目录

第 1 章 模型 Riemann 流形

1.1 Riemann 流形的对称性

定义 1.1 (齐次性)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 表示全体 M 的自等距同构[a]. 成 (M,g) 是齐次的 Riemann 流形, 若 $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 传递地作用在 M 上. 即对于任意一对 $p,q \in M$, 存在等距同构 $\varphi: M \to M$, 使得 $\varphi(p)=q$.

[a]在复合下构成群

Idea 齐次的流形在每一点处看起来都是一样的.

Remark

1. 对于每个 $\varphi \in \mathrm{Iso}\,(M,g)$, 全微分 $\mathrm{d}\varphi$ 映 TM 到自身, 且在每一个点 $p\in M$ 上的限制是一个线性同构 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}M$.

定义 1.2 (迷向)

1. 给定 $p\in M$, 令 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 表示 p 处的迷向子群, 即 $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 中由固定了 p 的等距同构组成的子群. [a]
2. 对于每个 $\varphi \in \mathrm{Iso}_p\,(M,g)$, 线性映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 将 T_pM 映到它自己, 映射 $I_p : \mathrm{Iso}_p\,(M,g) \to \mathrm{GL}\,(T_pM)$,$I_p\,(\varphi) = \mathrm{d}\varphi_p$ 是 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 的一个表示, 称为迷向表示. [b]
3. 称 M 是在 p 处迷向的, 若 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 的迷向表示传递地作用在 T_pM 的单位向量场. [c]
4. 若 M 在每一点处都是迷向的, 则称 M 是迷向的.

[a]以 p 为中心的旋转和反射
[b]等距同构在局部上的等效替代. 视 I_p 为拓扑范畴到模范畴的函子
[c]在 p 点处看, 每个方向看起来都是一样的.

定义 1.3

领 $\mathrm{O}\,(M)$ 表示 M 的切空间上的全体正交基:

$$\mathrm{O}\,(M) := \coprod_{p\in M} \{T_pM\text{的正交基}\}$$

存在 $\operatorname{Iso}(M,g)$ 在 $\mathrm{O}(M)$ 上诱导的群作用，通过用等距同构 φ 的微分，将 p 处的正交基推出到 $\varphi(p)$ 处的正交基：

$$\varphi\cdot(b_1,\cdots,b_n)=\left(\mathrm{d}\varphi_p(b_1),\cdots,\mathrm{d}\varphi_p(b_n)\right)$$

称 (M,g) 是**标架齐次的**，若此诱导作用在 $\mathrm{O}(M)$ 上是传递的. 换言之，对于任意的 $p,q\in M$，以及 p,q 处选定的正交基，存在等距同构，将 p 映到 q，将选定的 p 处的正交基映到选定的 q 处的正交基.

命题 1.1

设 (M,g) 是 Riemann 流形.

1. 若 M 在一点处是迷向的，且它是齐次的，则 M 是处处迷向的.
2. 若 M 是标架齐次的，则是齐次且迷向的.

Proof 在 M 处一点 p 迷向，是说 $\operatorname{Iso}_p(M,g)$ 传递地作用在 T_pM 的单位向量场上.

齐次的，是说对于任意的 q，存在等距同构 $\varphi\in\operatorname{Iso}(M,g)$，使得 $\varphi(p)=q$.

考虑 $\operatorname{Iso}_p(M,g)$ 和 $\operatorname{Iso}_q(M,g)$ 的关系.

$\mathrm{d}\varphi_p:T_pM\to T_qM$ 是等距同构.

任取 T_qM 处的单位向量 v,w，$\mathrm{d}\varphi_p^{-1}(v):=\tilde{v}$，$\mathrm{d}\varphi_p^{-1}(w):=\tilde{w}$ 是 T_pM 上的单位向量，存在 $\psi\in\operatorname{Iso}_p(M,g)$，使得 $\mathrm{d}\psi_p(\tilde{v})=\tilde{w}$，于是

$$\mathrm{d}\varphi_p\circ\mathrm{d}\psi_p\circ\mathrm{d}\varphi_p^{-1}(v)=w$$

是 $\operatorname{Iso}_q(M,g)$ 中映 v 为 w 的等距同构. 故 M 在 q 处迷向. 由于 q 任取，M 处处迷向.

显然标架齐次蕴含齐次性. 任取 $p\in M$，以及 T_pM 上的两个单位向量 v,w，他们可以分别扩充为 T_pM 的一个正交基. 由于标架齐次性，存在这两个正交基的一个等距同构 $\mathrm{d}\phi_p$,$\mathrm{d}\varphi_p$ 将 v 映到 w.

$\square$

Idea 一个齐次的 Riemann 流形在任意点上看起来都是一样的，而一个迷向的 Riemann 流形在每个方向上看起来都是一样的. 从而一个迷向的 Riemann 流形自动是齐次的. 然而，存在一点处迷向但不是处处迷向的 Riemann 流形，也存在齐次但是处处不迷向的 Riemann 流形，还存在齐次且迷向，但不是标架齐次的 Riemann 流形. 这些断言的证明将在学习测地线和曲率后的理论后得到证明.

Myers-Steenrod 定理给出，$\operatorname{Iso}(M,g)$ 总是光滑作用在 M 上的一个李群.

1.2 欧式空间

命题 1.2 (欧式空间)

n-维欧式空间在配备了欧式度量 $\bar{g}$ 下构成一个 Riemann 流形 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$.

命题 1.3 (实内积空间)

任取 n-维实内积空间 V. 对于每个 $p \in V$ 和 $v, w \in T_pV \simeq V$, 定义 $g(v,w) = \langle v, w \rangle$. 选取 V 的一组正交基 $(b_1, \cdots, b_n)$, 它给出 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的一个基同构 $(x^1, \cdots, x^n) \mapsto x^i b_i$. 显然是 (V, g) 和 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ 间的一个等距同构. 故每个 n-维内积空间作为 Riemann 流形都彼此同构.

每个正交变换 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 平移变换 $x \mapsto b + x$, 以及形如 $x \mapsto b + Ax$ 的变换都是等距同构.

我们可以将这些等距同构实现为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑李群作用.

定义 1.4

视 $\mathbb{R}^n$ 为加法下的李群, $\theta : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathrm{O}(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上自然的作用. 定义**欧式群** $\mathrm{E}(n)$ 为积流形 $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ 在乘法 $(b, A)(b', A') := (b + Ab', AA')$ 下的半直积李群 $\mathbb{R}^n \rtimes_\theta \mathrm{O}(n)$. 通过映射 $\rho : E(n) \to \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$,

$$\rho(b, A) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它有忠实的表示.

欧式群在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用表示为

$$(b, A) \cdot x = b + Ax$$

Remark

1. 半直积的构造使得此作用满足结合律.
2. 当 $\mathbb{R}^n$ 配备了欧式度量时, 此作用是一个等距同构, 且他在 $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ 上的诱导作用是传递的. 因此每个欧式空间都是标架齐次的.

1.3 球面

定义 1.5

给定 $R>0$, 令 $\mathbb{S}^n(R)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以原点为中心, R 为半径的球面, 且配备了欧式度量诱导的度量 $\mathring{g}_R$, 称为半径为 R 的圆度量.

♣

命题 1.4

正交群 $\mathrm{O}(n+1)$ 传递地作用在 $O(\mathbb{S}^n(R))$ 上, 从而每个球面都是标架齐次的.

♠

Proof 只需要证明对于任意的 $p\in\mathbb{S}^n(R)$, 以及任意 $T_p\mathbb{S}^n(R)$ 的正交基 (b_i), 都存在正交变换, 将北极点 $N=(0,\cdots,0,R)$ 映到 p, 将 $T_N\mathbb{S}^n(R)$ 的基 $(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ 映到 (b_i).

视 p 为长度为 R 的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的向量, 令 $\hat{p}=\frac{p}{R}$. 由于 (b_i) 相切与球面, 故 (b_i) 与 $\hat{p}$ 正交, 故 $(b_1,\cdots,b_n,\hat{p})$ 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个标准正交基. 令 α 表示列向量为这一组正交基的矩阵, 则 $\alpha\in O(n+1)$, 他将 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $(\partial_1,\cdots,\partial_{n+1})$ 映到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基 $(b_1,\cdots,b_n,\hat{p})$ [1]. 立即得到 $\alpha(N)=p$. 又 α 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上线性地作用, 他的微分 $\mathrm{d}\alpha_N: T_N\mathbb{R}^{n+1}\to T_p\mathbb{R}^{n+1}$ 的表示矩阵与 α 的坐标表示相同, 故 $\mathrm{d}\alpha_N(\partial_i)=b_i, \forall i=1,\cdots,n$.

□

定义 1.6 (共形)

1. 设 g_1,g_2 是 M 上的两个度量, 称它们是彼此共形相关的, 若存在正的函数 $f\in C^\infty(M)$, 使得 $g_2=fg_1$.
2. 给定两个 Riemann 流形 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$, 称微分同胚 $\varphi: M\to\tilde{M}$ 是一个**共形微分同胚 (或共形变换)**, 若它将 $\tilde{g}$ 拉回到一个与 g 共形的度量:
$$\varphi^*\tilde{g}=fg\text{对于某个正函数}f\in C^\infty(M)\text{成立}$$
3. 称两个 Riemann 流形是共形等价的, 若存在他们之间的共形微分同胚.
4. 称 Riemann 流形 (M,g) 是**局部共形平摊的**, 若 M 上的每一个点都有共形等价于 $(\mathbb{R}^n,\bar{g})$ 上一开集的邻域.

♣

1.3.1 球极投影

考虑 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{S}^n(R)\setminus\{N\}$, 其中 N 是 $\mathbb{S}^n(R)$ 的北极点, 以及映射 $\sigma:\mathbb{S}^n(R)\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n$, 它将球面上除北极点以外的点 $P=(\xi^1,\cdots,\xi^n,\tau)$, 送到 P 与 $N=(0,\cdots,0,R)$ 的

[1]这里滥用了一下记号

连线在 $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上的交点 $U = (u^1, \cdots, u^n, 0)$ 的自然投影 $u = (u^1, \cdots, u^n)$ 上. 存在 λ, 使得

$$(N - U) = \lambda (N - P)$$

从而有方程组

$$R = \lambda (R - \tau)$$
$$u = \lambda \xi$$

给定 ξ, τ, 解出 τ 带入方程, 可得 σ 的坐标表示

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}$$

反过来, 给定 u, 解得

$$\xi = \frac{u}{\lambda}$$
$$\tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

P 点由这两个方程以及他在球面上刻画, 带入 $|\xi|^2 + |\tau|^2 = \mathbb{R}^2$, 得到

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2$$

解得

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}$$

带入方程, 得到

$$\sigma^{-1}(u) = \left(\frac{2uR^2}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\right)$$

为 σ 的逆映射. 从而给出了 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$ 的微分同胚.

定义 1.7 (球极投影)

上面构造的映射 $\sigma : \mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ 被称为是球极投影. ♣

命题 1.5

球极投影是 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 之间的共形微分同胚. ♠

Proof σ^{-1} 本身是 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$ 的一个光滑参数化, 我们可以直接用它来计算拉回度量.

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = (\sigma^{-1})^* \bar{g} = \sum_j \left(\mathrm{d}\left(\frac{2u^jR^2}{|u|^2 + R^2}\right)^2\right) + \mathrm{d}\left(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\right)^2$$

其中

$$\mathrm{d}\frac{2u^jR^2}{|u|^2+R^2}=2R^2\,\mathrm{d}\frac{u^j}{|u|^2+R^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{u^j}{|u|^2+R^2}\right)=\frac{\left(|u|^2+R^2\right)-u^j\left(2u^j\right)}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{u^j}{|u|^2+R^2}\right)=\frac{-2u^ju^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2},\quad k\neq j$$

故

$$\mathrm{d}\frac{2u^jR^2}{|u|^2+R^2}=\frac{2R^2}{|u|^2+R^2}\,\mathrm{d}u^j-4R^2u^j\frac{u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\,\mathrm{d}u^k$$

此外

$$\mathrm{d}\left(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\right)=-2R^3\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{|u|^2+R^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{|u|^2+R^2}\right)=-\frac{2u^j}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}$$

故

$$\mathrm{d}\left(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\right)=4R^3\frac{u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\,\mathrm{d}u^k$$

于是

$$\begin{aligned}
\left(\sigma^{-1}\right)^*\bar{g}=&\sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2-\sum_j16R^4\frac{u^ju^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^3}\,\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^j+\sum_j16R^4\frac{\left(u^j\right)^2\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&+16R^6\frac{\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
=&\sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2-16R^4\frac{\left(\sum_j u^j\,\mathrm{d}u^j\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^3}+16R^4\frac{|u|^2\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&+16R^6\frac{\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
=&\sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2\\
=&\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\bar{g}
\end{aligned}$$

□

推论 1.1

每个带圆度量的前面都是局部共形平坦的. ♡

Proof 球极投影给出去北极点球面与欧式空间的一个共形微分同胚, 类似的给出南极点的球极投影, 可以得到去南极点球面与欧式空间的共形微分同胚.

□