目录

第 1 章 Gauss-Bonnet 定理

1.1 旋转指标定理

1.1.1 光滑曲线的旋转指标

定义 1.1 (简单闭合曲线)

设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是平面上的一个容许曲线. 成 γ 是简单闭合曲线, 若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 且 γ 在 $[a,b)$ 上是单射. ♣

定义 1.2

定义平面容许曲线 γ 的单位切向量场 T, 为以下给出的沿每个 γ 的光滑线段的向量场

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

♣

Remark 由于 $\mathbb{R}^2$ 上的每个切空间都与 $\mathbb{R}^2$ 自然地等同, 可以认为 T 是映到 $\mathbb{R}^2$ 的映射, 由于 T 是单位长度的, 他可以视为 $\mathbb{S}^1$ 上的映射.

定义 1.3 (切角)

若 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是光滑 (或至少连续可微) 的正则曲线. 若连续函数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ 使得

$$T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in [a,b]$$

则称 θ 为 γ 的一个切角函数. ♣

Remark

1. 令 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$,$q(s) = (\cos s, \sin s)$, 若给定某一点处的取值, 则 $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数 T 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的同伦提升 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, 使得 $q \circ \theta = T$.
2. 上面这条表面切角函数是存在的, 且在相差一个 2π 的意义下唯一 (因为符合条件的初值为 $2k\pi$)

定义 1.4 (光滑曲线的旋转指标)

若 γ 是连续可微的简单闭合曲线, 使得 $\gamma'(a)=\gamma'(b)$, 定义 γ 的 **旋转此步骤为**

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a))$$

♣

Remark

1. 由于 $(\cos\theta(a),\sin\theta(a))=(\cos\theta(b),\sin\theta(b))$,$\theta(b)-\theta(a)$ 是 2π 的整数倍, 故 $\rho(\gamma)$ 是整数.
2. 其他的切角函数总是通过改变 $\theta(b)$ 和 $\theta(a)$ 相同的量得到, 因此 $\rho(\gamma)$ 是良定义的.

1.1.2 分段光滑正则闭曲线的旋转指标

定义 1.5

令 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是容许简单闭曲线. 令 $(a_0,\cdots,a_k)$ 是 $[a,b]$ 的一个容许分划.

1. 称 $\gamma(a_i)$ 为 γ 的 **顶点**.
2. $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 为边.

♣

定义 1.6 (顶点的分类)

在每个顶点 $\gamma'(a_i)$ 上, 记 γ 的左, 右侧速度向量分别为 $\gamma'(a_i^-),\gamma'(a_i^+)$; 令 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 为对应的单位速度向量. 将这些顶点分为以下三类

1. 若 $T(a_i^-)\neq\pm T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个普通顶点.
2. 若 $T(a_i^-)=T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个平坦顶点.
3. 若 $T(a_i^-)=-T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个尖点.

♣

定义 1.7

1. 在每个普通顶点上, 定义 $\gamma(a_i)$ **处的外角** ε_i 为 $T(a_i^-)$ 到 $T(a_i^+)$ 取值在 $(-\pi,\pi)$ 的夹角. 若 $(T(a_i^-),T(a_i^+))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个定向基[a], 则取其中的正直, 反之亦然.
2. 平坦顶点的外角定义为 0.
3. 尖点的外角无法确定方向, 认为尖点处的外角没有定义.
4. 若 $\gamma(a_i)$ 是普通顶点或平坦顶点, 定义 $\gamma(a_i)$ 的内角为 $\theta_i=\pi-\varepsilon_i$.
5. 对于顶点 $\gamma(a)=\gamma(b)$, $T(b)$ 和 $T(a)$ 分别扮演了 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 的角色.

[a]表现为向外扎一个尖

♣

定义 1.8

称分段光滑的正则曲线 γ 为一个曲边多面体, 若它无尖点, 切实某个预紧开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 的边界. 此外

1. 称 Ω 为 γ 的内部.
2. 若 γ 有 Ω 的边界诱导定向, 则称 γ 是正定向的.

♣

定义 1.9 (曲边多面体的切角函数)

定义曲边多面体的切角函数, 为分段光滑的连续函数 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, 使得 $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ 在使得 γ 光滑的任一点处成立. 在规定

$$\theta(a_i) = \lim_{t \to a_i^-} \theta(t) + \varepsilon_i$$

以及

$$\theta(b) = \lim_{t \to b^-} \theta(t) + \varepsilon_k$$

下, θ 是自右连续的. 其中 ε_k 是 $\gamma(b)$ 处的外角.

♣

Remark

1. 存在性: 在 $[a, a_1)$ 上, 存在 T 的在 $\mathbb{R}$ 上的提升 $\theta(t)$, 它取定了 a_1 处的函数值, 从而可以在 $[a_1, a_2)$ 上将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$, 以此类推. 由于曲线是闭合的, 一旦我们指定一点处合适的取值 (以 2π 为间隔), 都可以将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$ 上.

定义 1.10 (旋转指标)

设 γ 是曲边多面体, 定义它的旋转指标为

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

其中 θ 是 γ 的任一切角函数.

♣

定理 1.1 (旋转指标定理)

正定向的曲边多面体的旋转指标为 $+1$.

♡

1.2 Gauss-Bonnet 公式

定义 1.11

设 (M,g) 是 2-Riemann 流形. 称容许简单闭曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的一个曲边多面体, 若 γ 的像是一个预紧开集 $\Omega\subseteq M$ 的边界, 并且存在包含了 $\bar{\Omega}$ 的定向坐标圆盘, 使得 γ 的坐标像在坐标平面上称为曲边多面体. ♣

Remark

1. **测地多面体**: 若 M 上的曲边多面体 γ 的边界都刚好是测地线段, 则称 γ 为一个测地多面体.
2. 可以按照度量角类似地定义内外角.

定义 1.12 (切角函数)

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的定向光滑坐标卡. 通过坐标映射 φ 可以将 γ,Ω,g 分别与他们在坐标平面上一开集 $\hat{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的表示等同. 令 (E_1,E_2) 是 g 的通过对 (∂_x,∂_y)Gram-Schimtdt 正交化得到的规正基, 使得 E_1 在 $\hat{U}$ 处处与 ∂_x 相差正标量倍.

定义 γ 的切角函数为一个分段连续函数 $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$, 满足

$$T(t)=\cos(t)\ E_1|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\ E_2|_{\gamma(t)}$$

在使得 γ' 连续的点上成立. 并且在分点处自右连续的值. ♣

Remark

1. **存在性**: 由于 T 是单位长度的, 故 $T(t)=u_1E_1+u_2E_2$ 中的 (u_1,u_2) 落在 $\mathbb{S}^1$ 上, 可以将他提升到 $\mathbb{R}$ 上.
2. 通过定义无法直接看出旋转指标的坐标无关性, 这个事实在下面的引理中得到说明.

引理 1.1 (旋转指标)

设 M 是定向的 2-Riemann 流形, 则对于 M 上每个正定向的曲边多面体, 它依赖于任意规正基的旋转指标都为 $+1$. ♡

Idea 可以将度量线性同伦到欧式度量, 说明旋转指标连续地变化, 由于旋转指标的取值是” 跳跃” 的, 从而说明旋转指标的不变性.

Proof 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的

正定向的光滑坐标卡. 则我们既可以用 g 给出的内积来计算旋转指标, 也可以用欧式内积 $\bar{g}$ 来计算, 接下来说明计算结果一致.

定义

$$g_s = (1-s)\,g + s\bar{g}, s \in [0,1]$$

容易看出对于每个 s,g_s 是一个度量. $\left(E_1^{(s)}, E_2^{(s)}\right)$ 为关于 g_s 对 (∂_x, ∂_y) 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的关于 g_s 的规正基,θ_{g_s} 和 ρ_{g_s} 分别为对应单位速度向量, 切角函数和旋转指标.

由于

1. 正交化的公式给出 $E_1^{(s)}, E_2^{(s)}$ 关于 s 的连续性.
2. 在任意使得 γ 光滑的区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上, 式
$$T_s\,(t) = u_1\,(t;s)\,E_1^{(s)}\Big|_{\gamma(t)} + u_2\,(t;s)\,E_2^{(s)}\Big|_{\gamma(t)}$$
中的 u_1, u_2 可以表示为
$$u_1\,(t;s) = \left\langle T_s\,(t)\,, E_1^{(s)}\right\rangle_{g_s}, \quad u_2\,(t;s) = \left\langle T_s\,(t)\,, E_2^{(s)}\right\rangle g_s$$
均关于 (t,s) 连续, 其中
$$T_s\,(t) = \frac{\gamma'\,(t)}{|\gamma'\,(t)|_{g_s}}$$
. 从而 $u_1, u_2 : [a_{i-1}, a_i] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 在给定初值下存在唯一提升.
3. 外角的定义式
$$\varepsilon_i = \frac{\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right), T\left(a_i^+\right)\right)}{\left|\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right), T\left(a_i^+\right)\right)\right|_{g_s}} \arccos\left\langle T\left(a_i^-, T\left(a_i^+\right)\right)\right\rangle_{g_s}$$
表面 ε_i 关于 s 连续.

故旋转指标函数 ρ_{g_s} 关于 s 连续, 从而是不变的, 恒等于欧式内积下的旋转指标.

□

定义 1.13

设 γ 是单位速度参数化的曲边多面体, 则单位切向量场 $T\,(t) = \gamma'\,(t)$. 存在沿 γ 的唯一的单位法向量场 N, 使得 $(\gamma'\,(t)\,, N\,(t))$ 构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的定向基[a]. 在使得 γ 光滑的点处定义 γ 的**符号曲率** 为

$$\kappa_N\,(t) = \langle D_t\gamma'\,(t)\,, N\,(t)\rangle_g$$

[a]若 γ 正定向, 则这相当于 N 是正交与 $\partial\Omega$ 内指向的

♣

定理 1.2 (Gauss-Bonnet 公式)

令 (M,g) 是定向的 2-Riemann 流形, 设 γ 是 M 上正定向的曲边多面体, Ω 是 γ 的内部, 则

$$\int_\Omega K\,\mathrm{d}A+\int_\gamma \kappa_N\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^k \varepsilon_i=2\pi$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 体积形式 ε_i 是 γ 的外角, 且第二个积分是对弧长的积分.

♡

Proof 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 γ 的一个容许分划, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的正定向的图册, (E_1,E_2) 是 U 上的一个正定向的规正标架, $\theta(t)$ 是 γ 的一个切角函数, 则由 Newton-Lebniz 公式和旋转指标定理

$$2\pi=\theta(b)-\theta(a)=\sum_i \varepsilon_i+\sum_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}\theta'(t)\,\mathrm{d}t$$

接下来考虑 θ' 和 K,κ_N 的关系, 考虑

$$\gamma'(t)=\cos\theta(t)\,E_1|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\,E_2|_{\gamma(t)}$$

以及

$$N(t)=-\sin\theta(t)\,E_1|_{\gamma(t)}+\cos\theta(t)\,E_2|_{\gamma(t)}$$

对 $\gamma'(t)$ 求导, 得到

$$\begin{aligned}D_t\gamma'(t)=&-\sin\theta(t)\,\theta'\,E_1|_{\gamma(t)}+\cos\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_1\\&+\cos\theta(t)\,\theta'\,E_2|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_2\end{aligned}$$

为了计算 $\nabla_{\gamma'}E_1,\nabla_{\gamma'}E_2$, 注意到

$$\begin{aligned}0&=D_v\langle E_1,E_1\rangle=2\langle\nabla_vE_1,E_1\rangle\\0&=D_v\langle E_2,E_2\rangle=2\langle\nabla_vE_2,E_2\rangle\\0&=D_v\langle E_1,E_2\rangle=\langle\nabla_vE_1,E_2\rangle+\langle E_1,\nabla_vE_2\rangle\end{aligned}$$

由于 E_1,E_2 正交, ∇_vE_1 是 E_2 的倍数, ∇_vE_2 是 E_1 的倍数, 上述第三式, 启发我们令

$$\omega(v)=-\langle\nabla_vE_1,E_2\rangle=\langle E_1,\nabla_vE_2\rangle$$

是一个 1-形式, 则

$$\nabla_vE_1=-w(v)\,E_2,\quad \nabla_vE_2=+w(v)\,E_1$$

现在可以计算得到

$$\begin{aligned}\kappa_N&=\langle D_t\gamma'(t),N\rangle\\&=\theta'-\omega(\gamma')\end{aligned}$$

于是

$$2\pi = \sum_i \varepsilon_i + \int_\gamma \kappa_N \,\mathrm{d}s + \int_\gamma \omega$$

由于 Ω 是带角流形, 由带角流形的 Stokes 定理, 我们要

$$\int_\gamma \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

因此只需要证明 $K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}\omega$. 我们有

$$\begin{aligned}
K\,\mathrm{d}A\,(E_1, E_2) &= K = Rm\,(E_1, E_2, E_2, E_1) \\
&= \left\langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2 - \nabla_{[E_1,E_2]}E_2, E_1 \right\rangle \\
&= \langle \nabla_{E_1}\omega\,(E_2)\,E_1 - \nabla_{E_2}\omega\,(E_1)\,E_1 - \omega\,([E_1, E_2])\,E_1, E_1 \rangle \\
&= \langle E_1\omega\,(E_2)\,E_1 + \omega\,(E_2)\,\nabla_{E_1}E_1, E_1 \rangle \\
&- \langle E_2\omega\,(E_1)\,E_1 + \omega\,(E_1)\,\nabla_{E_2}E_1, E_1 \rangle - \omega\,([E_1, E_2]) \\
&= E_1\omega\,(E_2) - E_2\omega\,(E_1) - \omega\,([E_1, E_2]) \\
&= \mathrm{d}\omega\,(E_1, E_2)
\end{aligned}$$

由于体积形式由其系数决定, 故 $K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}\omega$ 这就完成了证明. □

推论 1.1 (全曲率定理)

令 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是光滑的单位速度简单闭曲线, 使得 $\gamma'\,(a) = \gamma'\,(b)$, N 是内指向的法向量, 则

$$\int_a^b \kappa_N\,(t)\,\mathrm{d}t = 2pi$$

♡

1.3 Gauss-Bonnet 定理

定义 1.14

设 M 是一个紧的 2 维流形.

1. M 上的一个曲边三角形, 是指有三个顶点和三个变的曲边多边形.
2. M 的一个光滑三角剖分, 是指有限多个曲边三角形, 它们的内部两两无交, 任意两个不同曲边三角形的交若非空, 则要么为一个顶点, 要么为一条边, 并且这些三角形及其内部的交并成 M,.

♣

定理 1.3 (Tibor Rado)

每个紧的 2-流形, 容许一个三角剖分, 使得每条边都属于两个三角形.

♡

定义 1.15 (欧拉示性数)

设 M 是被三角剖分了的 2-流形, 定义 M(关于这个三角剖分) 的欧拉示性数为

$$\chi(M) = V - E + F$$

其中 V, E, F 分别为三角剖分的顶点数, 边数, 面数.

Remark 事实上欧拉示性数是拓扑不变的, 且无关于三角剖分的选取, 这是代数拓扑中的重要事实.

定理 1.4 (Gauss-Bonnet 定理)

若 (M, g) 是一个被光滑三角剖分了的 2 维紧 Riemann 流形, 则

$$\int_M K \, \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M)$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 密度.

定理 1.5 (分类定理)

1. 每个紧的, 连通的, 可定向的 2 维流形 M 都同胚于一个球面, 或 n 个换面的连通和.
2. 每个不可定向的 2 维流形同胚于 n 份实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 的连通和.
3. 数 n 称为 M 的亏格.

推论 1.2

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率, 则

1. 若 M 同胚于球面或射影平面, 则 $K > 0$ 在某处成立.
2. 若 M 同胚于环面或 Klein bottle, 则要么 $K \equiv 0$, 要么 K 同事有正负的取值.
3. 若 M 是任意其他紧的面, 则 $K < 0$ 在某处成立.

Proof 应用三角剖分, 亏格 n 的可定向 2-流形的欧拉示性数为 $2 - 2n$, 不可定向的为 $2 - n$.

□

推论 1.3

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率

1. 若 $K > 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{S}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 要么是平凡的, 要么同构于二元群 $\mathbb{Z}/2$
2. 若 $K \leq 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{R}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 有

限. ♡