目录

第 4 章 积分

定理 4.1

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是有界区域, ∂D 由有限条分段光滑曲线并成. 设存在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是开集, 使得 $\bar{D} \subseteq \Omega . u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$. 则

$$\int_{\partial D} (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y) = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♡

推论 4.1 (弱版本的 Cauchy 定理)

设 $f = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上解析. $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ 是分段光滑的 Jordan 闭合曲线, 所围成的区域为 Ω, 且 $u, v \in C^1(D)$ 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

♡

Proof

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) \\
&= \int_\Omega \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\int_\Omega \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\int_\Omega 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^{[1]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

. □

定义 4.1

设 $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ 是 Jordan 闭合曲线, 它等于若干线段的并, γ 围绕的区域称为 D. 则 $D \cup \gamma =: T$ 被称为是一个多角形.

♣

将要证明以下定理

定理 4.2

$D \subseteq \mathbb{C}$ 单连通, $f \in \mathcal{H}(D)$, 设 $\gamma \subseteq D$ 是分段光滑[a]的 Jordan 闭合曲线, 则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

[a]事实上只需要可求长

♡

Remark 由于有自交闭折线总可以分成无自交闭折线的并, 故对于有自交的闭折线也有类似的结论成立.

[1]由 C-R 方程

引理 4.1

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 单连通, $f \in \mathcal{H}(D)$, T 是多边形, $\gamma = \partial T$, 则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ ♡

Proof 设 $T = \Delta$ 是一个三角形, 配备了逆时针的定向. $\gamma = \partial\Delta$. 取 Δ 的中位线, 将 Δ 分为四个全等的小三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, 相似比均为 $\frac{1}{2}$, 都配备逆时针的定向. 我们有

$$\int_{\partial\Delta} = \int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} + \int_{\partial\Delta_3} + \int_{\partial\Delta_4}$$

$$M = \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \left|\int_{\partial\Delta_1}\right| + \left|\int_{\partial\Delta_2}\right| + \left|\int_{\partial\Delta_3}\right| + \left|\int_{\partial\Delta_4}\right|$$

存在 $\Delta^{(1)} \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$, 使得

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(1)}}\right| \ge \frac{M}{4}$$

将 $\Delta^{(1)}$ 做类似的分割, 得到存在 $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)}$ 1:2 相似于 $\Delta^{(1)}$, 使得

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(2)}}\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta^{(1)}}\right| \ge \frac{M}{4^2}$$

重复以上操作, 可以归纳地得到一个闭三角形套 $\Delta^{(0)} := \Delta \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \cdots$ 前一个与后一个的相似比均为 $\frac{1}{2}$. 并且

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ge \frac{M}{4^n}$$

令 $U_n = L\left(\partial\Delta^{(n)}\right) = \frac{L(\partial U)}{2^n} = \frac{U}{2^n}$ 为周长, 其中 $U = L(\partial\Delta)$. 由紧集套定理, 存在[2] $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty}\Delta^{(n)}$. 由于 f 在 z_0 处可导, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $z \in D$ 满足 $|z - z_0| < \delta$, 都有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

这等价于

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \varepsilon\,|z - z_0| \tag{*}$$

由于任意三角形内部两点的距离都小于三角形的周长. 存在充分大的 n, 使得 $\Delta^{(n)} \subseteq U(z_0, \delta)$, 故 $(*)$ 式在 $\Delta^{(n)}$ 上成立. 则对于任意的 $z \in \Delta^{(n)}$, $|z - z_0| \le L\left(\partial\Delta^{(n)}\right) = \frac{U}{2^n}$ 故

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \frac{\varepsilon U}{2^n}$$

由于 $\partial\Delta^n$ 是闭合曲线, 且 1 和 z 在闭合曲线上的积分为零, 于是

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta^{(n)}} \left(f(z) - f(z_0) + f'(z_0)z_0 - f'(z_0)z\right)\,\mathrm{d}z$$

故

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\varepsilon U}{2^n} L\left(\partial\Delta^{(n)}\right) = \frac{\varepsilon U^2}{4^n}$$

[2]事实上也唯一

故
$$\frac{M}{4^n} \le \frac{\varepsilon U^2}{4^n} \implies M \le \varepsilon U^2$$
由于 ε 是任取的, 故 $M = 0$.

接下来, 若 T 是多边形, 则 T 总可以写成若干三角形的无交并, 故命题对于 T 是多边形的情形也成立. □

定义 4.2

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是区域, $f : D \to \mathbb{C}, \Phi : D \to \mathbb{C}$ 是函数. 若 $\Phi \in \mathcal{H}(D)$, 且 $f = \Phi'$, 则称 Φ 是 f(在 D) 上的一个原函数或不定积分. ♣

Remark 可以证明, 原函数在相差一个常数下唯一.

引理 4.2

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是凸区域, $f \in \mathcal{H}(D)$, 则 f 在 D 上有原函数. ♡

Proof 固定 $\alpha \in D$, 任取 $z \in D$, 线段 $[\alpha, z] \in D$. 定义
$$F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$
断言 F 为 f 的原函数.

取 $z_0 \in D$, $z \in D$. 则
$$F(z) - F(z_0) = \int_{[\alpha,z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta - \int_{[\alpha,z_0]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$
由三角形上的 Cauchy 积分定理, 我们有
$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$
又
$$(z - z_0) f(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(z_0)\, \mathrm{d}\zeta$$
从而
$$F(z) - F(z_0) - (z - z_0) f(z_0) = \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0))\, \mathrm{d}\zeta$$
两边取绝对值并利用一个上界估计, 得到
$$|F(z) - F(z_0) - (z - z_0) f(z_0)| \le \left(\sup_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \right) |z - z_0|$$
从而
$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \le \sup_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \to 0, \quad (z \to z_0)$$
故 $F'(z_0) = f(z_0)$. □

引理 4.3

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是区域, $f \in C(D)$ 在 D 上有原函数 $F(z)$.k$a, b \in D$, γ 为连接 a, b 的分段光滑道路, 则

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = F(b) - F(a)$$

♡

Proof 设 $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$,$\gamma(\alpha) = a$,$\gamma(\beta) = b$, 则

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

□

复习 Lebesgue 数的性质.

阅读 45-50

预习 51-55

作业第三章 4.5.9.10

定义 4.3

设 $X \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, 定义 X 的直径为 $\operatorname{diam} X = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in X\}$.

♣

引理 4.4

设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是紧子集,$\mathscr{A} = \{Aj : j \in J\}$ $(A_j \subseteq \mathbb{C})$ 是开集 为 X 的一个开覆盖. 则存在 $\delta = \delta(x, \mathscr{A}) > 0$, 使得 X 中任意直径小于 δ 的开集, 都落在 $\mathscr{A}$ 的某个元素中. 此时成 δ 为 $\mathscr{A}$ 的一个元素.

♡

定理 4.3

设 D 是单连通区域, $f \in \mathcal{H}(D)$.

1. $\gamma \subseteq D$ 是可求长 (或分段光滑) 的 Jordan 闭合曲线, 则
$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$
2. 若 γ 是连接 z_0 和 z 的 Jordan 曲线, 积分
$$\int_\gamma f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$
只依赖于端点, 而与道路的选取无关, 从而积分可记为 $\int_{z_0}^z f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$.

♡

Proof 任取 $\zeta \in \gamma$, 存在 $\delta_\zeta > 0$, 使得

$$K_\zeta = \{z : |z - \zeta| < \delta_\zeta\} \subseteq D$$

由于 K_ζ 是凸的, 故 f 在 K_ζ 上有原函数 F_ζ. 由于 γ 是紧的, 取开覆盖 $\mathscr{A} = \{K_\zeta : \zeta \in \gamma\}$ 的一个

Lebesgue 数 δ. 由 γ 可求长, 存在 $z_0,\cdots,z_n=z_0\in\gamma$, 使得 $\forall 0\leq k\leq n-1, L\left(z_k\widehat{z_{k+1}}\right)<\delta$.

由 Lebesgue 数引理, 存在 $\mathscr{A}$ 中的开圆盘 $K_{\zeta_k}=\{|z-\zeta_k|<\delta_k\}\subseteq D$, 使得

$$z_k\widehat{z_{k+1}}\subseteq K_{\zeta_k}$$

因为 f 在 K_{ζ_k} 上有原函数, 故积分

$$\int_{z_k\widehat{z_{k+1}}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{[z_k,z_{k+1}]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

故

$$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k\widehat{z_{k+1}}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{[z_0,z_1]+[z_1,z_2]+\cdots+[z_{n-1}],z_n} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=0$$

$\square$

定理 4.4

$D\subseteq\mathbb{C}$ 是单连通, $f\in\mathcal{H}(D)$, 则 f 在 D 上有原函数.

Proof 固定 $\alpha\in D$, 任取 $z\in D$, 令 $F(z)=\int_\alpha^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. 任取 $z_0\in D$, 取 $\delta>0$, 使得 $\{|\zeta-z_0|<\delta\}\subseteq D$. $\forall z\in\{|\zeta-z_0|\leq\delta\}$,

$$F(z_0)=\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

$$F(z)=\int_{\gamma+[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

$$(z-z_0)f(z_0)=\int_{[z_0,z]} f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta$$

前两个减后一个, 得到

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)=\int_{[z_0,z]}(f(\zeta)-f(z_0))\,\mathrm{d}\zeta$$

从而

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|\leq\frac{1}{|z-z_0|}\int_{[z-z_0]}|f(\zeta)-f(z_0)|\,\mathrm{d}\zeta\leq\sup_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)|\to 0\,(z\to z_0)$$

故 F 在 z_0 处可导, 且 $F'(z_0)=f(z_0)$. $\square$

Example 4.1 $I=\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$

Solution 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$\begin{aligned}I&=\int_{|z|=1}\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=\frac{(-1)^n}{2^{2n}i}\int_{|z|=1}\left(z^2-1\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}}\end{aligned}$$

其中

$$\left(z^2-1\right)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}\left(-1\right)^{2n-j}z^{2j}$$

$$\int_{|z|=1}z^m\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & m\geq 0\\ \frac{1}{m+1}z^{m+1}|_1^1=0, & m\leq -2\\ 2\pi i, & m=-1\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\frac{(-1)^n}{2^n i}\int_{|z|=1}\binom{2n}{n}\left(-1\right)^{2n-n}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{(-1)^n}{2^n i}2\pi i\binom{2n}{n}\left(-1\right)^n\\&=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{(2n)!}{n!n!}\end{aligned}$$

定理 4.5

设 $D\subseteq\mathbb{C}$ 是一个区域, ∂D 由分段光滑的 Jordan 闭合曲线 $\gamma_0,\cdots,\gamma_n$ 构成.$\forall 1\leq i,j\leq n,i\neq j$,$\gamma_j$ 在 γ_i 的外区域. 并且 $\forall 1\leq i\leq n$, γ_i 在 γ_0 的内区域. 令正向为当动点沿着 γ 正向运动时, D 在动点的左侧. 令 $\overline{D}=D\cup\partial D$,$f\in\mathcal{H}\left(\overline{D}\right)$ 则

$$\int_{\partial D}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$$

♡

4.1 Cauchy 积分公式

设 C 是分段连续的 Jordan 闭合曲线. 环绕 z_0. 令

$$C_\rho=\{|z-z_0|=\rho\}$$

取充分小的 ρ, 使得 $C_\rho\subseteq C$ 的内区域. 则

$$\int_{C_\rho}\frac{1}{z-z_0}=2\pi i$$

注意到

$$0=\int_{\partial D}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}-\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

故

$$\int_C\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=2\pi i$$

更一般地, 考虑 $D\subseteq\mathbb{C}$ 是单连通区域, $f\in\mathcal{H}(D)$,C 是绕 z_0 的 Jordan 闭合曲线. 类似地可知

$$\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,\mathrm{d}\zeta=\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$

令 $\zeta=z_0+\rho e^{i\theta}$, 则积分华为

$$\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)}{\rho\cdot e^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho\cdot e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta\quad\text{直觉上大约是}2\pi if\left(z_0\right),(\rho\text{很小})$$

定理 4.6 (Cauchy 积分公式)

1. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 是单连通区域, $\gamma\subseteq\Omega$ 是一个分段光滑的 Jordan 闭合曲线, 环绕 z_0 .$f\in\mathcal{H}(\Omega)$, 则
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$
2. $D\subseteq\mathbb{C}$ 是有界区域, $\partial D=\gamma$ 为 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的并. 且 $\forall 1\leq i,j\leq n,i\neq j,\gamma_i$ 在 γ_j 外区域, $\forall 1\leq i\leq n,\gamma_i$ 在 γ_0 内区域. $\bar{D}=D\cup\partial D$,$f\in\mathcal{H}\left(\bar{D}\right)$, 则 $\forall z\in D$,
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

♡

Proof $\forall z\in D$, 存在 $\rho>0$, 使得 $U_p=\{|\zeta-z|<\rho\}\subseteq D$, $\overline{D}_\rho=\overline{D}\setminus U_p$,$\partial U_p=Cp$, 则

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\in\mathcal{H}\left(\overline{D}_\rho\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta&=\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\int_{C_p}\frac{f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi if(z)+\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

由 f 连续, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $0<\rho<\delta$ 时, $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\int_C\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right|&\leq\frac{1}{\rho}\sup_{\zeta\in C_\rho}\sup_{\zeta\in C_\rho}|f(\zeta)-f(z)|\,L(c_\rho)\\&\leq\frac{1}{\rho}\varepsilon 2\pi\rho=2\pi\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即可.

□

阅读 50-55, 尤其 51-例 1,53-例 2

预习 56-58

作业 P59 11,12,13,14,15

Example 4.2 计算

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^4-1\right)(z-3)^2}$$

Solution 使得函数在内区域不全纯的点为使得 $z^4=1$ 的点.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^2+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)-\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)\end{aligned}$$

令 $k=\pm1,\pm i$, 则

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z-k}\frac{1}{(z-3)^2}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{1}{(k-3)^2}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\frac{1}{(1-3)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(-1-3)^2}-\frac{1}{4i}\frac{1}{(i-3)^2}+\frac{1}{4i}\frac{1}{(-i-3)^2}\\&=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\frac{1}{4i}\frac{1}{8-6i}+\frac{1}{4i}\frac{1}{8+6i}\\&=\frac{3}{64}-\frac{1}{4i}\left(\frac{12i}{100}\right)=\frac{3}{64}-\frac{3}{100}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{25}\right)=\frac{3}{4}\frac{9}{400}=\frac{27}{1600}\end{aligned}$$

Example 4.3 计算

$$I=\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

Solution

$$\left(\int_{|z|=2}-\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}-\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\right)\frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=0$$

其中

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z+i}\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{\sin i}{2i}=\pi\sin i$$

类似地

$$\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^2+1}z=\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z-i}\frac{1}{z+i}z=2\pi i\frac{\sin(-i)}{-2i}=\pi\sin i$$

于是

$$I=2\pi\sin i$$

定理 4.7

设 $D\subseteq\mathbb{C}$ 是区域, $\partial D=\gamma$ 由分段光滑的 Jordan 闭合曲线 $\gamma_0,\cdots,\gamma_n$ 构成, 且对于任意的 $1<i,j\leq n,i\neq j$,γ_i 在 γ_j 的外区域, 且对于任意的 $1\leq i\leq n$,γ_i 在 γ_0 的内区域. 设 $f\in\mathcal{H}\left(\overline{D}\right)$, 则 f 在 D 上任意阶可导, 且对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 以及任意的 $z\in D$, 都有

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

♡

Proof $\forall z\in D$, 固定 $\rho>0$, 使得 $\overline{U}\left(z.\rho\right)=\{|\zeta-z|\leq\rho\}\subseteq D$.

通过对 n 归纳来证, 考虑 $n=1$ 时的命题, 任取 $h\in\mathbb{C}$,$0\leq|h|<\frac{\rho}{2}$, 则 $z+h\in D$. 考虑

$$L_h:=\frac{f\left(z+h\right)-f\left(z\right)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

希望说明 $L_h\to 0\,(h\to 0)$. 由 Cauchy 积分公式,

$$L_h=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta-(z+h)}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-(z+h)}-\frac{1}{\zeta-z}+\frac{h}{\left(\zeta-z\right)^2}&=\frac{\left(\zeta-z\right)^2-\left(\zeta-z\right)\left(\zeta-z-h\right)-h\left(\zeta-(z+h)\right)}{\left(\zeta-z+h\right)\left(\zeta-z\right)^2}\\&=\frac{h^2}{\left(\zeta-(z+h)\right)\left(\zeta-z\right)^2}\end{aligned}$$

$$L_h=\frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma}f\left(\zeta\right)\frac{1}{\left(\zeta-(z+h)\right)\left(\zeta-z\right)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

由于 $f\in C\left(\gamma\right)$, 故 $M:=\sup_{\zeta\in\gamma}|f\left(\zeta\right)|<\infty$. 又 $\zeta\notin U\left(z,\rho\right)\implies|\zeta-z|>\rho$. 故

$$|\zeta-z-h|\geq|\zeta-z|-|h|>\frac{\rho}{2}$$

$$|L_h|\leq\frac{|h|}{2\pi}\frac{M}{\left(\rho/2\right)}\frac{L\left(\gamma\right)}{\rho^2}\to 0,\quad\left(h\to 0\right)$$

故 $n=1$ 时命题成立.

设 $n=k\geq 1$ 时成立, 考虑 $n=k+1$ 的情况.

对于任意的 $h\in\mathbb{C}<0<|h|<\frac{\rho}{2}$

$$\begin{aligned}L_h:&=\frac{f^{(k)}\left(z+h\right)-f\left(h\right)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{h}\frac{k!}{2\pi i}\left[\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-(z+h)\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta_0\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^{k+1}}\right]-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

计算

$$
\begin{aligned}
(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-(z+h))^{k+1} &= (\zeta-z)^{k+1}-((\zeta-z)-h)^{k+1} \\
&= (\zeta-z)^{k+1}-\left[(\zeta-z)^{k+1}-\binom{k+1}{1}(\zeta-z)^{k}\cdot h+h^{2}\cdot\alpha(h)\right] \\
&= (k+1)(\zeta-z)^{k}\cdot h+h^{2}\cdot\alpha(h)
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha(h)=O(1)\,(h\to 0)$ 于是

$$
\begin{aligned}
L_h &= \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{(\zeta-(z+h))^{k+1}(\zeta-z)}-\frac{1}{(\zeta-z)^{k+2}}\right]f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+h\cdot O(1) \\
&= \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-z+h)^{k+1}}{\left(\zeta-(z+h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}\right)}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+h\cdot O(1) \\
&\to 0,(h\to 0)
\end{aligned}
$$

□

Example 4.4 计算

$$
I=\int_C\frac{\cos z}{(z-i)^3}\,\mathrm{d}z
$$

其中 C 绕 i 的任意 Jordan 闭合曲线.

Solution

$$
-\cos z_0=\left(\cos''(z_0)\right)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{\cos\zeta}{(\zeta-z_0)^3}\,\mathrm{d}\zeta
$$

故

$$
I=\frac{2\pi i}{2}(-\cos i)=-\pi i\cos i=-\pi\frac{e^{-1}+e}{2}i
$$

推论 4.2

设 $D\subseteq\mathbb{C}$ 是区域, $f\in\mathcal{H}(D)$, 则 f 在 D 上有任意阶导数. ♡

Proof 对于任意的 $z\in D$, 存在 ρ, 使得 $\{|\zeta-z|\le\rho\}\subseteq D$. 对

$$
D_1=\{|\zeta-z|<\rho\}
$$

应用高阶的 Cauchy 积分定理即可.

□

定理 4.8 (Cauchy 不等式)

设 $\rho_0\in(0,+\infty)$,$D=\{|z-z_0|<\rho_0\}$,$\partial D=\gamma=\{|z-z_0|=\rho_0\}$. $f\in\mathcal{H}\left(\overline{D}\right)$, $|f(z)|\le$

$M,\forall z\in\overline{D}$. 则对于任意的 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}, z_0\in\bar{D}$, 都有

$$\left|f^{(n)}\left(z_0\right)\right|\leq\frac{n!M}{\rho_0^n}$$

♡

Proof 任取 $0<\rho<\rho_0$, 令 $C_\rho=\{|z-z_0|=\rho\}\subseteq D$. 则

$$f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\leq\frac{n!}{2\pi}2\pi\rho\frac{M}{\rho^{n+1}}=\frac{n!M}{\rho^n}$$

令 $\rho\to\rho_0$ 即可.

□

定义 4.4

称在 $\mathbb{C}$ 上解析的函数为一个整函数.

♣

定理 4.9 (Liouwill)

有界整函数必为常函数.

♡

Proof 令 $|f\left(z\right)|\leq M$,$\forall z\in\mathbb{C}$ 是整函数.

对于任意的 $z_0\in\mathbb{C}$ 以及 $\rho_0>0$, 由于 $f\in\mathcal{H}\left(U\left(z_0,\rho_0\right)\right)$ 我们有

$$\left|f'\left(z_0\right)\right|\leq\frac{M}{\rho_0}$$

令 $\rho_0\to\infty$, 得到 $f'\left(z_0\right)=0$. □

定理 4.10

设 f 是整函数, 若存在开圆盘 $U\left(z_0,\rho_0\right)$, 使得 $U\left(z_0,\rho_0\right)$ 和 f 的像不交, 则 f 是常值的.

♡

定理 4.11 (Pricard 小定理)

设 f 是整函数, 若存在 $a\neq b\in\mathbb{C}$, 使得 $a\notin f\left(\mathbb{C}\right), b\notin f\left(\mathbb{C}\right)$, 则 f 是常函数.

♡

阅读 55-58, 尤其是 Morera 定理

预习 61-71

作业第三章 16.17.18.19(不交, 强烈建议).

定理 4.12 (代数学基本定理)

考虑 $\mathbb{C}$ 上的多项式

$$P\left(z\right)=\alpha_nz^n+\cdots+\alpha_1z+\alpha_0$$

, 其中 $n\geq 1$,$\alpha\neq 0$. 存在 $z_0\in\mathbb{C}$, 使得 $p\left(z_0\right)=0$.

♡

Proof 任取 z, 使得 $|z| \neq 0$, 由三角不等式

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |\alpha_n| |z|^n - |\alpha_{n-1}| |z|^{n-1} - \cdots - |\alpha_0| \\ &= |z|^n \left(|\alpha_n| - \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} - \frac{|\alpha_{n-2}|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|\alpha_0|}{|z|^n} \right) \end{aligned}$$

存在 $M > 0$, 使得 $\forall |z| > M$, 都有

$$\left(|\alpha_n| - \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} - \frac{|\alpha_{n-2}|}{|z|^2} - \cdots - \frac{|\alpha_0|}{|z|^n} \right) > \frac{|\alpha_n|}{2}$$

故

$$|P(z)| \geq \frac{|\alpha_n|}{2} |z|^n \to \infty, \quad (|z| \to \infty)$$

若 $P(z)$ 无零点, 则 $\frac{1}{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ 是有界的整函数, 故 $\frac{1}{P(z)}$ 是常函数, 从而 $P(z)$ 亦然, 矛盾. □

定理 4.13 (Morera)

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是区域, $f \in C(D)$. 若对任意的 γ 是 D 上三角形的边界, 都有

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

则 $f \in \mathcal{H}(D)$.

♡

Proof 任取 $z_0 \in D$, 取凸开集 $\Omega \subseteq D$, 使得 $z_0 \in \Omega$. 任取 $z \in \Omega$, 令 $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$, 用证明凸区域的 Cauchy 定理的方法, 可以证明 F 在 Ω 上解析, 并且 $F'(z) = f(z), \forall z \in \Omega$. 因为 F 有任意阶导数, 我们得到 f 亦然. 从而在 Ω 上解析.

□