# 《高等数学》(上)期末复习要点

## 一、 极限及其求法：

1、 四则运算法则与复合运算法则（换元法）；

2、 初等函数的连续性（代入法）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；

3、 两个重要极限：

1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，【特征：$\lim\limits_{\triangle\to 0}\dfrac{\sin\triangle}{\triangle}=1$】

2） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$）；【特征：$\lim\limits_{\square\to\infty}(1+\dfrac{1}{\square})^{\square}=e$】

4、 存在准则：1）夹逼准则，2）单调有界准则；

5、 **洛必达法则**：未定式 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$（其它类型未定式：$0\cdot\infty,\infty-\infty,\infty^0,1^{\infty},0^0$ 必须转化）；

6、 等价无穷小量替换：只适用于乘除，加减不适用.（当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，

$\sin x(\tan x,\arctan x,\arcsin x,e^x-1,\ln(1+x))\sim x,\ (1+x)^a-1\sim\alpha x$（$\alpha$ 为常数）等等）

7、 无穷小的性质：有界量与无穷小的乘积、有限个无穷小的和与乘积均为无穷小等

8、 泰勒公式(麦克劳林公式)；

9、 微分中值定理；

10、 定积分或导数定义*:

1）*【定积分定义】、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\dfrac{b-a}{n}i)\cdot\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$；

2）【导数定义】设 $f(x)$ 在点 $a$ 处可导，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \quad \text{或} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

## 二、 函数的连续性

1、 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$；

2、 间断点：1）第一类间断点：可去，跳跃；2）第二类间断点：无穷，振荡等.

3、 连续函数的运算性质：连续函数的加减乘除仍为连续函数；连续函数的复合函数仍为连续函数

4、 初等函数的连续性：一切初等函数在其定义区间内处处连续

5、 闭区间上连续函数的性质：1）有界性；2）最大值最小值定理；3）零点定理**【闭上连续两端异号零点在开内】**；4）介值定理及其推论

## 三、 导数与微分

1、 定义：

1） $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ；

2） $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ；

3） $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ；

4） $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=A\Leftrightarrow f'(x_0)=A$

*分段函数在分段点处的可导性的判定，或其它必须按定义求导数时*

2、 求导法则：**【必须牢记 18 个基本导数公式】**

1） 显函数 $y=f(x)$ ：

I、四则运算法则： $[u(x)\pm v(x)]',[u(x)\cdot v(x)]',[\dfrac{u(x)}{v(x)}]',[ku(x)]'$ ；

II、复合函数的求导法则：设 $y=f(u),u=g(x)$ 都可导，则 $y=f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{d}{dx}\{f[g(x)]\}=f'(u)\big|_{u=g(x)}\cdot g'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)\text{，或}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

III、反函数的求导法则： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

IV、对数求导法则（特别适用于幂指函数）： $y=f(x)$ ， $\ln|y|=\ln|f(x)|=\cdots$ （化简）， $\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=\cdots$

2） 参数方程： $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ ， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\cdots\triangleq g(t)$ ， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dg(t)}{dx}=\dfrac{dg(t)}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\cdots$ ，

其它阶同理可求.

3） 隐函数： $F(x,y)=0$ （方程两边对 $x$ 求导，**注意 $y$ 为 $x$ 的函数**） $\Rightarrow F'_x\cdot 1+F'_y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

3、 高阶导数： $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\dfrac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),\dfrac{d^4y}{dx^4}=f^{(4)}(x),\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$ 等

4、 微分 $dy=f'(x)dx$

5、 关系：**可微与可导等价；可导必连续，反之未必.**

## 四、 导数的应用

1、 曲线的切线与法线方程： $y-y_0=k(x-x_0)$，$k_{切}=f'(x_0)$，$k_{法}=-1/f'(x_0)$；

2、 微分中值定理：**首先必须验证定理的条件是否满足，然后根据定理下结论！**

1）Rolle 定理： $f'(\xi)=0(a<\xi<b)$；

2）Lagrange 中值定理： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$；**估计函数值之差**

3）Cauchy 中值定理： $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(a<\xi<b)$；

4）Taylor 中值定理：$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$在$x$与$x_0$之间)

3、 洛必达法则： $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}or\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，其它型未定式必须转化

4、 泰勒公式：熟悉 5 个常见带 Peano 型余项的 Maclaurin 公式

5、 函数的单调性【一阶导符号判定】、极值、最值及其函数图形的凹凸性【二阶导符号判定】、拐点和渐近线

6、 不等式的证明：1）单调性；2）中值定理；3）凹凸性；4）最值

7、 方程根的存在性及唯一性：1）零点定理；2）Rolle 定理；3）单调性；4）极值最值等等

8、 恒等式的证明：若在区间 I 上 $f'(x)\equiv 0$，则在区间 I 上 $f(x)\equiv C$

## 五、积分：不定积分，定积分，反常积分【必须牢记 24 个基本积分公式以及 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$】

1、 基本性质：线性，对积分区间的可加性，保号性（特别课后 Ex.7：用连续性与不恒等于去等号），定积分中值定理【$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$】，定积分的奇偶对称性、周期性.

2、 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 与 Newton-Leibniz 公式：$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$，（$F'(x)=f(x)$）

3、 换元法：1）第一类（凑微分法）；2）第二类：三角代换，倒代换等

4、 分部积分法:1）**三指动，幂不动**；2）**幂动，反对不动**；3）**凑同类所求便再现**.

5、 积分上限函数的导数：$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$， $\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt=f[g(x)]\cdot g'(x)$，

其中 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 可导，$a$ 为常数，**积分中的表达式 $f(t)$ 必须与 $x$ 无关**

6、 有理函数的积分【**假分式用除法化为多项式加真分式，真分式因式分解化为部分分式**】以及可化为有理函数的积分【①三角函数有理式的积分：万能代换 $t=\tan(\dfrac{x}{2})$ $(-\pi<x<\pi)$；②简单根式：**线性函数或分式函数的根式讨厌要换之，开方不同最小公倍数**】

7、 反常积分：无穷限的反常积分或瑕积分，广义 Newton－Leibniz 公式，特别注意瑕点在积分区间内部的瑕积分

## 六、 定积分的应用【有公式代就代公式，否则用元素法】

1、平面图形的面积：

1）直角坐标 $x, y$：

a、曲边梯形 $D_1=\{(x,y)\mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$：$A=\int_a^b f(x)dx$；

b、上、下型 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$：

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx；$$

c、左、右型 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d, g(y)\le x\le f(y)\}$：

$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy；$$

d、设曲边梯形 $D_1$ 的曲边由参数方程：$x=x(t), y=y(t)$ 给出，则

$A=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt$ 【先代公式后换元】

2）极坐标 $\rho,\theta$（极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$）：

设曲边扇形 $D=\{(\rho,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\theta)\}$，则 $A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$

2、体积：

CaseA、**旋转体的体积**：

1）X－型或上下型 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$：

I、绕 x 轴 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$；II、绕 y 轴 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx(a\ge 0)$

2）Y－型或左右型 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d, 0\le x\le g(y)\}$：

I、绕 y 轴 $V_y=\pi\int_c^d g^2(y)dy$；II、绕 x 轴 $V_x=2\pi\int_c^d yg(y)dy(c\ge 0)$

CaseB、**平行截面面积为已知的立体** $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b, (y,z)\in D_x\}$，

若 $AreaD_x=A(x)$，则 $V=\int_a^b A(x)dx$

3、弧长：**由不同方程，代不同公式**

1) $C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$，$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt(\alpha<\beta)$；

2）$C: y=f(x), a\le x\le b$，$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx(a<b)$；

3）$C:\rho=\rho(\theta), \alpha\le\theta\le\beta$，$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta(\alpha<\beta)$

## 七、 微分方程

**（一） 一阶微分方程：** $F(x,y,y')=0$，$y'=f(x,y)$ 或 $M(x.y)dx+N(x,y)dy=0$

1、**可分离变量：** $f(x)dx=g(y)dy$，积分之可得通解

2、**齐次：** $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$，令 $u=\frac{y}{x}$，可将原方程化为关于 $x,u$ 的可分离变量

3、**线性：** $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$；或利用常数变易法或利用积分因之法：$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$

4、**伯努利：** $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$，令 $z=y^{1-n}$，可将原方程化为关于 $x,z$ 的线性.

**（二） 可降阶的高阶微分方程：**

I、$y^{(n)}=f(x)$ 【右端只含 $x$】：连续积分之；

II、$y''=f(x,y')$ 【不显含 $y$】：令 $y'=p$, 则 $y''=\frac{dp}{dx}$，可将原方程化为关于 $x,p$ 的一阶.

III、$y''=f(y,y')$ 【不显含 $x$】：令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，可将原方程化为关于 $y,p$ 的一阶

**（三） 概念与理论**

1、**概念**：阶，解（特解，通解），初始条件，初值问题，积分曲线

2、**线性微分方程的解的结构：**

1）**齐次：** $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，

**通解：** $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中 $y_1(x),y_2(x)$ 为该方程线性无关的两个解.

2）**非齐次：** $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

通解：$y=Y(x)+y^*(x)$，

其中 $Y(x)$ 为对应的齐次方程的通解，$y^*(x)$ 为原方程的一个特解.

3）设 $y_1^*(x),y_2^*(x)$ 分别为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$

与 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则

$y^*=y_1^*(x)+y_2^*(x)$

为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

## 附录 I——基本求导公式：

$(1)(C)'=0, C$为常数； $(2)(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha$为常数; $(3)(e^x)'=e^x$; $(4)(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$;

$(5)(a^x)'=a^x\ln a$; $(6)(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; (常数$a>0$且$a\neq 1$)

$(7)(\sin x)'=\cos x$; $(8)(\cos x)'=-\sin x$; $(9)(\tan x)'=\sec^2 x$; $(10)(\cot x)'=-\csc^2 x$;

$(11)(\sec x)'=\sec x\tan x$; $(12)(\csc x)'=-\csc x\cot x$; $(13)(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(14)(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(15)(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(16)(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(17)(\text{sh}\, x)'=\text{ch}\, x$; $(18)(\text{ch}\, x)'=\text{sh}\, x$.

## 附录 II——基本积分公式：

$(1)\int k dx = kx + C$，$k$为常数；

$(2)\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$，常数$\alpha\neq -1$; $(3)\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$;

$(4)\int e^x dx=e^x+C$; $(5)\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$，常数$a>0$且$a\neq 1$;

$(6)\int\sin x dx=-\cos x+C$; $(7)\int\cos x dx=\sin x+C$;

$(8)\int\sec^2 x dx=\tan x+C$; $(9)\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$;

$(10)\int\sec x\tan x dx=\sec x+C$; $(11)\int\csc x\cot x dx=-\csc x+C$;

$(12)\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+C$; $(13)\int\cot x dx=\ln|\sin x|+C$;

$(14)\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$; $(15)\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$;

$(16)\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$; $(17)\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$;

$(18)\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$; $(19)\int\dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$;

$(20)\int\dfrac{1}{x^2-a^2}dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$;

$(21)\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$; $(22)\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

$(23)\int\text{sh}\, x dx=\text{ch}\, x+C$; $(24)\int\text{ch}\, x dx=\text{sh}\, x+C$.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx\right)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数；}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数.}\end{cases}$$