第 1 章　李群

1.1 基本概念

定义 1.1 (李群)

一个李群是指，一个带有群结构的光滑（带边）流形 G，配有一个光滑的乘法映射 $m: G\times G\to G$ 和一个光滑的取逆映射 $i:G\to G$，

$$m(g,h)=gh,\quad i(g)=g^{-1}$$

♣

定义 1.2

设 G 是一个李群，对于任意的 $g\in G$，定义映射 $L_g, R_g: G\to G$，分别称为左平移和右平移，按

$$L_g(h):=gh,\quad R_g(h):=hg$$

♣

Remark

1. 由于 L_g 可以表示为复合映射
$$G\xrightarrow{\iota_g}G\times G\xrightarrow{m}G$$
其中 $\iota_g(h)=(g,h)$，m 是乘法，因此 L_g 是光滑的。
2. L_g 有光滑的逆映射 $L_{g^{-1}}$，因此是微分同胚。

Example 1.1 李群的例子

1. 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$（Example**??**）的矩阵乘法表为 A,B 分量的多项式，进而是光滑的。取逆映射由 Cramer 法则可知也是光滑的。因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 构成一个李群。
2. 令 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 表示由正行列式矩阵构成的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子集。因为 $\det(AB)=(\det A)(\det B)$，且 $\det\left(A^{-1}\right)=1/\det A$，所以 $\mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个子群；并且 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是行列式函数这样一个连续函数在 $(0,\infty)$ 下的原像，故而是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个开子集。群作用是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的限制，从而是光滑映射。因此 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是一个李群。
3. 令 G 是一个李群。若 $H\subseteq G$ 同时是 G 的子群和开子集，则 H 构成一个李群，被称为是 G 的一个 **开子群**。
4. **复一般线性群** $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为全体 $n\times n$ 的可逆复矩阵。它是 $2n^2$-维光滑流形 $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ 的一个开子流形，并且通过分解实虚部可知矩阵乘法和逆映射均为光滑映射，因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 也构成一个李群。
5. 若 V 是任意实或复的线性空间，令 $\mathrm{GL}(V)$ 表示全体 V 到自身的可逆线性映射。则 $\mathrm{Gl}(V)$ 在线性映射的复合下构成群。若 V 的维数为 $n<\infty$，则 V 的任意一组基给出 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $GL(n,\mathbb{R})$ 或 $GL(n,\mathbb{C})$ 的一个同构，因此 $\mathrm{GL}(V)$ 构成一个李群。

6. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ 和 $\mathbb{C}^n, n \geq 1$ 分别在各自加法下构成李群。
7. 非零实数集 $\mathbb{R}^* \simeq \mathrm{GL}\left(1, \mathbb{R}\right)$ 构成 1-维李群，$\mathbb{R}^+ \simeq \mathrm{GL}^+\left(1, \mathbb{R}\right)$ 是 $\mathbb{R}^*$ 的开子群，故而也是 1-维李群。
8. 非零复数集 $\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{GL}\left(1, \mathbb{C}\right)$ 构成 2-维李群。
9. 圆 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ 是一个光滑流形，且在复数乘法下构成群。在选取合适的角函数作为局部坐标下，乘法和逆运算的坐标表示为 $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2, \theta \mapsto -\theta$ 均是光滑的，因此 $\mathbb{S}^1$ 构成一个李群，被称为是 **圆群**。
10. 给定李群 $G_1, \cdots, G_k$，定义它们的乘积，为积流形 $G_1 \times \cdots \times G_k$ 配备以下分量乘法
$$\left(g_1, \cdots, g_k\right)\left(g_1', \cdots, g_k'\right) := \left(g_1 g_1', \cdots, g_k g_k'\right)$$
不难验证这是一个李群。
11. n-圆环 $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ 是一个 n-为阿贝尔李群。