GRAFIKA KOMPUTEROWA
Laboratorium

Ćwiczenie nr 2

Transformacje obrazów wektorowych i rastrowych w układzie jednorodnym

## 1. Wstęp

Podczas pracy z obrazami często mamy do czynienia z problemem przekształceń liniowych, którego najprostszym przykładem jest powiększanie/pomniejszanie obrazów Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z jedna z takich metod. W instrukcji zostaną przedstawione zarówno podstawy teoretyczne jak i zarys algorytmu wykorzystującego przedstawiona metodę

## 2. Metoda

W przekształceniu liniowym pomiędzy współrzędnymi punktów w przestrzeni obrazu źródłowego, a współrzędnymi odpowiadających im punktów w przestrzeń obrazu wynikowego zachodzi zależność wyrażona w postaci wektorowej:

$$P_w = AP_p$$

gdzie:

$P_p$ - współrzędne punktu w układzie jednorodnym przestrzeni obrazu źródłowego (pierwotnego),
$P_w$ - współrzędne punktu w układzie jednorodnym w przestrzeni obrazu wynikowego,
A - macierz transformacji 3x3,

W ogólnym przypadku trzeba znaleźć taką macierz transformacji, która przeprowadzi zbiór punktów obrazu wejściowego w zbiór punktów obrazu wyjściowego w sposób żądany przez użytkownika. Macierz każdej dowolnej transformacji można znaleźć jako iloczyn macierzy elementarnych takich, jak skalowanie, przesunięcie i obrót. Iloczyn ten musi być wykonywany w kolejności wynikającej z logicznej kolejności przekształceń.

Macierze transformacji elementarnych:

1. Przesunięcie o wektor [e, f]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

2. Skalowanie współrzędnych punktu odpowiednio a, d razy względem początku układu współrzędnych:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Obrót przeciwnie do wskazówek zegara , względem początku układu współrzędnych o kąt φ

$$\begin{vmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Przykładowo, jeśli chcemy wyliczyć macierz transformacji, której efektem jest obrót o zadany kąt φ względem punktu o współrzędnych (E, F) należy wykonać następujące operacje: przesunięcie punktu obrotu do środka układu współrzędnych, obrót o zadany kąt i ponowne przesunięcie punktu obrotu do pozycji początkowej. Macierz transformacji A będzie więc iloczynem następujących 3 macierzy, dokładnie w tej kolejności, z następującymi współczynnikami:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -E & -F & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ E & F & 1 \end{vmatrix}$$

3. Transformacja obrazów wektorowych

Obrazy wektorowe w przestrzeni na płaszczyźnie, pamiętane są jako zbiór odcinków, a dokładniej zbiór punktów (wierzchołków) i zbiór krawędzi, czyli odcinków prostych, łączących określone punkty. Transformacja takich obiektów polega na wyliczeniu nowego położenia każdego z wierzchołków i połączenia ich odcinkami prostych zgodnie ze specyfikacją. Wyliczenie nowego położenia punktu polega na pomnożeniu każdego punktu obiektu przez macierz transformacji odpowiednią dla żądanej przez użytkownika transformacji.

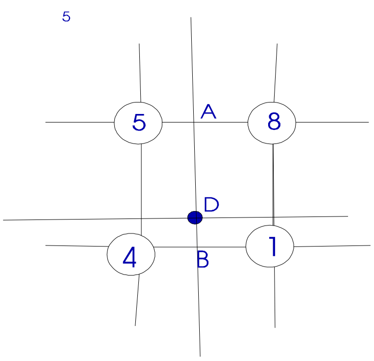
4. Transformacja obrazów rastrowych

Aby Wygenerować obraz rastrowy musimy postępować inaczej niż dla obrazu wektorowego, w którym obrazy przed i po transformacji posiadają taką samą liczbę wierzchołków (punktów). Dla przykładu weźmy najprostszą transformację powiększającą obraz rastrowy z 5x5 do obrazu 10x10. Obraz pierwotny ma 25 pikseli, a obraz wyjściowy 100 pikseli. Postępując tak, jak dla obrazu wektorowego, 75 pikseli ma niezdefiniowany kolor. Aby obliczyć kolor dla każdego piksela obrazu wynikowego, bez względu na rodzaj transformacji, odwracamy proces obliczania i dla każdego piksela obrazu wynikowego obliczamy jego położenie w obrazie pierwotnym.
Wygenerowanie obrazu przekształconego polega na wykonaniu dla każdego piksela obrazu wynikowego następujących obliczeń:

- wyliczenie pozycji odpowiedniego punktu w obrazie pierwotnym dla środka piksela,
- wyliczenie barwy punktu odpowiadającego wyliczonym współrzędnym w obrazie pierwotnym,
- przypisanie wyliczonej barwy aktualnie przetwarzanemu pikselowi obrazu wynikowego.

Aby poprawnie wykonać pierwszą z tych operacji, jako macierz przekształceń musimy wziąć macierz odwrotną do macierzy wyliczonej zgodnie z podaną metodą, jako iloczyn macierzy elementarnych. Wyliczenie współczynników macierzy odwrotnej można dokonać korzystając z definicji macierzy odwrotnej lub z dowolnych innych metod.
Wyliczone współrzędne w przestrzeni obrazu pierwotnego będą miały na ogół wartości niecałkowitoliczbowe, co oznacza, że próbkowanie wypadło gdzieś między pikselami. Inaczej mówiąc mamy pewną liczbę pikseli, którym musimy nadać kolor na podstawie kolorów pikseli znajdujących się w sąsiedztwie. W zależności od zdefiniowania tego sąsiedztwa i sposobu obliczeń otrzymamy różne efekty po przekształceniu.
Jedną z metod jest interpolacja dwuliniowa, która zapewnia gładkość (bez pikselizacji) przejścia między kolorami, wykorzystując kolory 4 sąsiadujących pikseli. Odpowiedni kolor znajduje się stosując interpolację liniową najpierw po osi x, potem po osi y (lub odwrotnie), czyli stosując interpolację dwuliniową.

4.1. Przykład:
Poniżej przedstawiono fragment obrazu wejściowego z zaznaczonymi wartościami kolorów pikseli oraz czarny punkt wskazujący próbkowane położenie piksela odpowiadające któremuś z pikseli obrazu wyjściowego.




Niech wyliczony punkt w przestrzeni obrazu pierwotnego znajduje się w pozycji D = $[x_p, y_p]$. Wyliczamy najpierw kolory w punktach A i B interpolując je odpowiednio z kolorów pikseli odpowiednio: 5 i 8 oraz 4 i 1. W tym celu wyznaczamy współczynnik interpolacji $\alpha$

$$\alpha = x_p - (int)x_p$$

i obliczamy

$$kA = (1 - \alpha)^* (5) + \alpha^* (8)$$
$$kB = (1 - \alpha)^*(4) + \alpha^* (1)$$

gdzie kA, kB oznaczają kolory w punkcie A i odpowiednio B.

Następnie obliczamy kolor w punkcie D interpolując pomiędzy wyliczonymi wartościami w punktach A i B. Tym razem używamy współczynnika interpolacji β obliczonego jako

$$\beta = y_p - (int)y_p$$

i obliczamy

$$kD = (1 - \beta)*kA + \beta*kB$$

*Niech D=[3,3 4,8]*
*$\alpha$ = 3,3-3=0,3*
*$\beta$ =4,8-4=0,8*
*Najpierw stosujemy aproksymację liniową koloru po osi x:*
*$K_A$ = 5*0,7 + 8*0,3 = 5,9*
*$K_B$ = 4*0,7 + 1*0,3 = 3,1*
*Następnie stosujemy aproksymację liniową koloru po osi y:*
*$K_D$ = 5,9*0,2 + 3,1*0,8 = 3,66*
*Ostatecznie kolor piksela na obrazie wyjściowym powinien wynosić 3,66 czyli 4.*

Obrazy kolorowe muszą mieć niezależnie, sekwencyjnie skalowane komponenty (R, G, B).

Zarys algorytmu ogólnego przetwarzania liniowego obrazu rastrowego:

Wylicz współczynniki przetwarzania liniowego czyli macierz transformacji
Dla każdej składowej koloru
    Dla każdego piksela obrazu wyjściowego
        Znajdź odpowiadające mu współrzędne w obrazie wejściowym
        Wylicz kolor dla piksela o tych współrzędnych np. metodą aproksymacji dwuliniowej

5. Realizacja ćwiczenia

Przygotuj w pliku dane opisujące obiekt grafiki wektorowej, np. „domek" składający się z 5 wierzchołków i 6 krawędzi. Format tego pliku jest dowolny, ale taki, by można modyfikować kształt obiektu.
Przygotuj plik, który zawiera dane do obliczenia dowolnej macierzy przekształceń, na którą składa się pewna ilość macierzy elementarnych. Dany jest końcowy efekt przekształcenia (np. odbicie obrazu względem podanej prostej lub jego obrót o zadany kąt względem danego punktu), a do realizatora ćwiczenia należy dekompozycja tego przekształcenia na transformacje elementarne i zapisanie ich w pliku.
Wczytaj dowolny obraz rastrowy.
Przekształć obraz wektorowy, dany w pliku i wczytany obraz rastrowy, transformacją podaną przez prowadzącego. Algorytm transformacji powinien przetwarzać obraz rastrowy płynnie, nie powodując pikselizacji obrazu.