第 0 章 练习

Problem 0.1

1. 证明 $H_0(X, A) = 0$, 当且仅当 A 达到 X 的每个道路分支.

Proof A 达到 X 的每个道路分支, 当且仅当对于任意的 $x \in X$, 都存在 $a \in A$, 使得 x, a 成为 X 上一个道路的端点. 由于道路上奇异 1-单形, 这相当说, 当视 x 为 X 上的 0-单形, a 为 A 上的 0-单形时, $x - i_\sharp(a) \in \operatorname{Im} \partial_1$, 即同调类 $[x] = [i_\sharp(a)] = i_*([a])$, 其中 $i : A \hookrightarrow X$ 是含入映射. 断言上述成立, 当且仅当 i_* 是满射: 由于 X, A 上的点与它们上的 0-单形的一组基对应, 由于 i_* 线性,X 上的任意 0-单形写成这这组 X 上 0-单形基的线性组合, 进而这组 A 的 0-单形基的线性组合的含入像, 这表明 i_* 是满射. 反之若 i_* 是满射, $x \in X$, 存在 $a = \sum m_k a_k$, 其中 $a_k \in A \subseteq X$, 使得 $[x] = i_*([a]) = \sum m_k i_*([a_k])$. 这表明 $x - \sum m_k a_k$ 上的一个闭链, 故 $\sum m_k = 1$.

另一方面, 根据 X, A 相对同调的长正合列, $H_0(X, A) = 0$ 当且仅当 $i_* : H_0(A) \to H_0(X)$ 是满射, 这当且仅当对于任意的 $[x] \in H_0(X)$, 存在 $[a] \in H_0(A)$, 使得 $[x] - i_*([a]) = 0$. □