第 1 章　特征函数法

1.1 基本概念

考虑一下形式的线性 PDE:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E.Q}: \quad \partial_t u = L_x u + F(x,t), \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_x u + F(x,t) \\
&\mathrm{B.C}: \quad B[u(x,t)] = g(x,t), \quad \text{on the boundary} \partial\Omega \\
&\mathrm{I.C}: \quad u(x,0) = f(x), \quad \text{or} \quad u(x,0) = f(x), \partial_t u(x,0) = h(x)
\end{aligned}$$

定义 1.1 (特征值与特征函数)

对于上述问题中的空间算子 L_x, 和区域 Ω. 若存在值 λ 和函数 $X(x)$, 满足

$$L_x X(x) + \lambda X(x) = 0$$

并且

$$B[X(x)] = 0$$

则称 λ 是区域上空间算子的一个特征值, $X(x)$ 是关于 λ 的一个特征函数. ♣

定义 1.2 (内积)

在函数空间中, 两个是指函数 $f(x), g(x)$ 在区域 Ω 上的标准 L^2 内积定义为

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}V$$

♣

定理 1.1 (Laplace 算子特征函数的正交性)

对于 Laplace 算子 Δ 在有界区域 Ω 上. 满足齐次 Dirichlet 或齐次 Neumann 边界条件的特征函数, 如果它们对应于不同的特征值, 那么它们是正交的. ♡

Proof 设

$$\Delta\varphi_m = \lambda_m\varphi_m, \quad \Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \lambda_m \neq \lambda_n$$

由 Green 第二恒等式,

$$\int_\Omega (\varphi_m\Delta\varphi_n - \varphi_n\Delta\varphi_m)\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega}\left(\varphi_m\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} - \varphi_n\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

将特征方程带入左侧积分，化为

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle$$

检查右侧积分:

1. Dirichlet: 若 $\varphi_m = 0, \varphi_n = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，则右侧积分化为

$$\int_{\partial\Omega} \left(0 \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - 0 \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 9$$

2. Neumann: 若 $\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0, \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，右侧积分化为

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi_m \cdot 0 - \varphi_n \cdot 0) \, \mathrm{d}S = 0$$

因此，在以上两种边界条件下，均有

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$$

则当 $\lambda_n \neq \lambda_m$ 时，

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$$

□

定理 1.2 (完备性定理)

对于一个有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，其边界 $\partial\Omega$ 足够光滑（例如 C^1 或分段光滑），Laplace 算子 Δ 在上述任何一种齐次边界条件下，都拥有一系列离散的、正的特征值：

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

（对于 Neumann 边界条件，$\lambda_1 = 0$ 对应常数特征函数）。这些特征值趋于无穷大 ($\lambda_n \to \infty$ as $n \to \infty$)，且每个特征值都有有限的重数（即对应有限个线性独立的特征函数）。

更重要的是，对应的特征函数集合 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成了一个完备的正交基 (Complete Orthonormal Basis) 在 $L^2(\Omega)$ 空间中（或者更精确地说，在满足相应齐次边界条件的 $L^2(\Omega)$ 的子空间中）。

这意味着，对于任何函数 $f(x) \in L^2(\Omega)$（且满足相应的齐次边界条件），它可以被唯一地表示为这些特征函数的无限线性组合：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

其中系数 c_n 可以通过内积（利用正交性）计算得到：

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_\Omega f(x) \overline{\phi_n(x)} dx}{\int_\Omega |\phi_n(x)|^2 dx}$$

(如果特征函数已经归一化，即 $\int_{\Omega}|\phi_n(x)|^2dx=1$，则分母为 1)。
这个级数在 L^2 范数下收敛，即：

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=1}^{N}c_n\phi_n\right\|_{L^2}=\lim_{N\to\infty}\left(\int_{\Omega}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\phi_n(x)\right|^2dx\right)^{1/2}=0$$

♡

之后均假设 L_x 是像 Δ 这样，具有可数个实特征值，且特征函数有类似的完备性和正交性的算子.

1.2 齐次边界问题的解法

定理 1.3

对于 L_x,Ω. 设 $\{\lambda_n\}$ 是 L_x 的所有特征值，$\{X_n\}$ 是其对应的一族特征函数. 则解 $u\left(x,t\right)$ 和非齐次源项 $F\left(x,t\right)$ 可以按特征函数展开:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n\left(t\right)X_n\left(x\right),\quad F\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\left(t\right)X_n\left(x\right)$$

其中

$$F_n\left(t\right)=\frac{\left\langle F\left(x,t\right),X_n\left(x\right)\right\rangle}{\left\langle X_n\left(x\right),X_n\left(x\right)\right\rangle}$$

且每个 $T_n\left(t\right)$ 都是形如下的 ODE 的解:

1. 对于一阶时间导数 (热方程):

$$T_n'\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)=F_n\left(t\right)$$

2. 对于二阶时间导数 (波动方程):

$$T_n''\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)=F_n\left(t\right)$$

♡

Proof 由于 $\{X_n\}$ 构成一族完备基，固定 t，$u\left(x,t\right)$ 总可以按 $X_n\left(x\right)$ 展开，关于每个 t 的系数函数即为 $T_n\left(t\right)$. 以一阶时间导数的方程为例将展开式带入原始 PDE，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'\left(t\right)X_n\left(x\right)=L_x\left(\sum_{n=1}^{\infty}T_n\left(t\right)X_n\left(x\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\left(t\right)X_n\left(x\right)$$

由于 L_x 是线性的，且 $T_n\left(t\right)$ 不依赖于 x，带入特征关系，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'\left(t\right)X_n\left(x\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nT_n\left(t\right)X_n\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\left(t\right)X_n\left(x\right)$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)-F_n\left(t\right)\right)X_n\left(x\right)=0$$
两边与 X_n 做内积, 由正交性得到
$$T_n'\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)-F_n\left(t\right)=0$$
□

定理 1.4

承接上面的定理. 除了上面这些之外, 初始条件 $u\left(x,t\right)=f\left(x\right)$ 展开为:
$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nX_n\left(x\right),\quad B_n=\frac{\langle f,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}$$
$$h\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}H_nX_n\left(x\right),\quad H_n=\frac{\langle h,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}$$

1. 一阶时间导数: 方程
$$T_n'\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)=F_n\left(t\right)$$
具有初始条件 $T_n\left(0\right)=B_n$ 确定出唯一解.
2. 二阶时间导数: 方程
$$T_n''\left(t\right)+\lambda_nT_n\left(t\right)=F_n\left(t\right)$$
具有初始条件 $T_n\left(0\right)=B_n$, $T_n'\left(0\right)=H_n$, 确定出唯一解.

♡

1.3 处理非齐次边界条件

定理 1.5

若 $w\left(x,t\right)$ 满足非齐次边界条件, 且 L_xw 尽可能简单. 令
$$\tilde{F}\left(x,t\right)=F\left(x,t\right)+L_xw-\frac{\partial w}{\partial t}$$
并令 $v\left(x,t\right)$ 是以下齐次边界问题的解
$$\begin{aligned}
&\mathrm{E.Q}: && \partial_tv=L_xv+\tilde{F}\left(x,t\right),\quad \text{or}\quad \frac{\partial^2v}{\partial t^2}=L_xv+F\left(x,t\right)\\
&\mathrm{B.C}: && B[v\left(x,t\right)]=0,\quad \text{on the boundary}\,\partial\Omega\\
&\mathrm{I.C}: && v\left(x,0\right)=f\left(x\right),\quad \text{or}\quad v\left(x,0\right)=f\left(x\right),\partial_tv\left(x,0\right)=h\left(x\right)
\end{aligned}$$

令

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

则 u 是原问题的解.

Proof

$$B[u] = B[w] + B[v] = g(x,t)$$

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= \partial_t w + \partial_t v \\
&= \partial_t w + L_x v + \tilde{F}(x,t) \\
&= \partial_t w + L_x u - L_x w + F(x,t) + L_x w - \partial_t w \\
&= L_x u + F(x,t)
\end{aligned}$$

□

第 1 章 练习

Problem 1.1 求解以为波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases}
\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = \sin x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\
u(x,0) = \frac{1}{2}\sin 2x, \partial_t u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi
\end{cases}$$

Proof

方程为

$$\partial_{tt} u = \partial_{xx} u + \sin x$$

考虑特征值问题

$$\begin{cases}
\partial_{xx} X + \lambda X = 0, \\
B[X] = 0
\end{cases}$$

$\partial_{xx} = \Delta_x$ 有非负的特征值, 解得

$$X(x) = C_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right) + D_\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)$$

带入边界条件, 得到

$$C_\lambda = 0, \quad D_\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

特征值 λ 满足

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots$$

即

$$\lambda_n = n^2$$

取 $X_n(x) = \sin(nx)$. 则 $u(x,t)$ 展开为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

其中, $T_n(t)$ 满足方程

$$T_1''(t) + T_1(t) = 1, \quad T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, n \geq 2$$

解得

$$T_1(t) = A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t) + 1$$

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$$

带入初值,

$$B_n = T_n'(0) = 0, n \geq 1$$

$$A_n = T_n(0) = 0, \quad n \neq 1, 2, \quad A_1 = T_1(0) - 1 = -1, \quad A_2 = T_2(0) = \frac{1}{2}$$

于是

$$T_1(t) = -\cos t + 1, \quad T_2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t), \quad T_n(t) = 0, \quad n \neq 1, 2$$

最终

$$u(x,t) = (1 - \cos t)\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2t)\sin(2x)$$

□