第 1 章 覆叠空间

1.1 基本定义

定义 1.1

令 $p:\overline{X}\to X$ 是满射. 称 X 的一个开子集 V 是由 p 均匀覆叠的, 若 $\pi^{-1}(V)$ 写作 $\overline{X}$ 开子集的无交并:

$$p^{-1}(V)=\coprod_i U_i$$

其中 U_i 在 p 下同胚地映到 V. 此时, 称每个 U_i 为 p 在 V 上的一个层. 若 X 被由 p 均匀覆叠的开子集所覆盖, 则称 p 为一个覆叠投影, $\overline{X}$ 为 X 的覆叠空间. ♣

Remark

1. 简称 $\overline{X}$ 是 X 的复叠空间. 称 $\overline{X}$ 覆叠投影 p 的全空间, X 是 p 基空间.
2. 每个复叠投影都是局部同胚映射. 因此 $\overline{X}$ 和 X 有相同的局部拓扑性质.
3. 每个局部同胚都是开映射, 故复叠投影亦然.
4. 一般而言, 给定映射 $f:X\to Y$ 和 $y\in Y$, 称 $f^{-1}(y)$ 为 f 在 y 上的纤维, 若 f 是局部同胚, 则 f 的每个纤维都是离散的. 特别的, 复叠投影的每个纤维也都是离散的.
5. 当 x 在一个被均匀复叠的开集上移动时, $p^{-1}(x)$ 的基数不变. 若 X 是连通的, 则任意两个被均匀复叠的开集相交, 从而 $p^{-1}(x)$ 的基数与 $x\in X$ 的选取无关, 成为 p **的层数**. 若 p 的层数有限, 则称 p 是**一个有限复叠**. 例如 $z\mapsto z^n$ 是 S^1 到 S^1 的有限复叠.

Example 1.1 覆叠空间

1. 每个同胚都是一个覆叠投影;
2. 考虑 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$, 任意固定 $\theta:0\le\theta<2\pi$, 考虑 $U=\mathbb{S}^1\setminus\{e^{i\theta}\}$, $(\exp)^{-1}(U)$ 是一些区间 $\theta+2n\pi<t<\theta+(2n+2)\pi$ 的无交并. 每个区间都在 $\exp$ 下与 U 同胚.
3. 映射 $z\mapsto z^n$ 给出 $\mathbb{C}^*$ 到自身的一个覆叠投影, 其中 n 是正整数, $\mathbb{C}^*$ 是非零复数集. 映射在 $\mathbb{S}^1$ 上的限制给出 $\mathbb{S}^1$ 到自身的覆叠投影.
4. 设 Y 是 X 的子空间, p 是 X 的覆叠投影, 则 p 在 $p^{-1}(Y)$ 上的限制给出到 Y 的覆叠投影.
5. 容易构造不是覆叠投影的局部同胚: 对于覆叠投影 $\overline{X}\to X$, 和 $\overline{X}$ 上的开集 U, 限

制映射仍是局部同胚, 但是若取 $U=\overline{X}\setminus\bar{x}$, 则限制映射不再是一个覆叠投影.

定理 1.1

令 $p:\overline{X}\to X$ 是连续映射, 其中 X 是局部道路连通的.

1. 映射 p 是覆叠投影, 当且仅当对于每个 X 的分支[a] C, 限制映射 $p:p^{-1}(C)\to C$ 是覆叠投影.[b]
2. 若 p 是一个覆叠投影, 则对于每个 $\overline{X}$ 的分支 $\overline{C}$, 映射 $p:\overline{C}\to p(\overline{C})$ 是一个覆叠投影[c], 且 $p(\overline{C})$ 是 X 的一个分支.

[a] 局部道路连通空间中, 道路分支和连通分支等价, 故我们统称分支

[b] 局部道路连通性给出道路的分拆形成的对 $\overline{X}$ 的分拆也是合适的.

[c] 主要是因为对 $\overline{X}$ 的连通分拆不会破坏层的完整性. 由此, 我们可以单独考虑一个分支上的层.

Remark

1. 定理指出, 我们可以一次性只研究全空间的一个分支上的覆叠投影. 进而可以合理地做以下约定: **若无特别指出, 我们以下总不妨设基空间和全空间都是局部道路连通且连通的**

Proof

1. 1.1已经指出 $p^{-1}(C)\to C$ 是覆叠投影; 对于反方向, 最关键的点在于局部道路连通性给出每个 C 也是开集. 因此, 对于任意的 $x\in X$, 考虑包含了 x 的道路分支 C, $p|_{p^{-1}(C)}$ 的均匀覆叠性给出 x 的被 $p:p^{-1}(C)\to C$ 均匀覆盖了的开邻域 $U\subseteq C$. 从而 U 也是 x 在 X 中的被 $p:\overline{X}\to C$ 均匀覆盖了的开邻域.
2. 首先 $p(\overline{C})=:C$ 是开集. 给定 $x\in C$, 令 V 是被 p 均匀覆叠的连通开邻域. 令 $p^{-1}(V)=\coprod U_i$, 则由于覆叠的性质, 每个 U_i 也是连通的. 于是要么 $U_i\bar{\subseteq}C$, 要么 $U_i\cap\overline{C}=\varnothing$. 由此可知 V 是被 $p|_{\overline{C}}$ 均匀覆叠的.
   最后说明 C 是分支, 令 x 是 C 的闭包上的一点, V 是同上面一样的 x 的开邻域. 则至少其中一个 U_i 与 $\overline{C}$ 相交, 进而完全地落在 $\overline{C}$ 上, 因此 $V\subseteq C$, $x\in C$. 这表明 C 是既开又闭的.

□