



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
Г. А. Юшков

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Исследование первой системы	4
2.1	Неподвижные точки системы	4
2.2	Нахождение неподвижных точек	4
2.3	Устойчивость неподвижных точек	7
2.4	Существование циклов длины 2, 3	9
2.5	Бифуркационная диаграмма	10
2.6	Показатель Ляпунова	11
3	Исследование второй системы	13
3.1	Неподвижные точки системы	13
3.2	Устойчивость неподвижных точек	14
3.3	Бифуркация Неймарка-Сакера	16

1 Постановка задачи

Даны системы:

$$u_{t+1} = u_t^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u_t}}, r > 0, u_t \geq 0, \forall t = 0, 1, \dots,$$

$$u_{t+1} = u_t^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u_{t-1}}}, r > 0, u_t \geq 0, \forall t = 0, 1, \dots$$

Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования цикла длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
6. В случае системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Исследование первой системы

2.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим дискретную динамическую систему:

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

или, в других обозначениях:

$$u \mapsto f(u), \quad u \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Определение 1. Множество всевозможных состояний u_t называется пространством состояний (или фазовым пространством системы (1)).

Определение 2. Множество точек $u_t, t = 0, 1, \dots$ называется траекторией (или орбитой) системы (1).

Определение 3. Неподвижными точками системы (1) называются такие точки пространства состояний u^* , что $f(u^*) = u^*$.

Будем исследовать следующую систему:

$$u_{t+1} = u_t^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u_t}}, \quad r > 0, u_t \geq 0, \forall t = 0, 1, \dots,$$

2.2 Нахождение неподвижных точек

Для нахождения неподвижных точек будем искать точки пересечения графиков $f(u) = u^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u}}$ и $g(u) = u$. Очевидно, что при любом значении параметра r точка $u = 0$ является неподвижной. Дальнейшее исследование показывает, что неподвижных точек может быть от 1 до 3 (с учётом нуля). Случай двух неподвижных точек возможен при касании $f(u)$ и $g(u)$. При увеличении значения параметра r , выше того, при котором происходит касание, график $f(u)$ быстрее "прижимается" к оси абсцисс и единственной неподвижной точкой остаётся нуль. При уменьшении же, наоборот, появляется часть графика $f(u)$, лежащая над графиком $g(u)$. Из соображений непрерывности это приводит к появлению двух дополнительных (отличных от нуля) неподвижных точек. Определим условие касания:

Теорема 1. Если кривые заданы явным уравнением $y = f(x)$, $y = g(x)$, то они касаются в точке с абсциссой x_0 тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases} \quad (3)$$

Воспользуемся теоремой для поиска точки касания и требуемого значения r .

$$\begin{cases} f(u) = g(u), \\ f'(u) = g'(u) \end{cases} \quad (4)$$

Решая систему элементарными методами, получаем:

$$\begin{cases} r = \frac{3}{e}, \\ u = e^2. \end{cases} \quad (5)$$

Получаем следующую структуру расположения неподвижных точек в зависимости от параметра r :

1. При $r \in (0, \frac{3}{e})$: есть 3 неподвижные точки: $u_1 = 0$, $u_2 \in (0, e^2)$, $u_3 > e^2$.
2. При $r = \frac{3}{e}$: есть 2 неподвижные точки: $u_1 = 0$ и $u_2 = e^2$.
3. При $r > \frac{3}{e}$: есть единственная неподвижная точка: $u_1 = 0$.

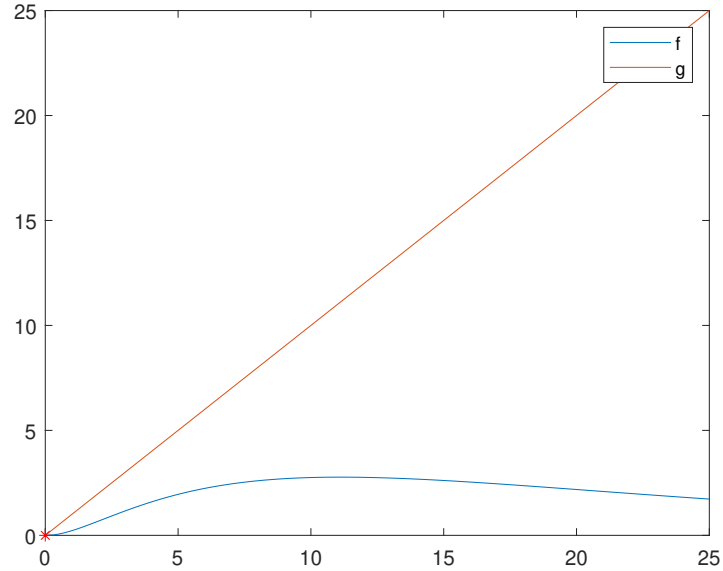


Рис. 1: 1 корень. $r = 1.5$

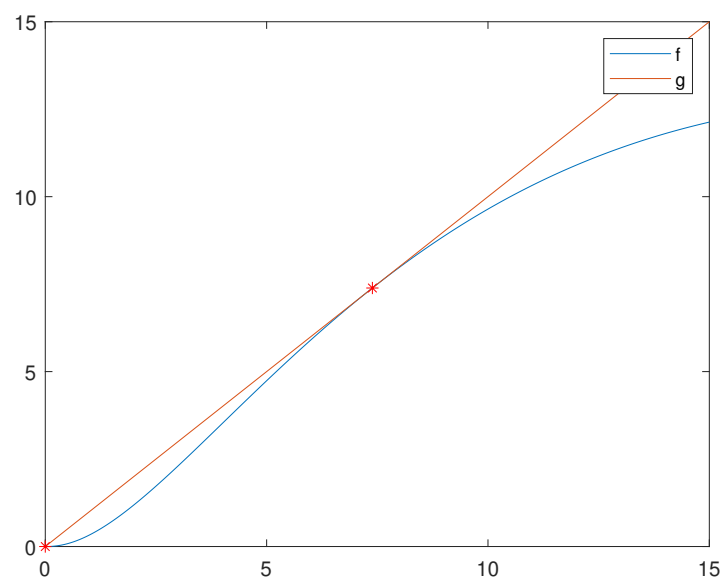


Рис. 2: 2 корня. $r = \frac{3}{e}$

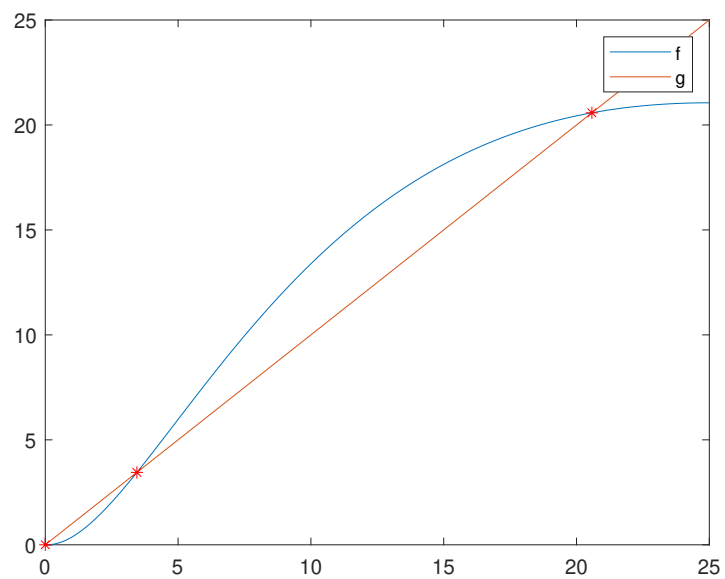


Рис. 3: 3 корня. $r = 1$

2.3 Устойчивость неподвижных точек

Определение 4. Неподвижная точка u^* отображения (2) называется устойчивой по Ляпунову, если $\forall \epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных u_0 из δ -окрестности точки u^* вся траектория системы u_t , $t = 0, 1, \dots$ содержится в ϵ -окрестности точки u^* . Если, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*,$$

то точка u^* называется асимптотически устойчивой.

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Пусть u^* — неподвижная точка отображения (2) и f обратима в малой окрестности u^* . Тогда u^* асимптотически устойчива, если $|f_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f_u(u^*)| > 1$.

Разберём случаи по значению параметра r .

1. $r > \frac{3}{e}$. Тогда существует единственная неподвижная точка $u_1 = 0$. $f'(0) = 0$, значит, точка 0 - асимптотически устойчива.
2. $r = \frac{3}{e}$. Тогда существуют 2 неподвижные точки: $u_1 = 0$, $u_2 = e^2$. $f'(u_1) = 0$, $f'(u_2) = 1$ (второе равенство вытекает из касания в u_2 функций f и g). В данном случае ничего нельзя сказать об устойчивости второй неподвижной точки, используя лишь методы линейного анализа.
3. $r < \frac{3}{e}$. Тогда существуют 3 неподвижные точки: $u_1 = 0$, $u_2 < e^2$, $u_3 > e^2$. Про u_1 уже всё известно, разберёмся с u_2 , u_3 .

$$f'(u) = \frac{u^{\frac{3}{2}} e^{-r\sqrt{u}}}{2} (5 - r\sqrt{u}). \quad (6)$$

В неподвижных точках выполнено равенство: $f(u) = g(u)$, которое удобно применять в виде:

$$u^{\frac{3}{2}} e^{-r\sqrt{u}} = 1. \quad (7)$$

Для точки u_2 выполнено неравенство: $u_2 < e^2 \Rightarrow \sqrt{u_2} < e$. Учитывая то, что $r < \frac{3}{e}$, получаем:

$$f'(u_2) > \frac{1}{2} \left(5 - \frac{3}{e}\right) = 1. \quad (8)$$

Значит, точка u_2 неустойчива. перейдём к исследованию u_3 .

$$f'(u_3) = \frac{u_3^{\frac{3}{2}} e^{-r\sqrt{u_3}}}{2} (5 - r\sqrt{u_3}). \quad (9)$$

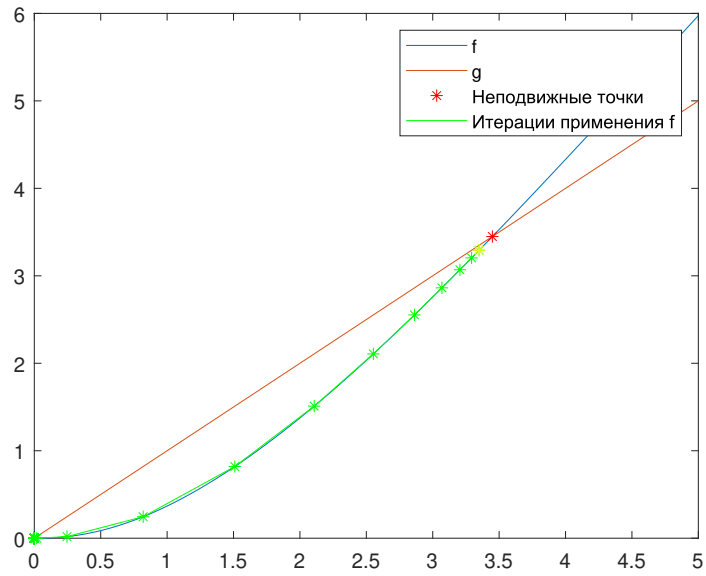
\Updownarrow

$$f'(u_3) = \frac{5 - r\sqrt{u_3}}{2}. \quad (10)$$

Достаточным условием асимптотической устойчивости является: $|f'(u_3)| < 1$, откуда вытекает:

$$\begin{cases} 5 - r\sqrt{u_3} < 1, \\ 5 - r\sqrt{u_3} > -1. \end{cases} \quad (11)$$

Получаем условие на асимптотическую устойчивость точки u_3 : $r\sqrt{u_3} \in (4, 6)$.



Устойчивость/неустойчивость в случае $a = 1$

2.4 Существование циклов длины 2, 3

Определение 5. Циклом длины k системы (1) называется множество различных точек u_1, u_2, \dots, u_k таких, что

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$\begin{aligned} & 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ \\ & \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\ & \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\ & \succ \dots \succ \\ & \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

Теорема 2. (Шарковский). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k . Тогда f имеет цикл длины t для всех таких t , что $k \succ t$ в указанном выше порядке.

Покажем, что существует цикл длины 3. Для этого найдём решение системы:

$$\begin{cases} f^3(u, r) = u, \\ \frac{df^3(u, r)}{du} = 1, \end{cases} \quad \text{где } f^3 = f \circ f \circ f. \quad (12)$$

Решим систему численно в среде MATLAB. $r = 0.45, u_0 = 16.3107$.

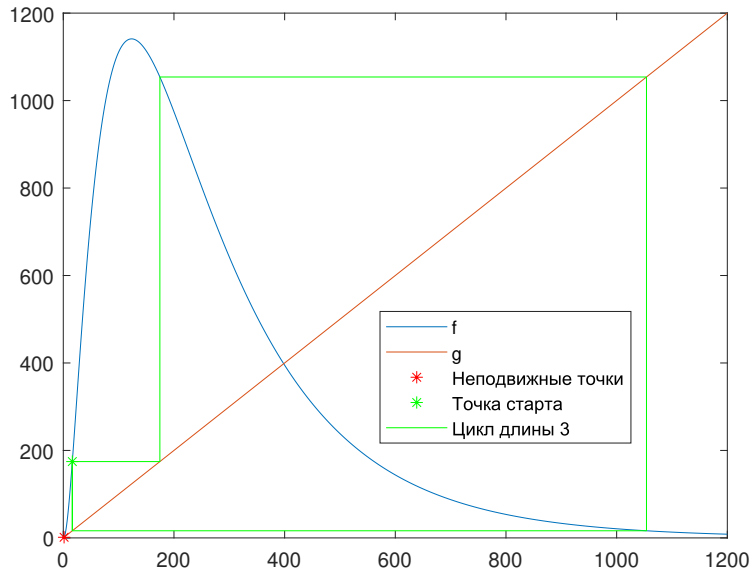


Рис. 4: Цикл длины 3. $r = 0.45, u_0 = 16.3107$

Значит, по теореме Шарковского, у системы есть циклы любой длины. Например, для цикла длины 2: $r = 0.45, u_0 = 54.8703$.

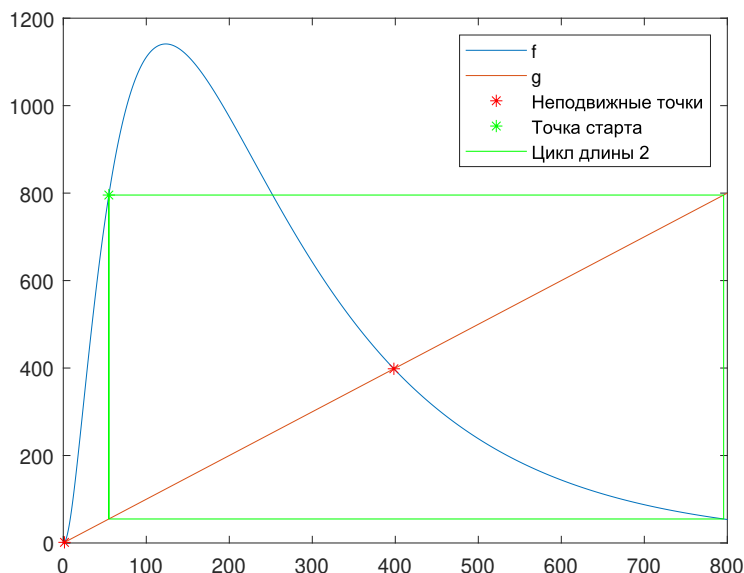


Рис. 5: Цикл длины 2. $r = 0.45, u_0 = 54.8703$

2.5 Бифуркационная диаграмма

Определение 6. Две дискретные динамические системы топологически эквивалентны, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой. При этом фазовые портреты топологически эквивалентных систем также называются топологически эквивалентными.

Определение 7. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется бифуркацией.

Определение 8. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Покажем бифуркационную диаграмму для начального приближения $u_0 = 100$, количества итераций для "сходимости" $n_1 = 600$, количества последующих итераций (отмеченных на графике в виде точек (r, u_t)) $n_2 = 200$. Стартовое значение r возьмём $r = 0.1$, конечное - $r = 1$, шаг: $\delta = 0.005$.

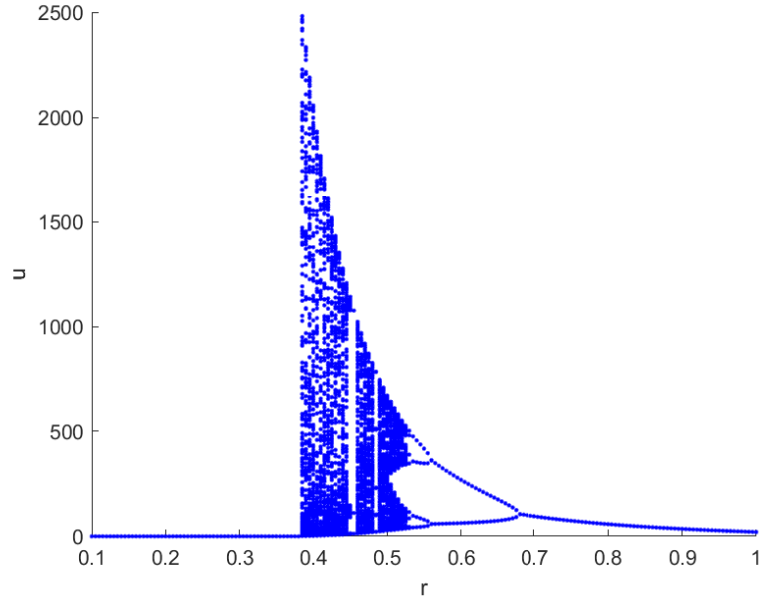


Рис. 6: Бифуркационная диаграмма. $u_0 = 100, r_{\min} = 0.1, r_{\max} = 1, \delta = 0.005, n_1 = 600, n_2 = 200$

2.6 Показатель Ляпунова

Определение 9. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории u_1, u_2, \dots называется величина:

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Определение 10. Орбиту $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ назовём хаотической, если эта орбита ограничена, не стремится к периодической траектории и её показатель Ляпунова $h(u_1)$ больше нуля.

Построим график зависимости показателя Ляпунова от параметра r . Возьмём параметры: $u_0 = 35$, r изменяется от значения 0.1 до 1 с шагом $\delta = 0.005$, $n = 1000$ (Рис. 7).

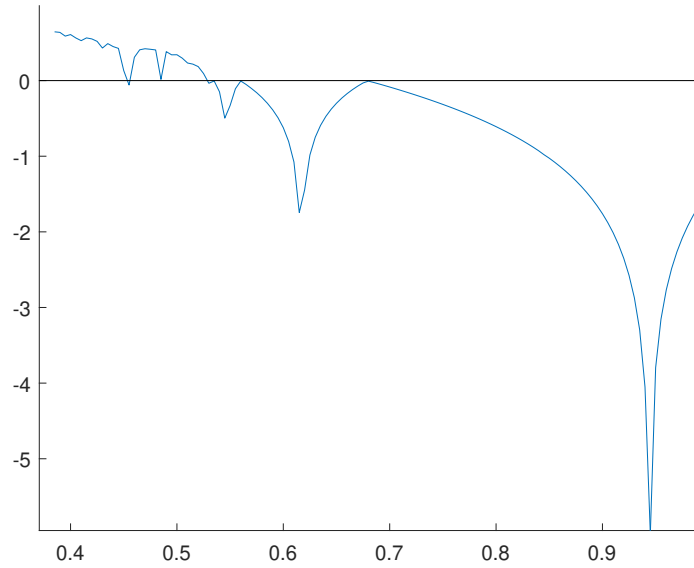


Рис. 7: Зависимость показателя Ляпунова от параметра r .

Видно, что при малых значениях r на графике нет значений. Это объясняется тем, что в какой-то момент $u_t = 0$, а ноль - асимптотически устойчивая точка. Таким образом, выражение под знаком предела в определении функции Ляпунова становится равно ∞ . Это объясняет отсутствие части графика.

Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического поведения. Если $h(u) > 0$, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. Из графика видно, что на некоторых интервалах в системе наблюдается хаотическое поведение. Интервалы с $h(u) < 0$ соответствуют циклам с небольшим периодом.

3 Исследование второй системы

3.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим систему с запаздыванием:

$$u_{t+1} = u_t^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u_{t-1}}}, r > 0, u_t \geq 0, \forall t = 0, 1, \dots$$

Перепишем её в другом виде, чтобы избавиться от запаздывания:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = u_t^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{v_t}}, \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases} \quad (13)$$

Определение 11. Точка $u^* \in \mathbb{R}$ является неподвижной точкой системы

$$u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1}), u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

если $f(u^*, u^*) = u^*$.

Задача сводится нахождению решений следующей системы:

$$\begin{cases} u^* = (u^*)^{\frac{5}{2}} e^{-r\sqrt{u^*}}, \\ u^* = u^*. \end{cases} \quad (14)$$

Второе уравнение обращается в тождество, а первое уравнение было рассмотрено при исследовании первой системы. Получим три случая:

1. $r > \frac{3}{e}$. Тогда существует единственная неподвижная точка $u_1 = 0$.
2. $r = \frac{3}{e}$. Тогда есть 2 неподвижные точки: $u_1 = 0$ и $u_2 = e^2$.
3. $r \in (0, \frac{3}{e})$. Тогда есть 3 неподвижные точки: $u_1 = 0$, $u_2 \in (0, e^2)$, $u_3 > e^2$.

3.2 Устойчивость неподвижных точек

Теорема 3. Пусть дана динамическая система с дискретным временем:

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}^n, f - \text{гладкое отображение } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$, вычисленные в точке u^* , таковы, что $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Если хотя бы одно собственное значение λ_i таково, что $|\lambda_i| > 1$, то неподвижная точка u^* неустойчива.

Рассмотрим матрицу Якоби для системы (13):

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}u_t^{\frac{3}{2}}e^{-r\sqrt{v_t}} & \frac{-r}{2\sqrt{v_t}}u_t^{\frac{5}{2}}e^{-r\sqrt{v_t}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $r > \frac{3}{e}$. Исследуем $u_1 = 0$.

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = 0$. Точка 0 - асимптотически устойчива.

2. $r = \frac{3}{e}$. Исследуем $u_2 = e^2$.

$$J(e^2, e^2) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение: $(\frac{5}{2} - \lambda)(-\lambda) + \frac{3}{2} = 0$.

Собственные значения: $\begin{cases} \lambda_1 = 1.5, \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$ Значит, неподвижная точка (e^2, e^2) является неустойчивой.

3. $r < \frac{3}{e}$. Исследуем $u_2 < e^2$. Воспользуемся её неподвижностью: она является корнем уравнений: $f(u) = u$ и $f'(u) = 1$ (из первой системы). Тогда её матрица Якоби примет вид:

$$J(u_2, u_2) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-r\sqrt{u_2}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение: $(\frac{5}{2} - \lambda)(-\lambda) + \frac{r\sqrt{u_2}}{2} = 0$.

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4r^2u_2}}{4}$.

Из условий случая получаем: $r^2u_2 < \frac{9}{e^2}e^2 = 9$. Отсюда вытекает, что подкоренное выражение неотрицательно. Тогда собственное значение, в котором корень берётся со знаком "плюс" будет заведомо больше единицы. Значит, точка u_2 является неустойчивой.

Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что точка u_3 также является неустойчивой.

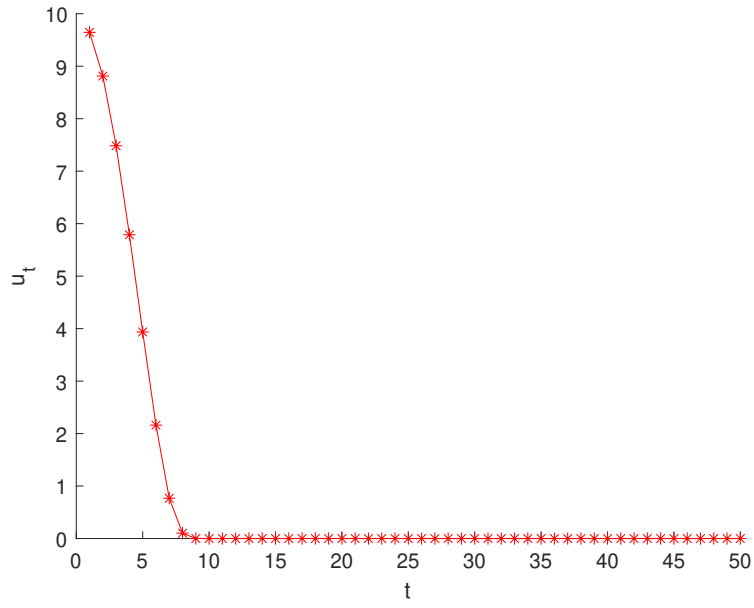


Рис. 8: Устойчивость нуля во второй системе. $u_0 = u_1 = 10, r = \frac{3}{e}$.

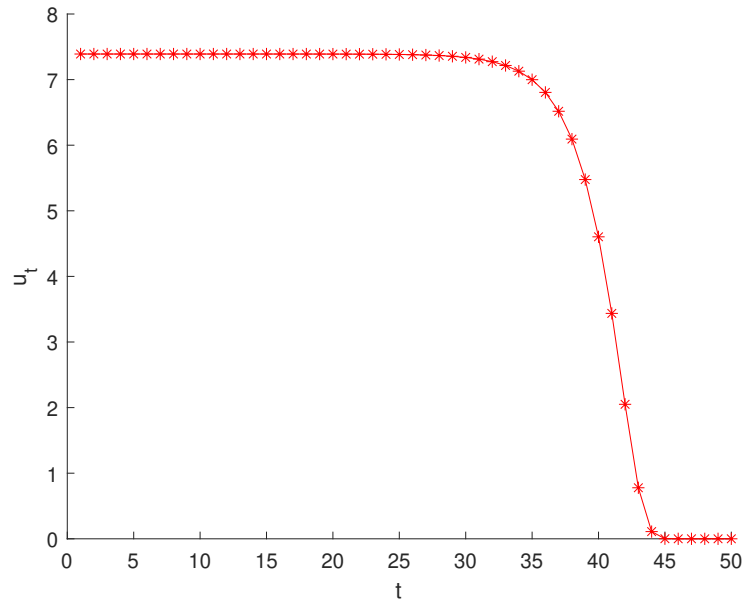


Рис. 9: Неустойчивость e^2 во второй системе. $u_0 = u_1 = 7.39, r = \frac{3}{e}$.

3.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

Определение 12. Бифуркацией положения равновесия в системе (13), соответствующая появлению собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, называется бифуркацией Неймарка-Сакера.

Как было показано в пункте про устойчивость неподвижных точек, условия на собственные значения $\lambda_{1,2}$ из определения бифуркации Неймарка-Сакера не выполняются ни для одной из неподвижных точек при всех возможных значениях $r > 0$. Значит, бифуркацию Неймарка-Сакера в данном случае не может возникнуть.

Список литературы

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.