# 第 1 章　活动标架

## 1.1 活动标架的运动方程

设 $r_{ij}=\Gamma_{ij}^{k}r_k+c_{ij}n$
则
$$\langle r_{ij},r_m\rangle=\Gamma_{ij}^{k}g_{km}$$
两边乘以 $g^{ml}$, 得到
$$\langle r_{ij},r_m\rangle g^{kl}=\Gamma_{ij}^{k}g_{km}g^{ml}=\Gamma_{ij}^{k}\delta_k^l=\Gamma_{ij}^{l}$$
$$c_{ij}=\langle r_{ij},n\rangle=b_{ij}$$

设
$$n_i=c_i^j r_j$$
则
$$\langle n_i,r_k\rangle=c_i^j g_{jk}$$
$$\langle n_i,r_k\rangle g^{kl}=c_i^j g_{jk}g^{kl}=c_i^j\delta_j^l=c_i^l$$
其中
$$\langle n_i,r_k\rangle g^{kl}=-b_{ik}g^{kl}$$
是 $W$ 中的 $(i,l)$-元. 记 $b_i^l=b_{ik}g^{kl}$ 则运动方程为
$$\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^i}=r_i\\ r_{ij}=\Gamma_{ij}^{k}r_k+b_{ij}n\\ n_i=-b_i^l r_l\end{cases}$$

**Example 1.1** 考虑球面
$$r\left(u^1,u^2\right)=\left(\cos u^1\cos u^2,\cos u^1\sin u^2,\sin u^1\right)$$

- $r_1=\left(-\sin u^1\cos u^2,-\sin u^1\sin u^2,\cos u^1\right)$
- $r_2=\left(-\cos u^1\sin u^2,\sin u^1\cos u^2,0\right)$
- $n=-r$
- $r_{11}=\left(-\cos u^1\cos u^2,-\sin u^1\sin u^2,0\right)$
- $r_{12}=\left(\sin u^1\sin u^2,-\sin u^1\sin u^2,0\right)$
- $g_{11}=1,g_{12}=0,g_{22}=\cos^2 u^1$
- $g^{11}=1,g^{12}=0,g^{22}=\sec u^2u^1$

- $\Gamma_{11}^{1}=\langle r_{11},r_{m}\rangle g^{m_1}=\langle r_{11},r_{1}\rangle g^{11}=0$
- $\Gamma_{11}^{2}=\langle r_{11},r_{m}\rangle g^{m2}=\langle r_{11},r_{2}\rangle g^{22}=0$
- $\Gamma_{12}^{2}=\langle r_{12},r_{2}\rangle g^{22}=-\cos u^1\sin u^1\cdot\sec^2 u^1=-\tan u^1=\Gamma_{21}^{2}$
- $\Gamma_{22}^{1}=\langle r_{22},r_{1}\rangle g^{11}=\cos u^1\sin u^1$
- $\Gamma_{22}^{2}=\langle r_{22},r_{2}\rangle g^{22}=0$

记 $g_{ij,k}=\partial_k g_{ij}$, 则

$$\begin{aligned}g_{ij,k}&=\partial_k\langle r_i,r_j\rangle\\&=\langle r_{ik},rj\rangle+\langle r_i,r_{jk}\rangle\\&=\Gamma_{ik}^{l}g_{lj}+\Gamma_{jk}^{l}g_{li}\end{aligned}$$

由对称性

$$g_{jk,i}=\Gamma_{ji}^{l}g_{lk}+\Gamma_{ki}^{l}g_{lj}$$

$$g_{ki,j}=\Gamma_{kj}^{l}g_{li}+\Gamma_{ij}^{l}g_{lk}$$

前两式减后一式, 得到

$$g_{ij,k}+g_{ki,j}-g_{jk,i}=2\Gamma_{ik}^{l}g_{lj}$$

得到

**命题 1.1**

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{lj}+\partial_i g_{il}-\partial_l g_{ij}\right)$$

**定义 1.1**

由第一基本形式决定的量或性质为内蕴的.

对

$$r_{ij}=\Gamma_{ij}^{l}r_l+b_{ij}n$$

求导, 有

$$\begin{aligned}r_{ijk}&=\partial_k\Gamma_{ij}^{l}r_l+\Gamma_{ij}^{l}r_{lk}+\partial_k b_{ij}n+b_{ij}n_k\\&=\partial_k\Gamma_{ij}^{l}r_l+\Gamma_{ij}^{l}\left(\Gamma_{k}^{m}r_m+b_{lk}n\right)\\&+\partial_k b_{ij}n+b_{ij}\left(-b_k^l r_l\right)\\&=\left(\partial_k\Gamma_{ij}^{m}+\Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{lk}^{m}-b_{ij}b_k^m\right)r_m+\left(\Gamma_{ij}^{l}b_{lk}+\partial_k b_{ij}\right)n\end{aligned}$$

交换求导次序,

$$r_{ikj}=\left(\partial_j\Gamma_{ik}^{m}+\Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{lj}^{m}-b_{ik}b_j^m\right)r_m+\left(\Gamma_{ik}^{l}b_{lj}+\partial_j b_{ik}\right)n$$

光滑性要求上两式右侧相等, 从而

**命题 1.2**

1.
$$\partial_k\Gamma_{ij}^m - \partial_j\Gamma_{ik}^m + \Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m - b_{ij}b_k^m + b_{ik}b_j^m = 0$$

2. $\Gamma_{ij}^l b_{lk} + \partial_k b_{ij} - \Gamma_{ik}^l b_{lj} - \partial_j b_{ik} = 0$

称为曲面的结构方程.

**定义 1.2 (定义)**

1.
$$R_{ijk}^l = \partial_k\Gamma_{ij}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ij}^m\Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{mj}^l$$

2. $R_{iljk} = g_{lm}R_{ijk}^m$

称为 Riemann 曲率张量.

## 1.2 正交标价

**定义 1.3**

设 $V$ 是 $n$ 维线性空间, $e_1, \cdots, e_n$ 是它的一组基, 定义它的对偶空间 $V^*$
$$V^* = \{f : f\text{是 V 上的线性函数}\}$$
则对于任意的 $f \in V^*$,
$$f(k_ie_i) = \sum k_il(e_i)$$
$V^*$ 也是一个线性空间. 令 $l_i(e_j) = \delta_i^j$, 称为 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基. 则 $l = \sum_{i=1}^n l(e_i)l_i$ .

**定义 1.4 (余切空间)**

定义 $T_p^*S$ 为且空间 $T_pS$ 的余切空间.