Ejercicios sobre Complejidad Computacional (clases 5 a 7)

Comentario: Los ejercicios 4, 8 y 9 llevan bonus.

Ejercicio 1. Responder las siguientes preguntas **conceptuales:**

a) El lenguaje de los palíndromos se puede decidir con una MT de una cinta y también con una MT con varias cintas, en tiempo $O(n^2)$ y $O(n)$, respectivamente. ¿Por qué es indistinta la cantidad de cintas utilizadas, considerando la jerarquía temporal que definimos?
b) Vimos que un algoritmo natural para encontrar un divisor que termine en 3 de un número N tarda O(N) pasos. ¿Esto significa que el problema está en P?
c) Probar que si $T_1(n) = O(T_2(n))$, entonces $TIME(T_1(n)) \subseteq TIME(T_2(n))$.
d) Probar que la asunción NP ≠ CO-NP es más fuerte que la asunción P ≠ NP, es decir que la implica.
e) ¿Qué significa que si $L_1 \leq_P L_2$, entonces L_2 es tan o más difícil que L_1, en el marco de la complejidad temporal?
f) Mostrar certificados para los siguientes lenguajes, e indicar cuáles son sucintos: CH (el lenguaje de los grafos con un Circuito de Hamilton), SAT (el lenguaje de las fórmulas booleanas satisfactibles), NOSAT (el lenguaje de las fórmulas booleanas insatisfactibles), ISO (el lenguaje de los grafos isomorfos), NOCLIQUE (el lenguaje de los grafos que no tienen un clique de tamaño K).
g) Mostramos en clase una reducción polinomial del lenguaje CH (del problema del circuito hamiltoniano) al lenguaje TSP (del problema del viajante de comercio). En base a esto justificar:
   i. Como TSP es NP-completo, entonces CH $\in$ NP.
   ii. Como CH es NP-completo, entonces TSP es NP-difícil.
h) ¿Por qué si un lenguaje es NP-completo, en la práctica se considera que no pertenece a la clase P?
i) Explicar cómo agregaría un lenguaje a la clase NPC a partir del lenguaje CLIQUE, que se sabe que está en la clase NPC.
j) Probar que si $L_1 \in$ NPC y $L_2 \in$ NPC, entonces $L_1 \leq_P L_2$ y $L_2 \leq_P L_1$.
k) Justificar por qué se consideran tratables sólo a los problemas que se resuelven en espacio logarítmico.
l) Explicar por qué en el caso de que un lenguaje requiera para ser decidido mínimamente espacio lineal, se puede utilizar una MT con una cinta de entrada de lectura y escritura.
m) Justificar por qué una MT que se ejecuta en tiempo poly(n) ocupa espacio poly(n), y por qué una MT que ocupa espacio poly(n) puede llegar a ejecutar exp(n) pasos.

P vs NP

Ejercicio 2. Sea el lenguaje SMALL-SAT = {φ | φ es una fórmula booleana sin cuantificadores en forma normal conjuntiva (o FNC), y existe una asignación de valores de verdad que la satisface en la que hay a lo sumo 3 variables con valor de verdad *verdadero*}. Probar que SMALL-SAT $\in$ P. *Comentario: φ está en FNC si es una conjunción de disyunciones de variables o variables negadas, como p.ej.* $(x_1 \vee x_2) \wedge x_4 \wedge (\neg x_3 \vee x_5 \vee x_6)$.

Ejercicio 3. El problema del conjunto dominante de un grafo se representa por el lenguaje DOM-SET = {(G, K) | G es un grafo que tiene un conjunto dominante de K vértices}. Un subconjunto de vértices de un grafo G es un conjunto dominante de G, si todo otro vértice de G es adyacente a algún vértice de dicho subconjunto. Probar que DOM-SET $\in$ NP. ¿Se cumple que DOM-SET $\in$ P? ¿Se cumple que $\text{DOM-SET}^C \in$ NP?

Ejercicio 4. Probar que el lenguaje FACT = $\{(N, M_1, M_2)$ | N tiene un divisor primo en el intervalo [M1, M2]} está tanto en NP como en CO-NP. *Ayuda: Todo número natural N se descompone de una única manera en factores primos, los cuales concatenados no ocupan más de poly(|N|) símbolos*.

Reducciones Polinomiales

Ejercicio 5. Mostrar que las reducciones polinomiales son reflexivas y transitivas.

Ejercicio 6. Asumiendo que Σ^* sólo tiene cadenas de unos y ceros de cero o más símbolos, se define, dada la cadena w, que E(w) es su cadena espejo, obtenida reemplazando en w los unos por ceros y los ceros por unos (p.ej. E(1001) = 0110 y $E(\lambda) = \lambda$). Y se define que L es un lenguaje espejo si para toda cadena w distinta de λ cumple $w \in L \leftrightarrow E(w) \in L^C$. Sea f la función que asigna a toda cadena w su cadena espejo E(w). Responder:

a) ¿Es f una función total computable?
b) ¿Cuánto tarda una MT que computa f?
c) Si L es un lenguaje espejo, ¿se cumple que f es una reducción polinomial de L a L^C?

Lenguajes NP-completos

Ejercicio 7. Probar:

a) Si los lenguajes A y B son tales que $A \neq \emptyset$, $A \neq \Sigma^*$ y $B \in P$, entonces $(A \cap B) \leq_P A$.
b) Si $L_1 \leq_P L_2$, $L_2 \leq_P L_1$, y $L_1 \in NPC$, entonces $L_2 \in NPC$.
c) Si un lenguaje es NP-completo, entonces su complemento es CO-NP-completo, es decir, está en CO-NP y todos los lenguajes de CO-NPC se reducen polinomialmente a él.

Ejercicio 8. Sea el lenguaje SH-s-t = {(G, s, t) | G es un grafo que tiene un camino (o sendero) de Hamilton del vértice s al vértice t}. Un grafo G = (V, E) tiene un camino de Hamilton del vértice s al vértice t sii G tiene un camino entre s y t que recorre todos los vértices restantes una sola vez. Probar que SH-s-t es NP-completo. *Ayuda: Probar con una reducción desde el lenguaje CH, el lenguaje correspondiente al problema del circuito hamiltoniano, que es NP-completo*.

Ejercicio 9. Sea el lenguaje SUB-ISO = $\{(G_1, G_2) \mid G_1$ es isomorfo a un subgrafo de $G_2\}$. Se define que dos grafos son isomorfos si son idénticos salvo por el nombre de sus arcos. Probar que SUB-ISO es NP-completo. *Ayuda: Probar con una reducción polinomial desde el lenguaje CLIQUE, el lenguaje correspondiente al problema del clique, que es NP-completo.*

Complejidad Espacial

Ejercicio 10. Probar que el problema de los palíndromos está en SPACE(n).

Ejercicio 11. Justificar por qué el lenguaje QSAT no pertenecería a P ni a NP.

Ejercicio 12. Probar que $NP \subseteq PSPACE$. *Ayuda: Si L pertenece a NP, existe una MT M_1 capaz de verificar en tiempo poly(|w|) si una cadena w pertenece a L, con la ayuda de un certificado x de tamaño poly(|w|). De esta manera, se puede construir una MT M_2 que decide L en espacio poly(|w|).*