第 1 章　协变导数

1.1 联络

定义 1.1

令 $\pi : E \to M$ 是光滑（带边）流形 M 上的一个光滑向量丛，$\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间. E 上的一个联络是指，一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

写作 $(X, Y) \to \nabla_X Y$，满足以下三条

1. $\nabla_X Y$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$ 线性的：对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$，以及 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$，

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$$

2. $\nabla_X Y$ 在 Y 上是 $\mathbb{R}$ 线性的：对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$，

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$$

3. ∇ 满足以下乘积律：$f \in C^\infty(M)$，

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$$

♣

Remark

1. 称 $\nabla_X Y$ 为 Y 在 X 方向上的协变导数.

1.1.1 切丛上的联络

定义 1.2

设 M 是光滑（带边）流形.M 上的一个联络，通常是指切丛 $TM \to M$ 上的一个联络

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

♣

定义 1.3 (联络系数)

设 M 是光滑（带边）流形，∇ 是 TM 上的一个联络. 设 (E_i) 是 TM 在开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标价. 对于每一组指标 i, j，$\nabla_{E_i} E_j$ 都可以按同一组标架

展开：

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

当 i, j, k 跑遍 1 到 $n = \dim M$ 时，定义出 n^3 个光滑函数 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$，被称为是$\nabla$ **关于给定标架的联络系数**．

命题 1.1 (坐标表示)

设 M 是光滑（带边）流形，∇ 是 TM 上的一个联络．设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个局部标架，令 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是 ∇ 关于这组标架的联络系数．对于光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$，按标架展开为 $X = X^i E_i$，$Y = Y^j E_j$，则有

$$\nabla_X Y = \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$[a]

[a] 记忆时分成两部分来记，一部分是对固定向量场对数量函数求导的部分，这部分比较少；一部分是固定数量函数对向量场求导的部分，这部分要拆的细碎一点，既要拆求导的方向 X^i，又要拆导出的坐标表示 E_k

Proof 由联络的性质

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^j E_j\right) \\
&= Y^j \nabla_X E_j + X\left(Y^j\right) E_j \\
&= Y^j \nabla_{\left(X^i E_i\right)} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \nabla_{E_i} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \Gamma_{ij}^k E_k + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k
\end{aligned}$$

□

1.2 沿曲线的向量场和张量场

定义 1.4

1. 设 M 是光滑（带边）流形．给定光滑曲线，$\gamma : I \to M$，沿 γ **的一个向量场**，是指一个连续映射 $V : I \to TM$，使得 $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ 对于每个 $t \in I$ 成立．
2. 沿 γ 的全体向量场记作 $\mathfrak{X}(\gamma)$．

Remark

1. 称 V 是沿 γ 的一个光滑向量场，若它作为从 I 到 TM 的映射是光滑的．

2. 在逐点加法和数乘下, $\mathfrak{X}(\gamma)$ 构成一个 $C^{\infty}(I)$-模.

Example 1.1

1. 光滑曲线 γ 在每一点 t 处的速度 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 共同构成一个沿 γ 的光滑向量场.
2. 若 γ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线, 令 $N(t) = R\gamma'(t)$, 其中 R 是逆时针旋转 $\pi/2$ 的映射, 则 $N(t)$ 始终与 $\gamma'(t)$ 正交. 在标准坐标系, $N(t) = (-\dot{\gamma}^2(t), \dot{\gamma}^1(t))$, 从而 N 是沿 γ 的一个光滑向量场.

命题 1.2

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 沿 γ 的一个向量场 $V(t) : I \to TM$ 是可扩张的[a], 若存在一个光滑向量场 $\tilde{V}$, 它定义在 M 的一个包含了 γ 的像的开集上, 使得 $V = \tilde{V} \circ \gamma$.

[a] 沿曲线的向量场实际上不是流形上的向量场, 由于 γ 可能把 I 上不同的点映到 M 上的同一点, 我们可能无法直接通过 $V(t)$ 给出 M 上的一个向量场. 因此我们在沿曲线的向量场中, 需要再特别取出一部分更好的.

Remark 若 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 但是 $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$, 则 γ' 不是可扩张的.

定义 1.5

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 一个沿 γ 的张量场, 是指一个从 I 到某个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 的连续映射 σ, 使得 $\sigma(t) \in T^{(k,l)}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$ 对每个 $t \in I$ 成立.

Remark

1. 称 σ 是一个沿 γ 的光滑张量场, 若在此之上它是从 I 到 $T^{(k,l)}TM$ 的光滑映射.
2. 类似地, 称沿 γ 的一个光滑张量场是可扩张的, 若存在定义在 $\gamma(I)$ 的邻域上的光滑张量场 $\tilde{\sigma}$, 使得 $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \gamma$

1.2.1 沿曲线的协变导数

定理 1.1

令 M 是光滑 (带边) -流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 对于每个光滑曲线, $\gamma : I \to M$, ∇ 决定了唯一的算子

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

称为是沿 γ 的斜边导数, 使得它满足以下几条性质

1. $\mathbb{R}$-线性:
$$D_t(aV+bW)=aD_tV+bD_tW,\quad a,b\in\mathbb{R}$$
2. Lebniz 律:
$$D_t(fV)=f'V+fD_tV,\quad f\in C^\infty(I)$$
3. 若 $V\in\mathfrak{X}(\gamma)$ 是可扩张的, 则对于每个 V 的扩张 $\tilde{V}$,
$$D_tV(t)=\nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}\text{[a]}$$

[a]把无交叉的沿曲线向量场的协变导数, 拉回到流形上面.

命题 1.3 (沿曲线协变导数的局部标价表示)

M,∇,γ,D_t 同前. 设 $V\in\mathfrak{X}(\gamma)$ 是可扩张的, 则在局部标架坐标 (x^i) 下, 设
$$\gamma(t)=\left(\gamma^1(t),\cdots,\gamma^n(t)\right),\quad V(t)=V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}$$
则
$$D_tV(t)=\left(\dot{V}^k(t)+\dot{\gamma}^i(t)V^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)E_k(\gamma(t))$$

Proof 由于每个 ∂_j 都是可扩张的, 我们有
$$\begin{aligned}
D_tV(t)&=D_t\left(V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}+V^j(t)\,D_t\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&=\dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}+V^j(t)\,\nabla_{\gamma'(t)}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&=\dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)}+V^j(t)\left(\nabla_{\dot{\gamma}^i(t)\,\partial_i|_{\gamma(t)}}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)}+V^j(t)\left(\dot{\gamma}^i(t)\,\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\,\partial_k|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\left(\dot{V}^k(t)+\dot{\gamma}^i(t)\,V^j(t)\,\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}\text{ [1]}
\end{aligned}$$
□

1.2.2 平行移动

定义 1.6

设 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 称一个沿光滑曲线 γ 的光滑向量场或张量场 V, 是沿 γ（关于 ∇）平行的, 若 $D_t V \equiv 0$.

Remark

1. 测地线可以被描述成：速度向量场沿自身平行的光滑曲线.

Example 1.2 令 $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的一个光滑向量场. 则 V 是关于欧式联络沿 γ 平行的, 当且仅当 V 的分量函数皆为常数.

命题 1.4

光滑曲线 γ 的局部坐标表示为 $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$, 则由公式??, 向量场 V 沿 γ 平行, 当且仅当

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)), \quad k = 1, \cdots, n$$

定理 1.2 (线性 ODE 的存在唯一性和光滑性)

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开区间, 且对于 $1 \le j, k \le n$, 令 $A_j^k : I \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 对于所有的 $t_0 \in I$, 和每个初值向量 $(c^1, \cdots, c^n) \in \mathbb{R}^n$, 以下线性初值问题

$$\dot{V}^k(t) = A_j^k(t) V^j(t)$$
$$V^k(t_0) = c^k$$

有在 I 上的唯一光滑解, 并且解是依赖于 $(t, c) \in I \times \mathbb{R}^n$ 光滑的.

定理 1.3 (平行移动的存在唯一性)

设 M 是（带边）-光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 给定光滑曲线 $\gamma : I \to M, t_0 \in I$, 以及向量 $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ 或张量 $v \in T^{k(k,l)}(T_{\gamma(t)}M)$, 存在唯一的沿 γ 平行的向量场或张量场 V, 使得 $V(t_0) = v$, 称为是 v 沿 γ 的平行移动.

定义 1.7 (平行移动映射)

对于每个 $t_0, t_1 \in I$, 定义映射

$$P_{t_0 t_1}^{\gamma} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

称为是平行移动映射, 为 $P_{t_0 t_1}^{\gamma}(v) := V(t_1), v \in T_{\gamma(t_0)}M$, 其中 V 是 v 沿 γ 的平行

移动. ♣

Remark

1. 由于平行性的方程是线性的 ODE,$P^{\gamma}_{t_0 t_1}$ 是线性映射. 又 $P^{\gamma}_{t_1 t_0}$ 是它的一个逆, 因此平行移动映射是同构.

Idea 流形上不同点 p,q 的切空间 T_pM, T_qM 本无自然的同构, 但是平行移动映射 $P^{\gamma}_{p,q}$ 沿从 p 到 q 路径 γ 提供了人为但比较一致的比较规则.

此外, 还可以将研究的曲线放宽为逐段光滑的曲线, 相应的有沿逐点光滑曲线的平行移动的存在唯一性.

接下来介绍一个在处理平行移动的问题时非常有用的工具

定义 1.8 (平行标架)

给定 $T_{\gamma(t_0)}M$ 的一组基 $(b_1, \cdots, b_n)$, 可以让每个 b_i 沿着 γ 做平行移动, 得到 n 个沿 γ 平行的向量场 $(E_1, \cdots, E_n)$. 由于平行移动映射是是线性同构, 对于每个 t, $(E_i(t))$ 在 $\gamma(t)$ 处构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基. 称这样的沿 γ 的 n 个向量场为沿 γ 的**平行标架**. ♣

命题 1.5

设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架. 每个沿 γ 的向量场 $V(t)$ 表为 $V(t) = V^i(t) E_i(t)$.

1. $V(t)$ 沿 γ 的协变导数表为
$$D_t V(t) = \dot{V}^i(t) E_i(t)$$
2. $V(t)$ 沿 γ 平行, 当且仅当 $V^i(t)$ 均为常数. ♠

Proof 由 D_t 满足的 Lebniz 律, 和 E_i 的平行性: $D_t E_i = 0$, 立即得到. □

定理 1.4 (平行移动决定的协变微分)

设 M 是光滑 (带边) 流形, ∇ 是 TM 上的联络. 设 $\gamma: I \to M$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的光滑向量场, 则对于每个 $t_0 \in I$,
$$D_t V(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{P^{\gamma}_{t_1 t_0} V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}$$
♡

Proof 设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架, 记 $V(t) = V^i(t) E_i(t), t \in I$. 一方面我们有 $D_t(V_0) = \dot{V}^i(t_0) E_i(t_0)$, 另一方面对于每个固定的 $t_1 \in I$, $V(t_1)$ 沿 γ 的平行移动是沿 γ 的一个常系数的向量场 $W(t) = V^i(t_1) E_i(t)$, 从而 $P^{\gamma}_{t_1 t_0} V(t_1) = V^i(t_1) E_i(t_0)$, 带

入后取极限 $t_1 \to t_0$, 即可得到极限式等于 $\dot{V}^i(t_0) E_i(t_0)$.

$\square$

推论 1.1 (平行移动决定的联络)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 X, Y 是沿 M 的光滑向量场. 对于每个 $p \in M$,

$$\left.\nabla_X Y\right|_p = \lim_{h \to 0} \frac{P_{h0}^{\gamma} Y_{\gamma(h)} - Y_p}{h}$$

其中 $\gamma : I \to M$ 是任意使得 $\gamma(0) = p$ 以及 $\gamma'(0) = X_p$ 的光滑曲线. ♡

1.2.2.1 Levi-Civita 联络

命题 1.6

设 (M, g) 是（带边）（伪）Riemann 流形, 令 ∇ 是它的 Levi-Civita 联络.

1. 设 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 则
$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}\Big(& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \Big)\end{aligned} \tag{1.1}$$
(Koszul's formula)
2. 在任意 M 的光滑坐标卡下,Levi-Civita 联络的联络系数由以下给出
$$\Gamma_{ij}^{k}{}^{a} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$
3. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标架, 令 $c_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ 是按以下方式定义的 n^3 个光滑函数:
$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$$
则 Levi-Civita 联络在这组标架下的联络系数为
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm} c_{il}^m - g_{lm} c_{ji}^m + g_{im} c_{lj}^m\right)$$
4. 若 g 是 Riemann 度量, (E_i) 是光滑局部正交标架, 则
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i\right)$$

[a]称为 Christoffel 符号

♠

第 1 章 练习

Problem 1.1 求沿着球面的赤道, 切向量的平行移动.

Proof 考虑半径为 R 的球面的参数化

$$r(u,v)=R(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$$

则

$$r_u=R(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u),\quad r_v=R(-\cos u\sin v,\cos u\cos v,0)$$

$$\gamma(t)=r(0,t),\quad t\in[0,2\pi]$$

是赤道的一个单位速度参数表示.

$$\gamma'(t)=r_v(0,t)=R(-\sin t,\cos t,0)$$

记 $E_1=r_u$, $E_2=r_v$. 任取以 $r(0,0)$ 为起点, $v=v^iE_i(0)$ 为速度向量的沿着 γ 的向量场

$$V(t)=V^i(t)E_i(\gamma(t))$$

其中 $V^1(0)=v^1,\quad V^2(0)=v^2$. 注意到

$$\begin{aligned}D_tE_1(\gamma(t))&=\left(\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}r_u(0,t)\right)^{\perp}\\&=\left(\tilde{\nabla}_{R(-\sin t\partial_1+\cos t\partial_2)}(R\partial_3)\right)^{\perp}=0\end{aligned}$$

其中 $\nabla^{\perp}$ 表示 $\mathbb{R}3$ 上的欧式联络. (∂_i) 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的标准坐标向量场. 于是 E_1 是沿着 γ 平行的. 类似地,

$$D_tE_2(\gamma(t))=\left(\tilde{D}_tE_2(\gamma(t))\right)^{\perp}$$

用欧式空间上的标准坐标标架计算, 它们总是沿曲线平行的

$$\tilde{D}_tE_2(\gamma(t))=R\tilde{D}_t(-\sin t\partial_1+\cos t\partial_2)=R(-\cos t,-\sin t,0)$$

与 $r_v(0,t)$ 和 $r_u(0,t)$ 总是正交的, 故

$$D_tE_2(\gamma(t))=0$$

这表明 E_1,E_2 是沿 $\gamma(t)$ 平行的标架, 进而

$$D_tV(t)=\dot{V}^1(t)E_1(\gamma(t))+\dot{V}^2(t)(\gamma(t))$$

若 $V(t)$ 沿 γ 平行, 则

$$\dot{V}^1(t)=\dot{V}^2(t)=0$$

从而

$$\begin{aligned}V(t)=v^1E_1(\gamma(t))+v^2E_2(\gamma(t))&=v^1r_u(0,t)+v^2r_v(0,t)\\&=R\left(-v^2\sin t,v^2\cos t,v^1\right)\end{aligned}$$

为以 $(0,t)$ 为起点, v^1,v^2 的平行移动. 对于以赤道上其它点为起点的情况, 总可以通过一

个旋转转化为以 $r(0,1)$ 为起点的情况.

$\square$