



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму
«Лабораторная работа №3»

Студент 315 группы
Г. А. Юшков

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Вычисление преобразований Фурье	4
3	Свойства преобразования Фурье, используемые в задаче	6
4	Графики образов Фурье функций при начальных значениях параметров	7
5	Эффект наложения спектра и его устранение	11
6	Рябь	14

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ) для функций

1.

$$f_1(t) = \begin{cases} t^2 + t, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1; \end{cases}$$

2.

$$f_2(t) = \frac{2t}{5 - 4t + t^2};$$

3.

$$f_3(t) = t^3 e^{-2t^2 - t};$$

4.

$$f_4(t) = \frac{\cos(t)}{1 + 4|t|^5}.$$

Построить графики $F(\lambda)$. Вычислить $F(\lambda)$ в явном виде для $f_1(x)$, $f_2(x)$, сравнить графики из аналитического представления и из аппроксимации через БПФ.

Проиллюстрировать эффект наложения спектра и ряби.

Проиллюстрировать устранение эффекта наложения спектра и ряби.

2 Вычисление преобразований Фурье

Преобразование Фурье имеет вид:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx.$$

Пример 2.1. Функция 1.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwt} dt = \int_{-1}^1 (t^2 + t)e^{-iwt} dt.$$

Применяя интегрирование по частям, имеем:

$$\int t^2 e^{-iwt} dt = \frac{t^2 e^{-iwt}}{-iw} + \frac{2}{iw} \int t e^{-iwt} dt.$$

$$\int t e^{-iwt} dt = \frac{t e^{-iwt}}{-iw} - \int \frac{e^{-iwt}}{-iw} dt.$$

Отсюда вытекают соответствующие формулы для определённых интегралов. Подставим в них значения границ отрезка. Получим:

$$F(w) = \int_{-1}^1 t^2 e^{-iwt} dt + \int_{-1}^1 t e^{-iwt} dt = \left. \frac{t^2 e^{-iwt}}{-iw} \right|_{-1}^1 + \left(1 + \frac{2}{iw} \right) \left(\left. \frac{t e^{-iwt}}{-iw} - \frac{e^{-iwt}}{(-iw)^2} \right) \right|_{-1}^1.$$

Подставляя значения в границах отрезка, окончательно получаем:

$$F(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw} + \left(1 + \frac{2}{iw} \right) \left(\frac{e^{-iw}(iw + 1) - e^{iw}(1 - iw)}{w^2} \right).$$

Пример 2.2. Функция 2.

$$f(t) = \frac{2t}{5 - 4t + t^2}.$$

Для вычисления преобразования Фурье в данном случае воспользуемся леммой Жордана.

Знаменатель обращается в нуль тогда и только тогда, когда $t = 2 \pm i$.

Пусть для начала $w < 0$ Тогда по лемме Жордана:

$$F(w) = 2\pi i \cdot \text{res}_{z=2+i}(f(z)e^{-iwz}) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow 2+i} f(z)e^{-iwz}(z - (2+i)).$$

Отсюда получаем:

$$F(w) = 2\pi i \frac{e^{-iw(2+i)} \cdot 2(2+i)}{(2+i) - (2-i)}.$$

Упрощая выражение, получаем при $w < 0$:

$$F(w) = 2\pi(2+i)e^{(1-2i)w}. \quad (2.1)$$

Теперь рассмотрим случай $w > 0$. По лемме Жордана:

$$F(w) = 2\pi i \cdot \text{res}_{z=2-i}(f(z)e^{-iwz}) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow 2-i} f(z)e^{-iwz}(z - (2-i)).$$

Отсюда получаем:

$$F(w) == 2\pi i \frac{e^{-iw(2-i)} \cdot 2(2-i)}{(2-i) - (2+i)}.$$

Упрощая выражение, получаем при $w > 0$:

$$F(w) = 2\pi(2-i)e^{(-1-2w)i}. \quad (2.2)$$

Для получения результатов 2.1, 2.2 использовались следующие контуры для леммы Жордана: верхняя полуокружность с центром в $(0,0)$ и радиусом $R \rightarrow \infty$ для $w < 0$ и нижняя полуокружность с такими же центром и радиусом для случая $w > 0$. Оба множества обходятся против часовой стрелки.

Также заметим, что при $w = 0$ интеграл расходится, поэтому значение $F(0)$, вообще говоря, не определено.

3 Свойства преобразования Фурье, используемые в задаче

[2] Для функций, заданных на диапазоне $[a, b] : a \neq -b$, используем теорему временного сдвига:

$$f(x - \alpha) = e^{-i\alpha\lambda} F(\lambda),$$

где $\alpha = (b - a)/2$.

Для функций, заданных на диапазоне $[-a, a]$, с окном $[c, d]$ используем свойство масштабирования:

$$f(\beta x) = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\lambda}{\beta}\right),$$

где $\beta = a / \max(|c|, |d|)$.

1. Для вещественных четных сигналов: $f(x) = f(-x)$, выполняется:

$$F(\lambda) = F(-\lambda) \Rightarrow \text{Im}(F(\lambda)) = 0.$$

2. Для вещественных нечетных сигналов: $f(x) = -f(-x)$, выполняется:

$$F(\lambda) = -F(-\lambda) \Rightarrow \text{Re}(F(\lambda)) = 0.$$

Дискретизация сигнала $f(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $F(\lambda)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 2\pi/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Поэтому для устранения эффекта наложения сигнала пропустим сигнал через фильтр с частотой Найквиста $f_c = f_d/2 = \pi/\Delta t$.

Спектр функции дискретного аргумента является периодическим:

$$F(\lambda) = F\left(\lambda - \frac{2\pi k}{\Delta t}\right).$$

где период спектра равен $2\pi/\Delta t$.

Выбор шага дискретизации.

1. Если спектр оригинала ограничен, т.е. существует верхняя граница спектра λ_{max} , то шаг Δt выбирается из условия превышения частотой Найквиста сетки $\lambda_N = 2\pi/2\Delta t$ верхней границы λ_{max} спектра рассматриваемой функции:

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\lambda_{max}}.$$

2. Если спектр оригинала неограничен, то за величину верхней его границы λ_{max} , можно принять значение, при котором спектральная компонента $F(\lambda_{max})$ мала:

$$F(\lambda_{max}) \ll \max F(\lambda).$$

4 Графики образов Фурье функций при начальных значениях параметров

Перед тем как приступить к детальной работе с особенностями преобразования Фурье, предоставим первые полученные в ходе лабораторной работы результаты: графики образов преобразования Фурье для указанных выше четырёх функций. Для первых двух функций в предыдущем параграфе образ Фурье был вычислен аналитически, что будет отображено на соответствующих графиках линиями синего цвета. Численное решение, полученное в ходе лабораторной работы отмечено красной линией на графиках. Для первых двух функций выберем частоту дискретизации, равную 0.01. Для функций 3 и 4 выберем частоту дискретизации, равную 1. Временной областью сигнала положим отрезок $[-10, 10]$ для всех случаев.

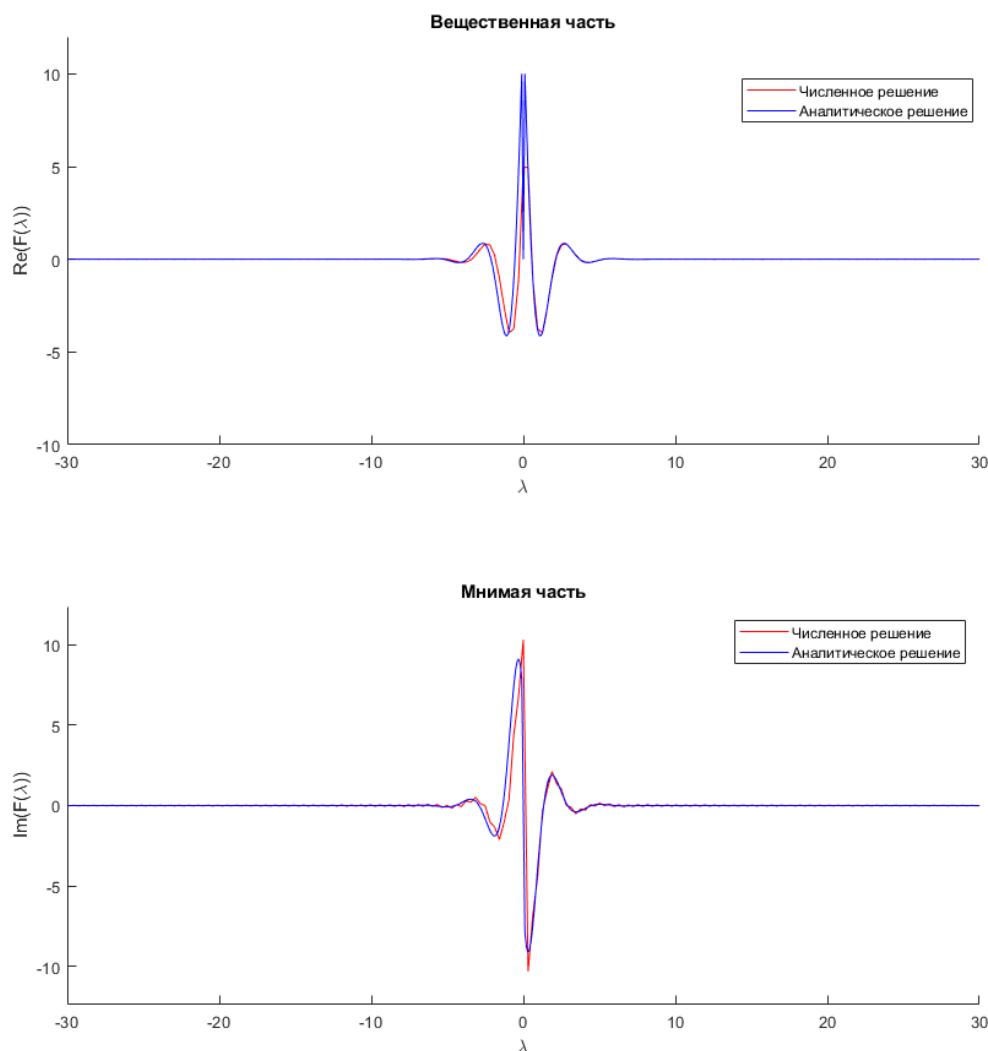


Рис. 1. Первая функция.

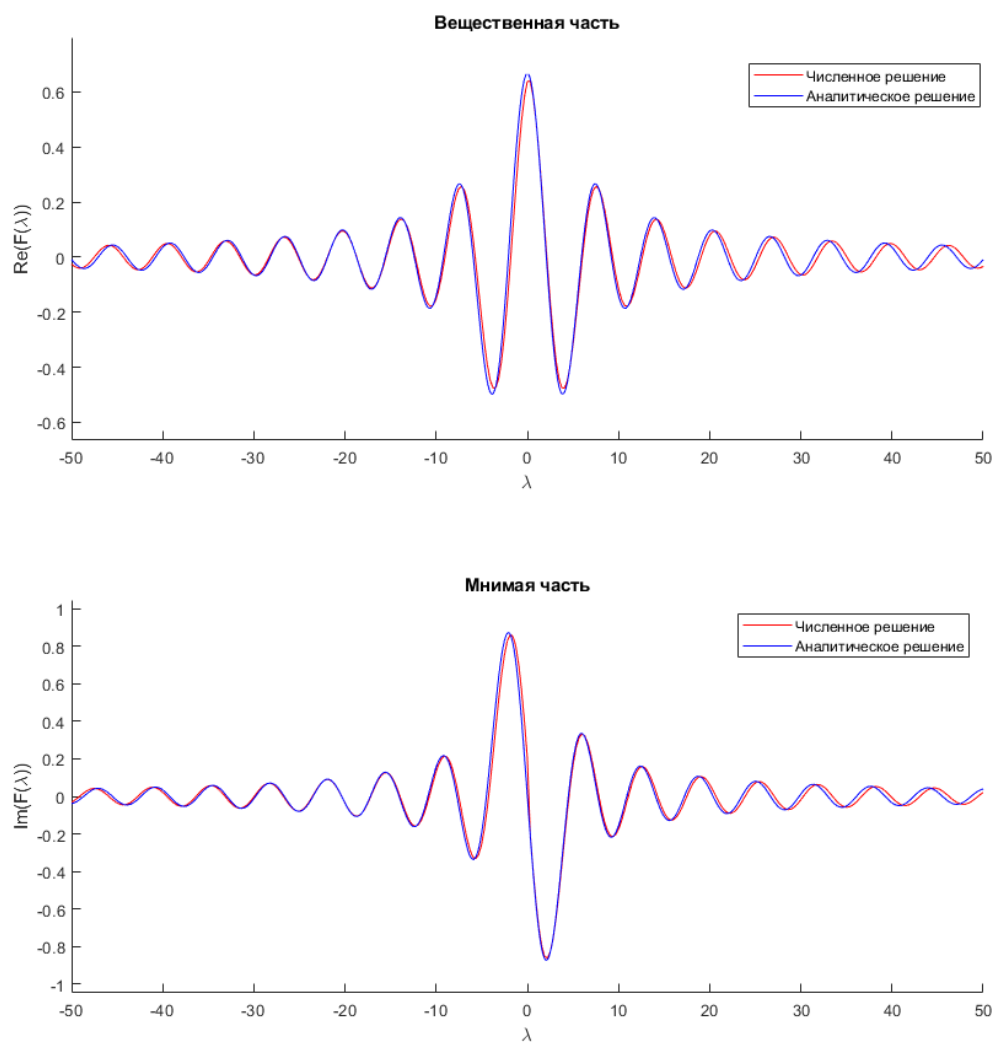


Рис. 2. Вторая функция.

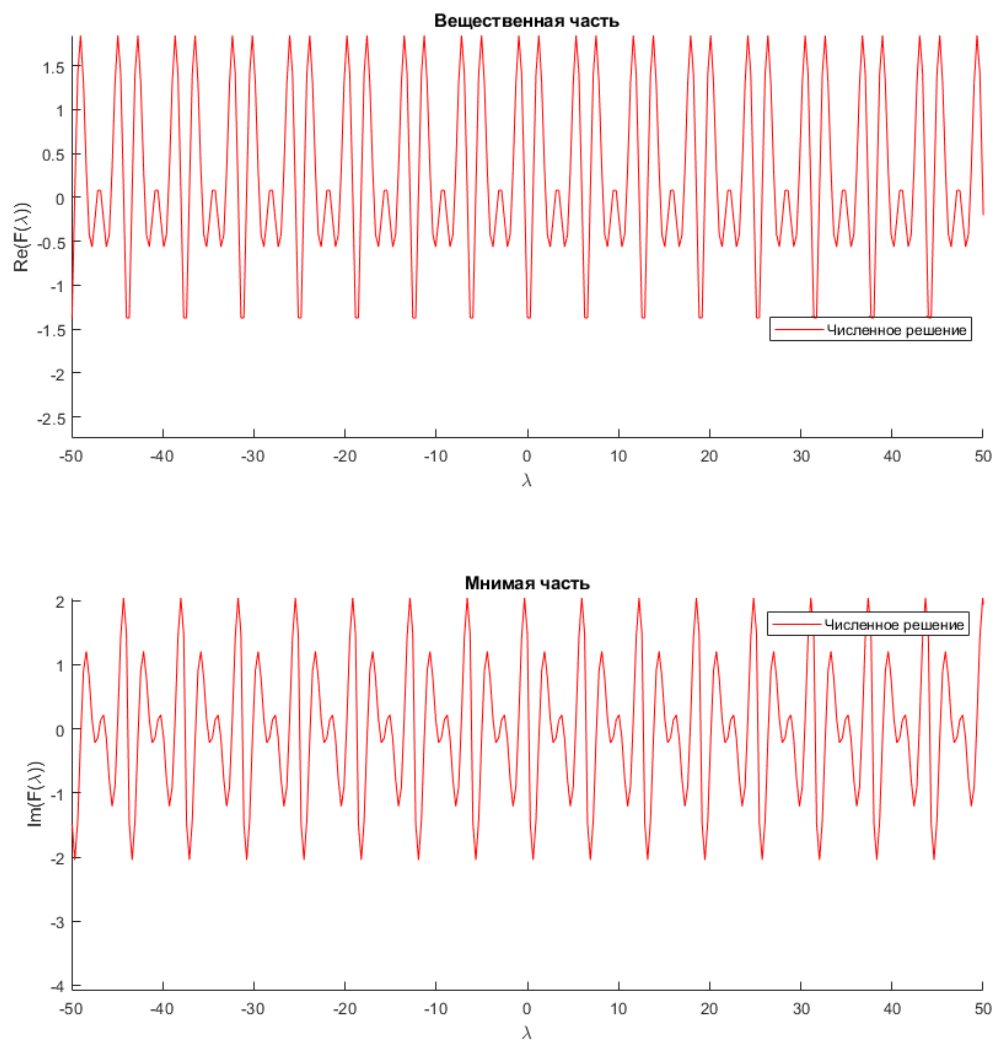


Рис. 3. Третья функция.

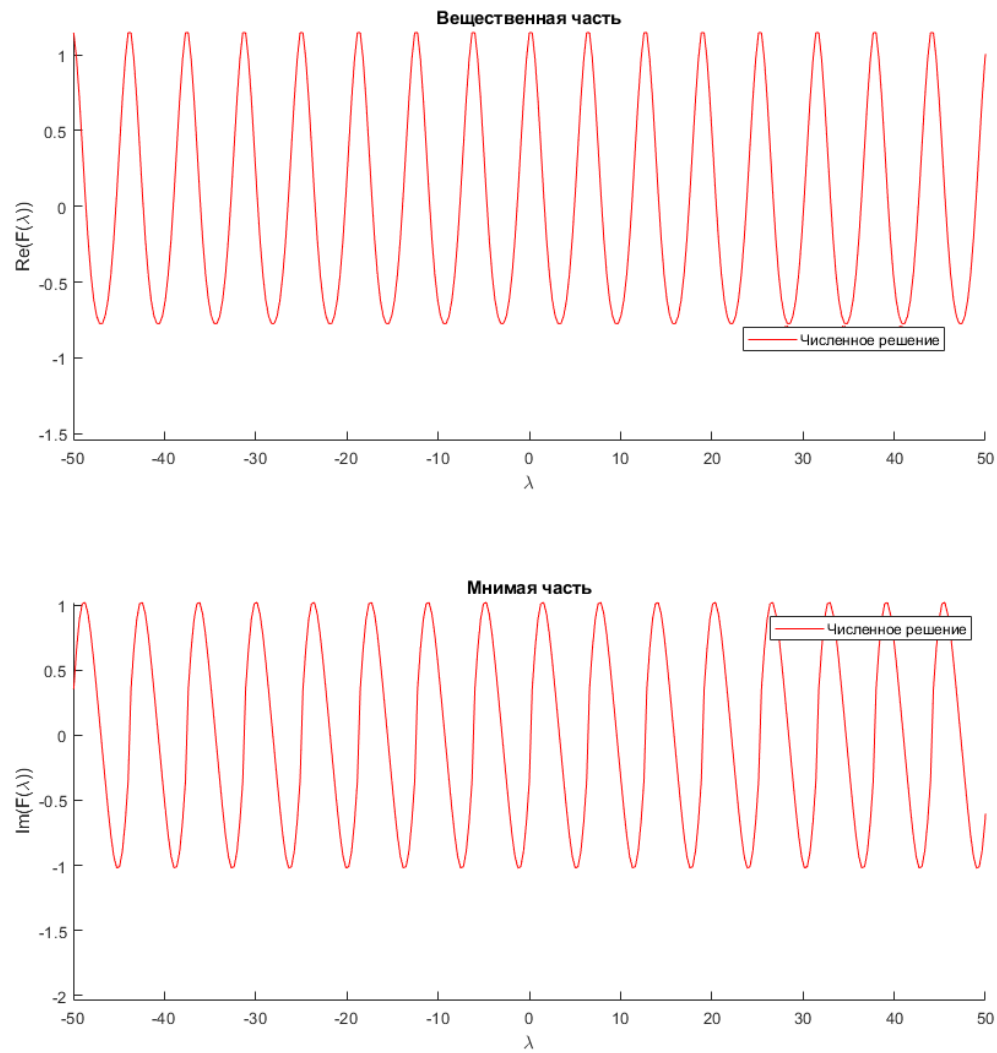


Рис. 4. Четвёртая функция.

5 Эффект наложения спектра и его устранение

[2] Наложение спектра возникает из-за конечной длины выборки сигнала. Если частота Найквиста λ_N на выбранной сетке меньше верхней границы спектральной полосы λ_{max} , то по спектру $F_{\Delta t}(\lambda)$ дискретной функции невозможно восстановить спектр $F(\lambda)$ функции непрерывного аргумента: $F(\lambda) \neq F_{\Delta t}(\lambda)H(\lambda)$ при $\lambda_N \neq \lambda_{max}$, где

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in [-\lambda_N, \lambda_N]; \\ 0 & \lambda \notin [-\lambda_N, \lambda_N] \end{cases}$$

- оконная функция. В этом случае в сумме периодов спектра перекрываются слагаемые $F(\lambda - k/\Delta x)$ и наложение окна на спектр не позволяет получить без погрешностей спектр функции непрерывного аргумента.

Рассмотрим данный эффект на функции №1.

Верхняя граница спектра равна $\lambda_{max} = 0.5$. Частота дискретизации = 0.2. Зелёная линия отображает образ Фурье, полученный аналитически. Красная линия показывает величину ошибки наложения спектра (слагаемые $F(\lambda - 2\pi k/\Delta t), k \neq 0$). Фиолетовая линия является итоговой аппроксимацией, т.е. суммой слагаемых $F(\lambda - 2\pi k/\Delta t)$ (Рис. 5).

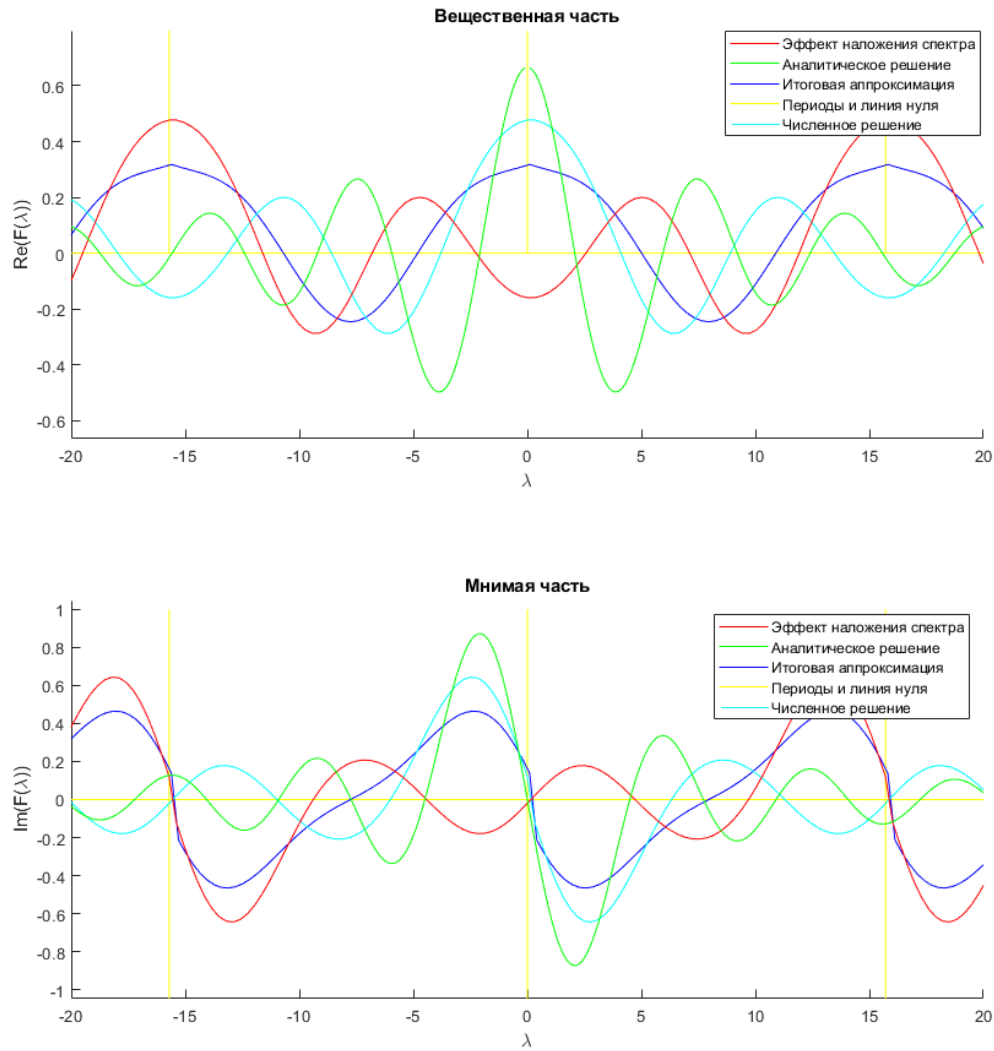


Рис. 5. Исходное преобразование Фурье.

Уменьшим частоту дискретизации до 0.01. Теперь граничная частота Найквиста $\lambda_N = \pi/\Delta t > \lambda_{max} = 20$, (Рис.6) выполняются условия теоремы Котельникова–Шеннона и наложения спектра не происходит (Рис. 6).

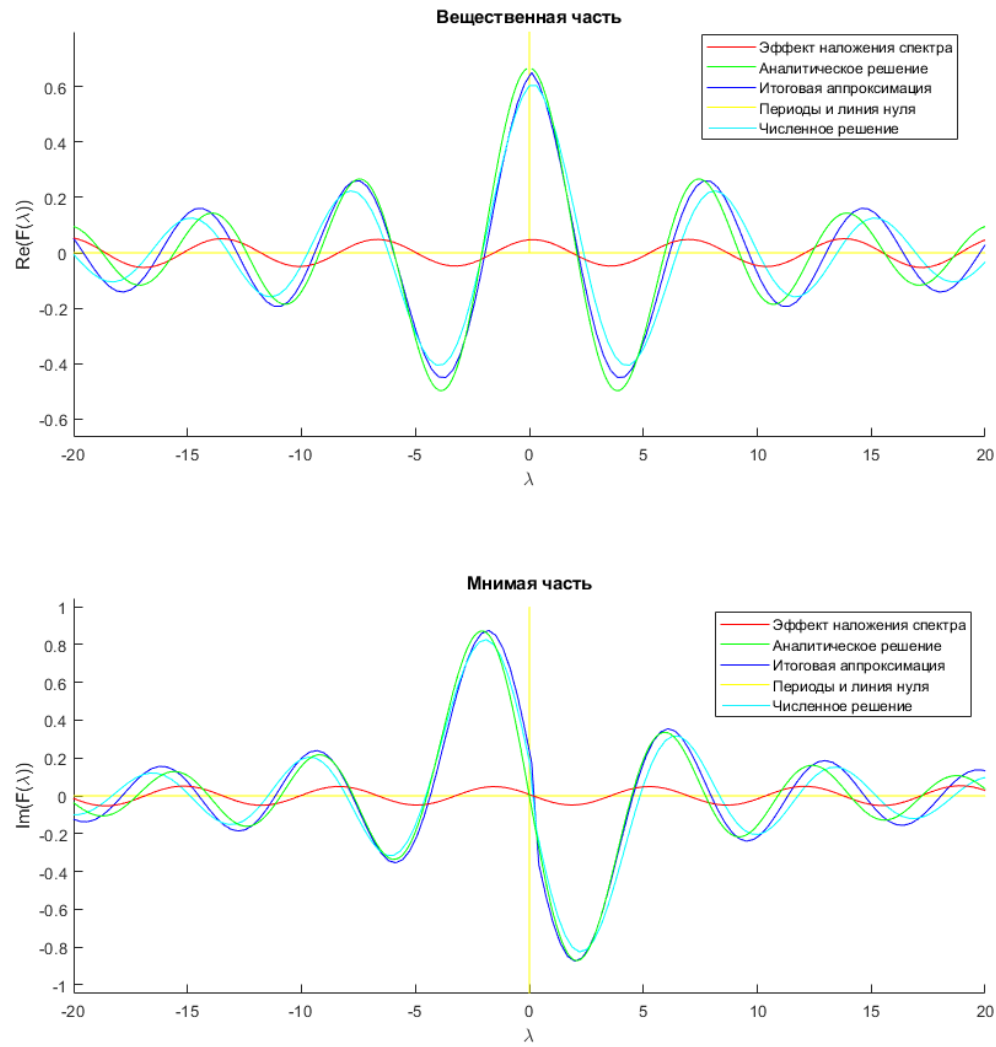


Рис. 6. Преобразование после увеличения частоты дискретизации.

6 Рябь

Рябь в частотной области возникает из-за усечения сигнала во временной области. Для минимизации этого эффекта можно либо увеличить временную область $[a, b]$, либо увеличить частоту дискретизации сигнала.

Рассмотрим эффект на мнимой части образа функции №2. Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a, b] = [-3, 3]$ (Рис. 7)

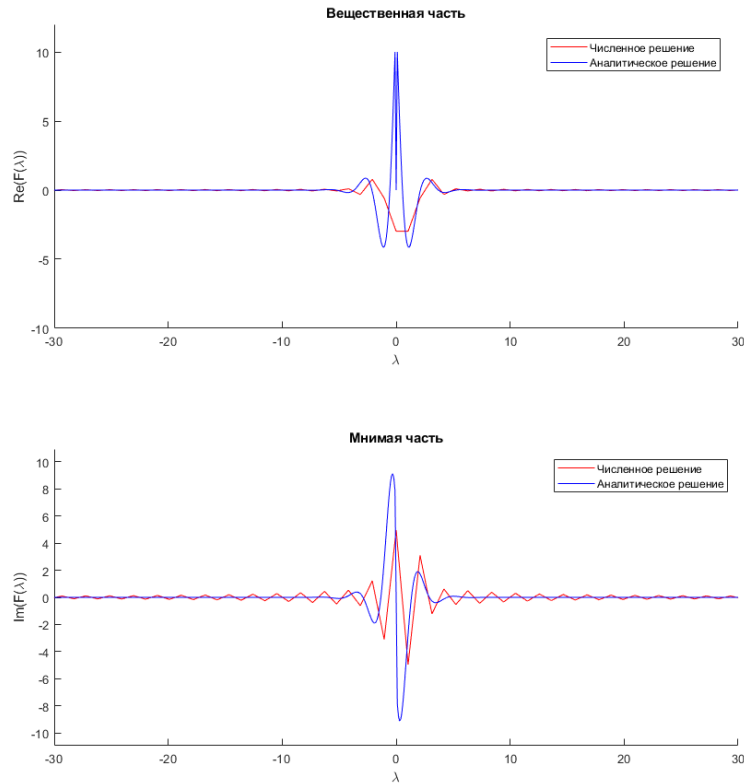


Рис. 7. Исходное преобразование Фурье на отрезке $[-3, 3]$.

Пусть теперь $f(x)$ задана на отрезке $[a, b] = [-10, 10]$ (Рис. 8). Видно, что с увеличением числа членов ряда он все более точно приближается к исходной функции в том смысле, что амплитуда осцилляций уменьшается, а частота увеличивается. [1]

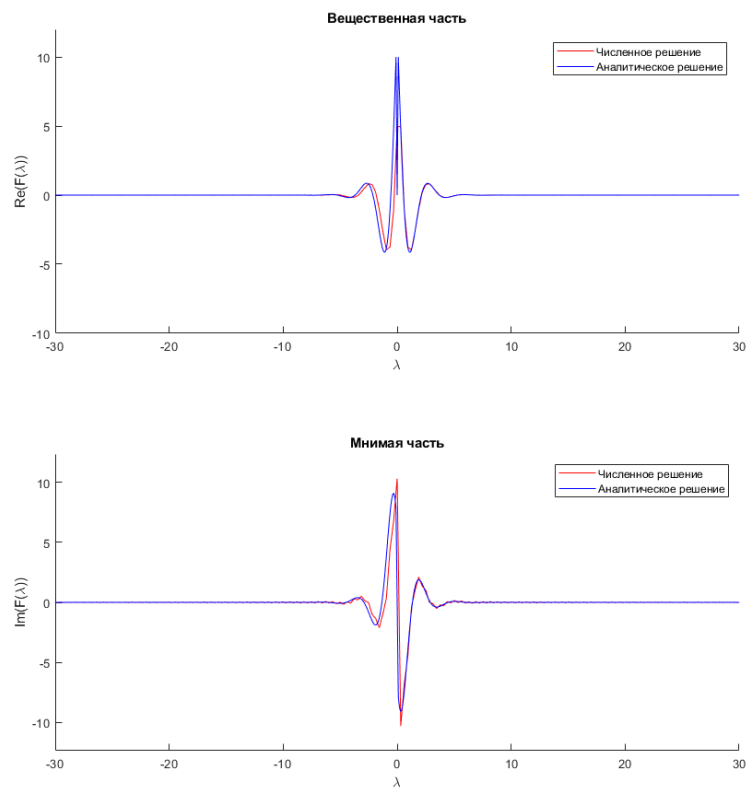


Рис. 8. Преобразование Фурье на отрезке $[-10, 10]$.

Список литературы

- [1] Кон В. Г., НИЦ "Курчатовский Институт Москва, 2011.
(<http://www.kohnvict.narod.ru/a/1/fourier-problems.htm>)
- [2] Кандидов В. П., Чесноков С. С., Шленов С. А.. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. Физический факультет МГУ, 2019. (<https://ofvp.phys.msu.ru/wp-content/uploads/2021/03/diskretnoe-preobrazovanie-fure.pdf>)