup\{(\rho,\theta)\,|\,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le\csc\theta\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$;

解 积分区域 D 如图所示，并且

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\ 0\le\rho\le2\sec\theta\},$$

所示 $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\iint\limits_D f(\rho)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho d\rho.$$

(3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示，并且

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le\rho\le1\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$.

解 积分区域 D 如图所示，并且

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ \sec\theta\tan\theta\le\rho\le\sec\theta\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2a\cos\theta\}$, 所以

$$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=\iint_D\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

(2) $\int_0^{a}dx\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le a\sec\theta\}$, 所以

$$\int_0^{a}dx\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}dy=\iint_D\rho\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta=\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(3) $\int_0^{1}dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le\sec\theta\tan\theta\}$, 所以

$$\int_0^{1}dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=\iint_D\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan\theta d\theta=\sqrt{2}-1.$$

(4) $\int_0^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2\}$, 所以

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho=2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^4-1)=\pi(e^4-1).$$

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le1\}$, 所以

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(2\ln2-1)=\frac{1}{4}(2\ln2-1).$$

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 1\le\rho\le2\}$, 所以

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma=\iint\limits_D \arctan(\tan\theta)\cdot\rho d\rho d\theta=\iint\limits_D \theta\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2\rho d\rho=\frac{3\pi^3}{64}.$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le x\}$，所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 1\}$，所以

$$\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma=\iint_D\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D(x^2+y^2)d\sigma$，其中D是由直线$y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a(a>0)$所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为$D=\{(x,y)|a\le y\le 3a, y-a\le x\le y\}$，所以

$$\iint_D(x^2+y^2)d\sigma=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx=\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3)dy=14a^4.$$

(4) $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中$D$是圆环形闭区域$\{(x,y)|a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$.

解 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$，所以

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域D由螺线$\rho=2\theta$上一段弧$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$与直线$\theta=\frac{\pi}{2}$所围成，它的面密度为$\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2\theta\}$，所以所求质量

$$M=\iint_D\mu(x,y)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4d\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面$y=0$, $y=kx(k>0)$, $z=0$以及球心在原点、半径为R的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在xOy面上的投影区域$D=\{(x,y)|0\le\theta\le\arctan k, 0\le\rho\le R\}$.

$$V=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\arctan k}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{1}{3}R^3\arctan k\,.$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq a\cos\theta\}$, 所以

$$V=\iint_{x^2+y^2\leq ax}(x^2+y^2)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{32}a^4\pi\,.$$

习题 9–2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ |x|\le 1, |y|\le 1\}$;

解 积分区域可表示为 D: $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$. 于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dy=\int_{-1}^{1}[x^2y+\frac{1}{3}y^3]_{-1}^{1}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{1}{3})dx=[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域:

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2-x$. 于是

$$\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}dx$$

$$=\int_0^2(4+2x-2x^2)dx=[4x+x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^2=\frac{20}{3}.$$

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$;

解 $$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^2)d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx=\int_0^1[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x]_0^1dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{4}+y+y^3)dy=[\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为(0, 0), (π, 0), 和(π, π)的三角形闭区域.

解 积分区域可表示为 D: $0\le x\le \pi$, $0\le y\le x$. 于是,

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^{\pi}xdx\int_0^{x}\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi}x[\sin(x+y)]_0^{x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)dx=-\int_0^{\pi}xd(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)$$

$$=-x(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x)dx=-\frac{3}{2}\pi.$$

.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{D} x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint\limits_{D} x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\int_0^1 x[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1(\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}-\frac{2}{3}x^4)dx=\frac{6}{55}.$$

(2) $\iint\limits_{D} xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ -2\le y\le 2,\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\iint\limits_{D} xy^2d\sigma=\int_{-2}^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx=\int_{-2}^2[\frac{1}{2}x^2y^2]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$=\int_{-2}^2(2y^2-\frac{1}{2}y^4)dy=[\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{10}y^5]_{-2}^2=\frac{64}{15}.$$

(3) $\iint\limits_{D} e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|\ |x|+|y|\le 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y)|\ -1\le x\le 0, -x-1\le y\le x+1\}\cup\{(x, y)|\ 0\le x\le 1, x-1\le y\le -x+1\}.$$

于是

$$\iint\limits_{D} e^{x+y}d\sigma=\int_{-1}^0 e^x dx\int_{-x-1}^{x+1} e^y dy+\int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{-x+1} e^y dy$$

$$=\int_{-1}^0 e^x[e^y]_{-x-1}^{x+1}dx+\int_0^1 e^x[e^y]_{x-1}^{-x+1}dy=\int_{-1}^0(e^{2x+1}-e^{-1})dx+\int_0^1(e-e^{2x-1})dx$$

$$=[\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x]_{-1}^0+[ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}]_0^1=e-e^{-1}.$$

(4) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)|\ 0\le y\le 2,\ \frac{1}{2}y\le x\le y\}$. 于是

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)d\sigma=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx=\int_0^2[\frac{1}{3}x^3+y^2x-\frac{1}{2}x^2]_{\frac{y}{2}}^{y}dy$$

$$=\int_0^2(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2)dy=\frac{13}{6}.$$

3. 如果二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的被积函数$f(x, y)$是两个函数$f_1(x)$及$f_2(y)$的乘积, 即$f(x, y)= f_1(x)\cdot f_2(y)$, 积分区域$D=\{(x, y)| a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy]$$

证明 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=\int_a^b[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy]dx$,

而 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)dy=f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy$,

故 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\int_a^b[f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy]dx$.

由于$\int_c^d f_2(y)dy$的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=[\int_a^b f_1(x)dx]\cdot[\int_c^d f_2(y)dy].$$

4. 化二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域D是:

(1)由直线$y=x$及抛物线$y^2=4x$所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)|0\le x\le 4, x\le y\le 2\sqrt{x}\}, \text{ 或 } D=\{(x, y)|\ 0\le y\le 4, \frac{1}{4}y^2\le x\le y\},$$

所以 $I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 或 $I=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$.

(2)由x轴及半圆周$x^2+y^2=r^2(y\ge 0)$所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$D=\{(x, y)| -r\leq x\leq r, 0\leq y\leq\sqrt{r^2-x^2}\}$,

或 $D=\{(x, y)|\ 0\leq y\leq r, -\sqrt{r^2-y^2}\leq x\leq\sqrt{r^2-y^2}\}$,

所以 $I=\int_{-r}^{r}dx\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy$，或 $I=\int_{0}^{r}dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$.

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$,

或 $D=\{(x, y)|\ \frac{1}{2}\leq y\leq 1, -\frac{1}{y}\leq x\leq 2\}\cup\{(x, y)|1\leq y\leq 2, y\leq x\leq 2\}$,

所以 $I=\int_{1}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy$，或 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx$.

(4)环形闭区域$\{(x, y)|\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4. 于是

$$I=\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_3}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_4}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4,

如图所示. 于是

$$I=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_3} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_4} f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

5. 设 $f(x, y)$在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b(b>a)$围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$D=\{(x, y)|a\le x\le b, a\le y\le x\}$, 或 $D=\{(x, y)|a\le y\le b, y\le x\le b\}$.

于是 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy$, 或 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

因此 $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy .$$

(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$;

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\le y\le 2, y^2\le x\le 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 4,\ \frac{x}{2}\le y\le \sqrt{x}\}$，所以

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

(3) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$，所以

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

(4) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$；

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 2-x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}\}$，所以

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$，如图.
因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\le y\le 1,\ e^y\le x\le e\}$，所以

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$$

(6) $\int_0^\pi dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$ (其中 $a\ge 0$).

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi, -\sin\frac{x}{2}\le y\le\sin x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x,y)|-1\le y\le 0, -2\arcsin y\le x\le\pi\}$$

$$\cup\{(x,y)|0\le y\le 1, \arcsin y\le x\le \pi-\arcsin y\},$$

所以 $$\int_0^\pi dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy=\int_{-1}^0 dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3]dy=\frac{4}{3}.$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$V=\iint_D (6-2x-3y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)dy$$

$$=\int_0^1[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2]_0^1 dx=\int_0^1(\frac{9}{2}-2x)dx=\frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)dy=\frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z, 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\le 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V=\iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=\iint_D (6-3x^2-3y^2)d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dy=8\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(2-x^2)^3}dx=6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域$D$是:

(1)$\{(x, y)|\ x^2+y^2\le a^2\}(a>0)$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2)$\{(x, y)|x^2+y^2\le 2x\}$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2\cos\theta\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(3)$\{(x, y)|\ a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$, 其中$0<a<b$;

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(4)$\{(x, y)|\ 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$.

解 积分区域D如图. 因为$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1)$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$;

解 积分区域D如图所示. 因为

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le\sec\theta\}\cup\{(\rho,\theta)|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le\csc\theta\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$;

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},0\le\rho\le 2\sec\theta\},$$

所示 $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\iint_D f(\rho)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho d\rho.$$

(3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le\rho\le 1\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$.

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\sec\theta\tan\theta\le\rho\le\sec\theta\},$$

所以 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2a\cos\theta\}$, 所以

$$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=\iint_D\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

(2) $\int_0^{a}dx\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le a\sec\theta\}$, 所以

$$\int_0^{a}dx\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}dy=\iint_D\rho\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta=\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(3) $\int_0^{1}dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le\sec\theta\tan\theta\}$, 所以

$$\int_0^{1}dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=\iint_D\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan\theta d\theta=\sqrt{2}-1.$$

(4) $\int_0^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a\}$, 所以

$$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=\iint_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{8}a^4 .$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2\}$, 所以

$$\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\iint_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho=2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^4-1)=\pi(e^4-1) .$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le1\}$, 所以

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma=\iint_D \ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(2\ln2-1)=\frac{1}{4}(2\ln2-1) .$$

(3) $\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 1\le\rho\le2\}$, 所以

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma=\iint_D \arctan(\tan\theta)\cdot\rho d\rho d\theta=\iint_D \theta\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2\rho d\rho=\frac{3\pi^3}{64} .$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le x\}$，所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$， 其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 1\}$，所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma=\iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\cdot\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中D是由直线$y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为$D=\{(x, y)|a\le y\le 3a, y-a\le x\le y\}$，所以

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx=\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3)dy=14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中$D$是圆环形闭区域$\{(x, y)|\ a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$.

解 在极坐标下$D=\{(\rho, \theta)|0\le\theta\le 2\pi, a\le\rho\le b\}$，所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域D由螺线$\rho=2\theta$上一段弧($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)与直线$\theta=\frac{\pi}{2}$所围成，它的面密度为$\mu(x, y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下$D=\{(\rho,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2\theta\}$，所以所求质量

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4d\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面$y=0, y=kx(k>0), z=0$以及球心在原点、半径为R的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在xOy面上的投影区域$D=\{(x, y)|0\le\theta\le\arctan k, 0\le\rho\le R\}$.

$$V=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{\arctan k}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{3}R^3\arctan k\,.$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a\cos\theta\}$，所以

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}(x^2+y^2)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{32}a^4\pi\,.$$

9–3

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是:

(1)由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le xy,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}$,

于是 $$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz.$$

(2)由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2\le z\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\},$$

于是 $$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz.$$

(3)由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|\,x^2+2y^2\le z\le 2-x^2, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\},$$

于是 $$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz.$$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4)由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|\,0\le z\le\frac{xy}{c}, 0\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0\le x\le a\},$$

于是 $$I=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)dz.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$，下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体，占有空间闭区域 $\Omega=\{(x, y, z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$，在点$(x, y, z)$处的密度为 $\rho(x, y, z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

解 $$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})dy$$

$$=\int_0^1[xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y]\Big|_0^1 dx=\int_0^1(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$的被积函数 $f(x, y, z)$是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$的乘积, 即$f(x, y, z)= f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, 积分区域$\Omega=\{(x, y, z)|a\le x\le b, c\le y\le d, l\le z\le m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz .$$

证明 $\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b[\int_c^d(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)dz)dy]dx$

$$=\int_a^b[\int_c^d(f_1(x)f_2(y)\int_l^m f_3(z)dz)dy]dx=\int_a^b[(f_1(x)\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)]dx$$

$$=\int_a^b[(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)f_1(x)]dx=(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)\int_a^b f_1(x)dx$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz .$$

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$, 其中$\Omega$是由曲面$z=xy$, 与平面$y=x$, $x=1$和$z=0$所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le xy, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2[\frac{z^4}{4}]_0^{xy}dy$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^5dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364} .$$

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中$\Omega$为平面$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$所围成的四面体.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

提示: $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}]_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{-2(1+x+y)}-\frac{1}{8}y]_0^{1-x}dx=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$$

$$=[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyzdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy=\int_0^1\frac{1}{8}x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}.$$

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz$，其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le y,\ x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1\}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}dy\int_0^y zdz=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}\frac{1}{2}y^2dy$

$$=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}x(1-x^6)dx=0.$$

8. 计算$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, 其中Ω是由锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h(R>0, h>0)$所围成的闭区域.

解 当$0\le z\le h$时, 过$(0, 0, z)$作平行于xOy面的平面, 截得立体Ω的截面为圆D_z: $x^2+y^2=(\frac{R}{h}z)^2$, 故D_z的半径为$\frac{R}{h}z$, 面积为$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$, 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_0^h zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3dz=\frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1)$\iiint\limits_{\Omega} zdv$, 其中Ω是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le1, \rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$

$$=\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^5)d\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

(2)$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中Ω是由曲面$x^2+y^2=2z$及平面$z=2$所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2, \frac{\rho^2}{2}\le z\le2$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta=\frac{16}{3}\pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le1,$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^4\cdot\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2,\ x^2+y^2\le z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le2a\cos\varphi,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4d\varphi$$

$$=8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xydv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1,\ z=0,\ x=0,\ y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le1,\ 0\le z\le1,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}xydv=\iiint\limits_{\Omega}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1\rho^3d\rho\int_0^1dz=\frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega} xydv = \int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^1 dz = \int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 (\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2})dx$$

$$=[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\cos\varphi,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{\pi}{10}.$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \frac{5}{2}\rho\le z\le 5,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3 d\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$$

$$=2\pi\int_0^2\rho^3(5-\frac{5}{2}\rho)d\rho = 8\pi.$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le A$, $z\ge 0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, a\le r\le A,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv = \iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_a^A r^4dr=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)\,.$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1)$z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$, $\rho\le z\le 6-\rho^2$,

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^2(6\rho-\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{32}{3}\pi\,.$$

(2)$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$及 $x^2+y^2=z^2$(含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi,\, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\, 0\le r\le 2a\cos\varphi\,,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\pi a^3\,.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$, $\rho^2\le z\le\rho$,

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}dz=2\pi\int_0^1(\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{\pi}{6}\,.$$

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi,\, 0\le\rho\le 2,\, \frac{1}{4}\rho^2\le z\le\sqrt{5-\rho^2}\,,$$

于是 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}}dz$

$$=2\pi\int_0^2\rho(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4})d\rho=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le R,$$

于是 $M=\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R kr\cdot r^2dr=k\pi R^4$.

习题 9−3

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1)由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le xy,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}$,

于是 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$.

(2)由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le z\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\},$$

于是 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$.

(3)由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+2y^2\le z\le 2-x^2, -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\},$$

于是 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz$.

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4)由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le \frac{xy}{c}, 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0\le x\le a\},$$

于是 $I=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}} f(x,y,z)dz$.

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega=\{(x, y, z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$, 在点$(x, y, z)$处的密度为 $\rho(x, y, z)=x+y+z$, 计算该物体的质量.

解 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})dy$

$$=\int_0^1[xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y]_0^1 dx=\int_0^1(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$的被积函数 $f(x, y, z)$是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$的乘积, 即 $f(x, y, z)= f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega=\{(x, y, z)|a\le x\le b, c\le y\le d, l\le z\le m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz\,.$$

证明 $\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^b[\int_c^d(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)dz)dy]dx$

$$=\int_a^b[\int_c^d(f_1(x)f_2(y)\int_l^m f_3(z)dz)dy]dx=\int_a^b[(f_1(x)\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)]dx$$

$$=\int_a^b[(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)f_1(x)]dx=(\int_l^m f_3(z)dz)(\int_c^d f_2(y)dy)\int_a^b f_1(x)dx$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz\,.$$

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 与平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le xy, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2[\frac{z^4}{4}]_0^{xy}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^5dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}\,.$$

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)|\ 0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$,

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

提示: $$\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}]_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{-2(1+x+y)}-\frac{1}{8}y]_0^{1-x}dx=\int_0^1[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x]dx$$

$$=[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8}).$$

6. 计算$\iiint\limits_\Omega xyzdxdydz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2},0\leq y\leq\sqrt{1-x^2},0\leq x\leq 1\}$$

于是 $$\iiint\limits_\Omega xyzdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyzdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)dy=\int_0^1\frac{1}{8}x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}.$$

7. 计算$\iiint\limits_\Omega xzdxdydz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega=\{(x, y, z)| 0\leq z\leq y, x^2\leq y\leq 1, -1\leq x\leq 1\}$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{y}zdz=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}\frac{1}{2}y^2dy$

$$=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}x(1-x^6)dx=0.$$

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, 其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0, h>0)$ 所围成的闭区域.

解 当 $0\le z\le h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z: $x^2+y^2=(\frac{R}{h}z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h}z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$, 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_{0}^{h}zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_{0}^{h}z^3dz=\frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} zdv$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le1, \ \rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},$$

于是 $\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$$=\pi\int_{0}^{1}(2\rho-\rho^3-\rho^5)d\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi, 0\le\rho\le2, \ \frac{\rho^2}{2}\le z\le2,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta=\frac{16}{3}\pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le1,$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^4\cdot\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4 dr=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$, $x^2+y^2\le z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le2a\cos\varphi,$$

于 是 $$\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4 d\varphi$$

$$=8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xydv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 1, 0\le z\le 1$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega} xydv=\iiint\limits_{\Omega}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho d\theta dz$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho\int_0^1 dz=\frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega} xydv=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^1 dz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy=\int_0^1(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2})dx$$

$$=[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}]_0^1=\frac{1}{8}.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\cos\varphi$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi dr$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{\pi}{10}.$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \frac{5}{2}\rho\le z\le 5$,

于是 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3 d\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$

$$=2\pi\int_0^2\rho^3(5-\frac{5}{2}\rho)d\rho=8\pi.$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq A$，$z\geq 0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ a\leq r\leq A,$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_a^A r^4dr=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 2,\ \rho\leq z\leq 6-\rho^2,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^2(6\rho-\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{32}{3}\pi.$$

(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$(含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq r\leq 2a\cos\varphi,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\pi a^3.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 1,\ \rho^2\leq z\leq\rho,$$

于是 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}dz=2\pi\int_0^1(\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{\pi}{6}$.

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le2,\ \frac{1}{4}\rho^2\le z\le\sqrt{5-\rho^2},$$

于是 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}}dz$

$$=2\pi\int_0^2\rho(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4})d\rho=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le R,$$

于是 $M=\iiint\limits_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R kr\cdot r^2dr=k\pi R^4$.

习题 9–4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

由曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

于是 $A=2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta=2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分的曲面的面积.

解 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z^2=2x$ 两式消 z 得 $x^2+y^2=2x$, 于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\le 2x$.

由曲面方程 $\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

于是 $A=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}dxdy=\sqrt{2}\pi$.

3. 求底面半径相同的两个直交柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应于区域 D: $x^2+y^2\le R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A=4A_1$.

$$A=4\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=4\iint\limits_D\sqrt{1+(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}})^2+0^2}dxdy$$

$$=4\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=4R\int_{-R}^{-R}dx\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dy=8R\int_{-R}^{-R}dx=16R^2.$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1)D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

解 令密度为$\mu=1$.

因为区域 D 可表示为 $0\le x\le x_0, 0\le y\le\sqrt{2px}$，所以

$$A=\iint\limits_D dxdy=\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}dx=\frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}xdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}x\sqrt{2px}dx=\frac{3}{5}x_0,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}dx\int_0^{\sqrt{2px}}ydy=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}pxdx=\frac{3}{8}y_0,$$

所求质心为 $(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0)$

(2)D 是半椭圆形闭区域 $\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0\}$；

解　令密度为 $\mu=1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴，所以 $\bar{x}=0$.

$$A=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\pi ab \text{ (椭圆的面积)},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D ydxdy=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}ydy=\frac{1}{A}\cdot\frac{b^2}{2a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为 $(0, \frac{4b}{3\pi})$.

(3)D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta(0<a<b)$之间的闭区域.

解　令密度为 $\mu=1$. 由对称性可知 $\bar{y}=0$.

$$A=\iint\limits_D dxdy=\pi(\frac{b}{2})^2-\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2) \text{ (两圆面积的差)},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xdxdy=\frac{2}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot dr=\frac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)},$$

所求质心是 $(\frac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)}, 0)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点(x, y)处的面密度 $\mu(x, y)=x^2y$，求该薄片的质心.

解 $M=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x^2 y dy=\int_0^1 \frac{1}{2}(x^4-x^6)dx=\frac{1}{35}$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x^3 y dy=\frac{1}{M}\int_0^1 \frac{1}{2}(x^5-x^7)dx=\frac{35}{48},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x^2 y^2 dy=\frac{1}{M}\int_0^1 \frac{1}{3}(x^5-x^8)dx=\frac{35}{54},$$

质心坐标为$(\frac{35}{48},\frac{35}{54})$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a, 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 建立坐标系, 使薄片在第一象限, 且直角边在坐标轴上. 薄片上点(x, y)处的函数为$\mu=x^2+y^2$. 由对称性可知$\bar{x}=\bar{y}$.

$$M=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{6}a^4,$$

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy=\frac{1}{M}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy=\frac{2}{5}a,$$

薄片的质心坐标为$(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心(设密度$\rho=1$):

(1)$z^2=x^2+y^2$, $z=1$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故$\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V=\iiint\limits_\Omega dv=\frac{1}{3}\pi \text{ (圆锥的体积)},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega zdv=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz=\frac{3}{4},$$

所求立体的质心为$(0, 0, \frac{3}{4})$.

(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$, $z=0$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\frac{2}{3}\pi A^3-\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi(A^3-a^3)\text{ (两个半球体体积的差)},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}r^3\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi d\theta=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^A r^3dr=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},$$

所求立体的质心为 $(0, 0, \frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)})$.

(3) $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

解 $V=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy$

$$=\int_0^a[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]dx=\frac{1}{6}a^4,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}xdv=\frac{1}{V}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4}=\frac{2}{5}a,$$

$$\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}zdv=\frac{1}{V}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\frac{7}{30}a^2,$$

所以立体的重心为 $(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2)$.

8. 设球体占有闭区域 $\Omega=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\le 2Rz\}$, 它在内部各点的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

解 球体密度为 $\rho=x^2+y^2+z^2$. 由对称性可知质心在 z 轴上, 即 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

在球面坐标下 Ω 可表示为: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 2R\cos\varphi$, 于是

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}R^5\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho z dv=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5dr$$

$$=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}R^6\sin\varphi\cos^7\varphi d\varphi=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi r^5}=\frac{5}{4}R,$$

故球体的质心为$(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) $D=\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$, 求 I_y;

解 积分区域 D 可表示为

$$-a\leq x\leq a, -\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2}\leq y\leq\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2},$$

于是 $$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_{-a}^{a}x^2dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^3b.$$

提示: $\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{x=a\sin t}{=\!=\!=}\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{\pi}{8}a^4$.

(2)D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 x=2 所围成, 求 I_x 和 I_y;

解 积分区域可表示为

$$0\leq x\leq 2, -3\sqrt{x/2}\leq y\leq 3\sqrt{x/2},$$

于是 $$I_x=\iint_D y^2dxdy=\int_0^2dx\int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}}y^2dy=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{72}{5},$$

$$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_0^2x^2dx\int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}}dy=\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^2x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{96}{7}.$$

(3)D 为矩形闭区域$\{(x, y)|0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b\}$, 求 I_x 和 I_y.

解 $I_x=\iint\limits_D y^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^b y^2dy=a\cdot\frac{1}{3}b^3=\frac{ab^3}{3}$,

$$I_y=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^a x^2dx\int_0^b dy=\frac{1}{3}a^3\cdot b=\frac{a^3b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h, 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mu dxdy=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2dy=\frac{1}{12}\mu bh^3,$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mu dxdy=\mu\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}x^2dx\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}dy=\frac{1}{12}\mu hb^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成,

(1)求物体的体积;

解 由对称可知

$$V=4\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}dz$$

$$=4\int_0^a dx\int_0^a (x^2+y^2)dy=4\int_0^a (ax^2+\frac{a^3}{3})dx=\frac{8}{3}a^4.$$

(2)求物体的质心;

解 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega \rho z dv=\frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}zdz$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a dx\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy$$

$$=\frac{2}{V}\int_0^a (ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{a^5}{5})dx=\frac{7}{15}a^2.$$

(3)求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)dv=4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$

$$=4\rho\int_0^a dx\int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy=4\rho\frac{28}{45}a^6=\frac{112}{45}\rho a^6 .$$

12. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 ρ=1).

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv=\iiint\limits_{\Omega}r^3drd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr\int_0^h dz=\frac{1}{2}\pi ha^4 .$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x, y, 0)|R_1\le\sqrt{x^2+y^2}\le R_2, x\ge 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)(a>0)$处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

解 引力 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_y=0$, 而

$$F_x=G\iint\limits_D\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\cdot\rho d\rho$$

$$=2G\mu[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}],$$

$$F_z=-Ga\iint\limits_D\frac{\mu d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=-Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=\pi Ga\mu[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}] .$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ, 占有闭区域 $\Omega=\{(x, y, z)|x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)(a>h)$处单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知, 沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故 $F_x=F_y=0$,

而

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\rho\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}dv$$

$$=G\rho\int_0^h(a-z)dz\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_0^h(a-z)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{rdr}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi G\rho\int_0^h(a-z)[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}]dz$$

$$=2\pi G\rho[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

总习题九

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1)设有空间闭区域

$\Omega_1=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$,

$\Omega_2=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$,

则有________.

$(A)\iiint\limits_{\Omega_1} xdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} xdv$; $(B)\iiint\limits_{\Omega_1} ydv=4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$;

$(C)\iiint\limits_{\Omega_1} zdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$; $(D)\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$.

解 (C).

提示: $f(x, y, z)=x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域Ω_1上的三重积分为零, 而在Ω_2上的三重积分不为零, 所以(A)是错的. 类似地, (B)和(D)也是错的.

$f(x, y, z)=z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域Ω_1上的三重积分可以化为Ω_1在第一卦部分Ω_2上的三重积分的四倍.

(2)设有平面闭区域 $D=\{(x, y)|-a\le x\le a, x\le y\le a\}$, $D_1=\{(x, y)|0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$________.

$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$; $(B)\ 2\iint\limits_{D_1} xydxdy$; $(C)\ 4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$; $(D)0$.

解 (A).

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin yd\sigma$, 其中 D 是顶点分别为(0, 0), (1, 0), (1, 2)和(0, 1)的梯形闭区域;

解 积分区域可表示为 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x+1\}$, 于是

$$\iint\limits_D (1+x)\sin yd\sigma=\int_0^1 (1+x)dx\int_0^{x+1}\sin ydy=\int_0^1 (1+x)[1-\cos(x+1)]dx$$

$$=\frac{3}{2}+\cos 1+\sin 1-\cos 2-2\sin 2.$$

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi\}$;

解 $\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)dy=\int_0^\pi (x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)dx$

$$=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le R\cos\theta,$$

于是 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{r\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)d\theta=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{1}{9}(3\pi-4)R^3.$$

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le R^2\}$.

解 因为积分区域 D 关于 x 轴、y 轴对称, 所以

$$\iint\limits_D 3xd\sigma=\iint\limits_D 6yd\sigma=0.$$

$$\iint\limits_D 9d\sigma=9\iint\limits_D d\sigma=9\pi R^2.$$

因为 $\iint\limits_D y^2d\sigma=\iint\limits_D x^2d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$,

所以 $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)d\sigma=9\pi R^2+\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$

$$=9\pi R^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2\cdot\rho d\rho=9\pi R^2+\frac{\pi}{4}R^4.$$

3. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx$;

解 积分区域为

$$D=\{(x,y)|0\le y\le 4, -\sqrt{4-y}\le x\le \frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x, y)|-2\le x\le 0, 2x+4\le y\le -x^2+4\},$$

所以 $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x,y)dy$.

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx$;

解 积分区域为

$$D=\{(x, y)|0\le y\le 1, 0\le x\le 2y\}\cup\{(x, y)|1\le y\le 3, 0\le x\le 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, \frac{1}{2}x\le y\le 3-x\},$$

所以 $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy$.

(3) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

解 积分区域为

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, \sqrt{x}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}\cup\{(x,y)|1\le y\le 2, 0\le x\le \sqrt{2y-y^2}\},$$

所以 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx.$$

证明 积分区域为

$$D=\{(x, y)|0\le y\le a, 0\le x\le y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x, y)|0\le x\le a, x\le y\le a\},$$

所以 $\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx$.

5. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D=\{(x, y)|x^2\le y\le 1, -1\le x\le 1\}$.

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D=D_1+D_2+D_3$,

其中 $D_1: 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le\tan\theta\sec\theta$,

$D_2: \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}, 0\le\rho\le\csc\theta$,

$D_3: \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi, 0\le\rho\le\tan\theta\sec\theta$,

所以 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

6. 把积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 化为三次积分, 其中积分区域Ω是由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

Ω: $0\le z\le x^2+y^2$, $x^2\le y\le 1$, $-1\le x\le 1$,

所以 $$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$$

7. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2 dxdydz$, 其中$\Omega$是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分;

解 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2\le(\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2$,

在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}R, R-\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le R\sqrt{R^2-\rho^2},$$

所以 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}d\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z^2\rho dz$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3]\rho d\rho=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv$, 其中Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域Ω关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数,

所以 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv=0$.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv$, 其中Ω是由 xOy 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2+z^2=2x$. 由曲面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域Ω在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}: y^2+z^2\le(\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2\le x\le 5,$$

所以 $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{5}\rho^2\cdot\rho dx$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3(5-\frac{1}{2}\rho^2)d\rho=\frac{250}{3}\pi.$$

8. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\},$$

于是 $A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}dxdy$

$$=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\iint_D dxdy=\frac{1}{2}ab\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}.$$

9. 在均匀的半径为R的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设所求矩形另一边的长度为H, 建立坐标系, 使半圆的直径在x轴上, 圆心在原点. 不妨设密度为ρ=1g/cm^3.

由对称性及已知条件可知$\bar{x}=\bar{y}=0$, 即

$$\iint_D ydxdy=0,$$

从而 $$\int_{-R}^{R}dx\int_{-H}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=0,$$

即 $$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}[(R^3-x^2)-H^2]dx=0,$$

亦即 $$R^3-\frac{1}{3}R^2-RH^2=0,$$

从而 $$H=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

因此, 接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为$\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

10. 求曲抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成的均匀薄片(面密度为常数μ)对于直线$y=-1$的转动惯量.

解 抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成区域可表示为

$D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq 1\}$,

所求转动惯量为

$$I=\iint_D \mu(y+1)^2dxdy=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y+1)^2dy=\frac{1}{3}\mu\int_{-1}^{1}[8-(x^2+1)^3]dx=\frac{368}{105}\mu.$$

11. 设在xOy面上有一质量为M的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域$D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq R^2, y\geq 0\}$, 过圆心$O$垂直于薄片的直线上有一质量为$m$的质点$P$, $OP=a$. 求半圆形薄片对质点P的引力.

解 设P点的坐标为$(0, 0, a)$. 薄片的面密度为$\mu=\frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于 y 轴对称, 所以引力在 x 轴上的分量 $F_x=0$, 而

$$F_y = G\iint\limits_D \frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma = m\mu G\int_0^\pi d\theta\int_0^R \frac{\rho^2\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$= m\mu G\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho = 2m\mu G\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}),$$

$$F_z = -G\iint\limits_D \frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}d\sigma = -m\mu Ga\int_0^\pi d\theta\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho$$

$$= -\pi m\mu Ga\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}d\rho = -\frac{2GmM}{R^2}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}).$$

习题 10−1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L, 在点(x, y)处它的线密度为 $\mu(x, y)$, 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1)这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y;

(2)这曲线弧的重心坐标 $\bar{x}$, $\bar{y}$.

解 在曲线弧 L 上任取一长度很短的小弧段 ds(它的长度也记做 ds), 设(x, y)为小弧段 ds 上任一点.

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素分别为

$$dI_x=y^2\mu(x, y)ds,\ dI_y=x^2\mu(x, y)ds\ .$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\int_L y^2\mu(x,y)ds\ ,\quad I_y=\int_L x^2\mu(x,y)ds\ .$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的静矩元素分别为

$$dM_x=y\mu(x, y)ds,\ dM_y=x\mu(x, y)ds\ .$$

曲线 L 的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}\ ,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}\ .$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明: 如果曲线弧 L 分为两段光滑曲线 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds\ .$$

证明 划分 L, 使得 L_1 和 L_2 的连接点永远作为一个分点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\sum_{i=n_1+1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ .$$

令λ=max{Δs_i}$\rightarrow$0, 上式两边同时取极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=n_1+1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ ,$$

即得 $$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds\ .$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$;

解 $\oint_L (x^2+y^2)^n ds=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt$

$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt$

$=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}dt=2\pi a^{2n+1}$.

(2) $\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段;

解 L 的方程为 $y=1-x$ $(0\le x\le 1)$;

$\int_L (x+y)ds=\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+[(1-x)']^2}dx=\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}dx=\sqrt{2}$.

(3) $\oint_L xdx$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

解 L_1: $y=x^2(0\le x\le 1)$, L_2: $y=x(0\le x\le 1)$.

$\oint_L xdx=\int_{L_1} xdx+\int_{L_2} xdx$

$=\int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2}dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}dx$

$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx+\int_0^1 \sqrt{2}xdx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$.

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

解 $L=L_1+L_2+L_3$，其中

L_1: $x=x$, $y=0(0\le x\le a)$,

L_2: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\le t\le \frac{\pi}{4})$,

L_3: $x=x$, $y=x$ $(0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}a)$,

因而 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$,

$=\int_0^a e^x\sqrt{1^2+0^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1^2+1^2}dx$

$=e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2$.

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中$\Gamma$为曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

解 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt$

$=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+e^{2t}}dt=\sqrt{3}e^t dt$,

$$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^2 \frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt$$

$$=\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}dt=[-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).$$

(6) $\int_\Gamma x^2yzds$, 其中Γ为折线 $ABCD$, 这里 A、B、C、D 依次为点(0, 0, 0)、(0, 0, 2)、(1, 0, 2)、(1, 3, 2);

解 $\Gamma=AB+BC+CD$, 其中

AB: $x=0$, $y=0$, $z=t$ $(0\le t\le 1)$,

BC: $x=t$, $y=0$, $z=2(0\le t\le 3)$,

CD: $x=1$, $y=t$, $z=2(0\le t\le 3)$,

故 $$\int_\Gamma x^2yzds=\int_{AB}x^2yzds+\int_{BC}x^2yzds+\int_{CD}x^2yzds$$

$$=\int_0^1 0dt+\int_0^3 0dt+\int_0^3 2t\sqrt{0^2+1^2+0^2}dt=9.$$

(7) $\int_L y^2ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$;

解 $$\int_L y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{[a(t-\sin t)']^2+[a(\cos t)']^2}dt$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}dt=\frac{256}{15}a^3.$$

(8) $\int_L (x^2+y^2)ds$, 其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)(0\le t\le 2\pi)$.

解 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=atdt$

$$\int_L (x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$

$$=\int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)t dt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a，中心角为 2φ的均匀圆弧(线密度μ=1)的重心.

解 建立坐标系如图 10−4 所示，由对称性可知 $\bar{y}=0$，又

$$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{2\varphi a}\int_L x ds=\frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos\theta\cdot a d\theta=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

所以圆弧的重心为$(\dfrac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0)$

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$，其中 $0\leq 1\leq 2\pi$，它的线密度$\rho(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$，求:

(1)它关于 z 轴的转动惯量 I_z; (2)它的重心.

解 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\sqrt{a^2+k^2}dt$.

(1) $I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds=\int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) $M=\int_L \rho(x,y,z)ds=\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi} kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

故重心坐标为$(\dfrac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}, -\dfrac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}, \dfrac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2})$.

习题 10–2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：$\int_L P(x,y)dx=0$.

证明 设 L 是直线 $x=a$ 上由(a, b_1)到(a, b_2)的一段，
则 L: $x=a$, $y=t$, t 从 b_1 变到 b_2. 于是

$$\int_L P(x,y)dx=\int_{b_1}^{b_2}P(a,t)(\frac{da}{dt})dt=\int_{b_1}^{b_2}P(a,t)\cdot 0dt=0.$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点$(a, 0)$到$(b, 0)$的一段直线，
证明$\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x,0)dx$.

证明 L: $x=x$, $y=0$, t 从 a 变到 b，所以

$$\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x,0)(x)'dx=\int_a^b P(x,0)dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1)$\int_L (x^2-y^2)dx$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(0, 0)到点(2, 4)的一段弧;

解 L: $y=x^2$, x 从 0 变到 2，所以

$$\int_L (x^2-y^2)dx=\int_0^2 (x^2-x^4)dx=-\frac{56}{15}.$$

(2)$\oint_L xydx$，其中 L 为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

解 $L=L_1+L_2$，其中

L_1: $x=a+a\cos t$, $y=a\sin t$, t 从 0 变到 π,

L_2: $x=x$, $y=0$, x 从 0 变到 $2a$,

因此 $$\oint_L xydx=\int_{L_1}xydx+\int_{L_2}xydx$$

$$=\int_0^\pi a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'dt+\int_0^{2a}0dx$$

$$=-a^3(\int_0^\pi \sin^2 tdt+\int_0^\pi \sin^2 td\sin t)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3)$\int_L ydx+xdy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$的一段弧;

解 $\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t(-R\sin t)+R\cos tR\cos t]dt$

$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=0$.

(4) $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行);

解 圆周的参数方程为: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, t 从 0 变到 2π, 所以

$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$

$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)(a\cos t)]dt$

$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}-a^2dt=-2\pi$.

(5) $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz$, 其中 Γ 为曲线 $x=k\theta$, $y=a\cos\theta$, $z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

解 $\int_\Gamma x^2dx+zdy-ydz=\int_0^{\pi}[(k\theta)^2k+a\sin\theta(-a\sin\theta)-a\cos\theta a\cos\theta]d\theta$

$=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)d\theta=\frac{1}{3}\pi^3k^3-\pi a^2$.

(6) $\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$, 其中 Γ 是从点(1, 1, 1)到点(2, 3, 4)的一段直线;

解 Γ 的参数方程为 $x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, t 从 0 变到 1.

$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+t+1+2t-1)]dt$

$=\int_0^1(6+14t)dt=13$.

(7) $\oint_\Gamma dx-dy+ydz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);

解 $\Gamma=AB+BC+CA$, 其中

AB: $x=x$, $y=1-x$, $z=0$, x 从 1 变到 0,

BC: $x=0$, $y=1-z$, $z=z$, z 从 0 变到 1,

CA: $x=x$, $y=0$, $z=1-x$, x 从 0 变到 1,

故 $$\oint_\Gamma dx-dy+ydz=\int_{AB} dx-dy+ydz+\int_{BC} dx-dy+ydz+\int_{CA} dx-dy+ydz$$

$$=\int_0^1[1-(1-x)']dx+\int_0^1[-(1-z)'+(1-z)]dt+\int_0^1 dx=\frac{1}{2}.$$

(8) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从$(-1, 1)$到$(1, 1)$的一段弧.

解 L: $x=x$, $y=x^2$, x 从-1 变到 1, 故

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]dx$$

$$=2\int_0^1(x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$, 其中 L 是:

(1)抛物线 $y=x^2$ 上从点$(1, 1)$到点$(4, 2)$的一段弧;

解 L: $x=y^2$, $y=y$, y 从 1 变到 2, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]dy=\frac{34}{3}.$$

(2)从点$(1, 1)$到点$(4, 2)$的直线段;

解 L: $x=3y-2$, $y=y$, y 从 1 变到 2, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2[(3y-2+y)\cdot y+(y-3y+2)\cdot 1]dy=11$$

(3)先沿直线从点$(1, 1)$到$(1, 2)$, 然后再沿直线到点$(4, 2)$的折线;

解 $L=L_1+L_2$, 其中

L_1: $x=1$, $y=y$, y 从 1 变到 2,

L_2: $x=x$, $y=2$, x 从 1 变到 4,

故 $$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_{L_1} (x+y)dx+(y-x)dy+\int_{L_2} (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2 (y-1)dy+\int_1^4 (x+2)dx=14.$$

(4)沿曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点(1, 1)到(4, 2)的一段弧.

解 L: $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$, t 从 0 变到 1, 故

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$$

$$=\int_0^1 [(3t^2+t+2)(4t+1)+(-t^2-t)\cdot 2t]dt=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成, 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段时场力所作的功.

解 已知场力为 $\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|, 0)$, 曲线 L 的参数方程为

$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$,

θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 于是场力所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L |F|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |F|\cdot(-R\sin\theta)d\theta=-|F|R.$$

6. 设 z 轴与力方向一致, 求质量为 m 的质点从位置(x_1, y_1, z_1)沿直线移到(x_2, y_2, z_2)时重力作的功.

解 已知 $\boldsymbol{F}=(0, 0, mg)$. 设 Γ 为从(x_1, y_1, z_1)到(x_2, y_2, z_2)的直线, 则重力所作的功为

$$W=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\Gamma 0dx+0dy+mgdz=mg\int_{z_1}^{z_2} dz=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

(1)在 xOy 面内沿直线从点(0, 0)到(1, 1);

解 L 的方向余弦 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

故 $$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds.$$

(2)沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到(1, 1);

解 曲线 L 上点(x, y)处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1, 2x)$, 单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}),$$

故 $$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds.$$

(3)沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点$(0, 0)$到$(1, 1)$.

解 L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$, 其上任一点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(1,\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}),$$

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=(\sqrt{2x-x^2},1-x),$$

故 $$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]ds.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧, 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 曲线 Γ 上任一点的切向量为

$\boldsymbol{\tau}=(1, 2t, 3t^2)=(1, 2x, 3y)$,

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+9y^2}}(1,2x,3y),$$

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma [P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]ds$$

$$=\int_L \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds.$$

习题 10−3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_l (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

解 $L=L_1+L_2$, 故

$$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_{L_1}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy+\int_{L_2}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)2x]dx+\int_1^0[(2y^3-y^4)2y+(y^2+y^2)]dy$$

$$=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)dx-\int_0^1(-2y^5+4y^4+2y^2)dy=\frac{1}{30},$$

而 $$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(1-2x)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)dx$$

$$=\int_0^1(y^{\frac{1}{2}}-y-y^2+y^4)dy=\frac{1}{30},$$

所以 $$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_l Pdx+Qdy.$$

(2) $\oint_l (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中 L 是四个顶点分别为(0, 0)、(2, 0)、(2, 2)、和(0, 2)的正方形区域的正向边界.

解 $L=L_1+L_2+L_3+L_4$, 故

$$\oint_L (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$=(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4})(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_0^2(y^2-4y)dy+\int_2^0(x^2-8x)dx+\int_2^0 y^2dy$$

$$=\int_0^2 8xdx+\int_0^2 -4ydy=8,$$

而 $$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(-2y+3xy^2)dxdy$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2(-2y+3xy^2)dy=\int_0^2(8x-4)dx=8,$$

所以 $$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_l Pdx+Qdy.$$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1)星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

解 $$A=\oint_L -ydx=\int_0^{2\pi}-a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2)椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

解 椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的参数方程为

$x=4\cos\theta$, $y=3\sin\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, 故

$$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos\theta\cdot 3\cos\theta-3\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)]d\theta$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta=12\pi.$$

(3)圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 圆 $x^2+y^2=2ax$ 的参数方程为 $x=a+a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$,

故 $$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\theta)\cdot a\cos\theta-a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)d\theta=\pi a^2.$$

3. 计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周$(x-1)^2+y^2=2$, L 的方向为逆时针方向.

解 $P=\frac{y}{2(x^2+y^2)}$，$Q=\frac{-x}{2(x^2+y^2)}$. 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}=0\,.$$

在 L 内作逆时针方向的ε小圆周

$l: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta(0\leq\theta\leq 2\pi)$,

在以 L 和 l 为边界的闭区域 D_ε上利用格林公式得

$$\oint\limits_{L+l^-} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D_\varepsilon}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0\,,$$

即 $$\oint_L Pdx+Qdy=-\oint_{l^-} Pdx+Qdy=\oint_l Pdx+dy\,.$$

因此 $$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\oint_l \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{2\varepsilon^2}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=-\pi\,.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$;

解 $P=x+y$, $Q=x-y$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 而且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1\,,$$

故在整个 xOy 面内, 积分与路径无关.

取 L 为点(1, 1)到(2, 3)的直线 $y=2x-1$, x 从 1 变到 2, 则

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_1^2[(3x-1)+2(1-x)]dx$$

$$=\int_1^2(1+x)dx=\frac{5}{2}\,.$$

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$;

解 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$, 故积分与路径无关, 取路径 $(1, 2)\to(1, 4)\to(3, 4)$的折线, 则

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$$

$$=\int_2^4 6y-3y^2)dy+\int_1^3(96x-64)dx=236.$$

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

解 $P=2xy-y^4+3$, $Q=x^2-4xy^3$, 显然 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3$, 所以在整个 xOy 面内积分与路径无关, 选取路径为从$(1, 0)\to(1, 2)\to(2, 1)$的折线, 则

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$$

$$=\int_0^1(1-4y^3)dy+\int_1^2 2(x+1)dx=5.$$

5. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为$(0, 0)$、$(3, 0)$和$(3, 2)$的三角形正向边界;

解 L 所围区域 D 如图所示, $P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-(-1)=4,$$

故由格林公式,得

$$\oint_L(2x-y+4)dx+(15y+3x-6)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\iint\limits_D 4dxdy=12.$$

(2) $\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$;

解 $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$, $Q=x^2\sin x-2ye^x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)-(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)=0,$$

由格林公式

$$\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0.$$

(3) $\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0, 0)到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧;

解 $P=2xy^3-y^2\cos x$, $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0,$$

所以由格林公式

$$\int_{L^-+OA+OB}Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

其中 L、OA、OB、及 D 如图所示.

故 $$\int_L Pdx+Qdy=\int_{OA+AB}Pdx+Qdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_0^1(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

(4) $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧.

解 $P=x^2-y$, $Q=-x-\sin^2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-(-1)=0$,

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO}Pdx+Qdy=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

其中 L、AB、BO 及 D 如图所示.

故 $$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_{BA+OB}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\int_0^1 -(1+\sin^2 y)dy+\int_0^1 x^2dx=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2\ .$$

6. 验证下列 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$的全微分, 并求这样的一个 $u(x, y)$:

(1)$(x+2y)dx+(2x+y)dy$;

证明 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)dx+(2x+y)dy+C=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+C\ .$$

(2)$2xydx+x^2dy$;

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xydx+x^2dy+C=\int_0^y 0dy+\int_0^y 2xydx+C=x^2y+C\ .$$

(3)$4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy$

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy+C$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y -3\cos 3y\cos 2xdy+C=-\cos 2x\sin 3y+C\ .$$

(4) $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3xh2iy+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy+C$$

$$=\int_0^y 12ye^ydy+\int_0^x(3x^2y+8xy^2)dx+C$$

$$=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y)+C\ .$$

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$

解 因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$的全微分

$$u(x,y)=\int_0^x 2xdx+\int_0^y (2y\sin x-x^2\sin y)dy+C$$

$$=y^2\sin x+x^2\cos y+C\ .$$

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$, $Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场, 证明质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关.

解 场力所作的功为$W=\int_\Gamma (x+y^2)dx+(2xy-8)dy$.

由于$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial X}{\partial y}$, 故以上曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

习题 10−4

1. 设有一分布着质量的曲面Σ, 在点(x, y, z)处它的面密度为$\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解. 假设$\mu(x, y, z)$在曲面Σ上连续, 应用元素法, 在曲面Σ上任意一点(x, y, z)处取包含该点的一直径很小的曲面块 dS(它的面积也记做 dS), 则对于 x 轴的转动惯量元素为

$$dI_x=(y^2+z^2)\mu(x, y, z)dS,$$

对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS\,.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS\,,$$

其中Σ是由Σ_1和Σ_2组成的.

证明 划分Σ_1为 m 部分, $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_m$;

划分Σ_2为 n 部分, $\Delta S_{m+1}, \Delta S_{m+2}, \cdots, \Delta S_{m+n}$,

则$\Delta S_1, \cdots, \Delta S_m, \Delta S_{m+1}, \cdots, \Delta S_{m+n}$为Σ的一个划分, 并且

$$\sum_{i=1}^{m+n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i+\sum_{i=m+1}^{m+n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\,.$$

令 $\lambda_1=\max\limits_{1\le i\le m}\{\Delta S_i\}$, $\lambda_2=\max\limits_{m+1\le i\le m+n}\{\Delta S_i\}$, $\lambda=\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则当$\lambda\to 0$ 时, 有

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS\,.$$

3. 当Σ是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$与二重积分有什么关系?

解 Σ的方程为 $z=0$, $(x, y)\in D$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=dxdy\,,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D}f(x,y,z)dxdy\,.$$

4. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$, 其中Σ为抛物面$z=2-(x^2+y^2)$在 xOy 面上方的部

分, $f(x, y, z)$分别如下:

(1) $f(x, y, z)=1$;

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy .$$

因此 $$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi .$$

(2) $f(x, y, z)=x^2+y^2$;

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy .$$

因此 $$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{149}{30}\pi .$$

(3) $f(x, y, z)=3z$.

解 Σ: $z=2-(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy .$$

因此 $$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}3[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}rdr=6\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}rdr=\frac{111}{10}\pi .$$

5. 计算$\iint_\Sigma(x^2+y^2)dS$, 其中Σ是:

(1)锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面;

解 将Σ分解为$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

Σ_1: $z=1$, D_1: $x^2+y^2\le 1$, $dS=dxdy$;

Σ_1: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, D_2: $x^2+y^2\le 1$, $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$.

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

提示: $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$.

(2)锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的部分.

解 Σ: $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 3$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2dxdy\ ,$$

因而 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^2 2rdr=9\pi$.

提示: $dS=\sqrt{1+[\frac{6x}{2\sqrt{3(x^2+y^2)}}]^2+[\frac{6y}{2\sqrt{3(x^2+y^2)}}]^2}dxdy=2dxdy$.

6. 计算下面对面积的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$, 其中Σ为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z=4-2x-\frac{4}{3}y$, $D_{xy}: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1-\frac{3}{2}x$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy\ ,$$

$$\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=\iint_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}dxdy=4\sqrt{61}\ .$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$, 其中Σ为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一象限中的部分;

解 Σ: $z=6-2x-2y$, D_{xy}: $0\le y\le 3-x$, $0\le x\le 3$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=3dxdy ,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)3dxdy$$

$$=3\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)dy=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)dx=-\frac{27}{4}.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$, 其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h$ $(0<h<a)$的部分;

解 Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2-h^2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy ,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}adxdy=a|D_{xy}|=\pi a(a^2-h^2)$$ (根据区域的对称性及函数的奇偶性).

提示: $dS=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}})^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$,

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$, 其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2ax$, $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$,

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\cos q+\sin\theta)]rdr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta)d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

提示: $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$.

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 的质量, 此壳的面密度为$\mu=z$.

解 Σ: $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

故 $$M=\iint_{\Sigma} zdS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\sqrt{1+r^2}rdr=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为μ_0的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$对于 z 轴的转动惯量.

解 Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0 dS=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\mu_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-y^2}}dr=\frac{4}{3}\pi\mu_0a^4.$$

提示: $dS=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$,

习题 10−5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式:

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)dydz\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)]dydz\,.$$

解 证明把Σ分成 n 块小曲面ΔS_i(ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积), ΔS_i 在 yOz 面上的投影为$(\Delta S_i)_{yz}$, (ξ_i, η_i, ζ_i)是ΔS_i 上任意取定的一点, λ是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)dydz\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)]dydz\,.$$

2. 当Σ为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$ 与二重积分有什么关系?

解 因为Σ: z=0, $(x, y)\in D_{xy}$, 故

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z)dxdy\,,$$

当Σ取的是上侧时为正号, Σ取的是下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy$ 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

解 Σ的方程为 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\leq R$, 于是

$$\iint_{\Sigma}x^2y^2zdxdy=-\iint_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\cdot\sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r^5dr=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx$, 其中 z 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧;

解 Σ在 xOy 面的投影为零, 故 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=0$.

Σ可表示为 $x=\sqrt{1-y^2}$, $(y, z)\in D_{yz}=\{(y, z)|0\le y\le 1, 0\le z\le 3\}$, 故

$$\iint\limits_{\Sigma} xdyz=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz=\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=3\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

Σ可表示为 $y=\sqrt{1-x^2}$, $(z, x)\in D_{zx}=\{(z, x)|0\le z\le 3, 0\le x\le 1\}$, 故

$$\iint\limits_{\Sigma} ydzdx=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\,dzdx=\int_0^3 dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

因此 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx=2(3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx)=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$.

解法二 Σ 前侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x, 2y, 0)$, 单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0),$$

由两种曲面积分之间的关系,

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydzdx=\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dS=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{3}{2}\pi.$$

提示: $\iint\limits_{\Sigma}dS$ 表示曲面的面积.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x, y, z)$为连续函数, Σ是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧;

解 曲面Σ可表示为 $z=1-x+y$, $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x-1\}$, Σ上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 1)$, 单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

由两类曲面积分之间的联系可得

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(f+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})+(f+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2}.$$

(4) $\oiint_{\Sigma} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$，其中Σ是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

Σ_1: $x=0$, D_{yz}: $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1-y$,

Σ_2: $y=0$, D_{zx}: $0\le z1$, $0\le x\le 1-z$,

Σ_3: $z=0$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

于是 $$\oiint_{\Sigma} xzdxdy=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}=0+0+0+\iint_{\Sigma_4}xzdxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}x(1-x-y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{24}.$$

由积分变元的轮换对称性可知

$$\oiint_{\Sigma} xydydz=\oiint_{\Sigma} yzdzdx=\frac{1}{24}.$$

因此 $$\oiint_{\Sigma} xzdxdy+xydydz+yzdzdx=3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$, 其中 Σ_1、Σ_2、Σ_3 是位于坐标面上的三块;

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$.

显然在 Σ_1、Σ_2、Σ_3 上的曲面积分均为零, 于是

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$$

$$=\iint_{\Sigma_4} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$$

$$=\iint_{\Sigma_4}(xy\cos\alpha+yz\cos\beta+xz\cos\gamma)dS$$

$$=\sqrt{3}\iint_{\Sigma_4}(xy+yz+xz)dS=3\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)(1-x-y)]dxdy=\frac{1}{8}.$$

4. 把对坐标的曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化成对面积的曲面积分:

(1)Σ为平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

解 令 $F(x,y,z)=3x+2y+2\sqrt{3}z-6$, Σ上侧的法向量为:

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(3,2,2\sqrt{3}),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{5}(3,2,2\sqrt{3}),$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{5}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)dS.$$

(2)Σ是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 令 $F(x, y, z)=z+x^2+y^2-8$, Σ上侧的法向量

$$n=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 2y, 1),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 1),$$

于是 $$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2xP+2yQ+R)dS.$$

10−6

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oint\!\!\oint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中Σ为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$$

$$=6\iiint_{\Omega}xdv=6\int_0^a xdx\int_0^a dy\int_0^a dz=3a^4$$ (这里用了对称性).

(2) $\oint\!\!\oint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, 其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) $\oint\!\!\oint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$, 其中Σ为上半球体 $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})d=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) $\oint\!\!\oint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$ 其中Σ界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 9$ 的整个表面的外侧;

解 由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=81\pi\ .$$

(5) $\oiint\limits_{\Sigma}4xzdydz-y^2dzdx+yzdxdy$,其中Σ为平面 x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1 所围成的立体的全表面的外侧.

解 由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)dv$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(4z-y)dz=\frac{3}{2}\ .$$

2. 求下列向量 A 穿过曲面Σ流向指定侧的通量:

(1)$\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$, Σ为圆柱 $x+y^2\le a^2(0\le z\le h)$的全表面, 流向外侧;

解 $P=yz$, $Q=xz$, $R=xy$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}yzdydz+xzdzdx+xydxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}0dv=0\ .$$

(2)$\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$, Σ为立方体 $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$, 的全表面, 流向外侧;

解 $P=2x-z$, $Q=x^2y$, $R=-xz^2$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)dv$$

$$=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(2+x^2-2xz)dz=a^3(2-\frac{a^2}{6})\ .$$

(3)$\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$, Σ是以点(3, −1, 2)为球心, 半径 R =3 的球面, 流向外侧.

解 $P=2x+3z$, $Q=-(xz+y)$, $R=y^2+2z$,

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=108\pi .$$

3. 求下列向量 A 的散度:

(1)$\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$;

解 $P=x^2+yz$, $Q=y^2+xz$, $R=-z^2+xy$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z) .$$

(2)$\boldsymbol{A}=e^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

解 $P=e^{xy}$, $Q=\cos(xy)$, $R=\cos(xz^2)$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin xy-2xz\sin(xz^2) .$$

(3)$\boldsymbol{A}=y^2z\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$;

解 $P=y^2$, $Q=xy$, $R=xz$,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+x+x=2x .$$

4. 设 $u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$是两个定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$沿Σ的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}u\Delta v-v\Delta u)dxdydz=\oiint\limits_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS ,$$

其中Σ是空间闭区间Ω的整个边界曲面, 这个公式叫作林第二公式.

证明 由第一格林公式(见书中例 3)知

$$\iiint\limits_{\Omega}u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})dxdydz$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz ,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz$$

$$=\oiint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz.$$

将上面两个式子相减, 即得

$$\iiint_{\Omega}[u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})-v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})]dxdyd$$

$$=\oiint_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS.$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 取液面为 xOy 面, z 轴沿铅直向下, 设液体的密度为ρ, 在物体表面Σ上取元素 dS 上一点, 并设Σ在点(x, y, z)处的外法线的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, 则 dS 所受液体的压力在坐标轴 x, y, z 上的分量分别为

$$-\rho z\cos\alpha dS,\ -\rho z\cos\beta\, dS,\ -\rho z\cos\gamma\, dS,$$

Σ所受的压力利用高斯公式进行计算得

$$F_x=\oiint_{\Sigma}-\rho z\cos\alpha dS=\iiint_{\Omega}0dv=0,$$

$$F_y=\oiint_{\Sigma}-\rho z\cos\beta dS=\iiint_{\Omega}0dv=0,$$

$$F_z=\oiint_{\Sigma}-\rho z\cos\gamma dS=\iiint_{\Omega}-\rho dv=-\rho\iiint_{\Omega}dv=-\rho|\Omega|,$$

其中$|\Omega|$为物体的体积. 因此在液体中的物体所受液体的压力的合力, 其方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体所受的重力, 即阿基米德原理得证.

习题 10−7

1. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, , 若从 z 轴的正向看去, 这圆周取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 上Γ所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

于是 $$\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_\Sigma(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)dS=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

提示: $\iint_\Sigma dS$ 表示Σ的面积, Σ是半径为 a 的圆.

(2) $\oint_\Gamma(y-z)dz+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ $(a>0, b>0)$, 若从 x 轴正向看去, 这椭圆取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 上Γ所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

于是 $$\oint_\Gamma(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_\Sigma(-2\cos\alpha-2\cos\beta-2\cos\gamma)dS=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_\Sigma dS$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy=\frac{-2(a+b)}{a}\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\pi a(a+b).$$

提示: Σ(即 $z=b-\frac{b}{a}x$)的面积元素为 $dS=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$.

(3) $\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=2z$, $z=2$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

解 设Σ为平面 $z=2$ 上Γ所围成的部分的上侧, 则

$$\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (z^2+x)dydz-(z+3)dxdy=-5\pi\times 2^2=-20\pi .$$

(4) $\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=9$, $z=0$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 设Σ为 xOy 面上的圆 $x^2+y^2\leq 9$ 的上侧, 则

$$\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma dxdy=\iint_{D_{xy}} dxdy=9\pi .$$

2. 求下列向量场 A 的旋度:

(1) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(-2x)\boldsymbol{k}$;

解 $$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k} .$$

(2) $\boldsymbol{A}=(\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{k}$;

解 $$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} .$$

(3)$\boldsymbol{A}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$

$=[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}+[y^2z\cos(xz)-x^2\cos y]\boldsymbol{k}$.

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$化为曲线积分, 并计算积分值, 其中 $\boldsymbol{A}$、Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下:

(1)$\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$, Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 的上侧, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量;

解 设 Σ 的边界 $\Gamma: x^2+y^2=1, z=0$, 取逆时针方向, 其参数方程为

$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=0(0\le\theta\le2\pi,$

由托斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}y^2dx+xydy+xzdz$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2\theta(-\sin\theta)+\cos^2\theta\sin\theta]d\theta=0\,.$$

(2)$\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$, Σ 为立方体 $0\le x\le2$, $0\le y\le2$, $0\le z\le2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\oint_{\Gamma}(y-x)dx+yzdy+(-xz)dz=\oint_{\Gamma}ydx=\int_2^0 2dx=-4\,.$$

4. 求下列向量场 A 沿闭曲线 Γ(从 z 轴正向看依逆时针方向)的环流量:

(1)$\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$ 为常量), Γ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=0$;

解 $\oint_L -ydx+xdy+cdz=\int_0^{2\pi}[(-\sin\theta)((-\sin\theta)+\cos\theta\cos\theta]d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\,.$$

(2)$\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$, 其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

解　有向闭曲线 Γ 的参数方程为 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0(0\le\pi\le2\pi)$.

向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L (x-z)dx+(x^2+yz)dy-3xy^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta 2\cos\theta]d\theta=12\pi\ .$$

5. 证明 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}$.

解　令 $\boldsymbol{a}=P_1(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q_1(x, y, z)\boldsymbol{j}+R_1(x, y, z)\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{b}=P_2(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q_2(x, y, z)\boldsymbol{j}+R_2(x, y, z)\boldsymbol{k}$,

由行列式的性质, 有

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1+P_2 & Q_1+Q_2 & R_1+R_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}\ .$$

6. 设 $u=u(x, y, z)$具有二阶连续偏导数, 求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)$

解　因为 $\mathbf{grad}\ u=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}$, 故

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}=(u_{zy}-u_{yz})\boldsymbol{i}+(u_{zx}-u_{xz})\boldsymbol{j}+(u_{yx}-u_{xy})\boldsymbol{k}=0.$$

*7. 证明:

(1)$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

解　$$\nabla(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}i+\frac{\partial(uv)}{\partial y}j+\frac{\partial(uv)}{\partial z}k$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x})i+(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y})j+(\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z})k$$

$$=v(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k)+u(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k)=u\nabla v+v\nabla u.$$

(2) $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla u$

解 $\Delta(uv)=\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=u(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2})+v(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2})$

$$+2(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z})==u\ \Delta v+v\ \Delta u+2\nabla u\cdot\nabla u.$$

(3) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$

解 $B=P_2 i+Q_2 j+R_2 k$,

$$\nabla\cdot(A\times B)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}=\frac{\partial(Q_1R_2-Q_2R_1)}{\partial x}-\frac{\partial(P_1R_2-P_2R_1)}{\partial y}+\frac{\partial(P_1Q_2-P_2Q_1)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial Q_1}{\partial x}R_2+Q_1\frac{\partial R_2}{\partial x}-\frac{\partial Q_2}{\partial x}R_1-Q_2\frac{\partial R_1}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial x}R_2-P_1\frac{\partial R_2}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial P_2}{\partial y}R_1+P_2\frac{\partial R_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_2+P_1\frac{\partial Q_2}{\partial z}-\frac{\partial P_2}{\partial z}Q_1-P_2\frac{\partial Q0_1}{\partial z}$$

$$=R_2(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y})+Q_1(\frac{\partial R_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial z})+R_1(\frac{\partial P_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial x})$$

$$+Q_2(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})+P_1(\frac{\partial Q_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial y})+P_2(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z})$$

而 $B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)=\begin{vmatrix}P_2 & Q_2 & R_2\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}P_1 & Q_2 & R_1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}$

$$=P_2(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z})+Q_2(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})+R_2(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y})$$

$$-P_1(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z})+Q_1(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x})-R_1(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y})$$

所以 $\nabla\times(A\times B)=B\times(\nabla\times A)-A\times(\nabla\times B)$

(4) $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 a$

解 令 $A=Pi+Q\,j++R\,k$,则

$$\nabla\times A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial})k$$

从而 $\nabla\times(\nabla\times A)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix}$

$$=(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z})i+(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y})j$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y})k$$

$$=(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z})i-(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2})i$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z})j-(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2})j$$

$$+(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}-+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})k-(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}-+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})k$$

$$=[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot A)i+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot A)j+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot A)k]$$

$$-[\nabla^2 Pi+\nabla^2 Qj+\nabla^2 Rk]=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$$

命题地证

总习题十

1. 填空:

(1)第二类曲线积分$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$化成第一类曲线积分是____________, 其中α、β、γ为有向曲线弧Γ上点(x, y, z)处的____________的方向角.

解 $\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$, 切向量.

(2)第二类曲面积分$\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$化成第一类曲面积分是_______, 其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为有向曲面$\Sigma$上点$(x, y, z)$处的________的方向角.

解 $\iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$, 法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面Σ是上半球面: $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$, 曲面Σ_1是曲面Σ在第一卦限中的部分, 则有________.

$(A)\iint\limits_\Sigma xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$; $(B)\iint\limits_\Sigma ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$;

$(C)\iint\limits_\Sigma zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$; $(D)\iint\limits_\Sigma xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$.

解 (C).

3. 计算下列曲线积分:

(1)$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中L为圆周$x^2+y^2=ax$;

解 L的参数方程为$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta$, $y=\frac{a}{2}\sin\theta$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$, 故

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds=\oint_L \sqrt{ax}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{ax(\theta)}\cdot\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\cdot d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}|2\cos\frac{\theta}{2}|d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}|\cos t|dt=a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos tdt)=2a^2 \text{ (这里令} t=\frac{\theta}{2}\text{)}.$$

(2)$\int_\Gamma zds$, 其中Γ为曲线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t(0\leq t\leq t_0)$;

解 $\int_\Gamma zds=\int_0^{t_0}t\cdot\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}dt$

$$=\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}dt=\frac{\sqrt{(2+t_0^2)^3}-2\sqrt{2}}{3}.$$

(3) $\int_L(2a-y)dx+xdy$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

解 $\int_L(2a-y)dx+xdy=\int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\cdot a\sin t]dt$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin tdt=-2\pi a^2.$$

(4) $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, 其中 Γ 是曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上由听 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

解 $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz=\int_0^1[(t^4-t^6)\cdot 1+2t^2\cdot t^3\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2]dt$

$$=\int_0^1(-2t^4+3t^6)dt=\frac{1}{35}.$$

(5) $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$, 其中 L 为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$, 沿逆时针方向;

解 这里 $P=e^x\sin y-2y$, $Q=e^x\cos y-2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-e^x\cos y+2=2$.

令 L_1 为 x 轴上由原点到$(2a, 0)$点的有向直线段, D 为 L 和 L_1 所围成的区域, 则由格林公式

$$\oint_{L+L_1}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=2\iint_D dxdy=\pi a^2,$$

$$\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\pi a^2-\int_{L_1}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\pi a^2-\int_0^{2a}0dx=\pi a^2.$$

(6) $\oint_\Gamma xyzdz$, 其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去,

沿逆时针方向.

解 曲线Γ的一般方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$, 其参数方程为

$$x=\cos t,\ y=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t\text{ , } t\text{ 从 } 0\text{ 变到 }2\pi.$$

于是 $$\oint_\Gamma xyzdz=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cos tdt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\,.$$

4. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_\Sigma\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1:x=\sqrt{R^2-y^2}\text{ , }D_{xy}\text{: }-R\leq y\leq R,\ 0\leq z\leq H,\ \ dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz\ ;$$

$$\Sigma_1:x=-\sqrt{R^2-y^2}\text{ , }D_{xy}\text{: }-R\leq y\leq R,\ 0\leq z\leq H,\ \ dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz\ ,$$

于是 $$\iint\limits_\Sigma\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint\limits_{D_{xt}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}dz$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}\,.$$

(2) $\iint\limits_\Sigma(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leq z\leq h)$ 的外侧;

解 这里 $P=y^2-z$, $Q=z^2-x$, $R=x^2-y$, $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

设 Σ_1 为 $z=h(x^2+y^2\leq h^2)$的上侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=0,$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2\cos^2\theta-r\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}h^4,$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

解 设 Σ_1 为 xOy 面上圆域 $x^2+y^2\leq R^2$ 的下侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3dv=3(\frac{2}{3}\pi R^3)=2\pi R^3,$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}0dxdy=0=0,$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3-0=2\pi R^3.$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, 其中 Σ 为曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}$ $(z\geq 0)$的上侧;

解 这里 $P=\frac{x}{r^3}$, $Q=\frac{y}{r^3}$, $R=\frac{z}{r^3}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\frac{3}{r^3}-\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

设Σ_1为 z=0 ($\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\le 1$) 的下侧, Ω是由Σ和Σ_1所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=0,$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=-\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{0}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy=0.$$

(5) $\iint_{\Sigma}xyzdxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\ge 0, y\ge 0)$的外侧.

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

Σ_1是 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$的上侧;

Σ_2是 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$的下侧,

$$\iint_{\Sigma}xyzdxdy=\iint_{\Sigma_1}xyzdxdy+\iint_{\Sigma_2}xyzdxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_{xy}}xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\,\rho^3d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho^3d\rho=\frac{2}{15}.$$

5. 证明 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

解 这里 $P=\frac{x}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{y}{x^2+y^2}$. 显然, 区域 G 是单连通的, P 和 Q 在 G 内具有一阶连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在开区域 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{1}{x}dx+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $F=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 场力沿路径 L 所作的功为

$$W=\int_L-\frac{kx}{\rho^3}dx-\frac{ky}{\rho^3}dy.$$

令 $P=-\frac{kx}{\rho^3}$, $Q=-\frac{ky}{\rho^3}$. 因为 P 和 Q 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续的偏导数, 并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3k}{\rho^5}xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以上述曲线积分所路径无关, 即力场所作的功与路径无关.

7. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 这里Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|x^2+y^2\le a^2\}$.

设曲面Σ的面密度为ρ=1, 由曲面的对称性可知, $\bar{x}=\bar{y}=0$. 因为

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi a^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{1}{2}\cdot 4\pi a^2=2\pi a^2,$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\dfrac{a}{2}$.

因此该曲面的质心为$(0, 0, \dfrac{a}{2})$.

8. 设 $u(x, y)$、$v(x, y)$在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D v\Delta u dxdy=-\iint\limits_D(\mathbf{grad}\, u\cdot\mathbf{grad}\, v)dxdy+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds$,

其中$\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial v}{\partial n}$分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 符号$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$称为二维拉普拉斯算子.

证明 设 L 上的单位切向量为 $\boldsymbol{T}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, 则 $\boldsymbol{n}=(\sin\alpha, -\cos\alpha)$.

(1) $$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_L v(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)ds=\int_L[-v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha+v\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha]ds$$

$$=\iint\limits_D[\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-v\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$=\iint\limits_D(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint\limits_D(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y})dxdy+\iint\limits_D v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint_D \mathbf{grad}v\cdot\mathbf{grad}u dxdy+\iint_D v\Delta u dxdy,$$

所以 $$\iint_D v\Delta u dxdy=-\iint_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)dxdy+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

(2) $$\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=\int_L[u(\frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha)-v(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)]dxdy$$

$$=\int_L[(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y})\cos\alpha+(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})\sin\alpha]dxdy$$

$$=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$=\iint_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$=\iint_D[u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})-v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})]dxdy=\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy.$$

9. 求向量 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域$\Omega=\{(x, y, z)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$的边界曲面流向外侧的通量.

解 设Σ为区域Ω的边界曲面的外侧, 则通量为

$$\Phi=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint_\Omega 3dv=3.$$

10. 求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线Γ所作的功, 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 设Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦部分的下侧, 则力场沿其边界L(顺时针方向)所作的功为

$$W=\oint_L ydx+zdy+xdz.$$

曲面Σ的的单位法向量为$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=(\cos\alpha,\cos\beta\cos\gamma)$, 由斯托克斯公式有

$$W=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-1-1-1)dS=\sqrt{3}\iint_{\Sigma}dS=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\,.$$

习题 11–1

1. 写出下列级数的前五项:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=1+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{26}+\frac{6}{37}+\cdots$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{15}{48}+\frac{105}{384}+\frac{945}{3840}+\cdots$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}-\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}-\cdots$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}+\cdots$.

2. 写出下列级数的一般项:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

解 一般项为$u_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$;

解 一般项为$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$.

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$;

解 一般项为$u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2n!}$.

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解 一般项为$u_n=(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

解 因为

$$s_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})\to\infty(n\to\infty),$$

所以级数发散.

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

解 因为

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

所以级数收敛.

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解 $s_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots+(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi)]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，因而该级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$;

解 这是一个等比级数，公比为 $q=-\frac{8}{9}$，于是 $|q|=\frac{8}{9}<1$，所以此级数收敛.

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$;

解 此级数是发散的，这是因为如此级数收敛，则级数

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=3(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots)$$

也收敛，矛盾.

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

解 因为级数的一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=3^{-\frac{1}{n}}\to 1\neq 0(n\to\infty)$，

所以由级数收敛的必要条件可知，此级数发散.

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$;

解 这是一个等比级数，公比 $q=\frac{3}{2}>1$，所以此级数发散.

(5) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$.

解　因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$都是收敛的等比级数，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$$

是收敛的.

习题 11−2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故所给级数发散.

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

解 因为 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

(3) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+5n+4}=1$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故所给级数收敛.

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,

故所给级数收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=l=\begin{cases}0 & 0<a<1\\ \frac{1}{2} & a=1\\ 1 & a>1\end{cases},$$

而当 $a>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，当 $0<a\le 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 发散，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 当 $a>1$ 时收敛，当 $0<a\le 1$ 时发散.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$;

解 级数的一般项为 $u_n=\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

所以级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(\frac{n+1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$,

所以级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=2\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{e}<1$,

所以级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$,

所以级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, 所以级数收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$, 所以级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$;

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{3n-1})^{\frac{2n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3-\frac{1}{n})^{2-\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2-\frac{1}{n}}\cdot(1-\frac{1}{3n})^{2-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{3^2\cdot e^3}<1,$$

所以级数收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$, 其中 $a_n\to a(n\to\infty)$, a_n, b, a 均为正数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$,

所以当 $b<a$ 时级数收敛, 当 $b>a$ 时级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{4}+2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})^3+\cdots+n(\frac{3}{4})^n+\cdots$;

解 这里 $u_n=n(\frac{3}{4})^n$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{n+1}}{n(\frac{3}{4})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1,$$

所以级数收敛.

(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$;

解 这里 $u_n=\frac{n^4}{n!}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(\frac{n+1}{n})^3=0<1,$$

所以级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$,

所以级数收敛.

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1\neq 0$,

所以级数发散.

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解 因为 $u_n=\frac{1}{na+b}>\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；

解　这是一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$，其中 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

因为显然 $u_n\geq u_{n+1}$，并且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，所以此级数是收敛的.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p<1$ 的 p 级数，是发散的，

所以原级数是条件收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

解　$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 是收敛的，

从而原级数收敛，并且绝对收敛.

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$；

解　这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$，并且 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$ 是收敛的，所以原级数也收敛，并且绝对收敛.

(4) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$；

解　这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，其中 $u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$.

因为 $u_n \geq u_{n+1}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，所以此级数是收敛的.

又因为 $\dfrac{1}{\ln(n+1)} \geq \dfrac{1}{n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ 发散，从而原级数是条件收敛的.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解 级数的一般项为 $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^n)}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}\cdot\dfrac{2^n}{n-1}\cdot\dfrac{2^n}{n-2}\cdots\dfrac{2^n}{3}\cdot\dfrac{2^n}{2}\cdot\dfrac{2^n}{1} = \infty$，
所以级数发散.

习题 11−3

1. 求下列幂级数的收敛域:

(1)$x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 故收敛半径为 R=1.

因为当 x=1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$, 是发散的;

当 x=−1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, 也是发散的,

所以收敛域为(−1, 1).

(2)$1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$, 故收敛半径为 R=1.

因为当 x=1 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, 是收敛的; 当 x=−1 时, 幂级数成为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 也是收敛的, 所以收敛域为[−1, 1].

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^3}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot4\cdots(2n)}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$, 故收敛半径为 $R=+\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot3^2}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot3^n}+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot3^n}{(n+1)\cdot3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$, 故收敛半径为 R=3.

因为当 x=3 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 是发散的; 当 x=−3 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 也是

收敛的, 所以收敛域为[-3, 3).

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$, 故收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, 是收敛的; 当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$, 也是收敛的, 所以收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

解 这里级数的一般项为$u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}|=x^2$, 由比值审敛法, 当 $x^2<1$, 即$|x|<1$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $x^2>1$, 即$|x|>1$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时, 幂级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$, 是收敛的; 当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$, 也是收敛的, 所以收敛域为[-1, 1].

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

解 这里级数的一般项为$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}|=\frac{1}{2}x^2$, 由比值审敛法, 当$\frac{1}{2}x^2<1$, 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}x^2>1$, 即 $|x|>\sqrt{2}$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为

$R=\sqrt{2}$.

因为当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$，是发散的，所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$，故收敛半径为 $R=1$，即当 $-1<x-5<1$ 时级数收敛，当 $|x-5|>1$ 时级数发散.

因为当 $x-5=-1$，即 $x=4$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，是收敛的；当 $x-5=1$，即 $x=6$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，是发散的，所以收敛域为[4, 6).

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;

解 设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则

$$S(x)=[\int_0^x S(x)dx]'=[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx]'=[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx]'$$

$$=[\sum_{n=1}^{\infty}x^n]'=[\frac{1}{1-x}-1]'=\frac{1}{(1-x)^2}\ (-1<x<1).$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

解 设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$，则

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}]'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}dx$$

$$=\int_0^x(\frac{1}{1-x^4}-1)dx=\int_0^x(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2})dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\ (-1<x<1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$ 得 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx$.

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

解 设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

则
$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}]'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$ 得 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx$.

习题 11−4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

解 $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$ $(n=1, 2, \cdots)$,

$$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2})\quad (n=1, 2, \cdots),$$

从而得 $f(x)$在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

因为 $|R_n(x)|=\left|\frac{\cos[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0\le\theta\le1)$,

而级数 $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 总是收敛的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$.

因此 $f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,\ x\in(-\infty, +\infty).$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

所以 $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty, +\infty)$,

故 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}]=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty, +\infty)$.

(2)$\ln(a+x)(a>0)$;

解 因为 $\ln(a+x)=\ln a(1+\frac{x}{a})=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})$,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\leq 1),$$

所以 $$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(\frac{x}{a})^{n+1}=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\ (-a<x\leq a).$$

(3)a^x;

解 因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty, +\infty)$,

所以 $$a^x=e^{x\ln a}=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,\ x\in(-\infty, +\infty),$$

(4)$\sin^2 x$;

解 因为 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

所以 $$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}\quad x\in(-\infty, +\infty).$$

(5)$(1+x)\ln(1+x)$;

解 因为 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\leq 1)$,

所以 $$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}]x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\leq 1).$$

(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 $\dfrac{1}{(1+x^2)^{1/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ $(-1\le x\le 1)$,

所以 $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot(2n)!}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n+1}\ (-1\le x\le 1).$$

3. 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$;

解 因为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (-1<x<1).$$

所以 $$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)\cdots(\frac{3}{2}-n+1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$(-1<x-1<1),$$

即 $$\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{3\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(5-2n)}{2^n\cdot n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$(0<x<2).$$

上术级数当 $x=0$ 和 $x=2$ 时都是收敛的, 所以展开式成立的区间是[0, 2].

(2)lg x.

解 $$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\ (-1<x-1\le 1),$$

即 $$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\ (0<x\le 2).$$

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的幂级数.

解 $$\cos x=\cos[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}]\ (-\infty<x<+\infty).$$

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成$(x-3)$的幂级数.

解 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n}(-1)^n(\frac{x-3}{3})^n\ (-1<\frac{x-3}{3}<1)$,

即 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n}(-1)^n(\frac{x-3}{3})^n\ (0<x<6).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成$(x+4)$的幂级数.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$,

而 $$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n\ (|\frac{x+4}{3}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}\ (-7<x<-1);$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n\ (|\frac{x+4}{2}|<1),$$

即 $$\frac{1}{x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}\ (-6<x<-2).$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n\ (-6<x<-2).$$

习题 11−5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1)ln3(误差不超过 0.0001);

解 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)\ (-1<x<1)$,

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)\ .$$

又 $$|r_n|=2[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\cdots]$$

$$=\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}[1+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot 2^{2n+5}}+\cdots]$$

$$<\frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)=\frac{1}{3(2n-1)2^{2n-2}},$$

故 $|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012$, $|r_5|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003$.

因而取 n=6, 此时

$$\ln 3=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}})\approx 1.0986\,.$$

(2) $\sqrt{e}$ (误差不超过 0.001);

解 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty)$,

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots\ .$$

由于 $$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n!\cdot 2^n}[1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots$$

$$<\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\cdot n!\cdot 2^{n-2}},$$

故 $r_4=\frac{1}{3\cdot 5!\cdot 2^3}\approx 0.0003$.

因此取 n=4 得

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}\approx 1.648\,.$$

(3) $\sqrt[9]{522}$ (误差不超过 0.00001);

解 $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (-1<x<1)$,

$$\sqrt[9]{522}=2(1+\frac{10}{2^9})^{1/9}$$

$$=2[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot(\frac{10}{2^9})^2+\frac{8\cdot 17}{3^2\cdot 3!}\cdot(\frac{10}{2^9})^3-\cdots]\,.$$

由于 $\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}\approx 0.002170$, $\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot(\frac{10}{2^9})^2\approx 0.000019$,

故 $\sqrt[9]{522}=2(1+0.002170-0.000019)\approx 2.00430$.

(4)cos 2°(误差不超过 0.0001).

解 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$,

$$\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2+\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4-\frac{1}{6!}\cdot(\frac{\pi}{90})^6+\cdots\,.$$

由于 $\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\approx 6\times 10^{-4}$, $\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4\approx 10^{-8}$,

故 $\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\cdot\approx 1-0.0006=0.9994$.

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$ (误差不超过 0.0001);

解 $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots]dx$

$$=(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots)\Big|_0^{0.5}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots\,.$$

因为 $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.00625$, $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.00028$, $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009$,

所以 $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.4940$.

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$ (误差不超过 0.0001).

解 $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\ (-1<x<1)$,

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}[1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}+\cdots]dx$$

$$=(x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{25}x^5-\frac{1}{49}x^7+\cdots)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots\ .$$

因为 $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139$, $\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013$, $\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002$,

所以 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.487$.

3. 将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$,

$$e^x\cos x=e^x\cdot\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\frac{1}{2}[e^{x(1+i)}+e^{x(1-i)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}x^n\ .$$

因为 $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

所以 $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}[e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}]=2^{\frac{n}{2}}(2\cos\frac{n\pi}{4})=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$.

因此 $e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ (-\infty<x<+\infty)$.

习题 11−7

1. 下列周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 试将 $f(x)$展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$在$[-\pi, \pi)$上的表达式为:

(1)$f(x)=3x^2+1(-\pi\leq x<\pi)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos n\pi dx=(-1)^n\frac{12}{n^2}\quad(n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin n\pi dx=0\quad(n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ \ (-\infty<x<+\infty)\,.$$

(2)$f(x)=e^{2x}(-\pi\leq x<\pi)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos n\pi dx=\frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin n\pi dx=-\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}\quad(n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)$$

$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

(3) $f(x)=\begin{cases} bx & -\pi\leq x<0 \\ ax & 0\leq x<\pi \end{cases}$ (a, b 为常数, 且 $a>b>0$).

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}axdx=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\cos nxdx]$$

$$=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\sin nxdx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\}$$

$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

2. 将下列函数 $f(x)$展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$;

解 将 $f(x)$拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$在$(-\pi,\ \pi)$中连续, 在 $x=\pm\pi$间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\neq f(-\pi),\quad \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\neq f(\pi),$$

故 $F(x)$的傅里叶级数在$(-\pi,\ \pi)$中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$处 $F(x)$的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

因为 $2\sin\frac{x}{3}$ $(-\pi<x<\pi)$是奇函数, 所以 $a_n=0(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos(\frac{1}{3}-n)x-\cos(\frac{1}{3}+n)x]dx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{9n^2-1}\ (-\pi<x<\pi).$$

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x & -\pi\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le\pi \end{cases}$.

解 将 $f(x)$拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$在$(-\pi, \pi)$中连续, 在 $x=\pm\pi$间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\ne f(-\pi),\ \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\ne f(\pi),$$

故 $F(x)$的傅里叶级数在$(-\pi, \pi)$中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$处 $F(x)$的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx]$$

$$=\frac{1}{\pi}\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}]\sin nx\}$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

3. 设周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 证明 $f(x)$的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx\ (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx\ (n=1, 2, \cdots).$$

证明 我们知道, 若 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数, 则

$\int_a^{a+l}f(x)dx$ 的值与 a 无关, 且 $\int_a^{a+l}f(x)dx=\int_0^l f(x)dx$,

因为 $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ 均为以 2π为周期的函数，所以 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ 均为以 2π为周期的函数，从而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}f(x)\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nxdx\ (n=1, 2, \cdots).$$

同理 $\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nxdx\ (n=1, 2, \cdots).$

4. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi)$展开成傅里叶级数:

解 因为 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$为偶函数，故 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$，而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos(\frac{1}{2}-n)x-\cos(\frac{1}{2}+n)x]dx$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\ (n=1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$在$[-\pi, \pi]$上连续，所以

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx\ (-\pi\le x\le\pi).$$

5. 设 $f(x)$的周期为 2π 的周期函数，它在$[-\pi, \pi)$上的表达式这

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ x & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 因为 $f(x)$为奇函数，故 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx]$$

$$=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

又 $f(x)$的间断点为 $x=(2n+1)\pi$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$, 所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}]\sin nx\ (x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\ (0\leq x\leq\pi)$展开成正弦级数.

解 作奇延拓得 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\leq\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases},$$

再周期延拓 $F(x)$到$(-\infty, +\infty)$, 则当 $x\in(0, \pi]$时 $F(x)=f(x)$, $F(0)=0\neq\frac{\pi}{2}=f(0)$.

因为 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$, 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\ (0<x\leq\pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

7. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leq x\leq\pi)$分另别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$作奇延拓, 则 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$, 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nxdx=\frac{4}{\pi}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故正弦级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\sin nx\ (0\leq x<\pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

对 $f(x)$作偶延拓, 则 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$, 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad (n=1, 2, \cdots),$$

故余弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (0\le x\le\pi).$$

8. 设周期函数 $f(x)$的周期为 2π, 证明

(1)如果 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则 $f(x)$的傅里叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$;

解 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\xlongequal{令t=\pi+x}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=-a_0,$$

所以 $a_0=0$.

因为

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2kxdx\xlongequal{令t=\pi+x}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)\cos 2k(t-\pi)dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos 2ktdt=-a_{2k},$$

所以 $a_{2k}=0$.

同理 $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$.

(2)如果 $f(x-\pi)=f(x)$, 则 $f(x)$的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

解 因为

$$a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2k+1)xdx$$
$$\xlongequal{令t=\pi+x}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)\cos(2k+1)(t-\pi)dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(2k+1)tdt=-a_{2k+1},$$

所以 $a_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

同理 $b_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

习题 11−8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$;

解 因为 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 所以 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$, 而

$$a_0=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{1/2}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\ (n=1, 2, \cdots),$$

由于 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 所以

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x,\ x\in(-\infty, +\infty).$$

(2) $f(x)=\begin{cases} x & -1\le x<0 \\ 1 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$;

解 $$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi x dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin n\pi x dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\quad (n=1, 2, \cdots).$$

而在$(-\infty, +\infty)$上 $f(x)$的间断点为 $x=2k$, $2k+\frac{1}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$,

故 $$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}]\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\}$$

$(x\neq 2k,\ x\neq 2k+\frac{1}{2}, k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & -3\le x<0\\ 1 & 0\le x<3\end{cases}$.

解 $a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{3}dx]=-1$,

$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx]$

$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$ $(n=1, 2, \cdots)$,

$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx]$

$=\frac{6}{n\pi}(-1)^n$ $(n=1, 2, \cdots)$,

而在$(-\infty, +\infty)$上, $f(x)$的间断点为

$x=3(2k+1)$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$,

故 $$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\},$$

$(x\neq 3(2k+1), k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

(1) $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<\frac{l}{2}\\ l-x & \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$;

解 正弦级数:

对 $f(x)$进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$a_0=0(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$b_n=\frac{2}{l}[\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx]=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ $(n=1, 2, \cdots)$

故 $$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0,l].$$

余弦级数:

对 $f(x)$进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{1}{2}}xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{l}(l-x)dx]=\frac{l}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{1}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$b_n=0(n=1, 2, \cdots)$,

故 $$f(x)=\frac{l}{4}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0,l].$$

(2)$f(x)=x^2(0\le x\le 2)$.

解 正弦级数:

对 $f(x)$进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$a_0=0(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1],$$

故 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2[(-1)^n-1]}{n^3\pi^2}\}\sin\frac{n\pi x}{2},\ x\in[0,2).$$

余弦级数:

对 $f(x)$进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=(-1)^n\frac{16}{(n\pi)^2}\ (n=1,2,\cdots),$$

$b_n=0(n=1, 2, \cdots)$,

故
$$f(x)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 16}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ x\in[0,\ 2].$$

总习题十一

1. 填空:

(1)对级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\lim_{n\to\infty}u_n=0$是它收敛的________条件, 不是它收敛的________条件;

解 必要; 充分.

(2)部分和数列$\{s_n\}$有界是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的________条件;

解 充分必要.

(3)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定________; 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必定________.

解 收敛; 发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 故由比较审敛法知, 级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$;

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2}\cdot\frac{2n^2}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty,$$

故由比值审敛法知, 级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

解 因为

$$\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}<\frac{n}{2^n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根值审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛；由比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$；

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=\infty,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较审敛法知，原级数发散.

提示：$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{10\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{10}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^9 x}=\cdots=\frac{1}{10!}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{10!}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\infty$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ $(a>0, s>0)$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^s}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(\sqrt[n]{n})^s}=a,$$

故由根值审敛法知，当 $a<1$ 时级数收敛，当 $a>1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，这是 $p=s$ 的 p–级数，当 $s>1$ 时级数收敛，当 $s\le 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 与收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，$\lim_{n\to\infty}v_n=0$.

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2+2u_nv_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(u_n+2v_n)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^2}{v_n}=\lim_{n\to\infty}v_n=0$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+2u_nv_n)$和级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(u_n^2+2u_nv_n)+v_n^2]=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$$

也是收敛的.

4. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，问级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是否也收敛？试说明理由.

解 级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$不一定收敛.

当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，否则未必.

例如级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}]$发散，并且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{(-1)\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n^p}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是 p 级数. 故当 $p>1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是收敛的，当 $p\leq 1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散. 因此当 $p>1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$绝对收敛.

当 $0<p\leq 1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛，这时是条件收敛的.

当 $p\leq 0$ 时，由于$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}\neq 0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$发散.

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$当$p>1$时绝对收敛，当$0<p\le 1$时条件收敛，当$p\le 0$时发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

解　因为$|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}|\le\frac{1}{\pi^{n+1}}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n+1}}$收敛，故由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}|$收敛，从而原级数绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$;

解　因为$\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n=\ln e=1$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}|$发散，即原级数不是绝对收敛的.

另一方面，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以该级数收敛，从而原级数条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解　令$u_n=(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1,$$

故由比值审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}|$收敛，从而原级数绝对收敛.

6. 求下列级限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$；

解 显然 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 的前 n 项部分和.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{n})^{n}=\dfrac{e}{3}<1$，所以由根值审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 收敛，从而部分和数列$\{s_n\}$收敛.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot s_n=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

解 $2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$.

显然 $s_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的前 n 项部分和.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $S(x)=[\int_0^x S(x)dx]'=[\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n]'=[\dfrac{1}{1-x}-1]'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\dfrac{1}{3})^{n-1}=\dfrac{1}{3}S(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=\dfrac{3}{4}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{3}{4}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=\lim_{n\to\infty}2^{s_n}=2^{\frac{3}{4}}.$$

7. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+5^n}{n}x^n$；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{3(\frac{3}{5})^n+5}{(\frac{3}{5})^n+1}=5$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{5}$.

因为当 $x=\frac{1}{5}$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(\frac{3}{5})^n+1]$，是发散的;

当 $x=-\frac{1}{5}$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}[(\frac{3}{5})^n+1]$，是收敛的,

所以幂级数的收敛域为 $[-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$;

解 $u_n=(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$，因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n|x|=e|x|$，由根值审敛法，当 $e|x|<1$，即 $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$ 时，幂级数收敛；当 $e|x|>1$，时幂级数发散.

当 $x=-\frac{1}{e}$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n$;

当 $x=\frac{1}{e}$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n$.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}=e^{-\frac{1}{2}}\neq0,$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n$ 均发散，从而收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$;

解 $u_n=n(x+1)^n$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x+1|=|x+1|,$$

根据比值审敛法，当$|x+1|<1$，即$-2<x<0$ 时，幂级数收敛；当$|x+1|>1$ 时，幂级数发散.

又当 $x=0$ 时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}n$，是发散的；当 $x=-2$ 时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，也是发散的，所以幂级数的收敛域为$(-2, 0)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解 $u_n=\frac{n}{2^n}x^{2n}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\cdot x^2=\frac{1}{2}x^2,$$

根据比值审敛法，当$\frac{1}{2}x^2<1$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，幂级数收敛；当$\frac{1}{2}x^2>1$时，幂级数发散.

又当$x=\pm\sqrt{2}$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}n$，是发散的，所以收敛域为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$;

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=[\int_0^x S(x)dx]'=[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}]'=[\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^{n-1}]'$$

$$=[\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}]'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\ \ (\frac{x^2}{2}<1),$$

即 $$S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\ \ (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}).$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$;

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\ \ (x^2<1).$$

因为当 $x=\pm1$ 时，幂级数收敛，所以有

$S(x)=\arctan x\ (-1\le x\le 1)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$;

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}=(x-1)[\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n]'$$

$$=(x-1)[(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}]'=(x-1)[\frac{x-1}{1-(x-1)}]'=\frac{x-1}{(2-x)^2}\quad(|x-1|<1),$$

即 $$S(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}\quad(0<x<2).$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 易知幂级数的收敛域为[−1, 1].

设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则当 $x\ne 0$ 时

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n dx=\frac{1}{x}\int_0^x[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx]dx$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x[\int_0^x\frac{1}{1-x}dx]dx=-\frac{1}{x}\int_0^x\ln(1-x)dx$$

$$=-\frac{1}{x}[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)]$$

$$=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x),\ x\in[-1,0)\cup(0,1],$$

又显然 $S(0)=0$, 因此

$$S(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

9. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$;

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$.

因为 $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，两边求导得 $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$，再求导得 $e^x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x^2e^x+e^x,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=S(1)=2e$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\cos 1+\frac{1}{2}\sin 1.$$

提示：$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}x^{2n}$.

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

解 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'dx=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$,

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $|x|\le 1$,

故 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$ $(-1\le x\le 1)$.

(2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解 $\dfrac{1}{(2-x)^2}=(\dfrac{1}{2-x})'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}})'=\dfrac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x}{2})^n]'$

$=[\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n]'=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$ $(-2\leq x\leq 2)$.

11. 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数, 它在$[-\pi, \pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\pi,0)\\ e^x & x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x dx=\dfrac{e^{\pi}-1}{\pi}$,

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nxdx=\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{\pi}-n^2a_n$,

即 $a_n=\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}$ $(n=1, 2, \cdots)$,

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nxdx$

$=(-n)\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nxdx=-na_n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

因此 $f(x)=\dfrac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}(\cos nx-n\sin x)$

$(-\infty<x<+\infty$且 $x\neq n\pi$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

12. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq h\\ 0 & h<x\leq\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 若将函数进行奇延拓, 则傅里叶系数为

$a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nxdx=\dfrac{2(1-\cos nh)}{n\pi}$.

因此, 函数展开成正弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\ x\in(0, h)\cup(h, \pi),$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=\frac{1}{2}$.

若将函数进行偶延拓，则傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}dx=\frac{2h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nxdx=\frac{2\sin nh}{n\pi}\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$b_n=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$,

.

因此，函数展开成余弦级数为

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\ x\in[0,\ h)\cup(h,\ \pi),$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=\frac{1}{2}$.

习题 12−1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

(1)$x(y')^2-2yy'+x=0$;

解 一阶.

(2)$x^2y'-xy'+y=0$;

解 一阶.

(3)$xy'''+2y'+x^2y=0$;

解 三阶.

(4)$(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$;

解 一阶.

(5)$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$;

解 二阶.

(6)$\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1)$xy'=2y$, $y=5x^2$;

解 $y'=10x$.

因为 $xy'=10x^2=2(5x^2)=2y$, 所以 $y=5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2)$y'+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$;

解 $y'=3\cos x+4\sin x$.

因为 $y'+y=3\cos x+4\sin x+3\sin x-4\cos x=7\sin x-\cos x\neq 0$,
所以 $y=3\sin x-4\cos x$ 不是所给微分方程的解.

(3)$y''-2y'+y=0$, $y=x^2e^x$;

解 $y'=2xe^x+x^2e^x$, $y''=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=2e^x+4xe^x+x^2e^x$.

因为 $y''-2y'+y=2e^x+4xe^x+x^2e^x-2(2xe^x+x^2e^x)+x^2e^x=2e^x\neq 0$,
所以 $y=x^2e^x$ 不是所给微分方程的解.

(4)$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$, $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

解 $y'=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$, $y''=C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2 x}$.

因为 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y$

$$=C_1\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2{}^2e^{\lambda_2 x}-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})+\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x})$$

$=0$,

所以 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1)$(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C$;

解 将 $x^2-xy+y^2=C$ 的两边对 x 求导得

$2x-y-xy'+2y\,y'=0$,

即 $(x-2y)y'=2x-y$,

所以由 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数是所给微分方程的解.

(2)$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

解 将 $y=\ln(xy)$的两边对 x 求导得

$y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}y'$, 即 $y'=\frac{y}{xy-x}$.

再次求导得

$$y''=\frac{y'(xy-x)-y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2}=\frac{-xy'-y^2+y}{(xy-x)^2}=\frac{1}{xy-x}\cdot(-\frac{x}{y}y'^2-yy'+y').$$

注意到由 $y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}y'$ 可得 $\frac{x}{y}y'=xy'-1$, 所以

$$y''=\frac{1}{xy-x}\cdot[-(xy'-1)y'-yy'+y']=\frac{1}{xy-x}\cdot(-xy'^2-yy'+2y'),$$

从而 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$,

即由 $y=\ln(xy)$所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

(1)$x^2-y^2=C$, $y|_{x=0}=5$;

解 由 $y|_{x=0}=0$ 得 $0^2-5^2=C$, $C=-25$, 故 $x^2-y^2=-25$.

(2)$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

解 $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$.

由 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2+C_1=1 \end{cases},$$

解之得 $C_1=0$, $C_2=1$, 故 $y=xe^{2x}$.

(3)$y=C_1\sin(x-C_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

解 $y'=C_1\cos(x-C_2)$.

由 $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$ 得

$$\begin{cases} C_1\sin(\pi-C_2)=1 \\ C_1\cos(\pi-C_2)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} C_1\sin C_2=1 \\ -C_1\cos C_2=0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1$, $C_2=\frac{\pi}{2}$, 故 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$, 即 $y=-\cos x$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1)曲线在点(x, y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点(x, y)处的切线斜率为 y', 由条件 $y'=x^2$, 这便是所求微分方程.

(2)曲线上点 $P(x, y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 $P(x, y)$处的法线斜率为$-\frac{1}{y'}$, 由条件第 PQ 中点的横坐标为 0, 所以 Q 点的坐标为$(-x, 0)$, 从而有

$$\frac{y-0}{x+x}=-\frac{1}{y'}, \text{ 即 } yy'+2x=0.$$

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 所温度的平方成反比.

解 $\frac{dP}{dT}=k\frac{P}{T^2}$, 其中 k 为比例系数.

习题 12−2

1. 求下列微分方程的通解:

(1)$xy'-y\ln y=0$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{x}dx,$$

即 $\ln(\ln y)=\ln x+\ln C$,

故通解为 $y=e^{Cx}$.

(2)$3x^2+5x-5y'=0$;

解 分离变量得

$$5dy=(3x^2+5x)dx,$$

两边积分得

$$\int 5dy=\int(3x^2+5x)dx,$$

即 $$5y=x^3+\frac{5}{2}x^2+C_1,$$

故通解为 $y=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$, 其中 $C=\frac{1}{5}C_1$ 为任意常数.

(3) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$;

解 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边积分得

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $\arcsin y=\arcsin x+C$,

故通解为 $y=\sin(\arcsin x+C)$.

(4)$y'-xy'=a(y^2+y')$;

解 方程变形为$(1-x-a)y'=ay^2$,

分离变量得

$$\frac{1}{y^2}dy=\frac{a}{1-a-x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int\frac{a}{1-a-x}dx,$$

即 $$-\frac{1}{y}=-a\ln(1-a-x)-C_1,$$

故通解为 $y=\dfrac{1}{C+a\ln(1-a-x)}$，其中 $C=aC_1$ 为任意常数.

(5) $\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$;

解 分离变量得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}y=-\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}y=-\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx,$$

即 $$\ln(\tan y)=-\ln(\tan x)+\ln C,$$

故通解为 $\tan x\tan y=C$.

(6) $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$;

解 分离变量得

$$10^{-y}dy=10^x dx,$$

两边积分得

$$\int 10^{-y}dy=\int 10^x dx,$$

即 $$-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}+\frac{C}{\ln 10},$$

或 $$10^{-y}=10^x+C,$$

故通解为 $y=-\lg(C-10^x)$.

(7) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

解 方程变形为 $e^y(e^x+1)dy=e^x(1-e^y)dx$,

分离变量得

$$\frac{e^y}{1-e^y}dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

即 $-\ln(e^y)=\ln(e^x+1)-\ln C$,

故通解为$(e^x+1)(e^y-1)=C$.

(8)$\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$;

解 分离变量得

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

即 $\ln(\sin y)=-\ln(\sin x)+\ln C$,

故通解为 $\sin x\sin y=C$.

(9) $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0$;

解 分离变量得

$(y+1)^2dy=-x^3dx$,

两边积分得

$$\int(y+1)^2dy=-\int x^3dx,$$

即 $\frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{4}x^4+C_1$,

故通解为 $4(y+1)^3+3x^4=C$ $(C=12C_1)$.

(10)$ydx+(x^2-4x)dy=0$.

解 分离变量得

$$\frac{4}{y}dy=(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x})dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{4}{y}dy=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x})dx,$$

即 $\ln y^4=\ln x-\ln(4-x)+\ln C$,

故通解为 $y^4(4-x)=Cx$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y'=e^{2x-y}$, $y|_{x=0}=0$;

解 分离变量得

$e^ydy=e^{2x}dx$,

两边积分得

$$\int e^y dy=\int e^{2x}dx,$$

即 $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$,

或 $y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$.

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $\ln(\frac{1}{2}+C)=0$, $C=\frac{1}{2}$,

所以特解 $y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2})$.

(2)$\cos x\sin ydy=\cos y\sin xdx$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

解 分离变量得

$$\tan y\,dy=\tan x\,dx,$$

两边积分得

$$\int\tan ydy=\int\tan xdx,$$

即 $-\ln(\cos y)=-\ln(\cos x)-\ln C$,

或 $\cos y=C\cos x$.

由 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 得 $\cos\frac{\pi}{4}=C\cos 0=C$, $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以特解为 $\sqrt{2}\cos y=\cos x$.

(3)$y'\sin x=y\ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{\sin x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{\sin x}dx,$$

即 $\ln(\ln y)=\ln(\tan\frac{x}{2})+\ln C$,

或 $y=e^{C\tan\frac{x}{2}}$.

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 得 $e=e^{C\tan\frac{\pi}{4}}$, $C=1$,

所以特解为 $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$.

(4) $\cos y dx+(1+e^{-x})\sin y dy=0$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

解　分离变量得

$$-\frac{\sin y}{\cos y}dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

两边积分得

$$-\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

即　$\ln|\cos y|=\ln(e^x+1)+\ln|C|$,

或　$\cos y=C(e^x+1)$.

由 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 得 $\cos\frac{\pi}{4}=C(e^{\frac{\pi}{4}}+1)$, $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以特解为 $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1)$.

(5) $xdy+2ydx=0$, $y|_{x=2}=1$.

解　分离变量得

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{2}{x}dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{2}{x}dx,$$

即　$\ln y=-2\ln x+\ln C$,

或　$y=Cx^{-2}$.

由 $y|_{x=2}=1$ 得 $C\cdot 2^{-2}=1$, $C=4$,

所以特解为 $y=\frac{4}{x^2}$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏漏斗, 高为 10cm, 顶角为 60°, 漏斗下面有面积为 0. 5cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解　设 t 时该已流出的水的体积为 V, 高度为 x, 则由水力学有

$$\frac{dV}{dt}=0.62\times 0.5\times\sqrt{(2\times 980)x}, \text{ 即 } dV=0.62\times 0.5\times\sqrt{(2\times 980)x}dt.$$

又因为 $r=x\tan 30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$,

故 $V=-\pi r^2 dx=-\frac{\pi}{3}x^2 dx$,

从而 $0.62\times0.5\times\sqrt{(2\times980)x}dt=-\frac{\pi}{3}x^2 dx$,

即 $dt=\frac{\pi}{3\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}x^{\frac{3}{2}}dx$,

因此 $t=\frac{-2\pi}{3\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}x^{\frac{5}{2}}+C$.

又因为当 t=0 时, x=10, 所以 $C=\frac{\pi}{3\times5\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}10^{\frac{5}{2}}$,

故水从小孔流出的规律为

$$t=\frac{2\pi}{3\times5\times0.62\times0.5\sqrt{2\times980}}(10^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}})=-0.0305x^{\frac{5}{2}}+9.645.$$

令 x=0, 得水流完所需时间约为 10s.

4. 质量为 1g(克)的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在 t=10s 时, 速度等于 50cm/s, 外力为 4g cm/s^2, 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 已知 $F=k\frac{t}{v}$, 并且法 t=10s 时, v=50cm/s, F=4g cm/s^2, 故 $4=k\frac{10}{50}$, 从而 k=20, 因此 $F=20\frac{t}{v}$.

又由牛顿定律, $F=ma$, 即 $1\cdot\frac{dv}{dt}=20\frac{t}{v}$, 故 v dv=20tdt . 这就是速度与时间应满足的微分方程. 解之得

$\frac{1}{2}v^2=10t^2+C$, 即 $v=\sqrt{20t^2+2C}$.

由初始条件有 $\frac{1}{2}\times50^2=10\times10^2+C$, C=250. 因此

$v=\sqrt{20t^2+500}$.

当 t=60s 时, $v=\sqrt{20\times60^2+500}=269.3\text{cm/s}$.

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1600 年后, 只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 由题设知,

$$\frac{dR}{dt}=-\lambda R，即 \frac{dR}{R}=-\lambda dt ,$$

两边积分得

$\ln R=-\lambda t+C_1$,

从而 $R=Ce^{-\lambda t}\ (C=e^{C_1})$.

因为当 $t=0$ 时, $R=R_0$, 故 $R_0=Ce^0=C$, 即 $R=R_0e^{-\lambda t}$.

又由于当 $t=1600$ 时, $R=\frac{1}{2}R_0$, 故 $\frac{1}{2}R_0=R_0e^{-1600\lambda}$, 从而 $\lambda=\frac{\ln 2}{1600}$.

因此 $R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1000}t}=R_0e^{-0.000433\,t}$.

6. 一曲线通过点(2, 3), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

解 设切点为 $P(x, y)$, 则切线在 x 轴, y 轴的截距分别为 $2x$, $2y$, 切线斜率为

$$\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x},$$

故曲线满足微分方程: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, 即 $\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$,

从而 $\ln y+\ln x=\ln C$, $xy=C$.

因为曲线经过点(2, 3), 所以 $C=2\times3=6$, 曲线方程为 $xy=6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a, 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h, 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 建立坐标系如图. 设 t 时刻船的位置为(x, y), 此时水速为 $v=\frac{dx}{dt}=ky(h-y)$, 故 $dx=ky(h-y)dt$.

又由已知, $y=at$, 代入上式得

$dx=kat(h-at)dt$,

积分得

$$x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3+C.$$

由初始条件 $x|_{t=0}=0$, 得 $C=0$, 故 $x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3$.

因此船运动路线的函数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3 \\ y=ay \end{cases},$$

从而一般方程为 $x=\frac{k}{a}(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)$.

习题 12–3

1. 求下列齐次方程的通解:

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{u^2-1},\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C,\ \text{即}\ u+\sqrt{u^2-1}=Cx,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\frac{y}{x}+\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}=Cx,\ \text{即}\ y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2.$$

(2) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u,\ \text{即}\ \frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C,\ \text{即}\ u=e^{Cx+1},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y=xe^{Cx+1}.$$

(3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$;

解 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, 则原方程化为

$$(x^2+x^2u^2)dx-x^2u(udx+xdu)=0,\ \text{即}\ udu=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$u^2=\ln x^2+C,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2=x^2(\ln x^2+C).$$

(4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$;

解 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, 则原方程化为

$$(x^3+x^3u^3)dx-3x^3u^2(udx+xdu)=0, \text{ 即 } \frac{3u^2}{1-2u^3}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u^3)=\ln x+\ln C, \text{ 即 } 2u^3=1-\frac{C}{x^2},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x^3-2y^3=Cx.$$

(5) $(2x\operatorname{sh}\frac{y}{x}+3y\operatorname{ch}\frac{y}{x})dx-3x\operatorname{ch}\frac{y}{x}dy=0$;

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\operatorname{th}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

令 $u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2}{3}\operatorname{th}u+u, \text{ 即 } \frac{3\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}u}du=\frac{2}{x}dx,$$

两边积分得

$$3\ln(\operatorname{sh}u)=2\ln x+\ln C, \text{ 即 } \operatorname{sh}^3u=Cx^2,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\operatorname{sh}^2\frac{y}{x}=Cx^2.$$

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$.

解 原方程变为 $\frac{dx}{dy}=\frac{2(\frac{x}{y}-1)e^{\frac{x}{y}}}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$.

令$u=\frac{x}{y}$，则原方程化为

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{2(u-1)e^u}{1+2e^u}\text{，即 }y\frac{du}{dy}=-\frac{u+2e^u}{1+2e^u},$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du=-\frac{1}{y}dy,$$

两边积分得

$$\ln(u+2e^u)=-\ln y+\ln C\text{，即 }y(u+2e^u)=C,$$

将$u=\frac{x}{y}$代入上式得原方程的通解

$$y(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}})=C\text{，即 }x+2ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

(1)$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$, $y|_{x=0}=1$;

解 这是齐次方程. 令$u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，则原方程化为

$$(x^2u^2-3x^2)(udx+xdu)+2x^2udx=0,$$

即 $$\frac{u^2-3}{u-u^3}du=\frac{1}{x}dx\text{，或}(-\frac{3}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1})du=\frac{1}{x}dx$$

两边积分得

$$-3\ln|u|+\ln|u+1|+\ln|u-1|=\ln|x|+\ln|C|\text{，即 }u^2-1=Cxu^3,$$

将$u=\frac{y}{x}$代入上式得原方程的通解

$$y^2-x^2=Cy^3.$$

由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=1$，故所求特解为 $y^2-x^2=y^3$.

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $y|_{x=1}=2$;

解 令$u=\frac{y}{x}$，则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u\text{，即 }udu=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln x+C,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$y^2=2x^2(\ln x+C)$.

由 $y|_{x=1}=2$ 得 $C=2$，故所求特解为 $y^2=2x^2(\ln x+2)$.

(3) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$, $y|_{x=1}=1$.

解 这是齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$，则原方程化为

$$(x^2+2x^2u-x^2u^2)dx+(x^2u^2+2x^2u-x^2)(udx+xdu)=0,$$

即
$$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=-\frac{1}{x}dx,$$

或
$$\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$\ln|u+1|-\ln(u^2+1)=\ln|x|+\ln|C|,\text{ 即 } u+1=Cx(u^2+1),$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$x+y=C(x^2+y^2)$.

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=1$，故所求特解为 $x+y=(x^2+y^2)$.

3. 设有连结点 $O(0, 0)$和 $A(1, 1)$的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x, y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

解 设曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $y=y(x)$. 由题意得

$$\int_0^x y(x)dx-\frac{1}{2}xy(x)=x^2,$$

两边求导得

$$y(x)-\frac{1}{2}y(x)-\frac{1}{2}xy'(x)=2x,$$

即
$$y'=\frac{y}{x}-4.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则有

$$u+x\frac{du}{dx}=u-4,\text{ 即 }\frac{1}{u}du=-\frac{4}{x}dx,$$

两边积分得

$$u=-4\ln x+C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得方程的通解

$$y=-4x\ln x+Cx.$$

由于 $A(1, 1)$在曲线上, 即 $y(1)=1$, 因而 $C=1$, 从则所求方程为 $y=-4x\ln x+x$.

习题 12–4

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$;

解 $y=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cdot e^{\int dx}dx+C)=e^{-x}(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+C)=e^{-x}(x+C)$.

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

解 原方程变为 $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$.

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int(x+3+\frac{2}{x})\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x}[\int(x+3+\frac{2}{x})xdx+C]=\frac{1}{x}[\int(x^2+3x+2)dx+C]$$

$$=\frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C)=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}.$$

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

解 $y=e^{-\int\cos dx}(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos xdx}dx+C)$

$$=e^{-\sin x}(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx+C)=e^{-\sin x}(x+C).$$

(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

解 $y=e^{-\int\tan xdx}(\int\sin 2x\cdot e^{\int\tan xdx}dx+C)$

$$=e^{\ln\cos x}(\int\sin 2x\cdot e^{-\ln\cos x}dx+C)$$

$$=\cos x(\int 2\sin x\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+C)$$

$$=\cos x(-2\cos x+C)=C\cos x-2\cos^2 x.$$

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

解 原方程变形为 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$.

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}(\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)dx+C]=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C).$$

(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$;

解 $\rho=e^{-\int 3d\theta}(\int 2\cdot e^{\int 3d\theta}d\theta+C)$

$=e^{-3\theta}(\int 2e^{3\theta}d\theta+C)$

$=e^{-3\theta}(\frac{2}{3}e^{3\theta}+C)=\frac{2}{3}+Ce^{-3\theta}$.

(7) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$;

解 $y=e^{-\int 2xdx}(\int 4x\cdot e^{\int 2xdx}dx+C)$

$=e^{-x^2}(\int 4x\cdot e^{x^2}dx+C)$

$=e^{-x^2}(2e^{x^2}+C)=2+Ce^{-x^2}$.

(8) $y\ln ydx+(x-\ln y)dy=0$;

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$.

$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}(\int\frac{1}{y}\cdot e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C)$

$=\frac{1}{\ln y}(\int\frac{1}{y}\cdot\ln ydy+C)$

$=\frac{1}{\ln y}(\frac{1}{2}\ln^2 y+C)=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$.

(9) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$;

解 原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$.

$y=e^{\int\frac{1}{x-2}dx}[\int 2(x-2)^2\cdot e^{-\int\frac{1}{x-2}dx}dx+C]$

$=(x-2)[\int 2(x-2)^2\cdot\frac{1}{x-2}dx+C]$

$=(x-2)[(x-2)^2+C]=(x-2)^3+C(x-2)$.

(10) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$.

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$.

$$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}[\int(-\frac{1}{2}y)\cdot e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C]$$

$$=y^3(-\frac{1}{2}\int y\cdot\frac{1}{y^3}dy+C)$$

$$=y^3(\frac{1}{2y}+C)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x$, $y|_{x=0}=0$;

解 $y=e^{\int\tan xdx}(\int\sec x\cdot e^{-\int\tan xdx}dx+C)$

$$=\frac{1}{\cos x}(\int\sec x\cdot\cos xdx+C)=\frac{1}{\cos x}(x+C).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=0$, 故所求特解为 $y=x\sec x$.

(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi}=1$;

解 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$

$$=\frac{1}{x}(\int\frac{\sin x}{x}\cdot xdx+C)=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

由 $y|_{x=\pi}=1$, 得 $C=\pi-1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

解 $y=e^{-\int\cot xdx}(\int 5e^{\cos x}\cdot e^{\int\cot xdx}dx+C)$

$$=\frac{1}{\sin x}(\int 5e^{\cos x}\cdot\sin xdx+C)=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+C).$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$, 得 $C=1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+1)$.

(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8$, $y|_{x=0}=2$;

解　$y=e^{-\int 3dx}(\int 8\cdot e^{\int 3dx}dx+C)$

$$=e^{-3x}(8\int e^{3x}dx+C)=e^{-3x}(\frac{8}{3}e^{3x}+C)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x}.$$

由 $y|_{x=0}=2$, 得 $C=-\frac{2}{3}$, 故所求特解为 $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1$, $y|_{x=1}=0$.

解　$y=e^{-\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}(\int 1\cdot e^{\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}dx+C)$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}(\int\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}dx+C)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C).$$

由 $y|_{x=1}=0$, 得 $C=-\frac{1}{2e}$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{2}x^3(1-e^{\frac{1}{x^2}-1})$.

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点(x, y)处的切线斜率等于 $2x+y$.

解　由题意知 $y'=2x+y$, 并且 $y|_{x=0}=0$.

由通解公式得

$$y=e^{\int dx}(\int 2xe^{-\int dx}dx+C)=e^x(2\int xe^{-x}dx+C)$$

$$=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2.$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=2$, 故所求曲线的方程为 $y=2(e^x-x-1)$.

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一至、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解　由牛顿定律 $F=ma$, 得 $m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$, 即 $\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$.

由通解公式得

$$v=e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+C)=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\int\frac{k_1}{m}t\cdot e^{\frac{k_2}{m}t}dt+C)$$

$$=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+C).$$

由题意, 当 t=0 时 v=0, 于是得 $C=\frac{k_1 m}{k_2^2}$. 因此

$$v=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1 m}{k_2^2})$$

即 $$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

5. 设有一个由电阻 R=10Ω、电感 L=2h(亨)和电源电压 E=20sin5t V(伏)串联组成的电路. 开关 K 合上后, 电路中有电源通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 由回路电压定律知

$$20\sin 5t-2\frac{di}{dt}-10i=0,\ \text{即}\ \frac{di}{dt}+5i=10\sin 5t.$$

由通解公式得

$$i=e^{-\int 5dt}(\int 10\sin 5t\cdot e^{\int 5dt}dt+C)=\sin 5t-\cos 5t+Ce^{-5t}.$$

因为当 t=0 时 i=0, 所以 C=1. 因此

$$i=\sin 5t-\cos 5t+e^{-5t}=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin(5t-\frac{\pi}{4})\ (\text{A}).$$

6. 设曲 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面(x>0)内与路径无关, 其中 $f(x)$可导, 且 $f(1)$=1, 求 $f(x)$.

解 因为当 x>0 时, 所给积分与路径无关, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[2xf(x)-x^2],$$

即 $$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x,$$

或 $$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1.$$

因此 $$f(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}(\int 1e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\int\sqrt{x}dx+C)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

由 $f(1)$=1 可得 $C=\frac{1}{3}$, 故 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

7. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=\cos x-\sin x\text{，即 }\frac{d(y^{-1})}{dx}-y^{-1}=\sin x-\cos x\,.$$

$$y^{-1}=e^{\int dx}[\int(\sin x-\cos x)\cdot e^{-\int dx}dx+C]$$

$$=e^{-x}[\int(\cos x-\sin x)e^{x}dx+C]=Ce^{x}-\sin x\,,$$

原方程的通解为$\frac{1}{y}=Ce^{x}-\sin x$.

(2) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-3x\frac{1}{y}=x\text{，即 }\frac{d(y^{-1})}{dx}+3xy^{-1}=-x\,.$$

$$y^{-1}=e^{-\int 3xdx}[\int(-x)\cdot e^{\int 3xdx}dx+C]$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}(-\int xe^{\frac{3}{2}x^2}dx+C)$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}+C)=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}\,,$$

原方程的通解为$\frac{1}{y}=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}$.

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$;

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}\frac{1}{y^3}=\frac{1}{3}(1-2x)\text{，即 }\frac{d(y^{-3})}{dx}-y^{-3}=2x-1\,.$$

$$y^{-3}=e^{\int dx}[\int(2x-1)\cdot e^{-\int dx}dx+C]$$

$$=e^{x}[\int(2x-1)e^{-x}dx+C]=-2x-1+Ce^{x}\,,$$

原方程的通解为$\frac{1}{y^3}=Ce^{x}-2x-1$.

(4) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$;

解　原方程可变形为

$$\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y^4}=x\text{，即 }\frac{d(y^{-4})}{dx}+4y^{-4}=-4x\text{ .}$$

$$y^{-4}=e^{-\int 4dx}[\int(-4x)\cdot e^{\int 4dx}dx+C]$$

$$=e^{-4}(-4\int xe^{4x}dx+C)$$

$$=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}\text{ ,}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}$.

(5) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$.

解　原方程可变形为

$$\frac{1}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2}=(1+\ln x)\text{，即 }\frac{d(y^{-2})}{dx}+\frac{2}{x}y^{-2}=-2(1+\ln x)\text{ .}$$

$$y^{-2}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[-2\int(1+\ln x)\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}[-2\int(1+\ln x)x^2dx+C]$$

$$=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x\text{ ,}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^2}=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x$.

8. 验证形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的微分方程，可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

解　原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-yf(xy)}{xg(xy)}\text{ .}$$

在代换 $v=xy$ 下原方程化为

$$\frac{x\frac{dv}{dx}-v}{x^2}=-\frac{vf(v)}{x^2g(v)}\text{ ,}$$

即 $$\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du=\frac{1}{x}dx,$$

积分得 $$\int\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du=\ln x+C,$$

对上式求出积分后, 将 $v=xy$ 代回, 即得通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

(1) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$;

解 令 $u=x+y$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-1=u^2, \text{ 即 } dx=\frac{du}{1+u^2}.$$

两边积分得

$$x=\arctan u+C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x=\arctan(x+y)+C, \text{ 即 } y=-x+\tan(x-C).$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$;

解 令 $u=x-y$, 则原方程化为

$$1-\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1, \text{ 即 } dx=-udu.$$

两边积分得

$$x=-\frac{1}{2}u^2+C_1.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x=-\frac{1}{2}(x-y)^2+C_1, \text{ 即}(x-y)^2=-2x+C(C=2C_1).$$

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;

解 令 $u=xy$, 则原方程化为

$$x(\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2})+\frac{u}{x}=\frac{u}{x}\ln u, \text{ 即 } \frac{1}{x}dx=\frac{1}{u\ln u}du.$$

两边积分得

$$\ln x+\ln C=\ln\ln u, \text{ 即 } u=e^{Cx}.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$xy=e^{Cx}, \text{ 即 } y=\frac{1}{x}e^{Cx}.$$

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2 x-2\sin x-\cos x+1$;

解 原方程变形为

$$y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x.$$

令 $u=y+\sin x-1$，则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-\cos x=u^2-\cos x\text{，即}\frac{1}{u^2}du=dx.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{u}=x+C.$$

将 $u=y+\sin x-1$ 代入上式得原方程的通解

$$-\frac{1}{y+\sin x-1}=x+C\text{，即 } y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

(5) $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$.

解 原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(xy+1)}{x(1+xy+x^2y^2)}.$$

令 $u=xy$，则原方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}=-\frac{u(u+1)}{x^2(1+u+u^2)}\text{，即 }\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{x^2(1+u+u^2)}.$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}dx=(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u})du.$$

两边积分得

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln u.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln xy,$$

即 $$2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2(C=2C_1).$$

习题 12−5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程, 并求全微分方程的通解:

(1)$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$;

解 这里 $P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+4y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y (6x^2y+4y^2)dy=C,$$

即 $$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

(2)$(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$;

解 这里 $P=a^2-2xy-y^2$, $Q=-(x+y)^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x a^2dx-\int_0^y (x+y)^2dy=C,$$

即 $a^2x-x^2y-xy^2=C$.

(3)$e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$;

解 这里 $P=e^y$, $Q=xe^y-2y$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x e^0dx+\int_0^y (xe^y-2y)dy=C,$$

即 $xe^y-y^2=C$.

(4)$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

解 原方程变形为$(x\cos y+\cos x)dy-(y\sin x+\sin y)dx=0$.

这里 $P=-(y\sin x+\sin y)$, $Q=x\cos y+\cos x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 0dx+\int_0^y (x\cos y+\cos x)dy=C,$$

即 $x\sin y+y\cos x=C$.

解

(5) $(x^2-y)dx-xdy=0$;

解 这里 $P=x^2-y$, $Q=-x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x x^2dx-\int_0^y xdy=C,$$

即 $\frac{1}{3}x^3-xy=C$.

(6) $y(x-2y)dx-x^2dy=0$;

解 这里 $P=y(x-2y)$, $Q=-x^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x-4y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x,$$

所以此方程不是全微分方程.

(7) $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$;

解 这里 $P=1+e^{2\theta}$, $Q=2\rho e^{2\theta}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2e^{2\theta}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^\rho 2d\rho+\int_0^\theta 2\rho e^{2\theta}d\theta=C,$$

即 $\rho(e^{2\theta}+1)=C$.

(8) $(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

解 这里 $P=x^2+y^2$, $Q=xy$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y,$$

所以此方程不是全微分方程.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子, 并求其通解:

(1)$(x+y)(dx-dy)=dx+dy$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{x+y}$得

$$dx-dy=\frac{dx+dy}{x+y}\text{, 即 } d(x-y)=d\ln(x+y),$$

所以$\frac{1}{x+y}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x-y=\ln(x+y)+C.$$

(2)$ydx-xdy+y^2xdx=0$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0\text{, 即 } d(\frac{x}{y})+d(\frac{x^2}{2})=0,$$

所以$\frac{1}{y^2}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

(3)$y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$;

解 原方程变形为

$$xy^2dx-3y^3dx+dy-3x^2dy=0,$$

两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$并整理得

$$xdx+\frac{dy}{y^2}-(3ydx+3xdy)=0\text{, 即 } d(\frac{x^2}{2})-d(\frac{1}{y})-3d(xy)=0,$$

所以$\frac{1}{y^2}$为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C.$$

(4)$xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$;

解 方程两边同时乘以$\frac{1}{x^2+y^2}$得

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-dx=0\text{，即 }d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)]-dx=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$x^2+y^2=Ce^{2x}.$$

(5)$(x-y^2)dx+2xydy=0$;

解 原方程变形为

$$xdx-y^2dx+2xydy=0,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{x^2}$ 得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0\text{，即 }d(\ln x)+d(\frac{y^2}{x})=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2}$ 为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$\ln x+\frac{y^2}{x}=C\text{，即 }x\ln x+y^2=Cx.$$

(6)$2ydx-3xy^2dx-xdy=0$.

解 方程两边同时乘以 x 得

$$2xydx-x^2dy-3x^2y^2dx=0\text{，即 }yd(x^2)-x^2dy-3x^2y^2dx=0,$$

再除以 y^2 得

$$\frac{yd(x^2)-x^2dy}{y^2}-3x^2dx=0\text{，即 }d(\frac{x^2}{y}-x^3)=0$$

所以 $\frac{x}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子，并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{y}-x^3=0.$$

3. 验证 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是微分方程 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的积分因子，并求下列方程的通解:

解 方程两边乘以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 得

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}[yf(xy)dx+xg(xy)dy]=0,$$

这里 $P=\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}$，$Q=\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}$.

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{f(xy)g'(xy)-f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是原方程的一个积分因子.

(1) $y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0$;

解 这里 $f(xy)=x^2y^2+2$, $g(xy)=2-2x^2y^2$，所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{3x^3y^3}$ 得全微分方程

$$\frac{x^2+2}{3x^3y^2}dx+\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x\frac{x^2+2}{3x^3}dx+\int_1^y\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=C,$$

即 $\frac{1}{3}(\ln x-\ln y^2+1-\frac{1}{x^2y^2})=C$，或 $x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$.

(2) $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$.

解 这里 $f(x\,y)=2x\,y+1$, $g(x\,y)=1+2x\,y-x^3\,y^3$，所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{x^4y^4}$ 得全微分方程

$$\frac{2xy+1}{x^4y^3}dx+\frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{2x+1}{x^4}dx + \int_1^y \frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy = C,$$

即 $$\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{3x^3y^3} + \ln|y| = C.$$

4. 用积分因子法解下列一阶线性方程:

(1)$xy'+2y=4\ln x$;

解 原方程变为 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$，其积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2,$$

在方程 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$ 的两边乘以 x^2 得

$x^2y'+2xy=4x\ln x$，即$(x^2y)'=4x\ln x$,

两边积分得

$$x^2y = \int 4x\ln x dx = 2x^2\ln x - x^2 + C,$$

原方程的通解为 $y = 2\ln x - 1 + \frac{C}{x^2}$.

(2)$y'-\tan x\cdot y=x$.

解 积分因子为 $\mu(x) = e^{-\int \tan x dx} = \cos x$,

在方程的两边乘以 $\cos x$ 得

$\cos x\cdot y'-\sin x\cdot y = x\cos x$，即$(\cos x\cdot y)'=x\cos x$,

两边积分得

$$\cos x\cdot y = \int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C,$$

方程的通解为 $y = x\tan x + 1 + \frac{C}{\cos x}$.

习题 12−6

1. 求下列各微分方程的通解:

(1)$y''=x+\sin x$;

解 $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$,

$$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

(2)$y'''=xe^x$;

解 $y''=\int xe^x dx=xe^x-e^x+2C_1$,

$$y'=\int(xe^x-e^x+2C_1)dx=xe^x-2e^x+2C_1x+C_2,$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+2C_1x+C_2)dx=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3,$$

原方程的通解为

$$y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$;

解 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2.$$

(4)$y''=1+y'^2$;

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$p'=1+p^2$, 即 $\frac{1}{1+p^2}dp=dx$,

两边积分得

$\arctan p=x+C_1$, 即 $y'=p=\tan(x+C_1)$,

$$y=\int\tan(x+C_1)dx=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

(5)$y''=y'+x$;

解 令 $p=y'$，则原方程化为

$p'-p=x$,

由一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$p=e^{\int dx}(\int x\cdot e^{-\int dx}dx+C_1)=e^x(\int xe^{-x}dx+C_1)=C_1e^x-x-1,$$

即 $y'=C_1e^x-x-1$,

于是 $$y=\int(C_1e^x-x-1)dx=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2.$$

(6)$xy''+y'=0$;

解 令 $p=y'$，则原方程化为

$xp'+p=0$，即 $p'+\frac{1}{x}p=0$,

由一阶线性齐次方程的通解公式得

$$p=C_1e^{-\int\frac{1}{x}dx}=C_1e^{-\ln x}=\frac{C_1}{x},$$

即 $$y'=\frac{C_1}{x},$$

于是 $$y=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln x+C_2,$$

原方程的通解为

$y=C_1\ln x+C_2$.

(7)$yy''+'=y'^2$;

解 令 $p=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}+1=p^2，即 \frac{p}{p^2-1}dp=\frac{1}{y}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+\ln|C_1|\text{, 即 } p^2-1\pm C_1^2y^2.$$

当$|y'|=|p|>1$时，方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2}\text{ , 即 }\frac{1}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}dy=\pm dx\text{ ,}$$

两边积分得

$$\operatorname{arcsh}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_2\pm C_1x).$$

当$|y'|=|p|<1$时，方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1-C_1^2y^2}\text{ , 即 }\frac{1}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}dy=\pm dx\text{ ,}$$

两边积分得

$$\arcsin(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\sin(C_2\pm C_1x).$$

(8)$y^3y''-1=0$;

解　令$p=y'$，则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为

$$y^3p\frac{dp}{dy}-1=0\text{，即 } pdp=y^{-3}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1\text{，即 } p^2=-y^{-2}+C_1,$$

故　$$y'=\pm\sqrt{C_1-y^{-2}}\text{ , 即 }\frac{1}{\sqrt{C_1-y^{-2}}}dy=\pm dx\text{ ,}$$

两边积分得

$$\sqrt{C_1y^2-1}=\pm(C_1x+C_2)\text{ ,}$$

即原方程的通解为

$$C_1y^2=(C_1x+C_2)^2.$$

(9) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ 即 } pdp=\frac{1}{\sqrt{y}}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=2\sqrt{y}+2C_1, \text{ 即 } p^2=4\sqrt{y}+4C_1,$$

故 $$y'=\pm 2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}dy=\pm dx,$$

两边积分得原方程的通

$$x=\pm[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}]+C_2.$$

(10)$y''=y'^3+y'$.

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=p^3+p, \text{ 即 } p[\frac{dp}{dy}-(1+p^2)]=0.$$

由 $p=0$ 得 $y=C$, 这是原方程的一个解.

由 $\frac{dp}{dy}-(1+p^2)=0$ 得

$\arctan p=y-C_1$, 即 $y'=p=\tan(y-C_1)$,

从而 $$x+C_2=\int\frac{1}{\tan(y-C_1)}dy=\ln\sin(y-C_1),$$

故原方程的通解为

$$y=\arcsin e^{x+C_2}+C_1.$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y^3y''+1=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3 p\frac{dp}{dy}+1=0,\text{ 即 } pdp=-\frac{1}{y^3}dy,$$

两边积分得

$$p^2=\frac{1}{y^2}+C_1,\text{ 即 } y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}.$$

由 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$ 得 $C_1=-1$，从而 $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$，

分离变量得

$$\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=dx,$$

两边积分得

$$\pm\sqrt{1-y^2}=x+C_2,\text{ 即 } y=\pm\sqrt{1-(x+C_2)^2}.$$

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C_2=-1$，$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$，从而原方程的通解为

$$y=\sqrt{2x-x^2}.$$

(2)$y''-ay'^2=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$;

解 令 $p=y'$，则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0,\text{ 即 } \frac{1}{p^2}dp=adx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1,\text{ 即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

由 $y'|_{x=0}=-1$ 得 $C_1=1$，$y'=-\frac{1}{ax+1}$，两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$，故所求特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3)$y'''=e^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$;

解 $y''=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C_1$.

由 $y''|_{x=1}=0$ 得 $C_1=-\frac{1}{a}e^a$.

$$y'=\int(\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a)dx=\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a x+C_2 .$$

由 $y'|_{x=1}=0$ 得 $C_2=\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{a^2}e^a$.

$$y=\int(\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{1}{a}e^a x+\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{a^2}e^a)dx$$

$$=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{1}{2a}e^a x^2+\frac{1}{a}e^a x-\frac{1}{a^2}e^a x+C_3 .$$

由 $y|_{x=1}=0$ 得 $C_3=\frac{1}{a^2}e^a-\frac{1}{a}e^a+\frac{1}{2a}e^a-\frac{1}{a^3}e^a$，故所求特解为

$$y=\frac{e^{ax}}{a^3}-\frac{e^a x^2}{2a}+\frac{e^a(a-1)x}{a^2}-\frac{e^a(2a-a^2-2)}{2a^3} .$$

(4) $y''=e^{2y}$, $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

解 令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=e^{2y}\text{，即 } pdp=e^{2y}dy,$$

积分得

$$p^2=e^{2y}+C_1\text{，即 } y'=\pm\sqrt{e^{2y}+C_1} .$$

由 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$，故 $y'=\pm\sqrt{e^{2y}-1}$，从而

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2y}-1}}dy=\pm dx ,$$

积分得

$$-\arcsin e^{-y}=\pm x+C_2.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{2}$，故

$$e^{-y}=\sin(\mp x-\frac{\pi}{2})=\cos x ,$$

从而所求特解为 $y=-\ln\cos x$.

(5) $y''=3\sqrt{y}$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解 令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=3\sqrt{y}\text{，即 }pdp=3\sqrt{y}dy\text{，}$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+2C_1\text{，即 }y'=\pm 2\sqrt{y^{\frac{3}{2}}+C_1}\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得 $C_1=0$，$y'=2y^{\frac{3}{4}}$，从而 $y^{-\frac{3}{4}}dy=2dx$，

两边积分得

$$4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2\text{，即 }y=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}C_2)^4\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=4$，故原方程的特解为 $y=(\frac{1}{2}x+1)^4$.

(6)$y''+y'^2=1, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$.

解　令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=1\text{，即 }\frac{dp^2}{dy}+2p^2=2\text{，}$$

于是　$p^2=e^{-\int 2dy}(\int 2\cdot e^{\int 2dy}dy+C_1)=C_1e^{-2y}+1$，

即　$y'=\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+1}$.

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$，$y'=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$.

故　$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2y}}}dy=\pm dx$，

两边积分得

$$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x+C_2\text{.}$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$，$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x$，

从而得原方程的特解 $y=\ln\operatorname{ch} x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$且在此点与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 相切的积分曲线.

解　$y'=\frac{1}{2}x^2+C_1$，

$$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2.$$

由题意得 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

由 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$，再由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$，因此所求曲线为

$$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体，在空中由静止开始下落，如果空气阻力为 $R=c^2v^2$(其中 c 为常数，v 为物体运动的速度)，试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 以 $t=0$ 对应的物体位置为原点，垂直向下的直线为 s 正轴，建立坐标系.

由题设得

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt}=mg-c^2v^2 \\ s|_{t=0}=v|_{t=0}=0 \end{cases}.$$

将方程分离变量得

$$\frac{mdv}{mg-c^2v^2}=dt,$$

两边积分得

$$\ln\left|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}\right|=kt+C_1 \text{(其中 } k=\frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}}\text{)}$$

由 $v|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$，$\ln\left|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}\right|=kt$，即 $\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}=e^{kt}$.

因为 $mg>c^2v^2$，故 $cv+\sqrt{mg}=(\sqrt{mg}-cv)e^{kt}$，即

$$cv(1+e^{kt})=\sqrt{mg}(1-e^{kt}),$$

或 $$\frac{ds}{dt}=-\frac{\sqrt{mg}}{c}\cdot\frac{1-e^{kt}}{1+e^{kt}},$$

分离变量并积分得

$$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}+C_2.$$

由 $s|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$，故所求函数关系为

$$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}$$，即 $$s=\frac{m}{c^2}\ln\mathrm{ch}\left(c\sqrt{\frac{g}{m}}t\right).$$

习题 12−7

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1)x, x^2;

解 因为$\frac{x^2}{x}=x$不恒为常数, 所以 x, x^2 是线性无关的.

(2)$x, 2x$;

解 因为$\frac{2x}{x}=2$, 所以 $x, 2x$ 是线性相关的.

(3)$e^{2x}, 3e^{2x}$;

解 因为$\frac{3e^{2x}}{e^x}=3$, 所以 $e^{2x}, 3e^{2x}$ 是线性相关的.

(4)$e^{-x}; e^x$;

解 因为$\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$不恒为常数, 所以 $e^{-x}; e^x$ 是线性无关的.

(5)$\cos 2x, \sin 2x$;

解 因为$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$不恒为常数, 所以 $\cos 2x, \sin 2x$ 是线性无关的.

(6) e^{x^2}, $2xe^{x^2}$;

解 因为$\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}}=2x$不恒为常数, 所以$e^{x^2}$, $2xe^{x^2}$是线性无关的.

(7)$\sin 2x, \cos x\cdot\sin x$;

解 因为$\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}=2$, 所以 $\sin 2x, \cos x\cdot\sin x$ 是线性相关的.

(8)$e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$;

解 因为$\frac{e^x\sin 2x}{e^x\cos 2x}=\tan 2x$不恒为常数, 所以 $e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$ 是线性无关的.

(9)$\ln x, x\ln x$;

解 因为$\frac{x\ln x}{\ln x}=x$不恒为常数, 所以 $\ln x, x\ln x$ 是线性无关的.

(10)$e^{ax}, e^{bx}(a\neq b)$.

解 因为$\frac{e^{bx}}{e^{ax}}=e^{(b-a)x}$不恒为常数, 所以 e^{ax}, e^{bx} 是线性无关的.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''+\omega^2 y_1=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0,$$

$$y_2''+\omega^2 y_2=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0,$$

并且 $\frac{y_1}{y_2}=\cot\omega x$ 不恒为常数, 所以 $y_1=\cos\omega x$ 与 $y_2=\sin\omega x$ 是方程的线性无关解, 从而方程的通解为 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

提示: $y_1'=-\omega\sin\omega x, y_1''=-\omega^2\cos\omega x$; $y_2'=\omega\cos\omega x, y_1''=-\omega^2\sin\omega x$.

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-4x\cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2)\cdot e^{x^2}=0,$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}-4x\cdot(e^{x^2}+2x^2e^{x^2})+(4x^2-2)\cdot xe^{x^2}=0,$$

并且 $\frac{y_2}{y_1}=x$ 不恒为常数, 所以 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=2xe^{x^2}$ 是方程的线性无关解, 从而方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_2 2xe^{x^2}$.

提示: $y_1'=2xe^{x^2}$, $y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$;

$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$, $y_2''=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}$.

4. 验证:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1、C_2 是任意常数)是方程

$$y''-3y'+2y=e^{5x}$$

的通解;

解 令 $y_1=e^x, y_2=e^{2x}$, $y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$. 因为

$y_1''-3y_1'+2y_1'=e^x-3e^x+2e^x=0$,

$y_2''-3y_2'+2y_2'=4e^{2x}-3(2e^{2x}+2e^{2x}=0$,

且 $\frac{y_2}{y_1}=e^x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-3\cdot\frac{5}{12}e^{5x}+2\cdot\frac{1}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

所以 y^*是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的特解.

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解.

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ (C_1、C_2 是任意常数)是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解;

解 令 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x$, $y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$. 因为

$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0$,

$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0$,

且 $\frac{y_2}{y_1}=\tan 3x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''+9y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*\prime\prime}+9y^*=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x)+9\cdot\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以 y^*是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的特解.

因此 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解.

(3)$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$(C_1、C_2 是任意常数)是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解;

解 令 $y_1=x^2$, $y_2=x^2\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4\cdot x^2=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2\cdot(2\ln x+3)-3x\cdot(2x\ln x+x)+4\cdot x^2\ln x=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\ln x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的线性无关解, 从而 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 是方程的通解.

(4) $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ (C_1、C_2 是任意常数)是方程

$$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$$

的通解;

解 令 $y_1=x^5$, $y_2=\frac{1}{x}$, $y^*=-\frac{x^2}{9}\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5\cdot x^5=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\cdot\frac{2}{x^3}-3x\cdot(-\frac{1}{x^2})-5\cdot\frac{1}{x}=0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2}=x^6$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$x^2y^{*\prime\prime}-3xy^{*\prime}-5y^*$$

$$=x^2\cdot(-\frac{2}{9}\ln x-\frac{1}{3})-3x\cdot(-\frac{2x}{9}\ln x-\frac{x}{9})-5\cdot(-\frac{x^2}{9}\ln x)=x^2\ln x,$$

所以 y^*是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的特解.

因此 $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

(5) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$ (C_1、C_2 是任意常数)是方程

$$xy''+2y'-xy=e^x$$

的通解;

解 令 $y_1=\frac{1}{x}e^x$， $y_2=\frac{1}{x}e^{-x}$， $y^*=\frac{e^x}{2}$. 因为

$$xy_1''+2y_1'-xy_1=x\cdot(\frac{2e^x}{x^3}-\frac{2e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x})+2\cdot(-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x})-x\cdot\frac{e^x}{x}=0,$$

$$xy_2''+2y_2'-xy_2=x\cdot(\frac{2e^{-x}}{x^3}+\frac{2e^{-x}}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x})+2\cdot(-\frac{e^{-x}}{x^2}-\frac{e^{-x}}{x})-x\cdot\frac{e^{-x}}{x}=0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2}=e^{2x}$ 不恒为常数，所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $xy''+2y'-xy=0$ 的

线性无关解，从而 $Y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$xy^{*}{}''+2y^{*}{}'-xy^*=x\cdot\frac{e^x}{2}+2\cdot\frac{e^x}{2}-x\cdot\frac{e^x}{2}=e^x,$$

所以 y^*是方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的特解.

因此 $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$ 是方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解.

(6)$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$($C_1$、$C_2$、$C_3$、$C_4$ 是任意常数)是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

解 令 $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$, $y^*=-x^2$. 因为

$y_1^{(4)}-y_1=e^x-e^x=0$,

$y_2^{(4)}-y_2=e^{-x}-e^{-x}=0$,

$y_3^{(4)}-y_3=\cos x-\cos x=0$,

$y_4^{(4)}-y_4=\sin x-\sin x=0$,

并且

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以 $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$ 是方程 $y^{(4)}-y=0$ 的线性无关解，从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$ 是方程的通解.

又因为

$y^{*(4)}-y^*=0-(-x^2)=x^2$,

所以 $y^*=-x^2$ 是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的特解.

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$ 是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

提示:

令 $k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x=0$,

则 $k_1e^x-k_2e^{-x}-k_3\sin x+k_4\cos x=0$,

$k_1e^x+k_2e^{-x}-k_3\cos x-k_4\sin x=0$,

$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\sin x-k_4\cos x=0$.

上述等式构成的齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以方程组只有零解, 即 $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$ 线性无关.

习题 12−8

1. 求下列微分方程的通解:

(1)$y''+y'-2y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+r-2=0,\ \text{即}(r+2)(r-1)=0,$$

其根为 $r_1=1$, $r_2=-2$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2)$y''-4y'=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,\ \text{即}\ r(r-4)=0,$$

其根为 $r_1=0$, $r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3)$y''+y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_1=i$, $r_2=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4)$y''+6y'+13y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+6r+13=0,$$

其根为 $r_1=-3-2i$, $r_2=-3+2i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2-20r+25=0,\ \text{即}(2x-5)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2xe^{\frac{5}{2}t},\ \text{即}\ x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6)$y''-4y'+5y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+5=0,$$

其根为 $r_1=2-i$, $r_2=2+i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(7)$y^{(4)}-y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-1=0, \text{ 即}(r-1)(r+1)(r^2+1)=0$$

其根为 $r_1=1$, $r_2=-1$, $r_1=-i$, $r_2=i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(8)$y^{(4)}+2y''+y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+r^2+1=0, \text{ 即}(r^2+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=-i$, $r_3=r_4=i$, 故微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

(9)$y^{(4)}-2y'''+y''=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+r^2=0, \text{ 即 } r^2(r-1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=0$, $r_3=r_4=1$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x.$$

(10)$y^{(4)}+5y''-36=0$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+5r^2-36=0,$$

其根为 $r_1=2$, $r_2=-2$, $r_3=3i$, $r_4=-3i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+ C_3\cos3x+C_4\sin3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)$y''-4y'+3y=0$, $y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+3=0, \text{ 即}(r-1)(r-3)=0,$$

其根为 $r_1=1$, $r_2=3$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

由 $y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$, 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=6 \\ C_1+3C_2=10 \end{cases},$$

解之得 $C_1=4$, $C_2=2$. 因此所求特解为

$$y=4e^x+2e^{3x}.$$

(2)$4y''+4y'+y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2+4r+1=0, \text{ 即}(2r+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x).$$

由 $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$, 得

$$\begin{cases} C_1=2 \\ -\frac{1}{2}C_1+C_2=0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=2$, $C_2=1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x).$$

(3)$y''-3y'-4y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r-4=0, \text{ 即}(r-4)(r+1)=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

由 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-5$, 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ -C_1+4C_2=-5 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1$, $C_2=-1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

(4)$y''+4y'+29y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=15$;

解 微分方程的特征方程为

$r^2+4r+29=0$,

其根为 $r_{1,2}=-2\pm5i$，故微分方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x).$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_1=0$, $y=C_2e^{-2x}\sin5x$.

由 $y'|_{x=0}=15$，得 $C_2=3$.

因此所求特解为 $y=3e^{-2x}\sin5x$.

(5)$y''+25y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+25=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm5i$，故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos5x+C_2\sin5x.$$

由 $y|_{x=0}=2$，得 $C_1=2$, $y=2\cos5x+C_2\sin5x$.

由 $y'|_{x=0}=5$，得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=2\cos5x+\sin5x$.

(6)$y''-4y'+13y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=3$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+13=0,$$

其根为 $r_{1,2}=2\pm3i$，故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_1=0$, $y=C_2e^{2x}\sin3x$.

由 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=e^{2x}\sin3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$)而方向与初速一至．又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$)．求反映这质点的运动规律的函数.

解 设数轴为 x 轴, v_0 方向为正轴方向．由题意得微分方程

$$x''=k_1x-k_2x'，即 x''+k_2x'-k_1x=0,$$

其初始条件为 $x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$.

微分方程的特征方程为

$$r^2+k_2r-k_1=0,$$

其根为 $r_1=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$, $r_2=\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$ ，故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}+C_2e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}.$$

由 $x|_{t=0}=0, x'|_{t=0}=v_0$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\C_1r_1+C_2r_2=v_0\end{cases}$ ，解之得

$$C_1=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\text{，}\ C_2=-\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}.$$

因此质点的运动规律为

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}(e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}-e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}).$$

4. 在如图所示的电路中先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B，求电压 $u_c(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 E=20V，C=0.5×10^{-6}F(法)，L=0.1H(亨)，R=2000Ω.

解 由回路电压定律得

$$E=L\frac{di}{dt}-\frac{q}{C}-Ri=0.$$

由于 $q=Cu_c$，故 $i=\frac{dq}{dt}=Cu_c'$ ，$\frac{di}{dt}=Cu_c''$ ，所以

$$-LCu_c''-u_c-RCu_c'=0\text{，即 }u_c''+\frac{R}{L}u_c'+\frac{1}{LC}u_c=0.$$

已知 $\frac{R}{L}=\frac{2000}{0.1}=2\times10^4$ ，$\frac{1}{LC}=\frac{1}{0.1\times0.5\times10^{-6}}=\frac{1}{5}\times10^8$ ，故

$$u_c''+2\times10^4u_c'+\frac{1}{5}\times10^8u_c=0.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2+2\times10^4r+\frac{1}{5}\times10^8=0,$$

其根为 $r_1=-1.9\times10^4$, $r_2=-10^3$, 故微分方程的通解为

$$u_c=C_1e^{-1.9\times10^4t}+C_2e^{-10^3t}.$$

由初始条件 $t=0$ 时, $u_c=20$, $u_c'=0$ 可得 $C_1=-\frac{10}{9}$, $C_2=\frac{190}{9}$.

因此所求电压为

$$u_c(t)=\frac{10}{9}(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t})\,(\mathrm{V}).$$

所求电流为

$$i(t)=\frac{19}{18}\times10^{-2}(e^{-1.9\times10^4t}-e^{-10^3t})\,(\mathrm{A}).$$

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2s, 求浮筒的质量.

解 设 ρ 为水的密度, S 为浮筒的横截面积, D 为浮筒的直径, 且设压下的位移为 x(如图所示), 则

$$f=-\rho gS\cdot x.$$

又 $f=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$, 因而

$$-\rho gS\cdot x=m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ 即 } m\frac{d^2x}{dt^2}+\rho gSx=0.$$

微分方程的特征方程为 $mr^2+\rho gS=0$, 其根为

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}i,$$

故微分方程的通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t,$$

即
$$x=A\sin(\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+\varphi).$$

由此得浮筒的振动的频率为 $\omega=\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$.

因为周期为 T=2，故 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}=2$， $m=\frac{\rho gS}{\pi^2}$.

由 ρ=1000kg/m^3, g=9.8m/s^2, D=0.5m，得

$$m=\frac{\rho gS}{\pi^2}=\frac{1000\times 9.8\times 0.5^2}{4\pi}=195\text{km} .$$

习题 12−9

1. 求下列各微分方程的通解:

(1)$2y''+y'-y=2e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2+r-1=0,$$

其根为 $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}.$$

因为 $f(x)=2e^x$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x,$$

代入原方程得

$$2Ae^x+Ae^x-Ae^x=2e^x,$$

解得 $A=1$, 从而 $y^*=e^x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(2)$y''+a^2y=e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+a^2=0,$$

其根为 $r=\pm ai$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

因为 $f(x)=e^x$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x,$$

代入原方程得

$$Ae^x+a^2Ae^x=e^x,$$

解得 $A=\frac{1}{1+a^2}$, 从而 $y^*=\frac{e^x}{1+a^2}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3)$2y''+5y'=5x^2-2x-1$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2+5r=0,$$

其根为 $r_1=0$, $r_2=-\dfrac{5}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因为 $f(x)=5x^2-2x-1$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax^2+Bx+C),$$

代入原方程并整理得

$$15Ax^2+(12A+10B)x+(4B+5C)=5x^2-2x-1,$$

比较系数得 $A=\dfrac{1}{3}$, $B=-\dfrac{3}{5}$, $C=\dfrac{7}{25}$, 从而 $y^*=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{7}{25}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(4)$y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+3r+2=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因为 $f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax+B)e^{-x},$$

代入原方程并整理得

$$2Ax+(2A+B)=3x,$$

比较系数得 $A=\dfrac{3}{2}$, $B=-3$, 从而 $y^*=e^{-x}(\dfrac{3}{2}x^2-3x)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x).$$

(5)$y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根为 $r_{1,2}=1\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因为 $f(x)=e^x\sin 2x$, $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

代入原方程得

$$e^x[4B\cos 2x-4A\sin 2x]=e^x\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6)$y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-6r+9=0,$$

其根为 $r_1=r_2=3$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因为 $f(x)=(x+1)e^{3x}$, $\lambda=3$ 是特征方程的重根,

故原方程的特解设为

$$y^*=x^2e^{3x}(Ax+B),$$

代入原方程得

$$e^{3x}(6Ax+2B)=e^{3x}(x+1),$$

比较系数得 $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^{3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2).$$

(7)$y''+5y'+4y=3-2x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+5r+4=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

因为 $f(x)=3-2x=(3-2x)e^{0x}$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ax+B,$$

代入原方程得

$$4Ax+(5A+4B)=-2x+3,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{11}{8}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}.$$

(8)$y''+4y=x\cos x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r=\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为 $f(x)= x\cos x=e^{0x}(x\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$, $\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根, 故原方程的特解设为

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

代入原方程得

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx-2A+3D)\sin x=x\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=0$, $C=0$, $D=\frac{2}{9}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x.$$

(9) $y''+y=e^x+\cos x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=\cos x$, 而

方程 $y''+y=e^x$ 具有 Ae^x 形式的特解;

方程 $y''+y=\cos x$ 具有 $x(B\cos x+C\sin x)$形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x),$$

代入原方程得

$$2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x.$$

(10) $y''-y=\sin^2 x$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 而

方程 $y''-y=\frac{1}{2}$ 的特解为常数 A;

方程 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ 具有 $B\cos 2x+C\sin 2x$ 形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=A+B\cos 2x+C\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-A-5B\cos 2x-5C\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{10}$, $C=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1)$y''+y+\sin x=0$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=-\sin 2x=e^{0x}(0\cdot\cos 2x-\sin 2x)$, $\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x,$$

解得 $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}\sin 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

由 $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$ 得 $C_1=-1$, $C_2=-\frac{1}{3}$,

故满足初始条件的特解为

$$y=-\cos x+-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2)$y''-3y'+2y=5$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r+2=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

容易看出 $y^*=\frac{5}{2}$ 为非齐次方程的一个特解,

故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2+\frac{5}{2}=1\\ C_1+2C_2=2\end{cases},$$

解之得 $C_1=-5$, $C_2=\frac{7}{2}$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=-5_1e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

(3)$y''-10y'+9y=e^{2x}$, $y|_{x=0}=\frac{6}{7}$, $y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-10r+9=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=9$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

因为 $f(x)=e^{2x}$, $\lambda=2$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^{2x},$$

代入原方程得

$$(4A-20A+9A)e^{2x}=e^{2x},$$

解得 $A=-\frac{1}{7}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

由 $y|_{x=0}=\frac{6}{7}$, $y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4)$y''-y=4xe^x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1, r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=4xe^x$, $\lambda=1$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(Ax+B),$$

代入原方程得

$$(4Ax+2A+2B)e^x=4xe^x,$$

比较系数得 $A=1, B=-1$, 从而 $y^*=xe^x(x-1)$.

因此, 原方程的通解为

$$y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x(x-1).$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1-C_2-1=1\end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=e^{-x}-e^x+xe^x(x-1).$$

(5) $y''-4y'=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,$$

其根为 $r_1=0, r_2=4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}.$$

因为 $f(x)=5=5e^{0\cdot x}$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ax,$$

代入原方程得

$$-4A=5,\ \ A=-\frac{5}{4},$$

从而 $y^*=-\dfrac{5}{4}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=\dfrac{11}{16},\ \ C_2=\dfrac{5}{16}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角α、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 弹道运动的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g\\ \dfrac{dx}{dt}=0\end{cases},$$

且满足初始条件

$$\begin{cases}y|_{t=0}=0,\ y'|_{t=0}=v_0\sin\alpha\\ x|_{t=0}=0,\ x'|_{t=0}=v_0\cos\alpha\end{cases}.$$

易得满足方程和初始条件的解(弹道曲线)为

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}.$$

4. 在 R、L、C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 E=20V, C=0.2μF(微法), L=0.1H(亨), R=1000Ω, 试求合上开关 K 后电流 $i(t)$及电压 $u_c(t)$.

解 (1)列方程. 由回路定律可知

$$L\cdot C\cdot u_c''+R\cdot C\cdot u_c'+u_c=E,$$

即 $$u_c''+\frac{R}{L}u_c'+\frac{1}{LC}u_c=\frac{E}{LC},$$

且当 t=0 时, u_c=0, u_c'=0.

已知 R=1000Ω, L=0.1H, C=0.2μF, 故

$$\frac{R}{L}=\frac{1000}{0.1}=10^4,$$

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{0.1\times0.2\times10^{-6}}=5\times10^7,$$

$$\frac{E}{LC}=5\times10^7E=5\times10^7\times20=10^9.$$

因此微分方程为$u_c''+10^4u_c'+5\times10^7u_c=10^9$.

(2)解方程. 微分方程的特征方程为 $r^2+10^4r+5\cdot10^7=0$,

其根为 $r_{1,2}=-5\times10^3\pm5\times10^3i$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$u_c=e^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3)t+C_2\sin(5\times10^3)t].$$

由观察法易知 $y^*=20$ 为非齐次方程的一个特解.

因此非齐次方程的通解为

$$u_c=e^{-5\times10^3t}[C_1\cos(5\times10^3)t+C_2\sin(5\times10^3)t]+20\,.$$

由 $t=0$ 时, $u_c=0$, $u_c'=0$, 得 $C_1=-20$, $C_2=-20$. 因此

$$u_c=20-20e^{-5\times10^3t}[\cos(5\times10^3)t+\sin(5\times10^3)t]\,(\mathrm{V}),$$

$$i(t)=Cu_c'=0.2\times10^{-6}u_c'=4\times10^{-2}e^{-5\times10^3t}\sin(5\times10^3t)]\,(\mathrm{A}).$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间:

(1)若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

解 设在时刻 t 时, 链条上较长的一段垂下 xm, 且设链条的密度为 ρ, 则向下拉链条下滑的作用力

$$F=x\rho g-(20-x)\rho g=2\rho g(x-10).$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x''=2\rho g(x-10),\ \text{即}\ x''-\frac{g}{10}x=-g\,.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2-\frac{g}{10}=0\,,$$

其根为 $r_1=-\sqrt{\frac{g}{10}}\,,r_2=\sqrt{\frac{g}{10}}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}\,.$$

由观察法易知 $x^*=10$ 为非齐次方程的一个特解, 故通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10\,.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=1$. 因此特解为

$$x=e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10\,.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}=10\,,$

解之得所需时间

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})\text{ s}.$$

(2)若摩擦力为 1m 长的链条的重量.

解　此时向下拉链条的作用力变为

$F=x\rho g-(20-x)\rho g-1\rho g=2\rho gx-21\rho g$

由牛顿第二定律, 有

$20\rho x''=2\rho gx-21\rho g$, 即 $x''-\frac{g}{10}x=-1.05g$.

微分方程的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{3}{4}$. 因此特解为

$$x=\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})+10.5.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})=9.5$,

解之得所需时间

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(\frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{22}}{3})\text{ s}.$$

6. 设函数 $\varphi(x)$连续, 且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt,$$

求 $\varphi(x)$.

解　等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt,$$

再求导得微分方程

$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x)$, 即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$.

微分方程的特征方程为

$r^2+1=0$,

其根为 $r_{1,2}=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x$.

易知$\varphi^*=\frac{1}{2}e^x$是非齐次方程的一个特解,

故非齐次方程的通解为

$$\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x.$$

由所给等式知$\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=1$, 由此得$C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此

$$\varphi=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x).$$

习题 12−11

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1)$y'-xy-x=1$;

解 设方程的解为 $y=a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-a_0x-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}-x=1,$$

即 $$(a_1-1)+(2a_2-a_0-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)a_{n+2}-a_n]x^{n+1}=0.$$

可见 $a_1-1=0$, $2a_2-a_0-1=0$, $(n+2)a_{n+2}-a_n=0(n=1, 2, \cdots)$,

于是 $a_1=1$, $a_2=\frac{1+a_0}{2}$, $a_3=\frac{1}{3!!}$, $a_4=\frac{1+a_0}{4!!}$, $\cdots$,

$$a_{2k-1}=\frac{1}{(2k-1)!!},\ a_{2k}=\frac{1+a_0}{(2k)!!},\cdots.$$

所以 $$y=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}+\frac{1+a_0}{(2k)!!}x^{2k}]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}+(1+a_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{x^2}{2})^k$$

$$=-1+(1+a_0)e^{\frac{x^2}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1},$$

即原方程的通解为 $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}$.

(2)$y''+xy'+y=0$;

解 设方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即 $$a_0+2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n]x^n=0,$$

于是 $$a_2=-\frac{1}{2}a_0,\ a_3=-\frac{1}{3}a_1,\ \cdots,\ a_{2k-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}a_1,\ a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!!}a_0,\ \cdots.$$

所以 $$y=a_0+a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!}x^{2k}+\frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!!}x^{2k+1}]$$

$$=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!!}(-\frac{x^2}{2})^k+a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1}$$

$$=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1},$$

即原方程的通解为

$$y=C_1e^{-\frac{x^2}{2}}+C_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k-1}.$$

(3)$xy''-(x+m)y'+my=0$(m 为自然数);

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(x+m)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即 $$m(a_0-a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n-m)a_{n+1}-(n-m)a_n]x^n=0.$$

可见 $(a_0-a_1)m=0,\ (n-m)[(n+1)a_{n+1}-a_n]=0\ (n\neq m)$,

于是 $a_0=a_1,\ a_n=\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)}\ (n\geq m+2),\ a_n=\frac{1}{n!}a_1\ (n\leq m).$

所以 $$y=a_0+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_0}{n!}x^n+a_{m+1}x^{m+1}+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)}x^n$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+a_{m+1}x^{n+1}+(m+1)!a_{m+1}\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+(m+1)!a_{m+1}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+(m+1)!a_{m+1}(e^x-\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!})$$

$$=(m+1)!a_{m+1}e^x+[a_0-(m+1)!a_{m+1}]\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!},$$

即原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\text{ (其中 }C_1, C_2\text{ 为任意常数).}$$

(4)$(1-x)y'=x^2-y$;

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即 $$a_1+a_0+2a_2x+(3a_3-a_2-1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n+a_n]x^n=0.$$

可见 $a_1+a_0=0$, $2a_2=0$, $3a_3-a_2-1=0$, $(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0(n\geq3)$,

于是 $a_1=-a_0$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$ $(n\geq4)$.

因此原方程的通解为

$$y=C(1-x)+\frac{1}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}x^n\text{ (}C=a_0\text{ 为任意常数). .}$$

(5)$(x+1)y'=x^2-2x+y$.

解 设方程的解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，代入方程得

$$(x+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = x^2 - 2x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

即 $$-a_0 + a_1 + 2(1+a_2)x + (a_2 + 3a_3 - 1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n-1)a_n + (n+1)a_{n+1}]x^n = 0.$$

于是 $a_1=a_0$, $a_2=-1$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_n = -\frac{n-2}{n} a_{n-1} = (-1)^{n-3} \frac{4}{n(n-1)} (n \ge 4)$.

因此原方程的通解为

$$y = C(1+x) - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-3} \frac{4}{n(n-1)} x^n \ (C=a_0 \text{ 为任意常数}).$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的解:

(1) $y'=y^2+x^3$, $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$;

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = (\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n)^2 + x^3,$$

即 $$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1} = x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3)x^4 + \cdots.$$

比较两边同次幂的系数得

$$a_1 = \frac{1}{4}, \ 2a_2=a_1, \ 3a_3=a_2+a_1^2, \ 4a_4=a_3+2a_1a_2+1, \cdots,$$

于是 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{1}{16}$, $a_4 = \frac{9}{32}$, $\cdots$.

因此所求特解为

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots.$$

(2) $(1-x)y'+y=1+x$, $y|_{x=0}=0$;

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即 $$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数得

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\ (n\geq 3).$$

因此所求特解为

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n.$$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$的和函数为$(1-x)\ln(1-x)+x$，所以特解还可以写成

$y=2x+(1-x)\ln(1-x)+x$.

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0$, $x|_{t=0}=a$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

解 根据初始条件，可设方程的解为$x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n$.

将$x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n$，$\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$和$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+(a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=0.$$

将级数展开、整理合并同次项，并比较系数得

$$a_0=a,\ a_1=0,\ a_2=-\frac{a}{2!},\ a_3=0,\ a_4=\frac{2a}{4!},$$

$$a_5=0,\ a_6=-\frac{9a}{6!},\ a_7=0,\ a_8=\frac{55a}{8!},\cdots.$$

故所求特解为

$$x=a(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8+\cdots.$$

总习题十二

1. 填空:

(1)$xy'''+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$ 是______阶微分方程;

解 是3阶微分方程.

(2)若 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 是全微分方程, 则函数 M、N 应满足______;

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

(3)与积分方程 $y=\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ 等价的微分方程初值问题是______;

解 方程两边对 x 求导得 $y'=f(x, y)$. 显然当 $x=x_0$ 时, $y=0$.

因此与积分方程等价的微分方程初值问题是

$$y'=f(x, y),\ \ y|_{x=x_0}=0.$$

(4)已知 $y=1$、$y=x$、$y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为______.

解 容易证明非齐次线性微分方程的任意两个解的差是对应齐次线性微分方程的的解. 因此 $y_1=x-1$ 和 $y_2=x^2-1$ 都是对应齐次线性微分方程的的解. 显然 y_1 与 y_2 是线性无关. 所以非齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1.$$

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1)$(x+C)^2+y^2=1$(其中 C 为任意常数);

解 将等式变形

$$x+C=\pm\sqrt{1-y^2},$$

两边对 x 求导得

$$1=\pm\frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}},$$

从而 $1-y^2=y^2y'^2$, 即所求微分方程为 $y^2(1+y'^2)=1$.

(2)$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$(其中 C_1、C_2 为任意常数).

解 两边对 x 求导得

$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}=y+C_2e^{2x},$$

即　　$y'=y+C_2e^{2x}, \cdots(1)$

再求导得

$$y''=y'+2C_2e^{2x}. \quad \cdots(2)$$

(2)−(1)×2 得

$$y''-2y'=y'-2y,$$

即所求微分方程为 $y''-3y'+2y=0$.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$;

解　将方程变形为

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2x}\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 即 } (\sqrt{y})'+\frac{1}{2x}\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

其通解为

$$\sqrt{y}=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}(\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}(x+C),$$

即原方程的通解为 $y=\frac{(x+C)^2}{x}$.

(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$;

解　将方程变形为

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=a(1+\frac{1}{\ln x}),$$

其通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}[\int a(1+\frac{1}{\ln x})e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C]=\frac{1}{\ln x}(ax\ln x+C),$$

即原方程的通解为 $y=ax+\frac{C}{\ln x}$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$;

解　将方程变形为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y},$$

其通解为

$$x=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C)=\frac{1}{y^2}(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C),$$

即原方程的通解为 $x=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$.

(4) $\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$;

解 将方程变形为

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3\text{, 即 }\frac{d(y^{-2})}{dx}-2xy^{-2}=-2x^3,$$

其通解为

$$y^{-2}=e^{\int 2xdx}[\int(-2x^3)e^{-\int 2xdx}dx+C)=e^{x^2}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C),$$

即原方程的通解为 $y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$.

(5) $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$;

解 因为

$$xdx+ydy=d(\frac{x^2+y^2}{2}),$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}d(\frac{x}{y})=d(\arctan\frac{x}{y}),$$

所以原方程可写成

$$d(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\arctan\frac{x}{y})=0,$$

从而原方程的通解为

$$x^2+y^2+2\arctan\frac{x}{y}=C.$$

(6) $yy''-y'^2-1=0$;

解 令 $y'=p$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2-1=0,$$

或 $$\frac{d(p^2)}{dy}-\frac{2}{y}p^2=\frac{2}{y},$$

其通解为

$$p^2=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(\int\frac{2}{y}e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right)=y^2(-y^{-2}+C)=Cy^2-1.$$

于是 $y'=\pm\sqrt{Cy^2-1}$, 即 $\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\pm dx$ ($C=C_1^2$),

积分得

$$\ln(C_1y+\sqrt{(C_1y)^2-1})=\pm x+C_2,$$

化简得原方程的通解 $y=\frac{1}{C_1}\mathrm{ch}(\pm x+C_2)$.

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$;

解 齐次方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+5=0$,
其根为 $r_{1,2}=-1\pm 2i$.

因为 $f(x)=\sin 2x$, $\lambda+\omega i=2i$ 不是特征方程的根,
所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

代入原方程得

$$(A+2B)\cos 2x+(B-4A)\sin 2x=\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{4}{17}$, $B=\frac{1}{17}$, $y^*=-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$.

因此原方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$;

解 齐次方程 $y'''+y''-2y'=0$ 的特征方程为 $r^3+r^2-2r=0$,
其根为 $r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=2$.

齐次方程 $y'''+y''-2y'=0$ 的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}$.

原方程中 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)=xe^x$, $f_2(x)=4x$.

对于方程 $y'''+y''-2y'=xe^x$, 因为$\lambda=1$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_1^*=x(Ax+B)e^x,$$

代入 $y'''+y''-2y'=xe^x$ 得

$$(6Ax+8A+3b)e^x=xe^x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{4}{9}$, 故 $y_1^*=x(\frac{1}{6}x-\frac{4}{9})e^x$.

对于方程 $y'''+y''-2y'=4x$, 因为$\lambda=0$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_2^*=x(Cx+D),$$

代入 $y'''+y''-2y'=4x$ 得

$$-4Cx+2C-2D=4x,$$

比较系数得 $C=-1$, $D=-1$, 故 $y_2^*=x(-x-1)$.

因此原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x)e^x-x^2-x.$$

(9) $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$;

解 将原方程变形为

$$x\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x^2=-y^3, \text{ 或 } \frac{d(x^2)}{dy}-\frac{6}{y}x^2=-2y^3,$$

其通解为

$$x^2=e^{\int\frac{6}{y}dy}[\int(-2y^3)e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy+C]=y^6(y^{-2}+C),$$

即原方程的通解为 $x^2=y^4+Cy^6$.

(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解 令 $u=\sqrt{x^2+y}$，则 $y=u^2-x^2$，$\frac{dy}{dx}=2u\frac{du}{dx}-2x$，故原方程化为

$$2u\frac{du}{dx}-x=u\text{，即 }\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}(\frac{x}{u})+\frac{1}{2}.$$

这是齐次方程，因此令 $\frac{u}{x}=z$，则 $u=xz$，$\frac{du}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$，则上述齐次方程化为

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}\text{，即 }x\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}(2z-\frac{1}{z}-1),$$

分离变量得

$$\frac{zdz}{2z^2-z-1}=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

积分得 $\frac{1}{6}\ln(2z^3-3z^2+1)=-\frac{1}{2}\ln x+C_1$，

即 $2z^3-3z^2+1=Cx^{-3}\,(C=e^{6C_1})$.

将 $z=\frac{u}{x}$ 代入上式得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C,$$

再代入 $u=\sqrt{x^2+y}$，得原方程的通解 $2\sqrt{(x^2+y)^3}-2x^3-3xy=C$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$, $x=1$ 时 $y=1$;

解 原方程变形为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2,$$

即 $$x^{-2}\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x^{-1}=-\frac{2}{y^3},$$

或 $$\frac{d(x^{-1})}{dy}+\frac{2}{y}x^{-1}=\frac{2}{y^3},$$

其通解为

$$x^{-1}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}}dy+C)=\frac{1}{y^2}(2\ln y+C),$$

即原方程的通解为

$$y^2=x(2\ln y+C).$$

由 $y|_{x=1}=1$, 得 $C=1$. 故满足所给初始条件的特解为 $y^2=x(2\ln y+1)$.

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=-1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0.$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p^2}=adx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1,\text{ 即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

代入初始条件 $y'(0)=-1$ 得 $C_1=1$,

故 $$y'=-\frac{1}{ax+1}.$$

方程两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初始条件 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$2p\frac{dp}{dy}-\sin 2y=0.$$

分离变量得

$$2pdp=\sin 2ydy,$$

两边积分得

$$p^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+C_1.$$

代入初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$,

因而 $y'^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+\frac{1}{2}=\sin^2 y$,

即 $y'=\sin y$.

分离变量得

$$\frac{dy}{\sin y}=dx ,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=x+C_2 .$$

代入初始条件 $y(0)=\frac{\pi}{2}$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}$.

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

解 齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其根为 $r_{1, 2}=-1$.

齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因为 $f(x)=\cos x$, $\lambda+\omega i=i$ 不是特征方程的根, 所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入原方程得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x,$$

比较系数得 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$. 故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$. 从而原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x \quad .$$

将初始条件代入通解得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ -C_1+C_2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} ,$$

解之得 $C_1=0$, $C_2=1$.

因此满足所给初始条件的特解为$y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

5. 已知某曲线经过点(1, 1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

解 设点(x, y)为曲线上任一点, 则曲线在该点的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

其在纵轴上的截距为$y-xy'$, 因此由已知有

$$y-xy'=x, \text{ 即 } y'-\frac{1}{x}y=-1.$$

这是一个一阶线性方程, 其通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=x(-\ln x+C),$$

即方程的通解为$y=x(C-\ln x)$.

由于曲线过点(1, 1), 所以$C=1$.

因此所求曲线的方程为$y=x(1-\ln x)$.

6. 已知某车间的容积为$30\times30\times6\text{m}^3$, 其中的空气含0.12%的$CO_2$(以容积计算). 现以含$CO_2$0.04%的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在30min后使车间空气中CO_2的含量不超过0.06%?(假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出).

解 设每分钟应输入的空气为a m^3, t时刻车间中CO_2的浓度为$x(t)$, 则车间中CO_2的含量(以体积计算)在t时刻经过dt min的改变量为

$$30\times30\times6\,dx=0.0004adt-axdt,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x-0.0004}dx=-\frac{a}{5400}dt,$$

由于$x>0.0004$, 故两边积分得

$$\ln(x-0.0004)=-\frac{a}{5400}t+\ln C,$$

即 $$x=0.0004+Ce^{-\frac{a}{5400}t}.$$

由于开始时车间中的空气含0.12%的CO_2, 即当$t=0$时, $x=0.0012$, 代入上式得$C=0.0008$. 因此$x=0.0004+0.0008e^{-\frac{a}{5400}t}$.

由上式得 $a=-\frac{5400}{t}\ln\frac{x-0.004}{0.0008}$.

由于要求 30min 后车间中 CO_2 的含量不超过 0.06%, 即当 t=30 时, $x\le 0.0006$, 将 t=30, x=0. 0006 代入上式得 a=180ln 4≈250.

因为 $x'=-\frac{0.0008}{5400}e^{-\frac{a}{5400}t}<0$, 所以 x 是 a 的减函数, 考试当 $a\ge 250$ 时可保证 x≤0.0006.

因此每分钟输入新鲜空气的量不得小于 250m^3.

7. 设可导函数$\varphi(x)$满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t dt=x+1,$$

求$\varphi(x)$.

解 在等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x+2\varphi(x)\sin x=1,$$

即 $$\varphi'(x)+\tan x\varphi(x)=\sec x.$$

这是一个一阶线性方程, 其通解为

$$\varphi(x)=e^{-\int\tan x dx}(\int\sec x e^{\int\tan x dx}dx+C)$$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x.$$

在已知等式中, 令 x=0 得$\varphi(0)$=1, 代入通解得 C=1. 故$\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

8. 设函数 $u=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $f(r)$二阶可导, 且 $f(1)=f'(1)=1$. 试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程, 并求 $f(r)$.

解 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$,

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}f'(r)+\frac{x}{r}f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f'(r).$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f'(r),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f'(r).$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}f'(r)$$

$$=\frac{2r^2}{r^3}f'(r)+f'(r)=\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}.$$

因此拉普拉斯方程化为

$$\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}=0,\ \text{即}\ \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0.$$

令 $\dfrac{du}{dr}=p(r)$，则以上方程进一步变成

$$\frac{2}{r}p+\frac{dp}{dr}=0,\ \text{即}\ \frac{dp}{dr}+\frac{2}{r}p=0,$$

其通解为

$$p=C_1e^{-\int\frac{2}{r}dr}=\frac{C_1}{r^2},\ \text{即}\ \frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r^2}.$$

由于 $f'(1)=1$，即 $r=1$ 时 $\dfrac{du}{dr}=1$，所以 $C_1=1$，$\dfrac{du}{dr}=\dfrac{1}{r^2}$.

在方程 $\dfrac{du}{dr}=\dfrac{1}{r^2}$ 的两边积分得

$$u=-\frac{1}{r}+C_2.$$

又由于 $f(1)=1$，即 $r=1$ 时 $u=1$，所以 $C_2=2$，

从而 $u=-\dfrac{1}{r}+2$，即 $f(r)=-\dfrac{1}{r}+2$.

9. 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，令

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x),$$

证明:

(1)$W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$;

证明 因为 $y_1(x)$、$y_2(x)$都是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解,

所以 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$, $y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0$,

从而 $W'+p(x)W=(y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2')+p(x)(y_1y_2'-y_1'y_2)$

$=y_1[y_2''+p(x)y_2']-y_2[y_1''+p(x)y_1']$

$=y_1[-q(x)y_2]-y_2[-q(x)y_1]$

$=0$,

即 $W(x)$满足方程 $W'+p(x)W=0$.

(2)$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.

证明 已知 $W(x)$满足方程

$$W'+p(x)W=0,$$

分离变量得

$$\frac{dW}{W}=-p(x)dx.$$

将上式两边在$[x_0, x]$上积分，得

$$\ln W(x)-\ln W(x_0)=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt,$$

即 $$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}.$$