第 1 章　单纯同调

1.1 单纯复形的定向

定义 1.1 (单形的定向)

若在 $v_0, \cdots, v_n$ 上规定一个顺序，使得 $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$。称以 $v_0, \cdots, v_n$ 为顶点的单形是正定向的，记作 $+\sigma^n$，若存在 $0, \cdots, n$ 的一个偶置换 τ，使得

$$+\sigma^n = \left\langle v_{\tau(0)}, v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(n)} \right\rangle$$

类似地可以定义负定向的单形 $-\sigma^n$。 ♣

定义 1.2 (单纯复形的定向)

称单纯复形 K 是定向的，若它的每个单形都被规定了一种定向。 ♣

Remark

1. 这里不看单形的定向和它的面的定向的关系，仅仅是把每个单形单独拿出来考虑定向。

定义 1.3 (关联数)

设 K 是定向的单纯复形，σ^p 和 σ^{p+1} 是 K 的两个维数相差 1 的单形。对于每对这样的 $\left(\sigma^{p+1}, \sigma^p\right)$，定义它们的关联数，记作 $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$，按以下方式：若 σ^p 不是 σ^{p+1} 的一个面，则令 $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$。若 σ^p 是 σ^{p+1} 的一个面，我们标记 σ^p 的顶点，使得 $+\sigma^p = \langle v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle$。令 v 是 σ^{p+1} 额外的顶点，则定义

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] := \begin{cases} 1, & \langle v, v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle = +\sigma^{p+1} \\ -1, \langle v, v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle = -\sigma^{p+1} \end{cases}$$

♣

定理 1.1

令 K 是定向的单纯复形。若 σ^{p-2} 是 K 的单形 σ^p 的一个 $(p-2)$-面，则

$$\sum [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^p] = 0$$

其中和式为对所有 K 的 $(p-1)$-单形 σ^{p-1} 的求和。 ♡

Proof

令 $v_0, v_1, \cdots, v_{p-2}$ 是 σ^{p-2} 的顶点，使得 $+\sigma^{p-2} = \langle v_0, v_1, \cdots, v_{p-2} \rangle$，令 a, b 是 σ^p 的另外两个顶点。不妨设 $+\sigma^p = \langle a, b, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2} \rangle$。则使得上述和式的项非零的 $(p-1)$ 单形只有两个，分别是

$$\sigma_1^{(p-1)} = \langle a, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2} \rangle, \quad \sigma_2^{(p-1)} = \langle b, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2} \rangle$$

这两个 $(p-1)$ 单形都可能各自带有正、负的定向，一共四种情况，通过枚举可以验证定理成立。 $\square$

1.2 单纯复形和同调

想象我们是一个任意 q 维数的生物，在一个单纯复形 K 上来回乱窜，每次都“通过” K 上的一个 q-单形。为每个单形规定一个方向，则沿着单形的方向通过，我们就记作 $+1$，沿相反方向通过，就记作 -1。在一系列乱窜之后，K 的每个 q- 单形都被标记了一个整数，这就是我们按特定方向通过的“次数”（相反方向的通过可以被抵消），这样一个一系列通过的行为就可以看成是一个 q- 链。

这样的乱窜行为是可以相加的，并且我们还能原路返回（逆元），此外由于我们只关心通过的次数，加法也是可以交换的，于是全体的 q-链就构成了一个阿贝尔群 $C_q(K)$ 。

当然，我们可以把“通过的次数”换是别的什么阿贝尔群 G。我们的一个 q-链的行为，可以看成是在每个 q-单形的某个 G 的行为，它们组合在一起，得到了 K 上的一个一堆 G 的行为，这就是说 $C_q(K)$ 同构于 K 的 q-单形份的 G 的直和。

总结一下就是说，对于单纯复形 K，可以有一个函子 C_q ，把 K 的每个 q-单形打到一个群 G，函子就把 K 打到若干份 G 的直和 $C_q(K)$ 上去。

到这里可以发现，虽然我们规定了定向，但是最后的群结构 $C_q(K)$ 本质上跟定向没什么关系，无非是某些 G 差个了“-”，但这不影响群的结构。那么我们上一节研究了半天的定向还有意义吗？通过一个单形时，也可以认为顺便按特定方向通过了它的边界，我们在 K 上乱窜的行为也在边界上留下了记号，而这个记号是跟方向有关的。当连续地通过若干 q-单形并回到原位时，一路上顺带通过的 $(q-1)$-边界正好正负抵消归零，或者说通过边界的指标和是否归零，判定了我们是否走过了一个“循环”，这样就得到了 q-循环的定义，放在一起构成群 $Z_q(K)$ 。

沿着 q-单形的边界走，我们会走出一个 $(q-1)$-循环，但是一个 $(q-1)$-循环可能往往无法做成某个一些 q-单形的边界，一个循环离成为边界远的程度，就是同调群 $H_q(K)$ 所描述的对象，后续可以看到它是拓扑不变的，是我们这里研究的最重要的对象，提供了探测拓扑空间的“洞”的一种手段。

内容提要

- q-链，链群，系数群
- 边界映射
- q-循环群和 q-边界群
- 同调群
- 同调群的定向无关性

定义 1.4

设 K 是一个单纯复形，它的顶点都规定了顺序。令 $\tilde{S}_q$ 表示 K 的全体定向的 q-单形。对于 $q \geq 1$，由于每个 q- 单形有两种定向，$\tilde{S}_q$ 的元素个数就是 K 的 q-单形数的两倍。
另外，记 S_q 为 K 的全体正定向的 q-单形。 ♣

定义 1.5 (q-链)

设 K 是单纯复形，令 $0 \leq q \leq \dim K$，$\mathbb{Z}$ 是整数加群。对于 $q \geq 1$，K 的一个 q-链是指，一个映射 $f : \tilde{S}_q \to \mathbb{Z}$，使得 $f\left(-\sigma^q\right) = -f\left(\sigma^q\right)$。$q = 0$ 时，0-链无非是把每个 K 的顶点映到一个整数。 ♣

定义 1.6 (链群)

沿用上述记号，易见 K 的全体 q-链构成的集合，记作 $C_q\left(K\right)$，构成一个阿贝尔群，称为是 K 的 q-维链群。对于 $q < 0$ 或 $q > \dim K$，定义 $C_q\left(K\right) = 0$ 。 ♣

定义 1.7

对于 K 中正定向的 q-单形 σ^q，定义 q-链 $\bar{\sigma}^q$

$$\bar{\sigma}^q\left(\tau^q\right) = \begin{cases} +1, & \tau^q = \sigma^q \\ -1, & \tau^q = -\sigma^q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

称为是 K 的一个基础 q-链。 ♣

命题 1.1

对于每个 $q \geq 0$，$C_q\left(K\right) = \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\sigma}^q, \sigma^q \in S_q$ ♠

Remark

1. 可以把 $\bar{\sigma}^q$ 视同 $\sigma^p = 1_{\mathbb{Z}} \cdot \sigma^p$ ，认为 $C_q\left(K\right) \simeq \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} \mathbb{Z} \cdot \sigma^q$

定义 1.8

上述一切定义和命题，都可以将 $\mathbb{Z}$ 替换成任意阿贝尔群 G，得到 G-系数 q-链的概念。相应的链群就记作 $C_q\left(K; G\right)$，G 称为是系数群。我们有同构 $C_q\left(K; G\right) \simeq \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} G \cdot \sigma^q$ ♣

Remark

1. 一开始的 $C_q\left(K\right)$ 就相当于是 $C_q\left(K; \mathbb{Z}\right)$。

定义 1.9 (边界同态)

对于每个 q，$0 \le q \le \dim K$，定义同态 $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$，称为是边界同态，按以下方式定义：

先对于 $C_q(K)$ 的生成元 σ^q，定义

$$\partial_q(\sigma^q) := \sum_{i=0}^{q} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] \sigma_i^{q-1}$$

其中 σ_i^{q-1} 跑遍 σ^q 的 $(q-1)$ 个面，然后我们将 ∂_q 线性扩张到 $C_q(K)$ 上，即定义

$$\partial_q\left(\sum n_q \sigma^q\right) := \sum n_q \partial_q(\sigma^q)$$

对于 $q \le 0$ 以及 $q > \dim K$，定义 ∂_q 为零同态（唯一可能存在的映射）。

Remark

1. 由于当 σ_i^{q-1} 不是 σ^q 的边界时，$[\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] = 0$，因此我们也可以在定义 $\partial_q(\sigma^q)$ 时让 σ_i^{q-1} 跑遍 K 的所有 $(q-1)$-单形，得到的结果没有区别。
2. 可以让 $C_q(K)$ 表示任意的 $C_q(K;G)$，其中 G 是系数群。

命题 1.2

若 $\sigma^q = \langle v_0, v_1, \cdots, v_q \rangle$，且 $v_0 < v_1 < \cdots < v_q$ ，则

$$\partial_q \langle v_0, v_1, \cdots, v_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots v_q \rangle$$

Remark

1. 可以避免引入关联数，直接用上面的式子作为边界算子的定义，只需要检查良定义性，即上式是否在一个偶置换下不变。

引理 1.1

对于每个 q，复合同态 $\partial_{q-1} \circ \partial_q : C_q(K) \to C_{q-2}(K)$ 是零映射。

Remark

1. 可以看出 $\operatorname{Im}(\partial_q) \subseteq \ker(\partial_{q-1})$ 。

Idea

按定义展开，利用定理16.1计算关联数即可。

定义 1.10

设 K 是定向的复形。

1. 称一个 q-链 $z_q \in C_q(K)$ 是 K 的一个 q-循环，若 $\partial_q(z_q) = 0$。记 $Z_q(K)$ 为 K 的全体 q-循环，它就是 $\ker \partial_q$。
2. 称一个 q-链 $b_q \in C_q(K)$ 是 K 的一个 q-边界，若存在 $c' \in C_{q+1}(K)$，使得 $\partial_{q+1}(c') =$

b_q。全体 K 的 q-边界记作 $B_q(K)$，它就是 $\mathrm{Im}\ \partial_{q+1}$

Remark

1. 易见 $B_q(K) \subseteq Z_{q-1}(K)$
2. 可以类似地定义 $Z_q(K;G)$ 和 $B_q(K;G)$,G 为系数群。

定义 1.11

若 $\dim K = n$，则存在自由阿尔贝群列

$$C(K): \quad \ldots 0 \to C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \to C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K)$$
$$\to \ldots \to C_0(K) \to 0 \to \ldots$$

成为 K 的定向单纯链复形。

Remark

1. 可以类似地定义 $C(K;G)$

定义 1.12

设 K 是定向单纯复形。定义 K 的 q-维同调群为 $H_q(K)$

$$H_q(K) := Z_q(K)/B_q(K)$$

若考虑链复形 $C_*(K;G)$，则可以定义

$$H_q(K;G) := Z_q(K;G)/B_q(K;G)$$

成为 K 的 G 系数同调群。

Remark

1. 称 $H_q(K)$ 中的一个元素为一个同调类。
2. 若两个 q-链 z_q 和 z'_q 商去 $B_q(K)$ 相等，则称 z_q 和 z'_q 是同源的。
3. 一个 q-循环是一个 q-边界，当且仅当它与 0 同源。

定理 1.2

令 K_1 和 K_2 是 K 通过配备两个定向得到的的单纯复形。则 $H_q(K_1) \simeq H_q(K_2), \forall q \geq 0$。