Máquinas de Turing. Jerarquía de la Computabilidad.

Comentario: Los ejercicios 5 y 6 son un poco más difíciles, resolverlos da un mayor bonus para la calificación de la materia.

Ejercicio 1. Responder breve y claramente los siguientes incisos:

1. ¿Qué es un problema computacional de decisión? ¿Es el tipo de problema más general que se puede formular?
2. Dados $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, obtener $\Sigma^* \cap L$, $\Sigma^* \cup L$, y el complemento de L con respecto a Σ^*.
3. En la clase teórica 1 se hace referencia al problema de satisfactibilidad de las fórmulas booleanas. Formular las tres formas del problema, teniendo en cuenta las tres visiones de MT consideradas: calculadora, aceptadora o reconocedora, y generadora.
4. ¿Qué postula la Tesis de Church-Turing?
5. ¿Cuándo dos MT son equivalentes? ¿Cuándo dos modelos de MT son equivalentes?
6. ¿En qué difieren entre sí los lenguajes recursivos, los lenguajes recursivamente numerables no recursivos, y los lenguajes no recursivamente numerables?
7. Probar que $R \subseteq RE \subseteq \mathfrak{L}$. *Ayuda: usar directamente las definiciones*.
8. ¿Qué lenguajes de la clase CO-RE tienen MT que los aceptan? ¿También los deciden?
9. Justificar por qué los lenguajes universal Σ^* y vacío $\emptyset$ son recursivos.
10. Justificar por qué un lenguaje finito es recursivo.
11. Justificar por qué si $L_1 \in$ CO-RE y $L_2 \in$ CO-RE, entonces $(L_1 \cap L_2) \in$ CO-RE. *Ayuda: una manera de resolverlo es utilizando las leyes de De Morgan del álgebra de Boole.*

Ejercicio 2. Construir una MT, con cualquier cantidad de cintas, que acepte de la manera más eficiente posible el lenguaje $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. *Comentario: Plantear primero la idea general.*

Ejercicio 3. Explicar (informal pero claramente) cómo simular una MT por otra que en un paso no pueda simultáneamente modificar un símbolo y moverse.

Ejercicio 4. Probar:

1. La clase R es cerrada con respecto a la operación de unión. *Ayuda: la prueba es similar a la desarrollada para la intersección*.
2. La clase RE es cerrada con respecto a la operación de intersección. *Ayuda: la prueba es similar a la desarrollada para la clase R*.

Ejercicio 5. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes recursivamente numerables de números naturales codificados en unario (por ejemplo, el número 5 se representa con 11111). Probar que también es recursivamente numerable el lenguaje $L = \{x \mid x$ es un número natural codificado en unario, y existen y, z, tales que $y + z = x$, con $y \in L_1, z \in L_2\}$.
Ayuda: la prueba es similar a la vista en clase, de la propiedad de clausura de la clase RE con respecto a la operación de concatenación.

Ejercicio 6. Dada una MT M_1 con alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

1. Construir una MT M_2 que determine si $L(M_1)$ tiene al menos una cadena.
2. ¿Se puede construir además una MT M_3 para determinar si $L(M_1)$ tiene a lo sumo una cadena? Justificar.

Ayuda para la parte (1): Si $L(M_1)$ tiene al menos una cadena, entonces existe al menos una cadena w de unos y ceros, de tamaño n, tal que M_1 a partir de w acepta en k pasos. Teniendo en cuenta esto, pensar cómo M_2 podría simular M_1 considerando todas las cadenas de unos y ceros hasta encontrar eventualmente una que M_1 acepte (¡cuidándose de los casos en que M_1 entre en loop!).