



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
Г. А. Юшков

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теоретические выкладки	4
2.1	Принцип максимума Понтрягина	4
2.2	Метод нахождения вектора $\psi(t)$	4
2.3	Вычисление опорной функции для \mathcal{X}_0	4
2.4	Нахождение субоптимального управления u^*	5
2.5	Алгоритм вычисления $x^*(t)$	6
2.6	Проверка условия трансверсальности	6
3	Примеры работы программы	7
3.1	Пример 1	7
3.2	Пример 2	12
3.3	Пример 3. Отсутствие непрерывности величины T по начальному множеству фазовых переменных	17

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [t_0, +\infty)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{X}_0 - начальное множество значений фазового вектора, \mathcal{X}_1 - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества \mathcal{X}_0 , может попасть в некоторую точку множества \mathcal{X}_1 .

\mathcal{P} -невыврожденный эллипсоид с матрицей конфигурации $Q = Q' > 0$ и центром в точке p ,

$$\mathcal{X}_0 = \{(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - \alpha)^4 \leq \gamma\},$$

$$\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \leq a\}, a > 0.$$

1. Необходимо написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, t_0, Q, p, a, p, q, \alpha, \gamma$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приблизительно) найти значение T , построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной "оптимальной" траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.
2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Теоретические выкладки

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Пусть дана линейная задача быстрогодействия:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad t \in [t_0, +\infty], \\ x(t_0) &\in \mathcal{X}_0, x(t_1) \in \mathcal{X}_1, u \in \mathcal{P}, (t_1 - t_0) \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Теорема 1. (Принцип максимума Понтрягина) Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ - оптимальная пара, $u^*(t)$ переводит фазовую точку из положения $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$ в положение $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$ за время t_1 , тогда существует непрерывная вектор-функция $\psi = \psi(t)$, нигде не обращающаяся в нуль и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t),$$

$$\langle B^T \psi(t), u^*(t) \rangle \stackrel{n.g.}{=} \rho(B^T \psi(t) \mid \mathcal{P}) \text{ (условие максимума)}, \quad (1)$$

$$\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0) \text{ (условие трансверсальности в } \mathcal{X}_0), \quad (2)$$

$$\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1) \text{ (условие трансверсальности в } \mathcal{X}_1). \quad (3)$$

2.2 Метод нахождения вектора $\psi(t)$

Вектор $\psi(t)$ однозначно находится из системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi, \\ \psi(t_0) = \psi_0. \end{cases}$$

В данном случае верна явная формула:

$$\psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)} \psi_0.$$

Вектор ψ_0 заранее неизвестен. Заметим, что если ψ удовлетворяет условиям теоремы, то им удовлетворяет и $k\psi \forall k > 0$. Значит, не ограничивая общности, будем считать $\|\psi_0\| = 1$. Будем перебирать значения на единичной окружности и проверять условия теоремы.

2.3 Вычисление опорной функции для \mathcal{X}_0

Введём вспомогательное обозначение:

$$M_{\alpha, \gamma} = \{(x_1, x_2)' \mid x_1^2 + (x_2 - \alpha)^4 \leq \gamma\}.$$

В таком случае, выполнено следующее равенство:

$$\mathcal{X}_0 = (0, \alpha) + M_{0, \gamma}.$$

Тогда опорная функция ко множеству \mathcal{X}_0 в направлении $l = (l_1, l_2)$ вычисляется по формуле:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}_0) = \langle l, (0, \alpha) \rangle + \rho(l, M_{0, \gamma}) = l_2 \alpha + \rho(l, M_{0, \gamma}).$$

Множество $M_{0, \gamma}$ симметрично как относительно нуля, так и относительно осей Ox_1, Ox_2 . Отсюда следует достаточность вычисления опорной функции для векторов l из первой четверти, т.е. $l_1 > 0, l_2 > 0$.

Утверждение 1. Пусть $l = (l_1, l_2)$ - вектор из первой четверти. Соответствующая данному вектору опорная точка ко множеству \mathcal{X}_0 также будут находиться в первой четверти на границе множества \mathcal{X}_0 .

Доказательство. Расположение в первой четверти очевидно из свойств симметрии. Нахождение опорной точки на границе докажем от противного. Пусть $x = (x_1, x_2)$ - опорная точка множества \mathcal{X}_0 в направлении $l = (l_1, l_2)$, где $x_1, x_2, l_1, l_2 \geq 0$. Будем считать, что вектор l не является нулевым (иначе утверждение очевидно), а также будем считать точку x отличной от нуля (иначе легко убедиться, что найдется точка $x' = (x'_1, x'_2)$, лежащая в первой четверти множества $M_{0,\gamma}$, такая, что: $\langle l, x' \rangle > 0 = \langle l, 0 \rangle$). Положим cx - вектор x , продлённый до пересечения с границей множества $M_{0,\gamma}$. В силу того, что точка x не лежит на границе: $c > 1$. Тогда имеем:

$$\langle l, cx \rangle = c\langle l, x \rangle > \langle l, x \rangle.$$

Значит, точка x не является опорной. Противоречие. Значит, x лежит на границе множества $M_{0,\gamma}$. Утверждение доказано. \square

Доказанное утверждение позволяет упростить вычисление опорной функции для множества $M_{0,\gamma}$ в направлении l посредством параметризации границы множества $M_{0,\gamma}$. В первой четверти границу можно параметризовать следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{(\gamma - x_2^4)}.$$

Таким образом, искомая опорная функция в направлении $l = (l_1, l_2)$, т.ч. $l_1, l_2 \geq 0$, примет вид:

$$f(x_2) = \sup_{x_2 \in [0, \gamma^{1/4}]} l_1 \sqrt{(\gamma - x_2^4)} + l_2 x_2.$$

Замечание 1. В общем случае необходимо вместо l_1, l_2 использовать $|l_1|, |l_2|$, а вместо x_2 - $|x_2|$.

Для поиска максимума данной функции воспользуемся MATLAB-функцией **fminbnd** для функции $-f$ на отрезке $[0, \gamma^{1/4}]$.

Для вычислительных целей нам также понадобится рассмотреть следующую функцию:

$$h(x) = |\langle \psi_0, x \rangle - \rho(\psi_0 | X_0)| + \mathbb{1}(x \notin \mathcal{X}_0).$$

Данная функция удобна для вычисления в среде MATLAB точки $x_0 = x(t_0)$, удовлетворяющей условию 2. Минимизируя её с помощью **fminsearch** с начальным приближением в точке $(0, \alpha)$, находим искомую точку x_0 .

2.4 Нахождение субоптимального управления u^*

В силу того, что множество \mathcal{P} является невырожденным эллипсоидом формулы для его опорной функции в заданном направлении и соответствующей данному направлению опорной точке хорошо известны:

$$\rho(l, \mathcal{P}) = \langle l, p \rangle + \sqrt{\langle l, Ql \rangle}. \quad (4)$$

$$u^* = p + \frac{Ql}{\sqrt{\langle l, Ql \rangle}}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу строгой выпуклости эллипсоида из системы равенств:

$$\langle B^T \psi(t), u^*(t) \rangle = \langle \psi(t), Bu^*(t) \rangle = \rho(B^T \psi(t) \mid \mathcal{P}).$$

вытекает, что u^* - опорный вектор в направлении $l = B^T \psi(t)$, который можно вычислить по формуле 5. Если система вполне управляема, то $B^T \psi(t) = 0$ не более чем на счётном наборе t , на котором можно выбрать произвольное $u \in \mathcal{P}$. Случай неполной управляемости сведём к предыдущему регуляризацией матрицы B . Опишем данный процесс подробнее: пусть матрица B представима в виде:

$$B = CJC^T,$$

где J - жорданова форма матрицы B . В силу неполной управляемости: $\text{rank}(B) < 2$. Значит, в J найдётся блок, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Заменим все диагональные элементы этого блока на малое число ϵ , например, на 0.0001. Получим уже другую матрицу J_1 , жорданова форма которой совпадает с ней самой. Осталось лишь положить: $B_1 = CJ_1C^T$. Тогда J_1 - жорданова форма матрицы B_1 , а сама B_1 является матрицей полного ранга, т.е. $\text{rank}(B) = 2$. Отсюда получаем полную управляемость системы.

Если $B = 0$, выбор u никак не влияет на результат.

2.5 Алгоритм вычисления $x^*(t)$

С помощью стандартной функции Matlab **ode45** вычислим траекторию x^* , соответствующую u^* . Путём перебора найдём ψ_0 при котором достигается наименьшее время. Этот результат можно уточнить при увеличении мелкости разбиения (как глобальном, т.е. на всей единичной сфере, так и локальном, т.е. в окрестности текущего наилучшего ψ_0).

2.6 Проверка условия трансверсальности

Проверить погрешность вычисления можно с помощью условия трансверсальности на правом конце:

$$\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1).$$

Оно означает, что вектор $v = \psi(t_1)$ и вектор нормали $n = n(x(t_1))$ множества \mathcal{X}_1 в точке $x(t_1)$ должны быть коллинеарны. В программе в среде MATLAB потребуем выводить следующее выражение после вычисления оптимальной траектории:

$$r = \frac{|\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle - \rho(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1)|}{\|\psi(t_1)\|}.$$

Полученное число r будем называть **погрешностью** вычислений.

3 Примеры работы программы

Приведём несколько примеров работы программы с указанием входных данных, соответствующих данным примерам. На графиках в осях (x_1, x_2) данные, соответствующие найденной оптимальной траектории, будут изображены ярко-красным цветом (ярко-красные звёзды). Для обоих примеров будем использовать количество разбиений единичной сферы равное 30.

3.1 Пример 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, t_0 = 0, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a = 4, \alpha = 0, \gamma = 1.$$

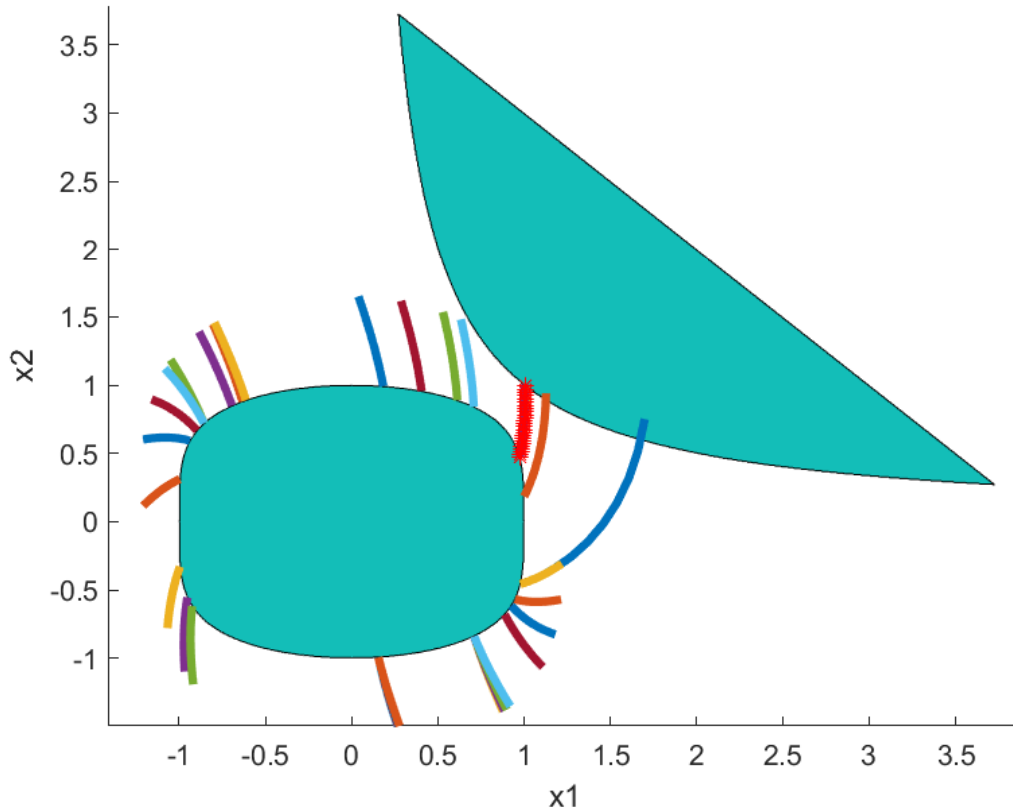


Рис. 1: Полученные траектории. Красная - оптимальная.

Полученные результаты: $t_{\min} = 0.0565, \psi_{0\min} = \begin{bmatrix} 0.9135 \\ 0.4068 \end{bmatrix}, \phi_{\min} = 0.4189, r = 0.0088.$

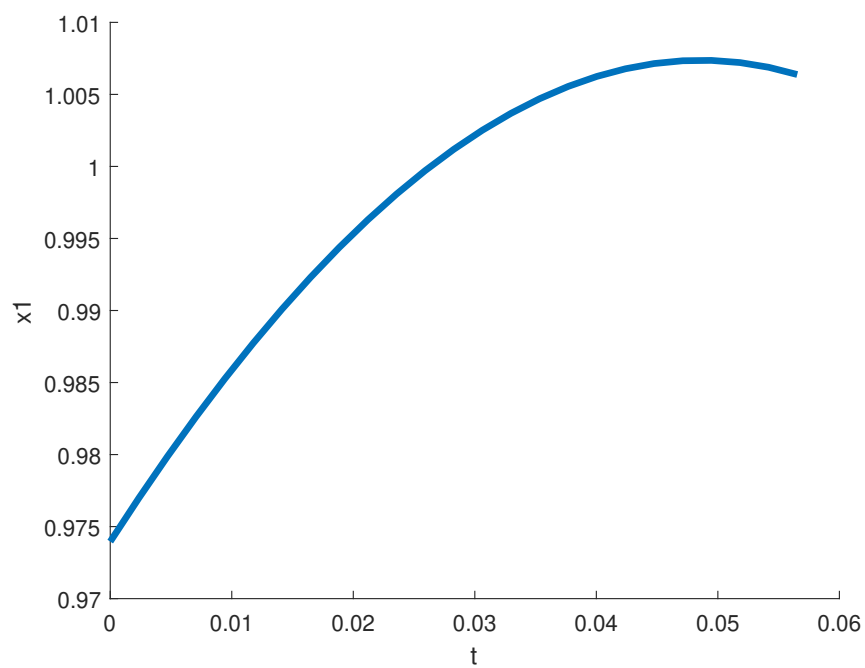


Рис. 2: График в осях t, x_1 .

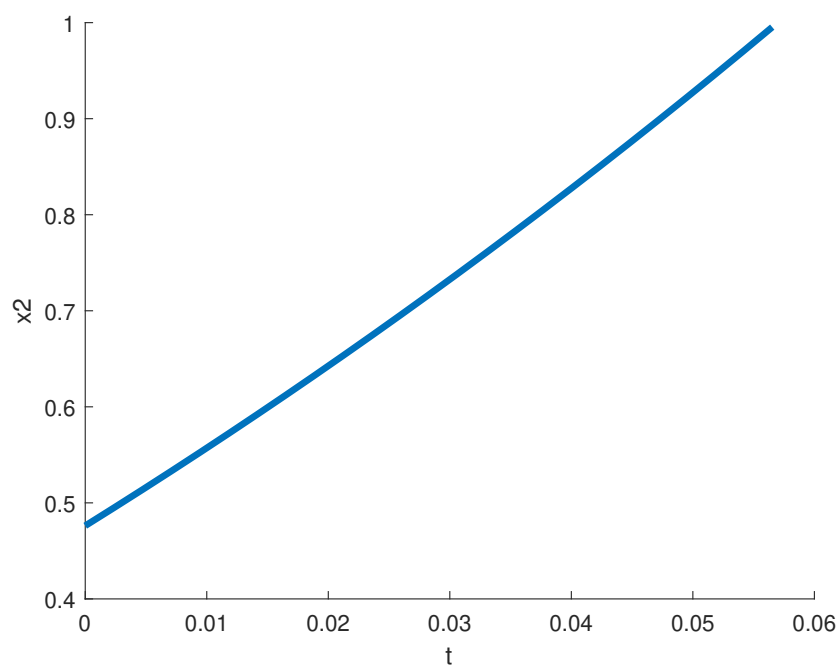


Рис. 3: График в осях t, x_2 .

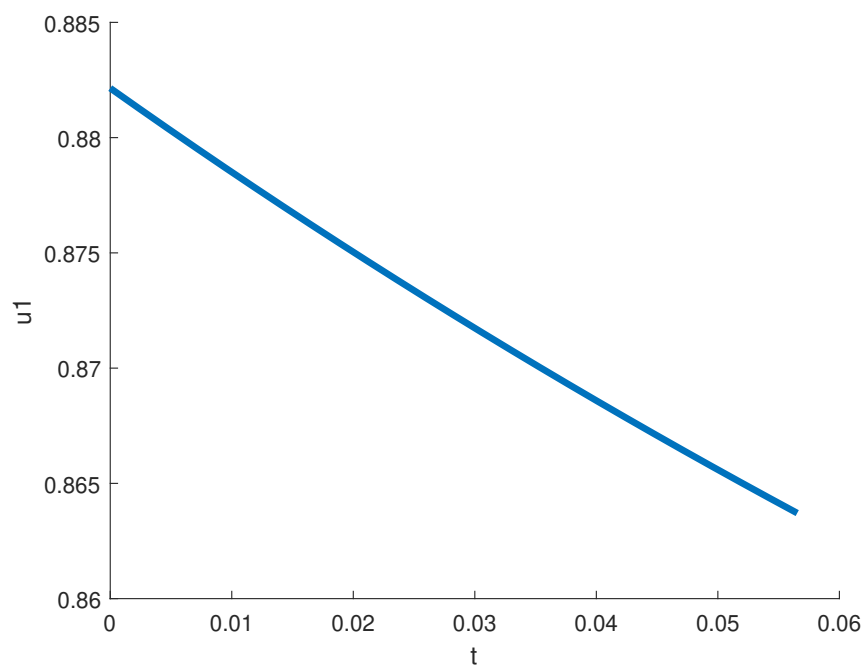


Рис. 4: График в осях t, u_1 .

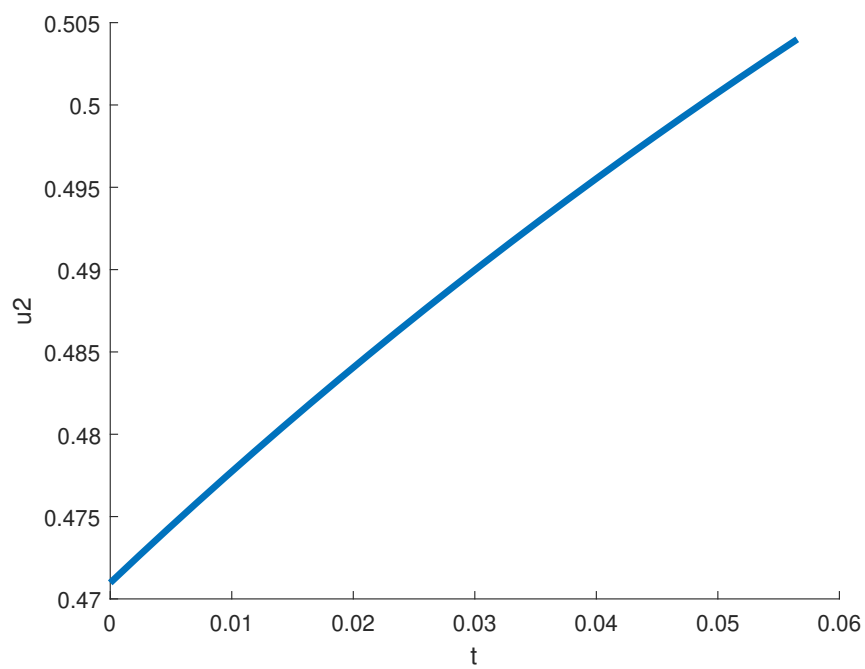


Рис. 5: График в осях t, u_2 .

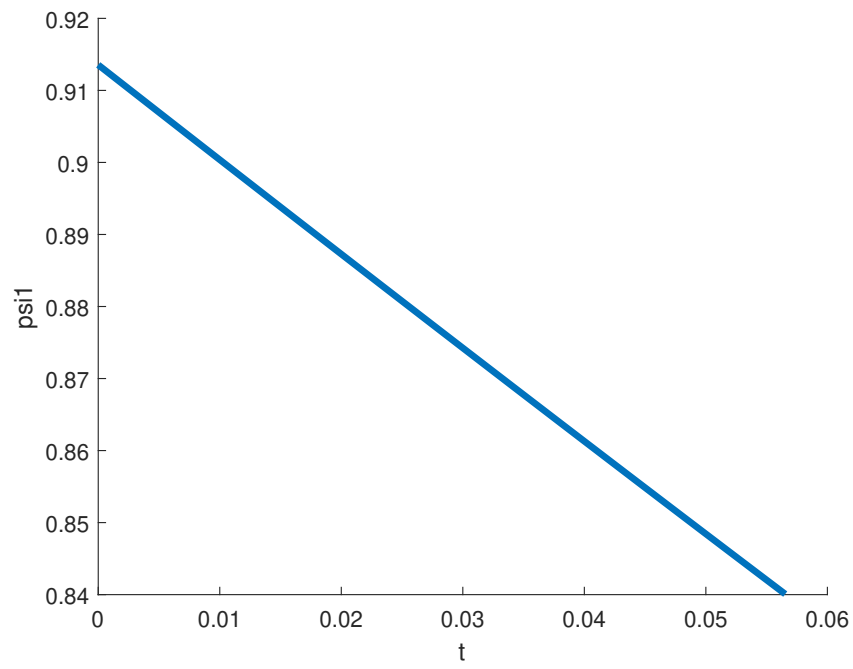


Рис. 6: График в осях t, ψ_1 .

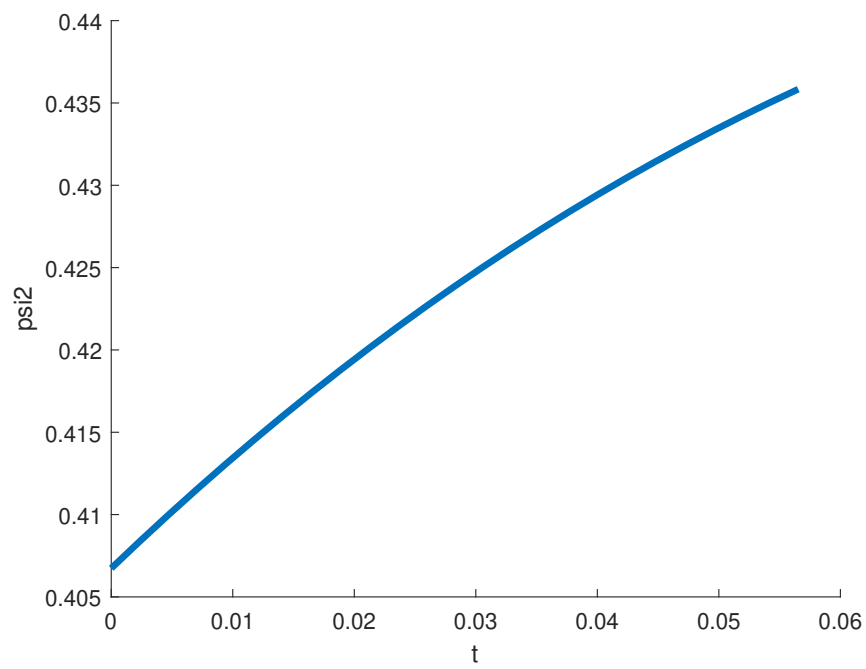


Рис. 7: График в осях t, ψ_2 .

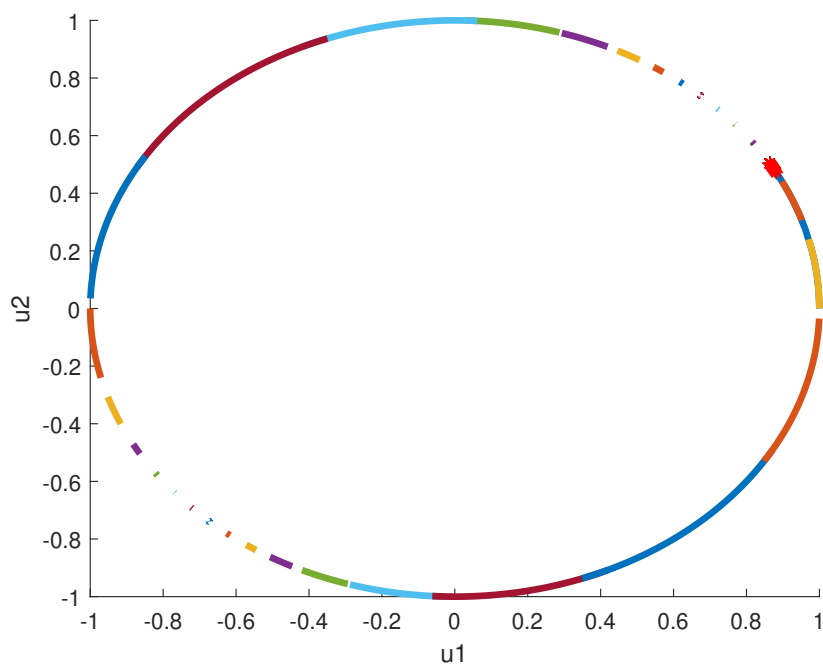


Рис. 8: График в осях u_1, u_2 . Оптимальное управление - ярко-красные звёзды справа.

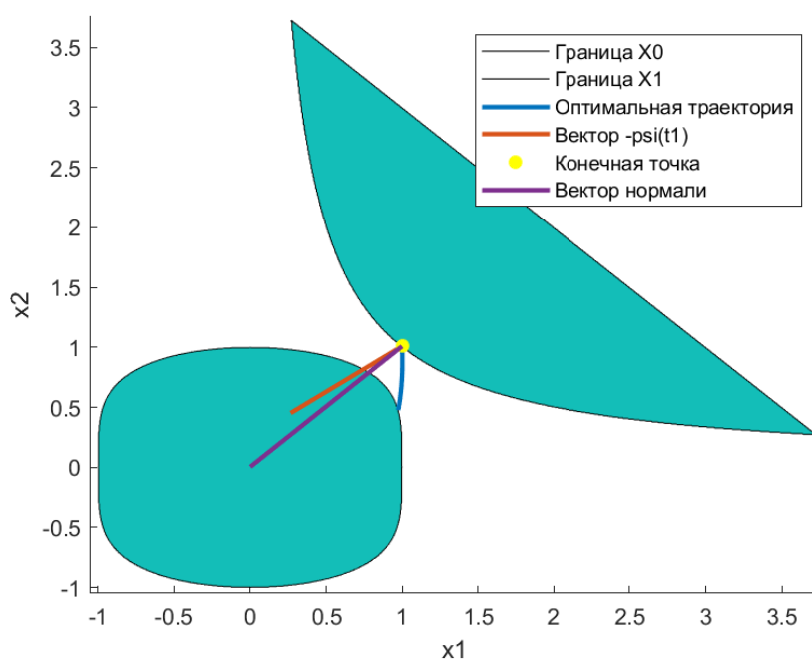


Рис. 9: Графическая проверка условия трансверсальности на правом конце.

3.2 Пример 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, t_0 = 0, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a = 3, \alpha = -2, \gamma = 1.$$

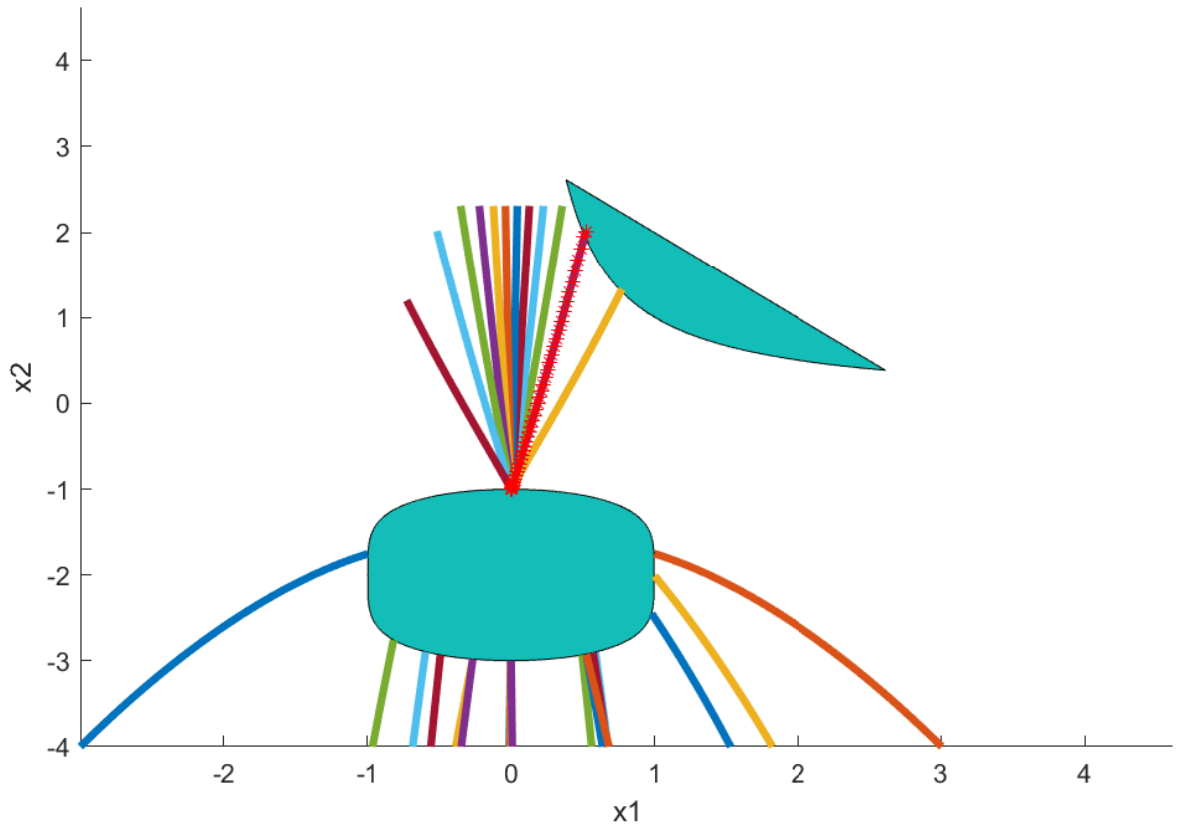


Рис. 10: Полученные траектории. Красная - оптимальная.

Полученные результаты: $t_{\min} = 0.7783, \psi_{0\min} = \begin{bmatrix} 0.8090 \\ 0.5878 \end{bmatrix}, \phi_{\min} = 0.6283, r = 0.0064.$

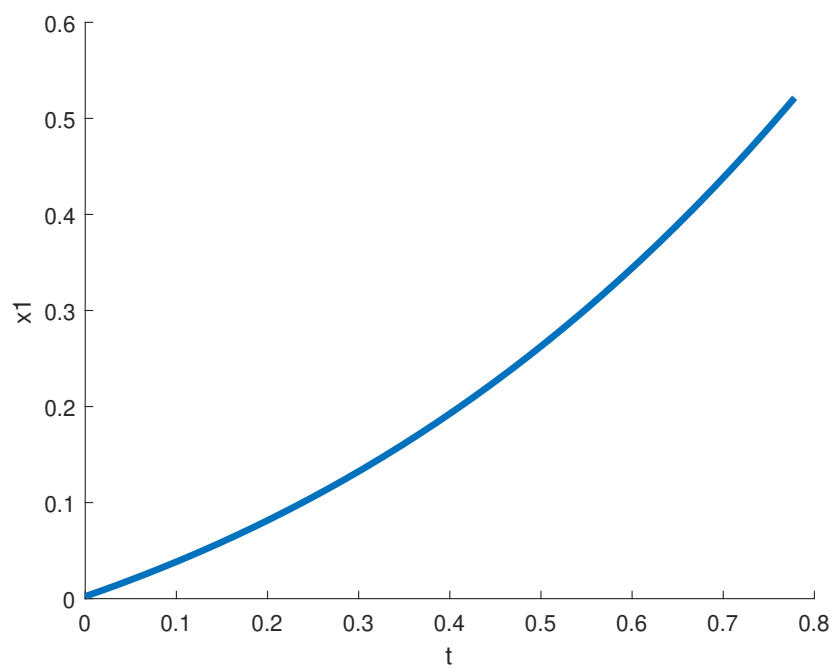


Рис. 11: График в осях t, x_1 .

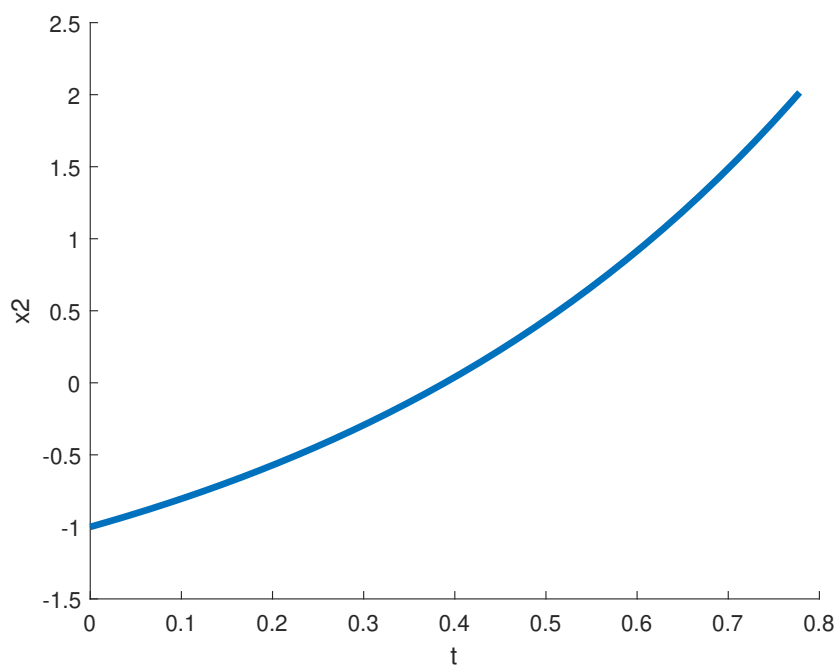


Рис. 12: График в осях t, x_2 .

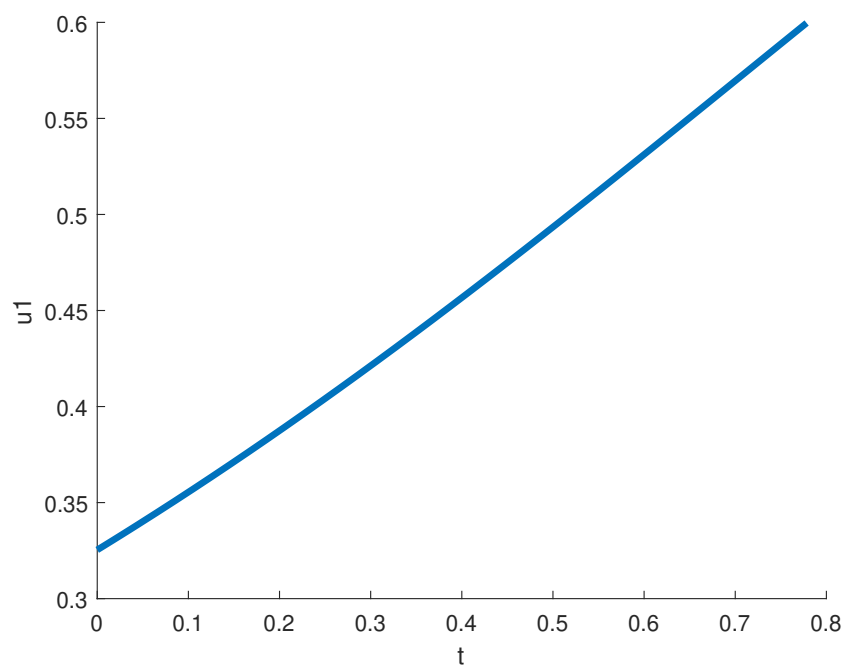


Рис. 13: График в осях t, u_1 .

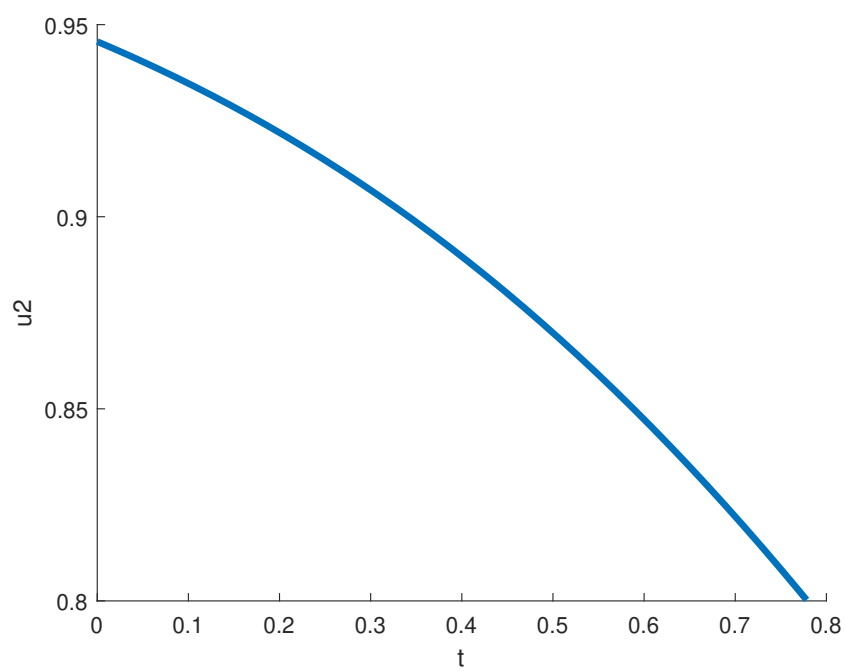


Рис. 14: График в осях t, u_2 .

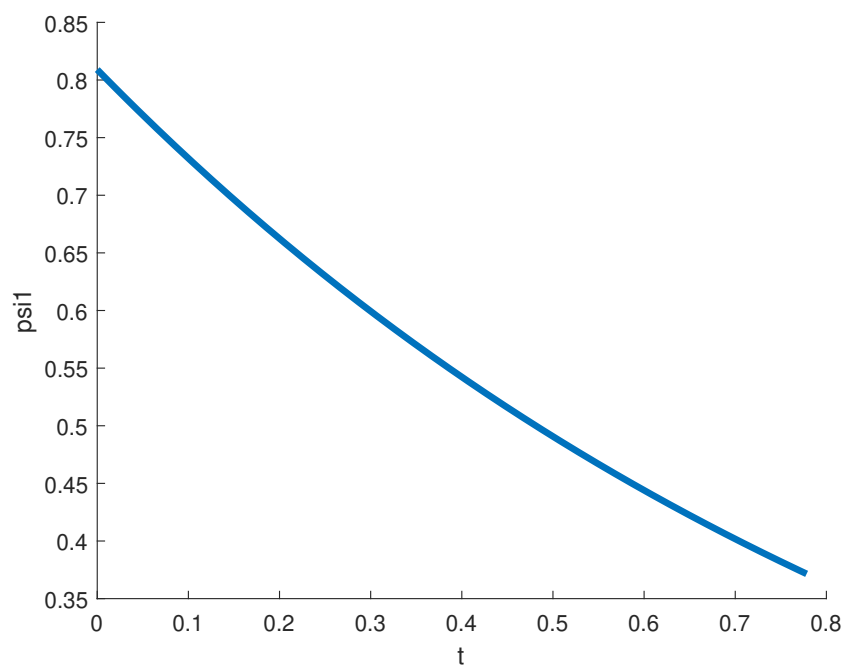


Рис. 15: График в осях t, ψ_1 .

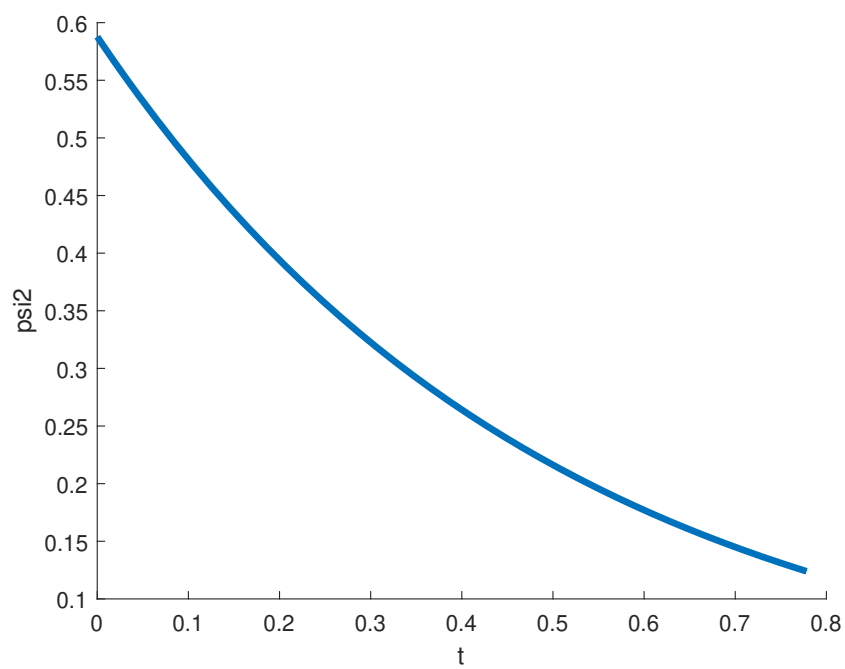


Рис. 16: График в осях t, ψ_2 .

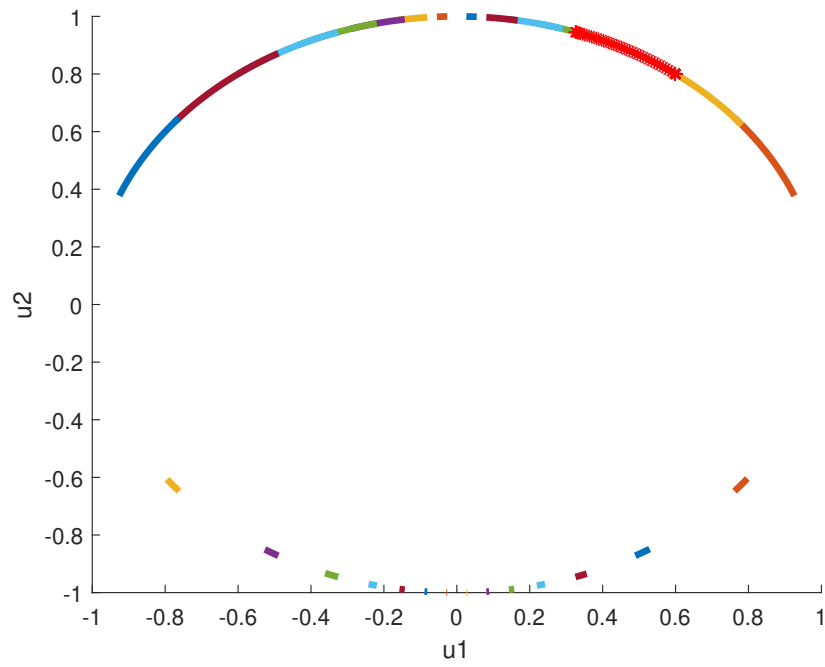


Рис. 17: График в осях u_1, u_2 . Оптимальное управление - ярко-красные звёзды справа.

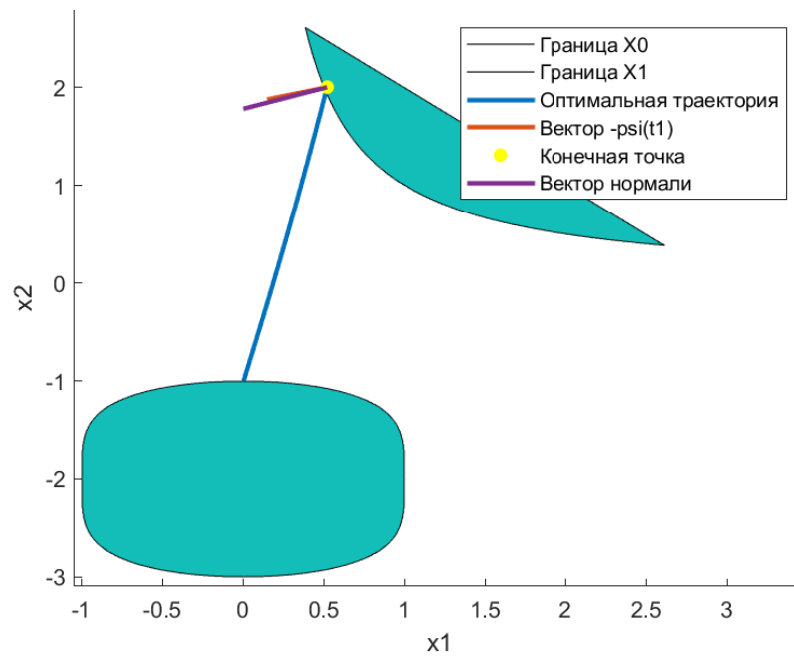


Рис. 18: Графическая проверка условия трансверсальности на правом конце.

3.3 Пример 3. Отсутствие непрерывности величины T по начальному множеству фазовых переменных

Время быстрогодействия не является непрерывной по расположению начального множества фазовых переменных величиной. В приведённых ниже примерах при незначительном изменении параметра α величина T изменилась существенно: наблюдается явный разрыв.

Первый случай:

$$A = \begin{bmatrix} 0.01 & -1 \\ 2 & 0.01 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t_0 = 0, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a = 3, \alpha = -5.22, \gamma = 0.0001.$$

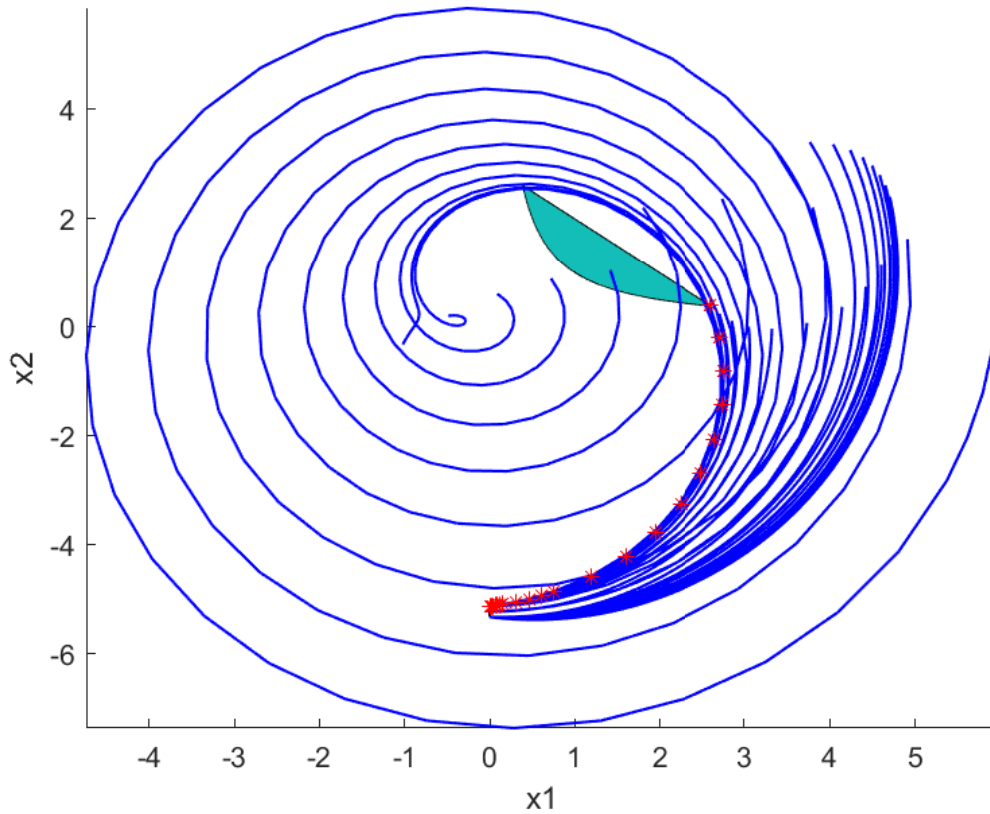


Рис. 19: График в осях x_1, x_2 . Оптимальное управление - красное. $T = 1.3401$.

Второй случай:

$$A = \begin{bmatrix} 0.01 & -1 \\ 2 & 0.01 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t_0 = 0, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a = 3, \alpha = -5.23, \gamma = 0.0001.$$

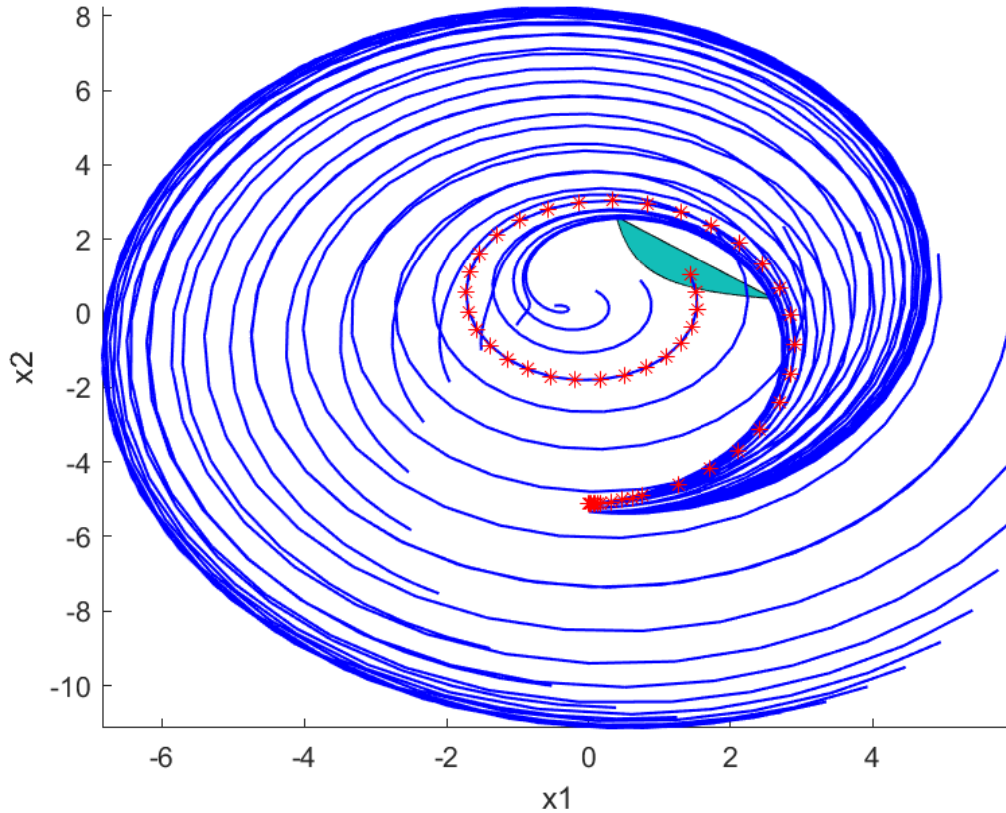


Рис. 20: График в осях x_1, x_2 . Оптимальное управление - красное. $T = 4.7674$.

В данном примере параметр α изменился всего на 0.01, а разница во времени составила более 3 секунд. Это обуславливается тем, что до сдвига оптимальная траектория "входила" в "вершину" множества \mathcal{X}_1 , а после сдвига траектории уже не могут в неё попасть и нужно пройти дополнительное расстояние по дуге, чтобы потом попасть во множество \mathcal{X}_1 с другой стороны.

Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.