第 1 章　光滑流形

1.1　一些例子

Example 1.1 矩阵空间　令 $M(m \times n, \mathbb{R})$ 表示全体 $m \times n$ 的实矩阵，则 $M(m \times n, \mathbb{R})$ 可以等同于 $\mathbb{R}^{mn}$ 构作一个 $\mathbb{R}$ 上的 mn 维光滑流形。类似地，复矩阵空间 $M(mm \times n, \mathbb{C})$ 可以构作 $\mathbb{R}$ 上的 $2mn$ 维光滑流形。

Example 1.2 开子流形　令 U 表示 $\mathbb{R}^n$ 的任意开子集。U 构成一个拓扑 n-流形，单个图 (U, Id_U) 可以定义出 U 上的一个光滑结构。

更一般地，若 M 是光滑 n-流形，令 $U \subseteq M$ 是任意开子集。可以定义 U 上的图册

$$\mathcal{A}_U := \{M\text{的光滑图}\,(V, \varphi) : V \subseteq U\}$$

对于每个 $p \in U$，p 都含与 M 的某个光滑坐标卡 (W, φ)；若令 $V = W \cap U$，则 $(V, \varphi|_V)$ 是 $\mathcal{A}_U$ 中包含了 p 的一个图。因此 U 被 $\mathcal{A}_U$ 中的一些图覆盖，容易证明这构成 U 的一个光滑图册。因此 M 的任意开子集上都可以定义出自然的光滑 n-流形结构。配备了此结构下的开子集被称为是 M 的一个 **开子流形**。

Example 1.3 一般线性群　**一般线性群** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是指全体 $n \times n$ 可逆实矩阵构成的集合。由于它是 $M(, n_R)$ 的一个开子集，因此 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 可以构作一个光滑流形。