Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Лабораторная работа №2»

Студент 315 группы
Г. А. Юшков

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Задание 8 **3**

1.1 **Эллипс** . . . 3

1.2 **Квадрат** . . . 4

1.3 **Ромб** . . . 5

2 Задание 10 **6**

2.1 **Ромб** . . . 6

1 Задание 8

Постановка задачи: Исследовать 3 примера с аналитически рассчитанными опорными функциями: эллипс, квадрат, ромб. В каждом случае центр не обязательно нулевой — центр и полуоси являются параметрами. Вывести формулы опорных функций для указанных случаев в зависимости от значений параметров.

1.1 Эллипс

1. Эллипс с центром в точке $c = (x_0, y_0)$:

   Такой эллипс является множеством

   $$E_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его как эллипс с центром в точке $(0, 0)$ — множество E_1, сдвинутый на радиус-вектор точки центра c:

   $$E_0 = E_1 + c.$$

   При этом множество E_1, описывающее несмещенный эллипс с центром в $(0, 0)$, имеет вид:

   $$E_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его в виде $E_1 = TB_1(0)$, где

   $$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

   Тогда опорная функция несмещённого эллипса имеет вид:

   $$\rho\,(l|\, E_1) = \sqrt{a^2 \cdot l_1^2 + b^2 \cdot l_2^2}.$$

   Итоговая формула опорной функции для изначального эллипса:

   $$\rho(l\,|E_0\,) = \rho(l\,|E_1\,+c) = \sqrt{a^2 \cdot l_1^2 + b^2 \cdot l_2^2} + \langle l, c \rangle.$$

2. Эллипс с центром в точке $c = (x_0, y_0)$, главная полуось которого составляет с осью Ox угол α:

   Такой эллипс является множеством:

   $$E_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x' - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y' - y_0)^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

   Представим его как эллипс с центром в точке (0,0), главная полуось которого составляет с осью Ox угол α — множество E_3, сдвинутый на радиус-вектор точки центра c :

   $$E_2 = E_3 + c.$$

При этом несмещённый повернутый эллипс с цетром в (0,0) имеет вид:

$$E_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \leqslant 1 \right\},$$

где x', y' — координаты, в которых полуось эллипса лежит на прямой Ox:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Из преобразованных координат получаем матрицу поворота:

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффциентов имеет вид

$$T^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Введем матрицу конфигурации $P = C' \cdot T^2 \cdot C$.
Тогда имеем, что $E_3 = C \cdot T \cdot B_1(0)$, где $B_1(0)$ — это единичный шар. Получаем, что опорная функция для E_3 имеет вид:

$$\rho(l \,|E_3\,) = \sqrt{\langle TC'l, TC'l \rangle} = \sqrt{\langle l, Pl \rangle}.$$

Итоговая формула опорной функции для изначального эллипса:

$$\rho(l \,|E_2\,) = \rho(l \,|E_3 + c) = \sqrt{\langle l, Pl \rangle} + \langle l, c \rangle.$$

1.2 Квадрат

1. Квадрат с центром в точке $a = (x_0, y_0)$ и стороной длины c:

   Такой квадрат является множеством E_0, где

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \max(|x - x_0|, |y - y_0|) \leqslant c/2 \right\}.$$

   Воспользуемся свойствами аддитивности по второму аргументу и положительной однородности для опорной функции. Для этого представим наш квадрат как композицию гомотетии с центром в (0,0) и коэффициентом $\frac{c}{2}$ и параллельного переноса на вектор a квадрата с центром в (0,0), сторонами, равными 2 и параллельными осям координат. Имеем:

$$E_0 = E_1 \cdot \frac{c}{2} + a,$$

   где

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \max(|x|, |y|) \leqslant 1 \right\}.$$

Опорная функция для E_1 имеет вид:

$$\rho(l\,|E_1\,) = \sup_{a\in E_1}\langle l, a\rangle \; = \sup_{a\in E_1}\sum_{i=1}^{2} l_i a_i \leqslant \sup_{a\in E_1}\sum_{i=1}^{2}|l_i|\cdot|a_i| \leqslant |l_1| + |l_2|.$$

Заметим, что равенство достигается, например, при $a = (\mathrm{sgn}(l_1),\ \mathrm{sgn}(l_2))$. В этом случае функция примет вид:

$$\rho(l\,|E_1\,) = |l_1| + |l_2|.$$

Исходя из аддитивности по второму аргументу и положительной однородности опорной функции, итоговая формула опорной функции для изначального множества E_0:

$$\rho(l\,|E_0\,) = \rho(l\,|E_1\cdot\frac{c}{2} + a) = \frac{c}{2}\cdot(|l_1| + |l_2|) + \langle l, a\rangle = c\cdot\frac{|l_1| + |l_2|}{2} + \langle l, a\rangle.$$

1.3 Ромб

1. Ромб с центром в точке $c = (x_0, y_0)$ и диагоналями a, b:

   Такой ромб является множеством

$$E_0 = \left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{2|x - x_0|}{a} + \frac{2|y - y_0|}{b}\leqslant 1\right\}.$$

   Представим его как единичный ромб с центром в точке (0,0) — множество E_1 — с измененными диагоналями и сдвинутым центром на радиус вектор точки c:

$$E_0 = T\cdot E_1 + c,$$

   где

$$T = \begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix},$$

$$E_1 = \left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\middle|\, |x| + |y|\leqslant 1\right\}.$$

   Опорная функция для E_1 имеет вид:

$$\rho(l\,|E_1\,) = \sup_{a\in E_1}\langle l, a\rangle.$$

   Тогда итоговая опорная функция для изначального ромба имеет вид:

$$\rho(l\,|E_0\,) = \rho(l|T\cdot E_1 + c) = \sup_{a\in E_1}\langle l, a\rangle + \langle l, c\rangle = \max(|a\cdot l_1|, |b\cdot l_2|) + \langle l, c\rangle. \qquad (1)$$

2 Задание 10

Постановка задачи: Выписать вывод уравнений, описывающих поляру для ромба.

Определение 1. Полярой множества $A \subset \mathbb{R}^d$ называется множество ([2, с. 53–54])

$$A^\circ = \left\{ p \in \mathbb{R}^d \middle| \forall x \in A : \langle p, x \rangle \leqslant 1 \right\}. \tag{2}$$

Определение 2. Полярой множества $A \subset \mathbb{R}^2$ называется множество [3, с. 29–30]

$$A^\circ = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \middle| \rho(p \,|A) \leqslant 1 \right\}. \tag{3}$$

Утверждение 1. Определения 1 и 2 эквивалентны для множества $A \subset \mathbb{R}^2$.

2.1 Ромб

Ромб с диагоналями a, b и цетром в точке $c = (x_0, y_0)$ является множеством

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{2|x - x_0|}{a} + \frac{2|y - y_0|}{b} \leqslant 1 \right\}$$

Ромб также является выпуклой оболочкой, т.о.

$$A = \operatorname{conv}\left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}.$$

Опорная функция этого множества имеет вид (по формуле (1)):

$$\rho(l \,|A) = \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + \langle l, c \rangle = \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot y_0,$$

где c - радиус-вектор точки центра.
Полярой множества A является множество A°, при этом

$$A^\circ = \operatorname{conv}\left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}^\circ.$$

Воспользуемся тем, что: $(\operatorname{conv}(A))^\circ = A^\circ$ [2, с. 53–54], получим:

$$A^\circ = \left\{ (x_0 + a/2, y_0), (x_0 - a/2, y + 0), (x_0, y_0 + b/2), (x_0, y_0 - b/2) \right\}^\circ.$$

Далее, из свойства $(\cup A_i)^\circ = \cap A_i^\circ$ [3, с. 29–30], имеем:
$$E^\circ = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{cases} l_1 \cdot (x_0 \pm a/2) + l_2 \cdot y_0 \leqslant 1 \\ l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot (y_0 \pm b/2) \leqslant 1 \end{cases} \right\}.$$
Заметим, что по определению 2, можно записать поляру через опорную функцию:

$$A^\circ = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \middle| \max(\|a \cdot l_1\|, \|b \cdot l_2\|) + l_1 \cdot x_0 + l_2 \cdot y_0 \leqslant 1 \right\}.$$

Список литературы

[1] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва, изд. МИР, 1973 г.

[2] Локуциевский Л. В. Элементы конечномерного выпуклого анализа. Конспект Лекций. Мехмат МГУ, 2017. (https://kafedra-opu.ru/sites/default/files/main_courses/ca_lokutsievskiy_0.pdf)

[3] Коробков М. В. Конспект лекций. ММФ НГУ, 2016. (http://phys.nsu.ru/korobkov/f_an_16-17/Topos-lecture_notes_2016-17.pdf)