第 1 章 期末试题

1.1 2024

Problem 1.1

求曲面 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$ 的第一基本形式、第二基本形式，并证明它是极小曲面.

Proof 坐标切向量场为

$$\partial_u=(\cos v,\sin v,0)\,,\quad \partial_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

- $\partial_u\cdot\partial_u=1$,
- $\partial_u\cdot\partial_v=0$
- $\partial_v\cdot\partial_v=u^2+1$

于是

$$I=\mathrm{d}u^2+\left(u^2+1\right)\mathrm{d}v^2$$

或者，考虑欧式度量在 r 下的拉回

$$\begin{aligned}g=r^*\bar{g}=r^*\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)\\&=\mathrm{d}\left(u\cos v\right)^2+\mathrm{d}\left(u\sin v\right)^2+\mathrm{d}\left(v\right)^2\\&=\left(\cos v\,\mathrm{d}u-u\sin v\,\mathrm{d}v\right)^2+\left(\sin v\,\mathrm{d}u+u\cos v\,\mathrm{d}v\right)^2+\mathrm{d}v^2\\&=\mathrm{d}u^2+\left(u^2+1\right)\mathrm{d}v^2\end{aligned}$$

一个法向量为

$$n'=\partial_u\times\partial_v=\begin{pmatrix}i&j&k\\\cos v&\sin v&0\\-u\sin v&u\cos v&1\end{pmatrix}=(\sin v,-\cos v,u)$$

单位法向量为

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}n'=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v,-\cos v,u)$$

$$h\left(X,Y\right)=\langle II\left(X,Y\right),n\rangle=\left\langle\bar{\nabla}_XY,n\right\rangle$$

$$h\left(\partial_u,\partial_u\right)=\left\langle\bar{\nabla}_{\partial_u}\partial_u,n\right\rangle=0$$

类似地,

$$h\left(\partial_u,\partial_v\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left\langle\left(-\sin v,\cos v,0\right),\left\langle\sin v,-\cos v,u\right\rangle\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$h\left(\partial_v,\partial_v\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left\langle\left(-u\cos v,-u\sin v,0\right)\cdot\left(\sin v,-\cos v,u\right)\right\rangle=0$$

于是

$$h=h\left(\partial_u,\partial_u\right)\left(\mathrm{d}u\right)^2+2h\left(\partial_u,\partial_v\right)\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+h\left(\partial_v,\partial_v\right)\left(\mathrm{d}v\right)^2=-\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v$$

由于黎曼度量没有交叉项, 由表示矩阵的关系 $S=G^{-1}B$, 其中 S,G,B 分别为 Weigarten 映射, 黎曼度量和第二基本形式的表示矩阵, 可得

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{h\left(\partial_u,\partial_u\right)}{1}+\frac{h\left(\partial_v,\partial_v\right)}{u^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(0+0\right)=0$$

故它是极小曲面.

□

Problem 1.2 设一个旋转曲面有参数化 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,e^u)$, 计算

1. 自然标架 r_u,r_v,n;
2. 纬线 $u=1$ 的测地曲率;
3. r_v 沿 u-线的协变导数.

Proof

1. 自然坐标标架为

$$\partial_u=\left(\cos v,\sin v,e^u\right),\quad\partial_v=\left(-u\sin v,u\cos v,0\right)$$

单位法向量场为

$$\begin{aligned}n=\frac{\partial_u\times\partial_v}{\left|\partial_u\times\partial_v\right|}&=\frac{1}{|\cdot|}\begin{pmatrix}i&j&k\\\cos v&\sin v&e^u\\-u\sin v&u\cos v&0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{|\cdot|}\left(-ue^u\cos v,-ue^u\sin v,u\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}\left(-e^u\cos v,-e^u\sin v,1\right)\end{aligned}$$

2. 纬线 $u=1$ 的一个参数表示为

$$\tilde{\gamma}\left(v\right)=r\left(1,v\right)=\left(\cos v,\sin v,e\right)$$

速度向量场的大小为

$$\left|\tilde{\gamma}'\left(v\right)\right|=\left|\left(-\sin v,\cos v,0\right)\right|=1$$

故 $\tilde{\gamma}(v)$ 也是一个单位速度参数化. 那么测地曲率为

$$|D_v\gamma'(v)| = \left|\tilde{D}_v\gamma' - \mathrm{II}(\gamma',\gamma')\right|$$

由右侧两项的正交性, 得到

$$|D_v\gamma'(v)|^2 = \left|\tilde{D}_v\gamma'\right|^2 - |\mathrm{II}(\gamma',\gamma')|^2$$

其中 $D\delta_t$ 表示欧式联络决定的沿 γ 的协变导数.

$$\left|\tilde{D}_v\gamma'\right| = |(-\cos v, -\sin v, 0)| = 1$$

另一边,

$$\tilde{D}_v\gamma' = D_t\gamma' + \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

两边作用在 n 上, 得到

$$\left\langle\tilde{D}_v\gamma', n\right\rangle = \langle\mathrm{II}(\gamma',\gamma'), n\rangle = h(\gamma',\gamma')$$

计算得到 $|\mathrm{II}(\gamma',\gamma')| = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}e^u$ 于是

$$k_g = |D_v\gamma'(v)| = \sqrt{1-\frac{e^{2u}}{e^{2u}+1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}$$

3. 令 v_0 坐标的 u-线为

$$\gamma_{v_0}(u) = r(u, v_0)$$

则

$$D_u\partial_v = \nabla_{\partial_u}\partial_v = \Gamma^1_{12}\partial_u + \Gamma^2_{12}\partial_v$$

其中

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{1l}(\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l} - \partial_l g_{12})$$

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11} = 1 + e^{2u}, \quad g^{11} = \frac{1}{1+e^{2u}}, \quad g_{22} = u^2, \quad g^{22} = \frac{1}{u^2}$$

从而

$$\Gamma^l_{12} = 0$$

此外,

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{2l}(\partial_2 g_{1l} + \partial_1 g_{2l} - \partial_l g_{12}) = \frac{1}{u^2}(1u) = \frac{1}{u}$$

于是

$$D_u\partial_v = \frac{1}{u}\partial_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

□

Problem 1.3 已知曲面的第一基本形式, 求 Gauss 曲率:

1. $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$;
2. $ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2$;
3. $ds^2 = u^2 du^2 + \sin^2 u dv^2$;
4. $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$, $x^2+y^2<1$.

Proof

1. 令

$$\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = u\,\mathrm{d}v$$

则 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 构成曲面的一组正交的余标架. 由 Cartan 第一结构方程, 以及联络 1-形式的反对称性

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

得到

$$\omega_2^1 = -\mathrm{d}v$$

于是由 Cartan 第二结构方程

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \Omega_2^1 = \mathrm{d}\omega_2^1 = 0$$

得到 Gauss 曲率 $K = 0$

2. 类似地, 这次令

$$\varepsilon^1 = \cos v\,\mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = \mathrm{d}v$$

$$\sin v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1, \quad 0 = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

得到

$$\omega_2^1 = -\sin v\,\mathrm{d}u$$

Gauss 曲率为

$$K = \frac{\mathrm{d}\omega_2^1}{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2} = \frac{\cos v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v}{\cos v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v} = 1$$

3.

$$\varepsilon^1 = u\,\mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = \sin u\,\mathrm{d}v$$

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1 \quad \cos u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

于是

$$\omega_2^1 = -\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}v$$

从而

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = \left(\frac{u\sin u + \cos u}{u^2}\right)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \frac{u\sin u + \cos u}{u^2}\frac{1}{u\sin u}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

于是

$$K = \frac{u\sin u + \cos u}{u^3 \sin u}$$

4. 令

$$\varepsilon^1 = \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2 - y^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\mathrm{d}y}{1 - x^2 - y^2}$$

则

$$\frac{-2y}{(1 - x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\frac{2x}{(1 - x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

从而

$$\omega_2^1 = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x - \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} = -4\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

于是

$$K = -4$$

□

Problem 1.4 在测地极坐标系下求 Gauss 曲率为正常数 $K > 0$ 的曲面的第一基本形式.

Proof 设测地极坐标的度量为

$$g = \mathrm{d}r^2 + G(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta^2$$

令

$$\varepsilon^1 = \mathrm{d}r, \quad \varepsilon^2 = \sqrt{G(r, \theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

则 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 构成曲面的一个正交余标架. 由 Cartan 第一结构方程, 以及联络 1-形式的反对称性,

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

以及

$$\partial_r \sqrt{G(r, \theta)}\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

于是

$$\omega_2^1 = -\partial_r \sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\partial_r^2 \sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

从而

$$K = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{G(r,\theta)}}{\sqrt{G(r,\theta)}}$$

令 $f = \sqrt{G}$, 则

$$\partial_r^2 f + Kf = 0$$

解 ODE, 得到

$$f(r,\theta) = C_1(\theta)\cos\left(\sqrt{K}r\right) + C_2(\theta)\sin\left(\sqrt{K}r\right)$$

令 $r \to 0$, 利用 $f = \sqrt{G} \to 0$, 得到

$$C_1(\theta) = 0$$

于是

$$f(r,\theta) = C_2(\theta)\sin\left(\sqrt{K}r\right)$$

利用

$$f = \sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + O\left(r^4\right), \quad (r \to 0)$$

而

$$\sin\left(\sqrt{K}r\right) \sim \sqrt{K}r - \frac{1}{6}K\sqrt{K}r^3 + O\left(r^4\right), \quad (r \to 0)$$

得到 $C_2(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{K}}$. 最终, 得到 $\sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}r\right)$ 第一基本形式为

$$g = \mathrm{d}r^2 + \frac{1}{K}\sin^2\left(\sqrt{K}r\right)\mathrm{d}\theta^2$$

□

Problem 1.5 设 C 是平面严格凸曲线, 证明: C 的 Gauss 映射 $n: C \to S^1$ 是微分同胚.

Proof 设 $\gamma: I = [0,l] \to C$ 是它的单位速度参数和, 则

$$n(t) = \gamma'(t)$$

由于 C 是严格凸的,

$$0 < \kappa(t) = |n'(t)|$$

这表明

$$n'(t) \neq 0$$

对于所有的 $t \in I$ 成立. 由于 n 本身是光滑映射, 由反函数定理, n 在任一点附近是局部的微分同胚. 说明 n 是整体的微分同胚, 只需要说明 n 还是双射.

1. 设 θ 是一个切角函数, 使得

$$n(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

则

$$\kappa(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) = n'(t) = \theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$$

这表明 $\theta'(t) = \kappa(t) > 0$ 从而切角函数 θ 是严格单增的, 进而 n 只能是单射.

2. 最后, 由旋转指标定理

$$\theta(l) - \theta(0) = 2\pi$$

由于 θ 是连续函数, 介值定理表面 θ 在 $[0, l]$ 上的取值遍历 $[0, 2\pi]$, 从而 $n(t)$ 的取值遍历 S^1, 表面 n 是一个满射.

综上, n 是微分同胚

□

Problem 1.6 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中亏格 $g \geq 1$ 的可定向闭曲面, 证明: 不存在 S 上的分段光滑测地线, 将 S 划分成两个互不相交的单连通区域 (注: 在亏格为 0 的闭曲面上这是可以的, 例如赤道将球面分为两个半球面).

Proof 若存在这样的划分, 设 C 是这条测地线, 则分别在这两个单连通区域 D_1, D_2 上应用 Gauss-Bonnet 定理, 得到

$$\int_{D_1} K \,\mathrm{d}S = 2\pi, \quad \int_{D_2} K \,\mathrm{d}S = 2\pi$$

在 S 上应用 Gauss-Bonnet 定理, 得到

$$\int_S K \,\mathrm{d}S = 2\pi\chi(S) = 4\pi(1-g)$$

但是

$$\int_S K \,\mathrm{d}S = \int_{D_1} K \,\mathrm{d}S + \int_{D_2} K \,\mathrm{d}S = 4\pi$$

而

$$4\pi(1-g) \neq 4\pi$$

矛盾, 因此不存在这样的分段光滑的测地线.

□

Problem 1.7 设 C 是曲面 S 上的一条渐近线 (即切向的法曲率为 0), 证明:

1. C 上每一点都有 $K \leq 0$, 其中 K 是 S 的 Gauss 曲率.
2. 如果 C 不是直线, 那么 C 的挠率 τ 在 C 上每一点都会满足 $\tau^2 = -K$.

Proof

1. 由黎曼超曲面子流形的 Gauss 方程

$$\tilde{Rm}(W,X,Y,Z)=Rm(W,X,Y,Z)-\langle \mathrm{II}(W,Z),\mathrm{II}(X,Y)\rangle+\langle \mathrm{II}(W,Y),\mathrm{II}(X,Z)\rangle$$

这里, Rm 采用如下的约定

$$Rm(W,X,Y,Z):=\langle \nabla_W\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_W Y,Z\rangle$$

对于曲面 $S\subseteq\mathbb{R}^3$, 氛围流形的曲率张量 $\tilde{Rm}=0$. 任取 C 上一点, 设 γ 是该点附近的 C 的一个局部单位速度参数表示. N 是单位法向量场, 令 $w=\gamma'\times N$. 带入 $W=Z=\gamma'$,$X=Y=w$, 得到

$$Rm(\gamma',w,w,\gamma')=\langle \mathrm{II}(\gamma',\gamma'),\mathrm{II}(w,w)\rangle-\langle \mathrm{II}(\gamma',w),\mathrm{II}(\gamma',w)\rangle=-\left|\mathrm{II}(\gamma',w)\right|_g^2\leq 0$$

由于 γ',w 在每一点处都是切空间的一组单位正交基, 由 Gauss 绝妙定理可知 Gauss 曲率 K 为

$$K=Rm(\gamma',w,w,\gamma')\leq 0$$

2. 若 C 不是直线, 上面的论述中, 已经说明了

$$\left|\mathrm{II}(\gamma',w)\right|_g^2=-K$$

对于渐近线的速度向量场 γ', 应用曲线的 Gauss 方程, 得到

$$\tilde{D}_t\gamma'=D_t\gamma'+\mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

其中 $\tilde{D}_t,D_t$ 分别是在 $\mathbb{R}^3$ 上和 S 上沿 γ 的协变导数, 前者无非就是欧式空间上的方向导数. 带入 $\mathrm{II}(\gamma',\gamma')=0$, 得到

$$\tilde{D}_t\gamma'=D_t\gamma'$$

这表明 γ' 的主法向量 $\mathbf{n}$ 完全落在切平面上, 不妨设 $\mathbf{n}=w$. 进而副法向量 $\mathbf{b}$ 与 S 的一个单位法向量场在 C 上重合. 对 w 应用沿曲线的 Gauss 方程, 得到

$$\tilde{D}_t w=D_t w+\mathrm{II}(\gamma',w)$$

带入 $w=n$, 得到

$$\tilde{D}_t\mathbf{n}=D_t\mathbf{n}+\mathrm{II}(\gamma',w)$$

其中

$$\tilde{D}_t\mathbf{n}=-\kappa\gamma'+\tau\mathbf{b}=-\kappa\gamma'+\tau N$$

$$D_t\mathbf{n}=\left\langle \tilde{D}_t\mathbf{n},\gamma'\right\rangle\gamma'+\left\langle \tilde{D}_t\mathbf{n},w\right\rangle w=-\kappa\gamma'$$

带入方程, 得到

$$\mathrm{II}(\gamma',w)=\tau N$$

因此

$$-K = \left|\mathrm{II}\left(\gamma', w\right)\right|_g^2 = |\tau N|_g^2 = \tau^2$$

$\square$

1.2 2023

Problem 1.8 曲线 $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 的弧长参数化、Frenet 标架、曲率和挠率.

Proof

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad |c'(t)| = \sqrt{2}$$

$$s(t) = \int_0^t |c'(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t$$

弧长函数的反函数为

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

于是一个弧长参数化为

$$\gamma(s) := c(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

切向量场为

$$T = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

计算

$$T' = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

于是曲率为

$$\kappa = |T'| \equiv \frac{1}{2}$$

主法向量场为

$$N = \frac{T'}{|T'|} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

副法向量场为

$$\begin{aligned} B = T \times N &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

挠率为

$$\tau = -B' \cdot N = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

□

Problem 1.9 球面有参数化 $r(u,v) = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u)$, 计算

1. 自然标架 r_u, r_v, n;
2. 纬线 $u = \frac{\pi}{4}$ 的测地曲率;
3. r_v 沿 u-线的协变导数.

Problem 1.10 设曲面有参数化

$$r(u,v) = (\ln(\cosh u)\cos v, \ln(\cosh u)\sin v, \arctan(\sinh u))$$

求它的第一基本形式和 Gauss 曲率.

Problem 1.11 设 $c(s)$ 是曲面 S 上的曲线, $X(s)$ 是沿 $c(s)$ 的向量场, 满足 $\frac{\nabla X(s)}{ds} = X(s)$. 求沿 $c(s)$ 的平行向量场 $Y(s)$, 使得 $Y(0) = X(s)$ 且 $Y(s)$ 与 $X(s)$ 方向相同.

Problem 1.12 设曲面包含一条直线, 求证:

1. 该直线一定是测地线;
2. 在该直线上的每个点, 曲面的 Gauss 曲率 $K \leq 0$.

Problem 1.13 设 P 是曲面上的一个点, 记以 P 为中心、以 r 为半径的测地圆盘的面积为 $A(r)$. 已知 $A(r)$ 当 r 足够小的时候是光滑函数, 试证明

$$A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12}K(P)r^4 + o(r^4)$$

其中 $K(P)$ 是 P 点处的 Gauss 曲率.

Problem 1.14 设 S 是凸曲面, 且 S 上任意点处的 Gauss 曲率 $K > 1$.

1. 证明: S 的面积小于单位球面的面积.
2. 设 $D(r)$ 是 S 上以 P 为中心、r 为半径的测地圆盘, $0 < r < \pi$, 且 $D(r)$ 包含于以 P 为中心的测地极坐标系中, 证明: $D(r)$ 的面积小于单位球面上以 r 为半径的测地圆盘的面积.

1.3 2022

Problem 1.15 给定一个圆螺面的参数表示

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

请计算:

- (a) r 的第一基本形式和第二基本形式;

- (b) r 在 (u, v) 点处的主曲率、平均曲率和 Gauss 曲率;
- (c) 坐标 v-曲线的测地曲率.

Problem 1.16 设曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2$$

- (1) 求曲面的联络系数 (即 Christoffel 符号) Γ_{ij}^k, 并证明 Gauss 曲率 K 的表达式为
$$K = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\frac{1}{\sqrt{G}}$$
- (2) 利用 (1) 的结果, 求出 Gauss 曲率 K 恒为常数的曲面的第一基本形式;
- (3) 设 $G = e^{2u}$, 求曲面上的测地线.

Problem 1.17 证明: 若 (u, v) 是曲面上的参数系, 使得参数曲面网是正交的曲线网 (坐标 u-曲线是主曲率 k_1 的曲率线、坐标 v-曲线是主曲率 k_2 的曲率线), 则主曲率 k_1, k_2 满足下列方程:

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(k_2 - k_1)$$
$$\frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(k_1 - k_2)$$

Problem 1.18 设 $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ 为曲面 $r = r(u^1, u^2)$ 的第一基本形式, $V^i = V^i(u^1, u^2)$ 是偏微分方程组

$$\frac{\partial V^i}{\partial u^k} = -\Gamma_{kl}^i V^l$$

的非零解, 其中 Γ_{kl}^i 是关于曲面 r 的自然标架场 $\{r_{u^1}, r_{u^2}\}$ 的联络系数. 证明:

- (1) $||V||^2 = g_{ij}V^iV^j$ 是一个非零常数;
- (2) $V = V^i r_{u^i}$ 是曲面上的切向量场, 它沿曲面上的任意一条曲线都是平行的.

Problem 1.19

- (1) 设 D 是曲面 S 上的一个四边形闭区域, P_i 是顶点, α_i 是相应的内角, $i = 1, 2, 3, 4$. 证明:
$$\iint_D K dA + \oint_{\partial D} k_g ds = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi$$
- (2) 证明一曲面若在每一点的邻域内均存在两族相交成定角的测地线, 则其 Gauss 曲率恒为零. (提示: 利用 (1), 选取 D 的边界是由测地线构成的四边形区域)