微分几何-古典 vs 现代

作者：Autin

目录

第 1 章　协变导数

1.1 联络

定义 1.1

令 $\pi : E \to M$ 是光滑（带边）流形 M 上的一个光滑向量丛, $\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间. E 上的一个联络是指, 一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

写作 $(X, Y) \to \nabla_X Y$, 满足以下三条

1. $\nabla_X Y$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$ 线性的：对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, 以及 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$,
$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$$
2. $\nabla_X Y$ 在 Y 上是 $\mathbb{R}$ 线性的：对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$,
$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$$
3. ∇ 满足以下乘积律：$f \in C^\infty(M)$,
$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$$

♣

Remark

1. 称 $\nabla_X Y$ 为 Y 在 X 方向上的协变导数.

1.1.1 切丛上的联络

定义 1.2

设 M 是光滑（带边）流形.M 上的一个联络，通常是指切丛 $TM \to M$ 上的一个联络

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

♣

定义 1.3 (联络系数)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 (E_i) 是 TM 在开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标价. 对于每一组指标 i, j, $\nabla_{E_i} E_j$ 都可以按同一组标架

展开:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

当 i, j, k 跑遍 1 到 $n = \dim M$ 时, 定义出 n^3 个光滑函数 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, 被称为是$\nabla$关于给定标架的联络系数 .

命题 1.1 (坐标表示)

设 M 是光滑(带边)流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个局部标架, 令 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是 ∇ 关于这组标架的联络系数. 对于光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, 按标架展开为 $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, 则有

$$\nabla_X Y = \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$ [a]

[a] 记忆时分成两部分来记, 一部分是对固定向量场对数量函数求导的部分, 这部分比较少; 一部分是固定数量函数对向量场求导的部分, 这部分要拆的细碎一点, 既要拆求导的方向 X^i, 又要拆导出的坐标表示 E_k

Proof 由联络的性质

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^j E_j\right) \\
&= Y^j \nabla_X E_j + X\left(Y^j\right) E_j \\
&= Y^j \nabla_{\left(X^i E_i\right)} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \nabla_{E_i} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \Gamma_{ij}^k E_k + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k
\end{aligned}$$

□

1.2 沿曲线的向量场和张量场

定义 1.4

1. 设 M 是光滑(带边)流形. 给定光滑曲线,$\gamma : I \to M$, 沿 γ 的一个向量场 , 是指一个连续映射 $V : I \to TM$, 使得 $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ 对于每个 $t \in I$ 成立.
2. 沿 γ 的全体向量场记作 $\mathfrak{X}(\gamma)$.

Remark

1. 称 V 是沿 γ 的一个光滑向量场, 若它作为从 I 到 TM 的映射是光滑的.

2. 在逐点加法和数乘下, $\mathfrak{X}(\gamma)$ 构成一个 $C^{\infty}(I)$-模.

Example 1.1

1. 光滑曲线 γ 在每一点 t 处的速度 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 共同构成一个沿 γ 的光滑向量场.
2. 若 γ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线, 令 $N(t) = R\gamma'(t)$, 其中 R 是逆时针旋转 $\pi/2$ 的映射, 则 $N(t)$ 始终与 $\gamma'(t)$ 正交. 在标准坐标系, $N(t) = (-\dot{\gamma}^2(t), \dot{\gamma}^1(t))$, 从而 N 是沿 γ 的一个光滑向量场.

命题 1.2

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 沿 γ 的一个向量场 $V(t) : I \to TM$ 是可扩张的[a], 若存在一个光滑向量场 $\tilde{V}$, 它定义在 M 的一个包含了 γ 的像的开集上, 使得 $V = \tilde{V} \circ \gamma$.

[a]沿曲线的向量场实际上不是流形上的向量场, 由于 γ 可能把 I 上不同的点映到 M 上的同一点, 我们可能无法直接通过 $V(t)$ 给出 M 上的一个向量场. 因此我们在沿曲线的向量场中, 需要再特别取出一部分更好的.

Remark 若 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 但是 $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$, 则 γ' 不是可扩张的.

定义 1.5

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 一个沿 γ 的张量场, 是指一个从 I 到某个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 的连续映射 σ, 使得 $\sigma(t) \in T^{(k,l)}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$ 对每个 $t \in I$ 成立.

Remark

1. 称 σ 是一个沿 γ 的光滑张量场, 若在此之上它是从 I 到 $T^{(k,l)}TM$ 的光滑映射.
2. 类似地, 称沿 γ 的一个光滑张量场是可扩张的, 若存在定义在 $\gamma(I)$ 的邻域上的光滑张量场 $\tilde{\sigma}$, 使得 $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \gamma$

1.2.1 沿曲线的协变导数

定理 1.1

令 M 是光滑 (带边) -流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 对于每个光滑曲线, $\gamma : I \to M$, ∇ 决定了唯一的算子

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

称为是沿 γ 的斜边导数, 使得它满足以下几条性质

1. $\mathbb{R}$-线性:

$$D_t(aV+bW)=aD_tV+bD_tW,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

2. Lebniz 律:

$$D_t(fV)=f'V+fD_tV,\quad f\in C^{\infty}(I)$$

3. 若 $V\in\mathfrak{X}(\gamma)$ 是可扩张的, 则对于每个 V 的扩张 $\tilde{V}$,

$$D_tV(t)=\nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}^{a}$$

[a]把无交叉的沿曲线向量场的协变导数, 拉回到流形上面.

命题 1.3 (沿曲线协变导数的局部标价表示)

M,∇,γ,D_t 同前. 设 $V\in\mathfrak{X}(\gamma)$ 是可扩张的, 则在局部标架坐标 (x^i) 下, 设

$$\gamma(t)=\left(\gamma^1(t),\cdots,\gamma^n(t)\right),\quad V(t)=V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}$$

则

$$D_tV(t)=\left(\dot{V}^k(t)+\dot{\gamma}^i(t)V^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)E_k(\gamma(t))$$

Proof 由于每个 ∂_j 都是可扩张的, 我们有

$$\begin{aligned}
D_tV(t)&=D_t\left(V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}+V^j(t)\,D_t\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&=\dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}+V^j(t)\,\nabla_{\gamma'(t)}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&=\dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)}+V^j(t)\left(\nabla_{\dot{\gamma}^i(t)\,\partial_i|_{\gamma(t)}}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)}+V^j(t)\left(\dot{\gamma}^i(t)\,\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\,\partial_k|_{\gamma(t)}\right)\\
&=\left(\dot{V}^k(t)+\dot{\gamma}^i(t)\,V^j(t)\,\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}\ ^{1}
\end{aligned}$$

□

1.2.2 平行移动

定义 1.6

设 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 称一个沿光滑曲线 γ 的光滑向量场或张量场 V, 是沿 γ (关于 ∇) 平行的, 若 $D_t V \equiv 0$. ♣

Remark

1. 测地线可以被描述成: 速度向量场沿自身平行的光滑曲线.

Example 1.2 令 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的一个光滑向量场. 则 V 是关于欧式联络沿 γ 平行的, 当且仅当 V 的分量函数皆为常数.

命题 1.4

光滑曲线 γ 的局部坐标表示为 $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$, 则由公式??, 向量场 V 沿 γ 平行, 当且仅当

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\,\dot{\gamma}^i(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)), \quad k = 1, \cdots, n$$

♠

定理 1.2 (线性 ODE 的存在唯一性和光滑性)

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开区间, 且对于 $1 \le j, k \le n$, 令 $A^k_j : I \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 对于所有的 $t_0 \in I$, 和每个初值向量 $(c^1, \cdots, c^n) \in \mathbb{R}^n$, 以下线性初值问题

$$\dot{V}^k(t) = A^k_j(t)\,V^j(t)$$

$$V^k(t_0) = c^k$$

有在 I 上的唯一光滑解, 并且解是依赖于 $(t, c) \in I \times \mathbb{R}^n$ 光滑的. ♡

定理 1.3 (平行移动的存在唯一性)

设 M 是 (带边) -光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 给定光滑曲线 $\gamma : I \to M, t_0 \in I$, 以及向量 $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ 或张量 $v \in T^{k(k,l)}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$, 存在唯一的沿 γ 平行的向量场或张量场 V, 使得 $V(t_0) = v$, 称为是 v 沿 γ 的平行移动. ♡

定义 1.7 (平行移动映射)

对于每个 $t_0, t_1 \in I$, 定义映射

$$P^{\gamma}_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

称为是平行移动映射, 为 $P^{\gamma}_{t_0 t_1}(v) := V(t_1), v \in T_{\gamma(t_0)}M$, 其中 V 是 v 沿 γ 的平行

移动.

Remark

1. 由于平行性的方程是线性的 ODE,$P^{\gamma}_{t_0t_1}$ 是线性映射. 又 $P^{\gamma}_{t_1t_0}$ 是它的一个逆, 因此平行移动映射是同构.

Idea 流形上不同点 p,q 的切空间 T_pM, T_qM 本无自然的同构, 但是平行移动映射 $P^{\gamma}_{p,q}$ 沿从 p 到 q 路径 γ 提供了人为但比较一致的比较规则.

此外, 还可以将研究的曲线放宽为逐段光滑的曲线, 相应的有沿逐点光滑曲线的平行移动的存在唯一性.

接下来介绍一个在处理平行移动的问题时非常有用的工具

定义 1.8 (平行标架)

给定 $T_{\gamma(t_0)}M$ 的一组基 $(b_1,\cdots,b_n)$, 可以让每个 b_i 沿着 γ 做平行移动, 得到 n 个沿 γ 平行的向量场 $(E_1,\cdots,E_n)$. 由于平行移动映射是是线性同构, 对于每个 t, $(E_i(t))$ 在 $\gamma(t)$ 处构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基. 称这样的沿 γ 的 n 个向量场为沿 γ **的平行标架**.

命题 1.5

设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架. 每个沿 γ 的向量场 $V(t)$ 表为 $V(t)=V^i(t)E_i(t)$.

1. $V(t)$ 沿 γ 的协变导数表为
$$D_tV(t)=\dot{V}^i(t)E_i(t)$$
2. $V(t)$ 沿 γ 平行, 当且仅当 $V^i(t)$ 均为常数.

Proof 由 D_t 满足的 Lebniz 律, 和 E_i 的平行性: $D_tE_i=0$, 立即得到. □

定理 1.4 (平行移动决定的协变微分)

设 M 是光滑(带边)流形, ∇ 是 TM 上的联络. 设 $\gamma: I\to M$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的光滑向量场, 则对于每个 $t_0\in I$,
$$D_tV(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{P^{\gamma}_{t_1t_0}V(t_1)-V(t_0)}{t_1-t_0}$$

Proof 设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架, 记 $V(t)=V^i(t)E_i(t), t\in I$. 一方面我们有 $D_t(V_0)=\dot{V}^i(t_0)E_i(t_0)$, 另一方面对于每个固定的 $t_1\in I$, $V(t_1)$ 沿 γ 的平行移动是沿 γ 的一个常系数的向量场 $W(t)=V^i(t_1)E_i(t)$, 从而 $P^{\gamma}_{t_1t_0}V(t_1)=V^i(t_1)E_i(t_0)$, 带

入后取极限 $t_1 \to t_0$, 即可得到极限式等于 $\dot{V}^i(t_0)\, E_i(t_0)$.

□

推论 1.1 (平行移动决定的联络)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 X, Y 是沿 M 的光滑向量场. 对于每个 $p \in M$,

$$\nabla_X Y\big|_p = \lim_{h \to 0} \frac{P_{h0}^{\gamma} Y_{\gamma(h)} - Y_p}{h}$$

其中 $\gamma : I \to M$ 是任意使得 $\gamma(0) = p$ 以及 $\gamma'(0) = X_p$ 的光滑曲线.

♡

1.2.2.1 Levi-Civita 联络

命题 1.6

设 (M, g) 是（带边）（伪）Riemann 流形, 令 ∇ 是它的 Levi-Civita 联络.

1. 设 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 则

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \Big)\end{aligned} \tag{1.1}$$

(**Koszul's formula**)

2. 在任意 M 的光滑坐标卡下,Levi-Civita 联络的联络系数由以下给出

$$\Gamma_{ij}^{k}\,{}^{a} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right)$$

3. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标架, 令 $c_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ 是按以下方式定义的 n^3 个光滑函数:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$$

则 Levi-Civita 联络在这组标架下的联络系数为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm} c_{il}^m - g_{lm} c_{ji}^m + g_{im} c_{lj}^m \right)$$

4. 若 g 是 Riemann 度量, (E_i) 是光滑局部正交标架, 则

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i \right)$$

---

[a] 称为 Christoffel 符号

♠

第 1 章 练习

Problem 1.1 求沿着球面的赤道, 切向量的平行移动.

Proof 考虑半径为 R 的球面的参数化

$$r\left(u,v\right)=R\left(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\right)$$

则

$$r_u=R\left(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u\right),\quad r_v=R\left(-\cos u\sin v,\cos u\cos v,0\right)$$

$$\gamma\left(t\right)=r\left(0,t\right),\quad t\in\left[0,2\pi\right]$$

是赤道的一个单位速度参数表示.

$$\gamma'\left(t\right)=r_v\left(0,t\right)=R\left(-\sin t,\cos t,0\right)$$

记 $E_1=r_u$, $E_2=r_v$. 任取以 $r\left(0,0\right)$ 为起点, $v=v^iE_i\left(0\right)$ 为速度向量的沿着 γ 的向量场

$$V\left(t\right)=V^i\left(t\right)E_i\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

其中 $V^1\left(0\right)=v^1,\quad V^2\left(0\right)=v^2$. 注意到

$$\begin{aligned}D_tE_1\left(\gamma\left(t\right)\right)&=\left(\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}r_u\left(0,t\right)\right)^\perp\\&=\left(\tilde{\nabla}_{R(-\sin t\partial_1+\cos t\partial_2)}\left(R\partial_3\right)\right)^\perp=0\end{aligned}$$

其中 $\nabla^\perp$ 表示 $\mathbb{R}3$ 上的欧式联络. $\left(\partial_i\right)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的标准坐标向量场. 于是 E_1 是沿着 γ 平行的. 类似地,

$$D_tE_2\left(\gamma\left(t\right)\right)=\left(\tilde{D}_tE_2\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)^\perp$$

用欧式空间上的标准坐标标架计算, 它们总是沿曲线平行的

$$\tilde{D}_tE_2\left(\gamma\left(t\right)\right)=R\tilde{D}_t\left(-\sin t\partial_1+\cos t\partial_2\right)=R\left(-\cos t,-\sin t,0\right)$$

与 $r_v\left(0,t\right)$ 和 $r_u\left(0,t\right)$ 总是正交的, 故

$$D_tE_2\left(\gamma\left(t\right)\right)=0$$

这表明 E_1,E_2 是沿 $\gamma\left(t\right)$ 平行的标架, 进而

$$D_tV\left(t\right)=\dot{V}^1\left(t\right)E_1\left(\gamma\left(t\right)\right)+\dot{V}^2\left(t\right)\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

若 $V\left(t\right)$ 沿 γ 平行, 则

$$\dot{V}^1\left(t\right)=\dot{V}^2\left(t\right)=0$$

从而

$$\begin{aligned}V\left(t\right)=v^1E_1\left(\gamma\left(t\right)\right)+v^2E_2\left(\gamma\left(t\right)\right)&=v^1r_u\left(0,t\right)+v^2r_v\left(0,t\right)\\&=R\left(-v^2\sin t,v^2\cos t,v^1\right)\end{aligned}$$

为以 $\left(0,t\right)$ 为起点, v^1,v^2 的平行移动. 对于以赤道上其它点为起点的情况, 总可以通过一

个旋转转化为以 $r(0,1)$ 为起点的情况.

$\square$

第 2 章　子流形

定理 2.1 (超曲面的基本方程)

设 (M,g) 是黎曼流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的 Riemann 超曲面,N 是沿 M 的光滑单位法向量.

1. **超曲面的 Gauss 公式**: 若 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 延拓到 $\tilde{M}$ 的开集上, 则
$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y)N$$
2. 超曲面曲线的 Gauss 公式: 若 $\gamma: I\to M$ 是一个光滑曲线, $X: I\to TM$ 是沿 γ 的光滑向量场, 则
$$\tilde{D}_t X=D_t X+h(\gamma',X)N$$
3. 超曲面的 Weigarten 方程: 对于所有 $X\in\mathfrak{X}(M)$,
$$\tilde{\nabla}_X N=-sX$$
[a]
4. 超曲面的 Gauss 方程: 对于所有的 $W,X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$,
$$\widetilde{Rm}(W,X,Y,Z)=Rm(W,X,Y,Z)-\frac{1}{2}(h \owedge h)(W,X,Y,Z)$$
5. 超曲面的 Codazzi 方程: 对于所有的 $W,X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$
$$\widetilde{Rm}(W,X,Y,N)=(Dh)(Y,W,X)$$
[b]

[a] 可以说法向量完全提纯了氛围联络的法向信息 (第二基本形式)

[b] 外微分是后两个作为求导项交换; 是先对着最后一项求导的, 是负的.

♡

第 3 章 测地线

3.1 测地线

Example 3.1 圆柱 考虑

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\right\}$$

它的外向向量场为 $N(x,y,z)=(x,y,0)$. 考虑曲线 $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,ct)$, 则 $\gamma''(t)=-N(\gamma(t))$, 故 $\gamma(t)$ 是圆柱的测地线.

它的起点为 $p=\gamma(0)=(1,0,0)$, 初速度为 $\gamma'(0)=(0,1,c)$, 通过调整 c 或让 $\gamma(t)$ 转向, 可以使得 γ 以 T_pC 中任意除了 $(0,0,\pm1)$ 以外的单位向量为初速度.

定理 3.1 (Clairaut)

设 S 是旋转曲面. $\beta: I\to S$ 是 S 上的单位速度曲线. 对于每个 $s\in I$,$\rho(s)$ 表示 $\beta(s)$ 到旋转轴的距离, $\psi(s)\in[0,\pi]$ 表示 $\beta'(s)$ 与过 $\beta(s)$ 的经线的夹角, 则

1. 若 β 是测地线, 则 $\rho(s)\sin(\psi(s))$ 在 I 上取常值.
2. 若 $\rho(s)\sin(\psi(s))$ 在 I 上取常值, 且 β 的任何子段不与任何纬线子段重合, 则 β 是一个测地线.

♡

Proof 考虑旋转曲面的参数表示

$$\sigma(\theta,t)=(x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$$

则 σ_θ 是纬线的方向,σ_t 是经线的方向. 第一基本形式为

$$\left(x'(t)^2+z'(t)^2\right)\,\mathrm{d}t^2+x(t)^2\,\mathrm{d}\theta^2$$

并且 σ_θ 与 σ_t, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{tt} 均正交. 存在函数 $\theta(s), t(s)$, 使得

$$\beta(s)=\sigma(\theta(s),t(s))$$

用 $'$ 表示关于 s 的导数, 则

$$\beta'=\sigma_\theta\theta'+\sigma_t t',\quad \beta''=(\sigma_{\theta\theta}\theta'+\sigma_{\theta t}t')\,\theta'+\sigma_\theta\theta''+(\sigma_{tt}t'+\sigma_{\theta t}\theta')\,t'+\sigma_t t''$$

由于 β 是测地线,

$$0=\langle\beta'',\sigma_\theta\rangle=\theta''\langle\sigma_\theta,\sigma_\theta\rangle+2\theta' t'\langle\sigma_\theta,\sigma_{\theta t}\rangle$$

其中, 由于

$$G'=\theta' G_\theta+t' G_t=t' G_t=2t'\langle\sigma_\theta,\sigma_{\theta t}\rangle$$

所以

$$0=\theta''\left\langle \sigma_\theta,\sigma_\theta\right\rangle+2\theta' t'\left\langle \sigma_\theta,\sigma_{\theta t}\right\rangle=\theta'' G+\theta' G'=\left(\theta' G\right)'$$

由于 $\rho\left(s\right)^2=x\left(t\left(s\right)\right)^2=G$, 我们有

$$\theta'\left(s\right)\rho\left(s\right)^2$$

是一个常数. 注意到

$$\sin\left(\psi\left(s\right)\right)=\left\langle \beta',\sigma_\theta\right\rangle=\rho\theta'$$

因此

$$\rho\left(s\right)\sin\left(\psi\left(s\right)\right)=\theta'\left(s\right)\rho\left(s\right)^2$$

是一个常数. 这就说明了第一个断言.

反之, 若 $\rho\left(s\right)\sin\left(\psi\left(s\right)\right)$ 取常值. 上面的论证过程表明

$$\left\langle \beta'',\sigma_\theta\right\rangle=0$$

只需要证明第二个测地线方程

$$\left\langle \beta'',\sigma_t\right\rangle=\left(\theta'\right)^2\left\langle \sigma_{\theta\theta},\sigma_t\right\rangle+\left(t'\right)^2\left\langle \sigma_{tt},\sigma_t\right\rangle+t''\left\langle \sigma_t,\sigma_t\right\rangle=0$$

即

$$\left(\theta'\right)^2\left(-x'x\right)+\left(t'\right)^2\left(x''x'+z''z'\right)+t''\left(x'x'+z'z'\right)=0$$

设

$$\left(\theta' G\right)=\theta' x^2=C$$

注意到

$$E_t=2x'x''+2z'z''$$

原测地线方程化为

$$\left(\theta'\right)^2\left(-x'x\right)+\frac{1}{2}\left(t'\right)^2E_t+t''E=0$$

又

$$\left(\left(t'\right)^2E\right)'=2t't''E+\left(t'\right)^2E_tt'$$

如果 $t'\neq 0$, 方程化为

$$\left(\theta'\right)^2\left(-x'x\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{t'}\left(\left(t'\right)^2E\right)'=0$$

而考虑单位速度方程

$$\left(\left(\theta'\right)^2G+\left(t'\right)^2E\right)=1$$

求导，得到

$$\left((t')^2 E\right)' = -\left((\theta')^2 G\right)'$$

方程化为

$$(\theta')^2(-x'x) + \frac{1}{2}\frac{1}{t'}\left((\theta')^2 G\right)' = 0$$

由于

$$G_t = 2x'x$$

方程进一步化为

$$-(\theta')^2 G_t + \frac{1}{t'}\left((\theta')^2 G\right)' = 0$$

其中

$$\left((\theta')^2 G\right)' = (\theta' C)' = C\theta''$$

方程进一步化为

$$(-\theta')^2 G_t + \frac{1}{t'}C\theta'' = 0$$

即

$$C\theta'' - t'(\theta')^2 G_t = 0$$

我们只需要证明 $t' \neq 0$ 和这个方程都成立即可. 由于

$$(\theta' G)' = \theta'' G + \theta' t' G_t = 0$$

两边乘以 θ', 结合 $\theta' G = C$, 带入即得所需方程成立.

最后, 只需要说明 $t' \neq 0$ 只在孤立点成立, 这由 β 的子段不是纬线段所保证. □

3.2 曲线的测地曲率

定义 3.1 (测地曲率)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 子流形, $\gamma : I \to M$ 是 M 上的光滑单位速度曲线. 定义 γ 的 (测地) 曲率为加速度场的模长, 即函数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$

$$\kappa(t) := |D_t \gamma'(t)|.$$[a]

对于一般的参数曲线, 对 M 分情况定义:

1. M 是黎曼流形, 则任取 γ 是 M 上的任意正则曲线, 可以找到它的单位速度重参数化 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, 我们定义 γ 在 t 处的 (测地) 曲率为 $\tilde{\gamma}$ 在 $\varphi^{-1}(t)$ 处的

(测地) 曲率.

2. 若 M 是伪黎曼流形, 需要限制 γ 为使得 $|\gamma'(t)|$ 处处非零的曲线, 做类似地定义.

[a]描述了曲线偏离测地线的程度.

命题 3.1

单位速度曲线有退化的 (测地) 曲率, 当且仅当它是测地线.

定义 3.2

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (伪)Riemann 流形, (M,g) 是它的 Riemann 子流形. 每个 $\gamma: I\to M$ 都有两种测地曲率.

1. γ 视为 M 上的光滑曲线时, 它的测地曲率 κ 称为**内蕴曲率**;
2. γ 视为 $\tilde{M}$ 上的光滑曲线时, 它的测地曲率 $\tilde{\kappa}$ 称为**外蕴曲率**.

引理 3.1 (超曲面曲线的 Gauss 公式)

若 $\gamma: I\to M$ 是一个光滑曲线, $X: I\to TM$ 是沿 γ 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_tX=D_tX+h\left(\gamma',X\right)N$$

命题 3.2 (II 的几何解释)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形, $p\in M$,$v\in T_pM$.

1. $\mathrm{II}(v,v)$ 是 g-测地线 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-加速度.
2. 若 v 是单位向量, 则 $|\mathrm{II}(v,v)|$ 是 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-曲率.

Proof 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是使得 $\gamma(0)=p$,$\gamma'(0)=v$ 的正则曲线. 对 γ' 应用沿 γ 的 Gauss 公式, 得到

$$\tilde{D}_t\gamma'=D_t\gamma'+\mathrm{II}\left(\gamma',\gamma'\right)$$

若 γ 是 M 上的 g-测地线, 则上述公式化为

$$\tilde{D}_t\gamma'=\mathrm{II}\left(\gamma',\gamma'\right)$$

在零处取值得到所需的两个结论.

□

定理 3.2 (Liouvill)

设 (u, v) 是曲面 S 的正交参数, $I = E\,du^2 + G\,dv^2$; $C : u = u(s), v = v(s)$ 是曲面上一条弧长参数曲线. 设 C 与 u 线的夹角为 θ, 则 C 的测地曲率为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta.$$

♡

第 4 章　测地坐标

4.1 测地平行坐标

定义 4.1

设 S 是正则曲面, $\gamma(v)$ 是 S 上的一条测地线, $v \in I = (a,b)$. 对于任意的 $v \in I$, 令:

1. $n(v)$ 是 S 在 $\gamma(v)$ 处的单位法向量.
2. $w(v) = c'(v) \times n(v)$ 是切平面上与 $c'(v)$ 正交的向量.

则存在 $\delta > 0$, 使得下面的映射是坐标空间到 S 上一开子集的微分同胚

$$\sigma(u,v) = \exp_{\gamma(v)}(u \cdot w(v))$$

坐标空间为

$$\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -\delta < u < \delta, v \in I\right\}$$

♣

4.2 测地极坐标

定义 4.2

设 S 是正则曲面, $p \in S$. 令 $\varepsilon > 0$ 是 p 的一个法邻域的半径. $\{e_1, e_2\}$ 是 T_pS 的一组正交基. 定义 p 处的法极坐标为

$$\sigma(r,\theta) = \exp_p((r\cos\theta)e_1 + (r\sin\theta)e_2)$$

坐标空间为

$$\left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \varepsilon, 0 < \theta < 2\pi\right\}$$

♣

引理 4.1 (Gauss 引理)

设 S 是正则曲面, $p \in S$,p 处法极坐标的局部第一基本形式形如

$$\mathcal{F}_1 = \mathrm{d}r^2 + G\,\mathrm{d}\theta^2$$

♡

Proof 固定 $0 < \theta < 2\pi$. 记 $\gamma_v(t)$ 为 p 处以 $v := \cos\theta_0 e_1 + \sin\theta e_2$ 为初速度的弧长参数测地线, 则

$$\gamma_v(r) = \gamma_{rv}(1) = \exp_p(rv) = \sigma(r,\theta_0)$$

则 $\sigma_r(r,\theta)=\gamma_v'(r)$，

$$\langle\sigma_r,\sigma_r\rangle=\langle\gamma_v',\gamma_v'\rangle=1$$

这表明 $E=1$.

$$\begin{aligned}F_r&=\frac{\partial}{\partial r}\langle\sigma_\theta,\sigma_r\rangle\\&=\langle\sigma_{\theta r},\sigma_r\rangle+\langle\sigma_\theta,\sigma_{rr}\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_{rr}=\gamma_v''=0$$

于是

$$F_r=\langle\sigma_{\theta r},\sigma_r\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle\sigma_r,\sigma_r\rangle=\frac{1}{2}E_\theta=0$$

依旧固定 $0<\theta<2\pi$，则

$$\lim_{r\to0}\sigma_\theta(r,\theta)=0$$

故

$$\lim_{r\to0}F=\lim_{r\to0}\langle\sigma_r,\sigma_\theta\rangle=0$$

于是对于所有的 r,θ，$F(r,\theta)=0$.

$\square$

定理 4.1 ($G(r,\theta)$ 的几何意义)

设 S 是正则曲面，$p\in S$，p 处极坐标的度量为

$$g(r,\theta)=\mathrm{d}r^2+G(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

则测地圆 $r=r_0$ 的弧长形式为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

进而测地圆的周长为

$$L(r_0)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r_0,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

♡

Proof 设

$$\sigma(r,\theta)=\exp_p((r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)e_2)$$

是测地极坐标映射. 则

$$\gamma(\theta):=\sigma(r_0,\theta)$$

构成 $r=r_0$ 的一个坐标表示.

$$\gamma'(\theta)=\partial_\theta|_{(r_0,\theta)}$$

于是

$$\mathrm{d}s=|\gamma'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{\left\langle \partial_\theta|_{(r_0,\theta)},\partial_\theta|_{(r_0,\theta)}\right\rangle}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{G(r_0,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

□

定理 4.2 (G 的极限行为)

设 S 是正则曲面, $p\in S$, p 处极坐标的度量为

$$g(r,\theta)=\mathrm{d}r^2+G(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

则

1. $$\lim_{r\to 0}G(r,\theta)=0$$
2. $$\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{G(r,\theta)}}{r}=1$$
3. $$\sqrt{G(r,\theta)}=r-\frac{K(p)}{6}r^3+O(r^4)$$

♡

Proof

1. 参数映射是

$$\sigma(r,\theta)=\exp_p((r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)e_2)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}&=\partial_\theta\sigma(r,\theta)\\&=(\mathrm{d}\exp)_{ru(\theta)}(-r\sin\theta e_1+r\cos\theta e_2)\end{aligned}$$

其中 $u(\theta)=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$, 则

$$\lim_{r\to 0}(\mathrm{d}\exp)_{ru(\theta)}=(\mathrm{d}\exp)_0=\mathrm{Id}_{T_pS}$$

从而

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial\theta}=\mathrm{Id}_{T_pS}\lim_{r\to 0}(-r\sin\theta e_1+r\cos\theta e_2)=0$$

这表明 $\lim_{r\to 0}G(r,\theta)=0$

□

4.3 常曲率度量的极分解

引理 4.2

方程

$$u''(t)+cu(t)=0,\quad u(0)=0$$

的解空间是函数

$$s_c(t)=\begin{cases} t, & c=0 \\ R\sin\frac{t}{R}, & c=\frac{1}{R^2}>0 \\ R\sinh\frac{t}{R}, & c=-\frac{1}{R^2}<0 \end{cases}$$

张成的一维线性子空间. ♡

命题 4.1 (常曲率空间的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是有常曲率 c 的 Riemann 流形, γ 是 M 上的单位速度测地线. 则沿 γ 法向, 且在 $t=0$ 处消失的 Jacobi 场具有以下形式:

$$J(t)=ks_c(t)E(t)$$

其中 E 是任意沿 γ 平行的单位法向量场, k 是任意常数. 这样的 Jacobi 场的初值是

$$D_tJ(0)=kE(0)$$

范数为

$$|J(t)|=|s_c(t)||D_tJ(0)|$$ ♠

定义 4.3

令 $\pi:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^{n-1}$ 是径向投影

$$\pi(x)=\frac{x}{|x|}$$

定义 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上的一个对称 2-张量

$$\hat{g}=\pi^*\mathring{g}$$

其中 $\mathring{g}$ 是半径为 1 的 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的圆度量. ♣

Idea $\hat{g}$ 只保留角度信息.

引理 4.3 (欧氏度量的极分解)

在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上, 欧式度量 $\bar{g}$ 分解为

$$\bar{g} = \mathrm{d}r^2 + r^2 \hat{g}$$

其中 $r(x) = |x|$ 是到原点的欧氏距离.

Proof

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \Phi(\rho, \omega) = \rho\omega$$

给出 warped 积空间 $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1}$ 到欧氏子空间 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的等距同构. $\Phi^{-1}(x) = (r(x), \pi(x))$, 于是

$$\bar{g} = \left(\Phi^{-1}\right)^* \left(\mathrm{d}\rho^2 \oplus \rho^2 \mathring{g}\right) = \mathrm{d}r^2 + r^2 \hat{g}$$

□

定理 4.3 (法坐标上的常曲率度量)

设 (M, g) 是具有常值截面曲率的黎曼流形. 给定 $p \in M$, 令 (x^i) 是 p 的法邻域 U 上的一个法坐标. r 是 U 上的径向距离函数. $\hat{g}$ 是上面定义的对称 2-张量. 则在 $U \setminus \{p\}$ 上, 度量 g 可以进行考虑曲率修正的极分解

$$g = \mathrm{d}r^2 + s_c(r)^2 \hat{g}$$

Proof 令 g_c 是右侧形式的度量, $\bar{g}$ 是欧式度量. g, $\bar{g}$ 和 g_c 均在 ∂_r 上产生相同的作用. 因此只需要证明对于每个对于任意的水平集 $r = b$, 以及任意相切于该水平集的切向量 w, 都有 $g(w, w) = g_c(w, w)$. 首先根据定义

$$g_c(w, w) = s_c\left(r^2\right) \hat{g}(w, w) = \frac{s_c(b)^2}{b^2} \bar{g}(w, w)$$

令 $q \in U \setminus \{p\}$,$w \in T_pM$,w 相切于包含了 q 的 r-水平集. $b = d_g(p, q)$. 由于 g 只有在原点是我们熟知的, 与 $\bar{g}$ 相等. 上面的等式告诉我们联系 g 和 g_c 相当于联系 $\bar{g}$ 和 g, 我们通过沿 p 到 q 的径向测地线的 Jacobi 场将 g 在 p 的取值和 q 的取值联系起来. 设 $\gamma : [0, b] \to U$ 是单位参数化的 p 到 q 的径向测地线. 令 $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 是沿 γ 的测地线, 满足

$$J(t) = \frac{t}{b} w^i \left.\partial_i\right|_{\gamma(t)}$$

. 则 $D_t J(0) = \left(\frac{1}{b}\right) w^i \left.\partial_i\right|_p$. $J(0) = 0, J(b) = w$ 在两点处与 γ' 正交, 从而是一个法向量场. 于是有范数的关系

$$\begin{aligned}
|w|_g^2 &= |J(b)|_g^2 = s_c(b)^2 \left|D_t J(0)\right|_g^2 \\
&= s_c(b)^2 \frac{1}{b^2} \left|w^i \left.\partial_i\right|_p\right|_g^2 = s_c(b)^2 \frac{1}{b^2} |w|_{\bar{g}}^2 = |w|_{g_c}^2
\end{aligned}$$

□

推论 4.1 (常曲率度量的局部唯一性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是有着相同维数, 且具有相同常曲率 c 的 Riemann 流形. 则对于每个 $p\in M$,$\tilde{p}\in\tilde{M}$, 存在 p 的邻域 U 和 $\tilde{p}$ 的邻域 $\tilde{U}$, 使得它们之间存在等距同构 $\varphi:U\to\tilde{U}$.

♡

Proof 常曲率度量的这种与法坐标选取无关的显式的一致表达, 就能给出一个坐标的等同就是一个等距同构. 即令 $\psi:U\to B_{\varepsilon}(0)\subseteq\mathbb{R}^n$ 和 $\tilde{\psi}:\tilde{U}\to B_{\varepsilon}(0)\subseteq\mathbb{R}^n$ 是法坐标映射, $\tilde{\Psi}^{-1}\circ\Psi$ 就是所需的等距同构: 原点以外形式上一致, 原点上都是单位阵.

□

第 5 章　Cartan 方法

若无特别指出, 本章采用以下约定:

1. (M, g) 是一个 n 维 Riemann 流形.
2. ∇ 是 TM 上的 Levi-Civita 联络.
3. U 是 M 上的一个开子集, (E_i) 是 U 上的一组局部标架, (ε^i) 是对偶的余标架.

5.1 基本概念

定义 5.1 (1-形式的内积)

设 $\alpha = \alpha_i \, \mathrm{d}x^i$ 和 $\beta = \beta_j \, \mathrm{d}x^j$ 是两个 1-形式, 定义它们的内积为分别提升指标后向量场的内积, 即

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \left\langle g^{ik} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^i}, g^{jl} \beta_l \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = g^{kl} \alpha_k \beta_l$$

♣

定义 5.2 (联络 1-形式)

U 上存在唯一的光滑 1-形式的 $n \times n$ 矩阵 $\left(\omega_i^j\right)$, 使得

$$\nabla_X E_i = \omega_i^j (X) E_j, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U)$$

或者写作

$$\nabla E_i = \omega_i^j \otimes E_j$$

称为是这组标架的**联络 1-形式**.

♣

Proof　若存在这样的 1-形式 ω, 则

$$\Gamma_{ij}^k E_k = \nabla_{E_i} E_j = \omega_j^k (E_i) E_k$$

得到 $\omega_j^k (E_i) = \Gamma_{ij}^k, \forall i, j, k$. 于是我们定义

$$\omega_i^j (X) = X^k \Gamma_{ki}^j, \quad \forall X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$$

则由 Γ_{ki}^j 的光滑性, ω_i^j 是光滑的余标架. 对于任意的 $X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\nabla_X E_i = X^k \nabla_{E_k} E_i = X^k \Gamma_{ki}^l E_l = \omega_i^l (X) E_l = \omega_i^j (X) E_j$$

□

定义 5.3 (曲率 2-形式)

按以下方式定义一个 2-形式的矩阵 (Ω_i^j)

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2}R_{kli}^j \varepsilon^k \wedge \varepsilon^l$$

称为是曲率 2-形式

5.2 结构方程

定理 5.1 (Cartan 结构方程)

以下两个 Cartan 结构方程成立

1. $$\mathrm{d}\varepsilon^j = \varepsilon^i \wedge \omega_i^j$$

2. $$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i{}^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

Proof

1. 一方面

$$\mathrm{d}\varepsilon^j\left(E_k, E_l\right) = E_k\left(\varepsilon^j\left(E_l\right)\right) - E_l\left(\varepsilon^j\left(E_k\right)\right) - \varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right) = -\varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon^i \wedge \omega_i^j\right)\left(E_k, E_l\right) &= \varepsilon^i\left(E_k\right)\omega_i^j\left(E_l\right) - \varepsilon^i\left(E_l\right)\omega_i^j\left(E_k\right) \\
&= \omega_k^j\left(E_l\right) - \omega_l^j\left(E_k\right) \\
&= \varepsilon^j\left(\nabla_{E_l} E_k\right) - \varepsilon^j\left(\nabla_{E_k} E_l\right) \\
&= \varepsilon^j\left\langle\nabla_{E_l} E_k - \nabla_{E_k} E_l\right\rangle \\
&= -\varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)
\end{aligned}$$

2. $$\nabla_X E_i = \omega_i^j(X) E_j$$

$$\Gamma_{ki}^j E_j = \nabla_{E_k} E_i = \omega_i^j\left(E_k\right) E_j$$

故

$$\omega_i^j\left(E_k\right) = \Gamma_{ki}^j$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j\left(E_k, E_l\right) = E_k\left(\omega_i^j\left(E_l\right)\right) - E_l\left(\omega_i^j\left(E_k\right)\right) - \omega_i^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)$$

$$\omega_i^k \wedge \omega_k^j (E_k, E_l) = \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) - \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k)$$

$$\begin{aligned}
R_{kli} &= \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i - \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{[E_k, E_l]} E_i \\
&= \nabla_{E_k} \left(\omega_i^j (E_l) E_j \right) - \nabla_{E_l} \left(\omega_i^j (E_k) E_j \right) - \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^j (E_l) \nabla_{E_k} E_j + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^j (E_k) \nabla_{E_l} E_j - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^j (E_l) \omega_j^m (E_k) E_m + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^j (E_k) \omega_j^m (E_l) E_m - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k) E_j + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) E_j - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
R_{kli}^j = & \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k) + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) - \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) \\
& - \omega_i^j ([E_k, E_l])
\end{aligned}$$

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \left(\varepsilon^k \otimes \varepsilon^l - \varepsilon^l \otimes \varepsilon^k \right) = \sum_{k<l} R_{kli}^j \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l$$

于是

$$\Omega_i^j (E_k, E_l) = R_{kli}^j = \mathrm{d}\omega_i^j (E_k, E_l) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j (E_k, E_l)$$

□

5.3 规正标价

命题 5.1

若 (ε^i) 是规正的余标架. 则黎曼度量 g 在局部上表示为

$$g = \left(\varepsilon^1\right)^2 + \cdots + \left(\varepsilon^n\right)^2$$

♠

命题 5.2

若 (ε^i) 是正交的余标架, 则

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

♠

Proof

$$0 = \nabla_X \left\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle = \left\langle \nabla_X \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle + \left\langle \varepsilon^i, \nabla_X \varepsilon^j \right\rangle$$

其中由正交性,

$$\left\langle \nabla_X \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle = \omega_i^j\left(X\right), \quad \left\langle \varepsilon^i, \nabla_X \varepsilon^j \right\rangle = \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle = \omega_j^i\left(X\right)$$

于是

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

□

5.4 超曲面

约定 N 是 M 中余 1-维的超曲面, $E_1, \cdots, E_n$ 是 M 的一个局部规正标架, 其中 $E_1, \cdots, E_{n-1}$ 是 N 的切向量, E_n 是 N 的单位法向量. 相应地, $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^{n-1}$ 是 N 的切规正余标架, ε^n 是法向余标架.

定理 5.2

设 h 是 N 的标量第二基本形式, 则

$$h_{ij} = \omega_j^n\left(E_i\right), \quad i, j \in \{1, \cdots, n-1\}$$

Proof

$$h_{ij} = h\left(E_i, E_j\right) = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_n \rangle = \left\langle \omega_j^k\left(E_i\right) E_k, E_n \right\rangle = \omega_j^n\left(E_i\right)$$

□

定理 5.3 (Weingarten)

设 S 是 Weingarten 变换, 则

$$S\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^n\left(X\right) E_i$$

$$S_{ij} = \omega_j^n\left(E_i\right) = h_{ij}$$

定理 5.4 (Gauss 方程)

设 Ω^N 是 N 上诱导度量的曲率 2-形式. 则

$$\Omega_i^j = \Omega_i^{j,N} + \omega_i^n \wedge \omega_j^n$$

特别地, 若 M 是平坦的 (比如欧式空间), 则

$$0 = \Omega_i^{j,N} + \omega_i^n \wedge \omega_j^n$$

Proof 考虑 N 上的第二结构方程

$$\Omega_i^{j,N} = \mathrm{d}\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n-1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$$

与 M 上的第二结构方程

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

相减并利用反对称性

□

引理 5.1 (Gauss 曲率)

设 M 是 3 维欧式空间,K 是 N 在 M 中的 Gauss 曲率, 则

$$\Omega_2^{1,N} = K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

♡

Proof 根据定义

$$\Omega_2^{1,N} = \frac{1}{2} R_{122}^1 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \frac{1}{2} R_{212}^1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^1$$

由曲率张量的对称性和标架的正交性,

$$R_{122}^1 = -R_{212}^1 = R_{1221} = K$$

于是

$$\Omega_2^{1,N} = \frac{1}{2} K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 - \frac{1}{2} K\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^1 = K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

□

推论 5.1

对于二维曲面 N, 正交标价下的第二结构方程简化为

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j$$

♡

Proof 结构方程中 $\omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 中的每一项都含对角元, 而正交标价下联络 1-形式矩阵的对角元为零.

□

推论 5.2

设 M 是 3 维欧式空间,K 是 N 在 M 中的 Gauss 曲率, 则

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1$$

♡

5.5 计算

5.5.1 借助氛围欧式空间的计算

主要是利用适配标架，在欧式空间上计算，再带入到子流形上获得子流形上几何量.

方法 5.1 (联络形式的计算方法)

1. 计算坐标/参数向量场.
2. 对坐标/参数向量场进行正交化，得到规正的切丛的标架.
3. 计算全协变导数

$$\nabla E_i$$

结果是一个 $(1,1)$-张量，通常用欧式空间上的标准向量场 ∂_i，以及坐标余向量场 $\mathrm{d}r_i$ 表示. 计算的过程中，使用 Lebniz 律，以及事实:

$$\nabla f = \mathrm{d}f, \quad f \in C^\infty(M)$$

4. 根据定义

$$\nabla E_i = \omega_i^j \otimes E_j$$

通过将 ∇E_i 与 E_l 做度量配对 $\langle \nabla E_i, E_l \rangle_g$ ，得到 ω_i^l.

方法 5.2 (Gauss 曲率的计算方法)

1. 根据上面的方法，计算

$$\omega_1^2 = \langle \nabla E_1, E_2 \rangle_g$$

或者

$$\omega_2^1 = \langle \nabla E_2, E_1 \rangle_g$$

2. 计算外微分

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\mathrm{d}\omega_1^2$$

3. 利用简化的 Gauss 方程

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1$$

4. 两边按相同的基表示，对比得到 K.

Example 5.1 球面 计算半径为 R 的球面的 Gauss 曲率

Solution 考虑参数化

$$r(\theta,\varphi)=(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$$

$$r_\theta=R(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,0),\quad r_\varphi=R(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$$

则

$$r_\theta\cdot r_\varphi=0$$

令

$$E_1=\frac{r_\theta}{|r_\theta|}=(-\sin\theta,\cos\theta,0),\quad E_2=\frac{r_\varphi}{|r_\varphi|}=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$$

令

$$E_3=E_1\times E_2=\begin{pmatrix} i & j & k\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{pmatrix}=(-\sin\varphi\cos\theta,-\sin\varphi\sin\theta,-\cos\varphi)$$

记球面为 $\mathbb{S}$, 则

$$E_1,E_2\in T\mathbb{S},\quad E_3\in N\mathbb{S}$$

$$\varepsilon^1=|r_\theta|\,\mathrm{d}\theta=R\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta,\quad \varepsilon^2=|r_\varphi|\,\mathrm{d}\varphi=R\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\nabla E_1=\nabla(-\sin\theta\partial_1+\cos\theta\partial_2)=-\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\otimes\partial_1-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\otimes\partial_2$$

其中, $\partial_1,\partial_2,\partial_3$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的标准坐标向量场. 另一方面

$$\nabla E_1=\omega_1^1\otimes E_1+\omega_1^2\otimes E_2+\omega_1^3\otimes E_3=\omega_1^2\otimes E_2+\omega_1^3\otimes E_3$$

$$\omega_1^2=-\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\langle\partial_1,E_2\rangle-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\langle\partial_2,E_2\rangle=-\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\omega_2^1=\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

进而

$$\mathrm{d}\omega_2^1=\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{R\sin\varphi}\sin\varphi\frac{1}{R}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\frac{1}{R^2}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$$

由 Gauss 方程

$$K\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\,\mathrm{d}\omega_2^1$$

得到 $K=\frac{1}{R^2}$

Example 5.2 设曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上没有抛物点, $\mathbf{n}$ 是 S 的法向量; 曲面 $\tilde{S}:\tilde{\mathbf{r}}(u,v)=\mathbf{r}(u,v)+\lambda\mathbf{n}(u,v)$ (常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

1. 证明曲面 S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行;
2. 可以选取 $\tilde{S}$ 的单位法向 $\tilde{\mathrm{n}}$, 使得 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\tilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}, \quad \tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}.$$

Solution

1.

$$\tilde{\mathbf{r}}_u=\mathbf{r}_u+\lambda\mathbf{n}_u, \quad \tilde{\mathbf{r}}_v=\mathbf{r}_v+\lambda\mathbf{n}_v$$

由 Weingarten 方程,

$$\mathbf{n}_u=\nabla^g_{\mathbf{r}_u}\mathbf{n}=-s\left(\mathbf{r}_u\right)\in\operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right)$$

类似地

$$\mathbf{n}_v\in\operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right)$$

从而

$$T_{\tilde{\mathbf{r}}(u,v)}\tilde{S}=\operatorname{span}\left(\tilde{\mathbf{r}}_u,\tilde{\mathbf{r}}_v\right)=\operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right)=T_{\mathbf{r}(u,v)}S$$

这表明 S 在 $\mathbf{r}(u,v)$ 处的切平面与 $\tilde{S}$ 在 $\tilde{\mathbf{r}}(u,v)$ 处的切平面平行.

2.

$$g=\langle r_u,r_u\rangle\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+2\langle r_u,r_v\rangle\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\langle r_v,r_v\rangle\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$$

$$\tilde{g}=\langle\tilde{r}_u,\tilde{r}_v\rangle\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+2\langle\tilde{r}_u,\tilde{r}_v\rangle\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\langle\tilde{r}_v,\tilde{r}_v\rangle\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$$

注意到

$$\tilde{r}_\Lambda=\tilde{r}_\Lambda+\lambda n_\Lambda=r_\Lambda-\lambda S\left(r_\Lambda\right)=(\mathrm{Id}-\lambda S)\,r_\Lambda, \quad \Lambda=u,v$$

于是

$$\langle\tilde{r}_i,\tilde{r}_j\rangle=\det\left(\mathrm{Id}-\lambda S\right)^2\langle\tilde{r}_j,\tilde{r}_j\rangle$$

进而

$$\tilde{g}=\det\left(Id-\lambda S\right)^2\det g$$

$$\omega_2^1=\langle\nabla e_2,e_1\rangle=\langle\nabla^g e_2-h\left(\cdot,e_2\right)e_3,e_1\rangle=\langle\nabla^g e_2,e_1\rangle$$

类似地

$$\tilde{\omega}_2^1=\langle\nabla^g e_2,e_1\rangle$$

因此

$$\omega_2^1=\tilde{\omega}_2^1$$

进而

$$d\omega_2^1 = d\tilde{\omega}_2^1$$

于是

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \tilde{K}\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2$$

其中 $\tilde{\varepsilon}^i$ 是 e_i 关于 $\tilde{g}$ 的对偶余标架, ε^i 是 e_i 关于 g 的对偶余标架. 那么

$$\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2 = \sqrt{\tilde{g}}\, du\, dv, \quad \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \sqrt{g}\, du\, dv$$

由于

$$\det \tilde{g} = \det (I - \lambda S)^2 \det g$$

故

$$\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2 = \det (I - \lambda S)\, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^1$$

进而

$$\tilde{K} = \frac{K}{\det (I - \lambda S)}$$

在 e_1, e_2 下,

$$S = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

于是

$$\det (I - \lambda S) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda\kappa_1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\kappa_2 \end{pmatrix} = \left(1 - \lambda\kappa_1 - \lambda\kappa_2 - \lambda^2\kappa_1\kappa_2\right) = 1 - 2\lambda H - \lambda^2 K$$

最终

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

Problem 5.1 设曲面 S 由方程 $x^2 + y^2 - f(z) = 0$ 给定, f 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 证明: S 在点 $(0,0,0)$ 的法曲率为常数.

Proof 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z)$$

, 则

$$\text{grad } F = (2x, 2y, -f'(z))$$

令

$$e_3 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{(2x, 2y, -f'(z))}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + (f'(z))^2}}$$

设 ∇ 是 S 上的协变导数, 令 $N(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + \left(f'(z)^2\right)}$ 则

$$\begin{aligned}\nabla e_3 &= \nabla\left(\frac{1}{N}(2x\partial_1 + 2y\partial_2 - f'(z)\partial_3)\right) \\ &= d\left(\frac{1}{N}\right) \otimes (2x\partial_1 + 2y\partial_2 - f'(z)\partial_3) + \frac{1}{N}(2\,\mathrm{d}x \otimes \partial_1 + 2\,\mathrm{d}y \otimes \partial_2 - f''(z)\,\mathrm{d}z \otimes \partial_3)\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{N}\right) = -\frac{\mathrm{d}N}{N^2}$$

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{2N}(8x\,\mathrm{d}x + 8y\,\mathrm{d}y + 2f'(z)f''(z)\,\mathrm{d}z)$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla e_3 = &-\frac{1}{2N^3}(8x\,\mathrm{d}x + 8y\,\mathrm{d}y + 2f'(z)f''(z)\,\mathrm{d}z) \otimes (2x\partial_1 + 2y\partial_2 - f'(z)\partial_3) \\ &+ \frac{1}{N}(2\,\mathrm{d}x \otimes \partial_1 + 2\,\mathrm{d}y \otimes \partial_2 - f''(z)\,\mathrm{d}z \otimes \partial_3)\end{aligned}$$

选取 e_1, e_2, 使得 $e_1|_0 = (1, 0, 0) = \partial_1, e_2|_0 = (0, 1, 0) = \partial_2$, $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 分别是 e_1, e_2 的对偶余向量场. 那么

$$\text{II} = \omega_1^3 \otimes \varepsilon^1 + \omega_2^3 \otimes \varepsilon^2$$

在原点处,$N(0, 0, 0) = f'(0)$ 进而

$$\nabla e_3 = \frac{1}{f'(0)}f''(0)\,\mathrm{d}z \otimes \partial_3 + \frac{1}{f'(0)}(2\,\mathrm{d}x \otimes \partial_1 + 2\,\mathrm{d}y \otimes \partial_2 - f''(0)\,\mathrm{d}z \otimes \partial_3)$$

在原点处成立. 紧接着就有

$$\omega_3^1 = \langle \nabla e_3, e_1 \rangle = \frac{1}{f'(0)}2\,\mathrm{d}x, \quad \omega_3^2 = \langle \nabla e_3, e_2 \rangle = \frac{1}{f'(0)}2\,\mathrm{d}y$$

在原点处成立, 其中尖括号表示关于两个向量场的缩并. 又

$$\mathrm{d}x = \varepsilon^1, \quad \mathrm{d}y = \varepsilon^2$$

在原点处成立. 于是

$$\text{II}_0 = \left(\frac{2}{f'(0)}\left(\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1\right) + \frac{2}{f'(0)}\varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2\right)_0 = \frac{2}{f'(0)}\text{Id}_0$$

第二基本形式在原点处为数量矩阵, 从而法曲率在原点处为常数.

5.5.2 内蕴解法

方法 5.3

1. 写出一组内蕴的正交余标架 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$.
2. 计算 $\mathrm{d}\varepsilon^1$, $\mathrm{d}\varepsilon^2$, 带入 Cartan 第一结构方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^i = \varepsilon^j \wedge \omega_j^i$$

待定系数, 或者通过缩并计算 ω_j^i 的分量.

Problem 5.2 已知曲面的第一基本形式, 求 Gauss 曲率:

1. $I = dudu + u^2 dvdv$;
2. $I = dudu + \sin^2 u dvdv$;

Proof

1. 令 $\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \varepsilon^2 = u\,\mathrm{d}v$. 则

$$I = \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2$$

这表明 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 是曲面的一组正交余标阶. 由 Cartan 结构方程

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^1 + \varepsilon^2 \wedge \omega_1^2 = u\,\mathrm{d}v \wedge \omega_1^2$$

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_2^1 = \mathrm{d}u \wedge \omega_2^1$$

可以得到

$$\omega_1^2 = \mathrm{d}v$$

由第二结构方程

$$\frac{1}{u} K\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1 = 0$$

得到 $K = 0$

2. 令 $\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \varepsilon^2 = \sin u\,\mathrm{d}v$, 则

$$I = \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2$$

表明 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 是曲面的一组正交的余标架. 由 Cartan 结构方程

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \omega_2^1 = \sin u\,\mathrm{d}v \wedge \omega_2^1$$

$$\cos u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = \mathrm{d}u \wedge \omega_1^2$$

得到

$$\omega_2^1 = -\cos u\,\mathrm{d}v$$

从而由 Cartan 第二结构方程

$$\sin uK\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v=K\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\Omega_2^1=\,\mathrm{d}\omega_2^1=\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v$$

得到 $K=1$

□

Problem 5.3 设两个曲面 S 和 $\tilde{S}$ 的第一基本形式满足 $\mathrm{I}=\lambda\tilde{\mathrm{I}}$ ($\lambda>0$, 常数), 证明:

$$K=\frac{1}{\lambda}\tilde{K}.$$

Proof 设 S 的一组正交余标架是 $\varepsilon^1,\varepsilon^2$, 则

$$I=\left(\varepsilon^1\right)^2+\left(\varepsilon^2\right)^2$$

则

$$\tilde{I}=\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^2\right)^2$$

这表明 $\tilde{\varepsilon}^1:=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1$, $\tilde{\varepsilon}^2:=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^2$ 构成 $\tilde{S}$ 的一个正交余标架. 由 Cartan 第一结构方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^1=\varepsilon^j\wedge\omega_j^1,\qquad \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}^1=\tilde{\varepsilon}^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

将 $\tilde{\varepsilon}^1=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1$ 带入后一个方程, 得到

$$\mathrm{d}\varepsilon^1=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

于是

$$\varepsilon^j\wedge\omega_j^1=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

类似地

$$\varepsilon^j\wedge\omega_j^2=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^2$$

利用正交标价的反对称性, 展开得到

$$\varepsilon^2\wedge\omega_2^1=\varepsilon^2\wedge\tilde{\omega}_2^1,\quad \varepsilon^1\wedge\omega_1^2=\varepsilon^1\wedge\tilde{\omega}_1^2$$

于是

$$\omega_2^1=\tilde{\omega}_2^1$$

进而

$$\mathrm{d}\omega_2^1=\,\mathrm{d}\tilde{\omega}_2^1$$

由 Cartan 第二结构方程,

$$K\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\,\mathrm{d}\omega_2^1=\,\mathrm{d}\tilde{\omega}_2^1=\tilde{K}\tilde{\varepsilon}^1\wedge\tilde{\varepsilon}^2=\tilde{K}\frac{1}{\lambda}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$$

得到

$$K = \tilde{K}\frac{1}{\lambda}$$

$\square$

第 6 章 Gauss-Bonnet 定理

6.1 平面简单闭合曲线与旋转指标定理

6.1.1 光滑曲线的旋转指标

定义 6.1 (简单闭合曲线)

设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是平面上的一个容许曲线. 称 γ 是简单闭合曲线, 若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 且 γ 在 $[a, b)$ 上是单射. ♣

定义 6.2

定义平面容许曲线 γ 的单位切向量场 T, 为以下给出的沿每个 γ 的光滑线段的向量场

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

♣

Remark 由于 $\mathbb{R}^2$ 上的每个切空间都与 $\mathbb{R}^2$ 自然地等同, 可以认为 T 是映到 $\mathbb{R}^2$ 的映射, 由于 T 是单位长度的, 他可以视为 $\mathbb{S}^1$ 上的映射.

定义 6.3 (切角)

若 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是光滑 (或至少连续可微) 的正则曲线. 若连续函数 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ 使得

$$T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

则称 θ 为 γ 的一个切角函数. ♣

Remark

1. 令 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$,$q(s) = (\cos s, \sin s)$, 若给定某一点处的取值, 则 $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数 T 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的同伦提升 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, 使得 $q \circ \theta = T$.
2. 上面这条表明切角函数是存在的, 且在相差一个 2π 的意义下唯一 (因为符合条件的初值为 $2k\pi$)

定义 6.4 (光滑曲线的旋转指标)

若 γ 是连续可微的简单闭合曲线，使得 $\gamma'(a)=\gamma'(b)$，定义 γ 的 **旋转此步骤为**

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a))$$

♣

Remark

1. 由于 $(\cos\theta(a),\sin\theta(a))=(\cos\theta(b),\sin\theta(b))$,$\theta(b)-\theta(a)$ 是 2π 的整数倍，故 $\rho(\gamma)$ 是整数.
2. 其他的切角函数总是通过改变 $\theta(b)$ 和 $\theta(a)$ 相同的量得到，因此 $\rho(\gamma)$ 是良定义的.

6.1.2 分段光滑正则闭曲线的旋转指标

定义 6.5

令 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是容许简单闭曲线. 令 $(a_0,\cdots,a_k)$ 是 $[a,b]$ 的一个容许分划.

1. 称 $\gamma(a_i)$ 为 γ 的 **顶点**.
2. $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 为边.

♣

定义 6.6 (顶点的分类)

在每个顶点 $\gamma'(a_i)$ 上，记 γ 的左，右侧速度向量分别为 $\gamma'\left(a_i^-\right),\gamma'\left(a_i^+\right)$；令 $T\left(a_i^-\right)$ 和 $T\left(a_i^+\right)$ 为对应的单位速度向量. 将这些顶点分为以下三类

1. 若 $T\left(a_i^-\right)\neq\pm T\left(a_i^+\right)$，则称 $\gamma(a_i)$ 是一个普通顶点.
2. 若 $T\left(a_i^-\right)=T\left(a_i^+\right)$，则称 $\gamma(a_i)$ 是一个平坦顶点.
3. 若 $T\left(a_i^-\right)=-T\left(a_i^+\right)$ ，则称 $\gamma(a_i)$ 是一个尖点.

♣

定义 6.7

1. 在每个普通顶点上，定义 $\gamma(a_i)$ **处的外角** ε_i 为 $T\left(a_i^-\right)$ 到 $T\left(a_i^+\right)$ 取值在 $(-\pi,\pi)$ 的夹角. 若 $\left(T\left(a_i^-\right),T\left(a_i^+\right)\right)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个定向基[a]，则取其中的正直，反之亦然.
2. 平坦顶点的外角定义为 0.
3. 尖点的外角无法确定方向，认为尖点处的外角没有定义.
4. 若 $\gamma(a_i)$ 是普通顶点或平坦顶点，定义 $\gamma(a_i)$ 的内角为 $\theta_i=\pi-\varepsilon_i$.
5. 对于顶点 $\gamma(a)=\gamma(b)$ ，$T(b)$ 和 $T(a)$ 分别扮演了 $T\left(a_i^-\right)$ 和 $T\left(a_i^+\right)$ 的角色.

[a]表现为向外扎一个尖

♣

定义 6.8

称分段光滑的正则曲线 γ 为一个曲边多面体，若它无尖点，切实某个预紧开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 的边界. 此外

1. 称 Ω 为 γ 的内部.
2. 若 γ 有 Ω 的边界诱导定向，则称 γ 是正定向的.

♣

定义 6.9 (曲边多面体的切角函数)

定义曲边多面体的切角函数，为分段光滑的连续函数 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$，使得 $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ 在使得 γ 光滑的任一点处成立. 在规定

$$\theta(a_i) = \lim_{t \to a_i^-} \theta(t) + \varepsilon_i$$

以及

$$\theta(b) = \lim_{t \to b^-} \theta(t) + \varepsilon_k$$

下，θ 是自右连续的. 其中 ε_k 是 $\gamma(b)$ 处的外角.

♣

Remark

1. 存在性: 在 $[a, a_1)$ 上，存在 T 的在 $\mathbb{R}$ 上的提升 $\theta(t)$，它取定了 a_1 处的函数值，从而可以在 $[a_1, a_2)$ 上将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$，以此类推. 由于曲线是闭合的，一旦我们指定一点处合适的取值 (以 2π 为间隔)，都可以将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$ 上.

定义 6.10 (旋转指标)

设 γ 是曲边多面体，定义它的旋转指标为

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

其中 θ 是 γ 的任一切角函数.

♣

定理 6.1 (旋转指标定理)

正定向的曲边多面体的旋转指标为 $+1$.

♡

6.1.3 平面简单闭合曲线的其它性质

定理 6.2 (等周不等式)

设平面简单闭曲线 γ 的长度为 L, 则 γ 内部区域的面积为 A, 则

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

等号成立当且仅当 γ 是一个圆. ♡

6.1.4 平面凸曲线

定义 6.11

若平面简单闭曲线的曲率 $\kappa_N > 0$, 则称为凸曲线. ♣

定理 6.3

平面凸曲线的切角函数 (Gauss 映射) 是一一对应的. ♡

Proof 设 $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ 是平面凸曲线. θ 是 γ 的任一切角函数, 则

$$T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

则

$$\kappa_N(t) = |T'(t)| = |\theta'(t)| > 0$$

这表明 $\theta'(t)$ 处处非退化, 从而 θ 是局部的双射. 又由旋转指标定理

$$\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \kappa(s)\, \mathrm{d}s = 2\pi$$

因此 Gauss 映射是整体的双射. □

定理 6.4 (四顶点定理)

定义使得 $\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}$ 的点为顶点, 则任何凸曲线至少有四个顶点. ♡

6.2 闭曲面与 Gauss-Bonnet 公式

定义 6.12

设 (M,g) 是 2-Riemann 流形. 称容许简单闭曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的一个曲边多面体, 若 γ 的像是一个预紧开集 $\Omega\subseteq M$ 的边界, 并且存在包含了 $\bar{\Omega}$ 的定向坐标圆盘, 使得 γ 的坐标像在坐标平面上称为曲边多面体. ♣

Remark

1. **测地多面体**: 若 M 上的曲边多面体 γ 的边界都刚好是测地线段, 则称 γ 为一个测地多面体.
2. 可以按照度量角类似地定义内外角.

定义 6.13 (切角函数)

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的定向光滑坐标卡. 通过坐标映射 φ 可以将 γ,Ω,g 分别与他们在坐标平面上一开集 $\hat{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的表示等同. 令 (E_1,E_2) 是 g 的通过对 (∂_x,∂_y)Gram-Schimtdt 正交化得到的规正基, 使得 E_1 在 $\hat{U}$ 处处与 ∂_x 相差正标量倍.

定义 γ 的切角函数为一个分段连续函数 $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$, 满足

$$T(t)=\cos(t)\ E_1|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\ E_2|_{\gamma(t)}$$

在使得 γ' 连续的点上成立. 并且在分点处自右连续的值. ♣

Remark

1. 存在性: 由于 T 是单位长度的, 故 $T(t)=u_1E_1+u_2E_2$ 中的 (u_1,u_2) 落在 $\mathbb{S}^1$ 上, 可以将他提升到 $\mathbb{R}$ 上.
2. 通过定义无法直接看出旋转指标的坐标无关性, 这个事实在下面的引理中得到说明.

引理 6.1 (旋转指标)

设 M 是定向的 2-Riemann 流形, 则对于 M 上每个正定向的曲边多面体, 它依赖于任意规正基的旋转指标都为 $+1$. ♡

Idea 可以将度量线性同伦到欧式度量, 说明旋转指标连续地变化, 由于旋转指标的取值是” 跳跃” 的, 从而说明旋转指标的不变性.

Proof 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的

正定向的光滑坐标卡. 则我们既可以用 g 给出的内积来计算旋转指标, 也可以用欧式内积 $\bar{g}$ 来计算, 接下来说明计算结果一致.

定义

$$g_s = (1-s)\,g + s\bar{g}, s \in [0,1]$$

容易看出对于每个 s,g_s 是一个度量. $\left(E_1^{(s)}, E_2^{(s)}\right)$ 为关于 g_s 对 (∂_x, ∂_y) 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的关于 g_s 的规正基,θ_{g_s} 和 ρ_{g_s} 分别为对应单位速度向量, 切角函数和旋转指标.

由于

1. 正交化的公式给出 $E_1^{(s)}, E_2^{(s)}$ 关于 s 的连续性.
2. 在任意使得 γ 光滑的区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上, 式
$$T_s\left(t\right) = u_1\left(t;s\right)\,E_1^{(s)}\Big|_{\gamma(t)} + u_2\left(t;s\right)\,E_2^{(s)}\Big|_{\gamma(t)}$$
中的 u_1, u_2 可以表示为
$$u_1\left(t;s\right) = \left\langle T_s\left(t\right), E_1^{(s)}\right\rangle_{g_s}, \quad u_2\left(t;s\right) = \left\langle T_s\left(t\right), E_2^{(s)}\right\rangle g_s$$
均关于 (t,s) 连续, 其中
$$T_s\left(t\right) = \frac{\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|_{g_s}}$$
. 从而 $u_1, u_2 : [a_{i-1}, a_i] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 在给定初值下存在唯一提升.
3. 外角的定义式
$$\varepsilon_i = \frac{\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right), T\left(a_i^+\right)\right)}{\left|\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right), T\left(a_i^+\right)\right)\right|_{g_s}} \arccos\left\langle T\left(a_i^-, T\left(a_i^+\right)\right)\right\rangle_{g_s}$$
表面 ε_i 关于 s 连续.

故旋转指标函数 ρ_{g_s} 关于 s 连续, 从而是不变的, 恒等于欧式内积下的旋转指标.

□

定义 6.14

设 γ 是单位速度参数化的曲边多面体, 则单位切向量场 $T\left(t\right) = \gamma'\left(t\right)$. 存在沿 γ 的唯一的单位法向量场 N, 使得 $\left(\gamma'\left(t\right), N\left(t\right)\right)$ 构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的定向基[a]. 在使得 γ 光滑的点处定义 γ **的符号曲率** 为

$$\kappa_N\left(t\right) = \left\langle D_t\gamma'\left(t\right), N\left(t\right)\right\rangle_g$$

[a]若 γ 正定向, 则这相当于 N 是正交与 $\partial\Omega$ 内指向的

♣

定理 6.5 (Gauss-Bonnet 公式)

令 (M, g) 是定向的 2-Riemann 流形, 设 γ 是 M 上正定向的曲边多面体, Ω 是 γ 的内部, 则

$$\int_\Omega K \,\mathrm{d}A + \int_\gamma \kappa_N \,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 体积形式 ε_i 是 γ 的外角, 且第二个积分是对弧长的积分. ♡

Proof 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 γ 的一个容许分划, (U, φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的正定向的图册, (E_1, E_2) 是 U 上的一个正定向的规正标架, $\theta(t)$ 是 γ 的一个切角函数, 则由 Newton-Lebniz 公式和旋转指标定理

$$2\pi = \theta(b) - \theta(a) = \sum_i \varepsilon_i + \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \theta'(t) \,\mathrm{d}t$$

接下来考虑 θ' 和 K, κ_N 的关系, 考虑

$$\gamma'(t) = \cos\theta(t)\, E_1|_{\gamma(t)} + \sin\theta(t)\, E_2|_{\gamma(t)}$$

以及

$$N(t) = -\sin\theta(t)\, E_1|_{\gamma(t)} + \cos\theta(t)\, E_2|_{\gamma(t)}$$

对 $\gamma'(t)$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} D_t\gamma'(t) = &-\sin\theta(t)\,\theta'\, E_1|_{\gamma(t)} + \cos\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_1 \\ &+ \cos\theta(t)\,\theta'\, E_2|_{\gamma(t)} + \sin\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_2 \end{aligned}$$

为了计算 $\nabla_{\gamma'}E_1, \nabla_{\gamma'}E_2$, 注意到

$$\begin{aligned} 0 &= D_v\langle E_1, E_1\rangle = 2\langle \nabla_v E_1, E_1\rangle \\ 0 &= D_v\langle E_2, E_2\rangle = 2\langle \nabla_v E_2, E_2\rangle \\ 0 &= D_v\langle E_1, E_2\rangle = \langle \nabla_v E_1, E_2\rangle + \langle E_1, \nabla_v E_2\rangle \end{aligned}$$

由于 E_1, E_2 正交, $\nabla_v E_1$ 是 E_2 的倍数, $\nabla_v E_2$ 是 E_1 的倍数, 上述第三式, 启发我们令

$$\omega(v) = -\langle \nabla_v E_1, E_2\rangle = \langle E_1, \nabla_v E_2\rangle$$

是一个 1-形式, 则

$$\nabla_v E_1 = -w(v)\, E_2, \quad \nabla_v E_2 = +w(v)\, E_1$$

现在可以计算得到

$$\begin{aligned} \kappa_N &= \langle D_t\gamma'(t), N\rangle \\ &= \theta' - \omega(\gamma') \end{aligned}$$

于是

$$2\pi = \sum_i \varepsilon_i + \int_\gamma \kappa_N \, \mathrm{d}s + \int_\gamma \omega$$

由于 Ω 是带角流形, 由带角流形的 Stokes 定理, 我们要

$$\int_\gamma \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

因此只需要证明 $K \, \mathrm{d}A = \mathrm{d}\omega$. 我们有

$$\begin{aligned}
K \, \mathrm{d}A \left(E_1, E_2\right) &= K = Rm \left(E_1, E_2, E_2, E_1\right) \\
&= \left\langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_1 \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{E_1} \omega \left(E_2\right) E_1 - \nabla_{E_2} \omega \left(E_1\right) E_1 - \omega \left(\left[E_1, E_2\right]\right) E_1, E_1 \right\rangle \\
&= \left\langle E_1 \omega \left(E_2\right) E_1 + \omega \left(E_2\right) \nabla_{E_1} E_1, E_1 \right\rangle \\
&- \left\langle E_2 \omega \left(E_1\right) E_1 + \omega \left(E_1\right) \nabla_{E_2} E_1, E_1 \right\rangle - \omega \left(\left[E_1, E_2\right]\right) \\
&= E_1 \omega \left(E_2\right) - E_2 \omega \left(E_1\right) - \omega \left(\left[E_1, E_2\right]\right) \\
&= \mathrm{d}\omega \left(E_1, E_2\right)
\end{aligned}$$

由于体积形式由其系数决定, 故 $K \, \mathrm{d}A = \mathrm{d}\omega$ 这就完成了证明. □

推论 6.1 (全曲率定理)

令 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是光滑的单位速度简单闭曲线, 使得 $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, N 是内指向的法向量, 则

$$\int_a^b \kappa_N (t) \, \mathrm{d}t = 2\pi$$

♡

6.3 Gauss-Bonnet 定理

定义 6.15

设 M 是一个紧的 2 维流形.

1. M 上的一个曲边三角形, 是指有三个顶点和三个变的曲边多边形.
2. M 的一个光滑三角剖分, 是指有限多个曲边三角形, 它们的内部两两无交, 任意两个不同曲边三角形的交若非空, 则要么为一个顶点, 要么为一条边, 并且这些三角形及其内部的交并成 M,.

♣

定理 6.6 (Tibor Rado)

每个紧的 2-流形, 容许一个三角剖分, 使得每条边都属于两个三角形.

♡

定义 6.16 (欧拉示性数)

设 M 是被三角剖分了的 2-流形, 定义 M(关于这个三角剖分) 的欧拉示性数为

$$\chi(M) = V - E + F$$

其中 V, E, F 分别为三角剖分的顶点数, 边数, 面数.

Remark 事实上欧拉示性数是拓扑不变的, 且无关于三角剖分的选取, 这是代数拓扑中的重要事实.

定理 6.7 (Gauss-Bonnet 定理)

若 (M, g) 是一个被光滑三角剖分了的 2 维紧带边 Riemann 流形, 则

$$\int_M K \, \mathrm{d}A + \int_{\partial M} \kappa_N \, \mathrm{d}s = 2\pi\chi(M)$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 密度.

定理 6.8 (分类定理)

1. 每个紧的, 连通的, 可定向的 2 维流形 M 都同胚于一个球面, 或 n 个环面的连通和.
2. 每个不可定向的 2 维流形同胚于 n 份实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 的连通和.
3. 数 n 称为 M 的亏格 .

命题 6.1

对于一个紧致、连通、可定向的无边界曲面 S，亏格 $g(S)$ 和欧拉示性数 $\chi(S)$ 之间的关系由以下公式给出： $\chi(S) = 2 - 2g(S)$

推论 6.2

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率, 则

1. 若 M 同胚于球面或射影平面, 则 $K > 0$ 在某处成立.
2. 若 M 同胚于环面或 Klein bottle, 则要么 $K \equiv 0$, 要么 K 同事有正负的取值.
3. 若 M 是任意其他紧的面, 则 $K < 0$ 在某处成立.

Proof 应用三角剖分, 亏格 n 的可定向 2-流形的欧拉示性数为 $2 - 2n$, 不可定向的为 $2 - n$.

□

推论 6.3

令 (M,g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率

1. 若 $K>0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{S}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 要么是平凡的, 要么同构于二元群 $\mathbb{Z}/2$
2. 若 $K\leq 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{R}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 有限.

♡

6.4 闭曲面的其它性质

定理 6.9

设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭曲面, 则 Σ 上必有一点 P_0, 它的 Gauss 曲率 $K(P_0)>0$.

♡

Proof 令 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 是曲面的位置向量, 考虑

$$f(p)=\langle r(p),r(p)\rangle$$

由于 Σ 是紧的, f 在某一点 P_0 处达到最大值. 设 $X=X(u,v)$ 是 Σ 在 p_0 附近的一个参数化, 则

$$\mathrm{d}f(P_0)=\nabla f(P_0)=2\langle\nabla X,X\rangle(P_0)$$

□

第 7 章　凸曲面与凸曲线

7.1　凸曲线

第 8 章 期末试题

8.1 2024

Problem 8.1

求曲面 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$ 的第一基本形式、第二基本形式, 并证明它是极小曲面.

Proof 坐标切向量场为

$$\partial_u=(\cos v,\sin v,0)\,,\quad \partial_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

- $\partial_u\cdot\partial_u=1$,
- $\partial_u\cdot\partial_v=0$
- $\partial_v\cdot\partial_v=u^2+1$

于是

$$I=\mathrm{d}u^2+\left(u^2+1\right)\mathrm{d}v^2$$

或者, 考虑欧式度量在 r 下的拉回

$$\begin{aligned}
g=r^*\bar{g}=r^*\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)&\\
=\mathrm{d}\left(u\cos v\right)^2+\mathrm{d}\left(u\sin v\right)^2+\mathrm{d}\left(v\right)^2&\\
=\left(\cos v\,\mathrm{d}u-u\sin v\,\mathrm{d}v\right)^2+\left(\sin v\,\mathrm{d}u+u\cos v\,\mathrm{d}v\right)^2+\mathrm{d}v^2&\\
=\mathrm{d}u^2+\left(u^2+1\right)\mathrm{d}v^2&
\end{aligned}$$

一个法向量为

$$n'=\partial_u\times\partial_v=\begin{pmatrix} i & j & k\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 1\end{pmatrix}=(\sin v,-\cos v,u)$$

单位法向量为

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}n'=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\sin v,-\cos v,u\right)$$

$$h\left(X,Y\right)=\left\langle II\left(X,Y\right),n\right\rangle=\left\langle\bar{\nabla}_XY,n\right\rangle$$

$$h\left(\partial_u,\partial_u\right)=\left\langle\bar{\nabla}_{\partial_u}\partial_u,n\right\rangle=0$$

类似地,

$$h\left(\partial_u,\partial_v\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left\langle\left(-\sin v,\cos v,0\right),\left\langle\sin v,-\cos v,u\right\rangle\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$
$$h\left(\partial_v,\partial_v\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left\langle\left(-u\cos v,-u\sin v,0\right)\cdot\left(\sin v,-\cos v,u\right)\right\rangle=0$$

于是

$$h=h\left(\partial_u,\partial_u\right)\left(\mathrm{d}u\right)^2+2h\left(\partial_u,\partial_v\right)\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+h\left(\partial_v,\partial_v\right)\left(\mathrm{d}v\right)^2=-\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v$$

由于黎曼度量没有交叉项, 由表示矩阵的关系 $S=G^{-1}B$, 其中 S,G,B 分别为 Weigarten 映射, 黎曼度量和第二基本形式的表示矩阵, 可得

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{h\left(\partial_u,\partial_u\right)}{1}+\frac{h\left(\partial_v,\partial_v\right)}{u^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(0+0\right)=0$$

故它是极小曲面.

□

Problem 8.2 设一个旋转曲面有参数化 $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,e^u)$, 计算

1. 自然标架 r_u,r_v,n;
2. 纬线 $u=1$ 的测地曲率;
3. r_v 沿 u-线的协变导数.

Proof

1. 自然坐标标架为

$$\partial_u=\left(\cos v,\sin v,e^u\right),\quad \partial_v=\left(-u\sin v,u\cos v,0\right)$$

单位法向量场为

$$n=\frac{\partial_u\times\partial_v}{\left|\partial_u\times\partial_v\right|}=\frac{1}{|\cdot|}\begin{pmatrix} i & j & k\\ \cos v & \sin v & e^u\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{|\cdot|}\left(-ue^u\cos v,-ue^u\sin v,u\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}\left(-e^u\cos v,-e^u\sin v,1\right)$$

2. 纬线 $u=1$ 的一个参数表示为

$$\tilde{\gamma}\left(v\right)=r\left(1,v\right)=\left(\cos v,\sin v,e\right)$$

速度向量场的大小为

$$\left|\tilde{\gamma}'\left(v\right)\right|=\left|\left(-\sin v,\cos v,0\right)\right|=1$$

故 $\tilde{\gamma}(v)$ 也是一个单位速度参数化. 那么测地曲率为

$$|D_v\gamma'(v)| = \left|\tilde{D}_v\gamma' - \mathrm{II}(\gamma',\gamma')\right|$$

由右侧两项的正交性, 得到

$$|D_v\gamma'(v)|^2 = \left|\tilde{D}_v\gamma'\right|^2 - |\mathrm{II}(\gamma',\gamma')|^2$$

其中 $D\delta_t$ 表示欧式联络决定的沿 γ 的协变导数.

$$\left|\tilde{D}_v\gamma'\right| = |(-\cos v, -\sin v, 0)| = 1$$

另一边,

$$\tilde{D}_v\gamma' = D_t\gamma' + \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

两边作用在 n 上, 得到

$$\left\langle \tilde{D}_v\gamma', n\right\rangle = \langle \mathrm{II}(\gamma',\gamma'), n\rangle = h(\gamma',\gamma')$$

计算得到 $|\mathrm{II}(\gamma',\gamma')| = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}e^u$ 于是

$$k_g = |D_v\gamma'(v)| = \sqrt{1-\frac{e^{2u}}{e^{2u}+1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+1}}$$

3. 令 v_0 坐标的 u-线为

$$\gamma_{v_0}(u) = r(u, v_0)$$

则

$$D_u\partial_v = \nabla_{\partial_u}\partial_v = \Gamma_{12}^1\partial_u + \Gamma_{12}^2\partial_v$$

其中

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{1l}(\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l} - \partial_l g_{12})$$

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11} = 1+e^{2u}, \quad g^{11} = \frac{1}{1+e^{2u}}, \quad g_{22} = u^2, \quad g^{22} = \frac{1}{u^2}$$

从而

$$\Gamma_{12}^l = 0$$

此外,

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{2l}(\partial_2 g_{1l} + \partial_1 g_{2l} - \partial_l g_{12}) = \frac{1}{u^2}(1u) = \frac{1}{u}$$

于是

$$D_u\partial_v = \frac{1}{u}\partial_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

□

Problem 8.3 已知曲面的第一基本形式, 求 Gauss 曲率:

1. $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$;
2. $ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2$;
3. $ds^2 = u^2 du^2 + \sin^2 u dv^2$;
4. $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$, $x^2+y^2<1$.

Proof

1. 令

$$\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = u\,\mathrm{d}v$$

则 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 构成曲面的一组正交的余标架. 由 Cartan 第一结构方程, 以及联络 1-形式的反对称性

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

得到

$$\omega_2^1 = -\mathrm{d}v$$

于是由 Cartan 第二结构方程

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \Omega_2^1 = \mathrm{d}\omega_2^1 = 0$$

得到 Gauss 曲率 $K = 0$

2. 类似地, 这次令

$$\varepsilon^1 = \cos v\,\mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = \mathrm{d}v$$

$$\sin v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1, \quad 0 = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

得到

$$\omega_2^1 = -\sin v\,\mathrm{d}u$$

Gauss 曲率为

$$K = \frac{\mathrm{d}\omega_2^1}{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2} = \frac{\cos v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v}{\cos v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v} = 1$$

3.

$$\varepsilon^1 = u\,\mathrm{d}u, \quad \varepsilon^2 = \sin u\,\mathrm{d}v$$

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1 \quad \cos u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

于是

$$\omega_2^1 = -\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}v$$

从而

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = \left(\frac{u\sin u + \cos u}{u^2}\right)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \frac{u\sin u + \cos u}{u^2}\frac{1}{u\sin u}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

于是

$$K = \frac{u\sin u + \cos u}{u^3 \sin u}$$

4. 令

$$\varepsilon^1 = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2-y^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\mathrm{d}y}{1-x^2-y^2}$$

则

$$\frac{-2y}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

从而

$$\omega_2^1 = \frac{2y}{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x - \frac{2x}{1-x^2-y^2}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\frac{2-2x^2+2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \frac{2+2x^2-2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} = -4\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$$

于是

$$K = -4$$

□

Problem 8.4 在测地极坐标系下求 Gauss 曲率为正常数 $K > 0$ 的曲面的第一基本形式.

Proof 设测地极坐标的度量为

$$g = \mathrm{d}r^2 + G(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta^2$$

令

$$\varepsilon^1 = \mathrm{d}r, \quad \varepsilon^2 = \sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

则 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 构成曲面的一个正交余标架. 由 Cartan 第一结构方程, 以及联络 1-形式的反对称性,

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \wedge \omega_2^1$$

以及

$$\partial_r \sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = -\varepsilon^1 \wedge \omega_2^1$$

于是

$$\omega_2^1 = -\partial_r \sqrt{G(r,\theta)}\, \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\partial_r^2 \sqrt{G(r,\theta)}\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

从而

$$K = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{G(r,\theta)}}{\sqrt{G(r,\theta)}}$$

令 $f = \sqrt{G}$, 则

$$\partial_r^2 f + Kf = 0$$

解 ODE, 得到

$$f(r,\theta) = C_1(\theta)\cos\left(\sqrt{K}r\right) + C_2(\theta)\sin\left(\sqrt{K}r\right)$$

令 $r \to 0$, 利用 $f = \sqrt{G} \to 0$, 得到

$$C_1(\theta) = 0$$

于是

$$f(r,\theta) = C_2(\theta)\sin\left(\sqrt{K}r\right)$$

利用

$$f = \sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + O\left(r^4\right), \quad (r \to 0)$$

而

$$\sin\left(\sqrt{K}r\right) \sim \sqrt{K}r - \frac{1}{6}K\sqrt{K}r^3 + O\left(r^4\right), \quad (r \to 0)$$

得到 $C_2(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{K}}$. 最终, 得到 $\sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}r\right)$ 第一基本形式为

$$g = \mathrm{d}r^2 + \frac{1}{K}\sin^2\left(\sqrt{K}r\right)\mathrm{d}\theta^2$$

□

Problem 8.5 设 C 是平面严格凸曲线, 证明: C 的 Gauss 映射 $n: C \to S^1$ 是微分同胚.

Proof 设 $\gamma: I = [0,l] \to C$ 是它的单位速度参数和, 则

$$n(t) = \gamma'(t)$$

由于 C 是严格凸的,

$$0 < \kappa(t) = |n'(t)|$$

这表明

$$n'(t) \neq 0$$

对于所有的 $t \in I$ 成立. 由于 n 本身是光滑映射, 由反函数定理, n 在任一点附近是局部的微分同胚. 说明 n 是整体的微分同胚, 只需要说明 n 还是双射.

1. 设 θ 是一个切角函数, 使得

$$n(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

则

$$\kappa(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) = n'(t) = \theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$$

这表明 $\theta'(t) = \kappa(t) > 0$ 从而切角函数 θ 是严格单增的, 进而 n 只能是单射.

2. 最后, 由旋转指标定理

$$\theta(l) - \theta(0) = 2\pi$$

由于 θ 是连续函数, 介值定理表面 θ 在 $[0,l]$ 上的取值遍历 $[0,2\pi]$, 从而 $n(t)$ 的取值遍历 S^1, 表面 n 是一个满射.

综上, n 是微分同胚

□

Problem 8.6 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中亏格 $g \geq 1$ 的可定向闭曲面, 证明: 不存在 S 上的分段光滑测地线, 将 S 划分成两个互不相交的单连通区域 (注: 在亏格为 0 的闭曲面上这是可以的, 例如赤道将球面分为两个半球面).

Proof 若存在这样的划分, 设 C 是这条测地线, 则分别在这两个单连通区域 D_1, D_2 上应用 Gauss-Bonnet 定理, 得到

$$\int_{D_1} K\,\mathrm{d}S = 2\pi, \quad \int_{D_2} K\,\mathrm{d}S = 2\pi$$

在 S 上应用 Gauss-Bonnet 定理, 得到

$$\int_S K\,\mathrm{d}S = 2\pi\chi(S) = 4\pi(1-g)$$

但是

$$\int_S K\,\mathrm{d}S = \int_{D_1} K\,\mathrm{d}S + \int_{D_2} K\,\mathrm{d}S = 4\pi$$

而

$$4\pi(1-g) \neq 4\pi$$

矛盾, 因此不存在这样的分段光滑的测地线.

□

Problem 8.7 设 C 是曲面 S 上的一条渐近线 (即切向的法曲率为 0), 证明:

1. C 上每一点都有 $K \leq 0$, 其中 K 是 S 的 Gauss 曲率.
2. 如果 C 不是直线, 那么 C 的挠率 τ 在 C 上每一点都会满足 $\tau^2 = -K$.

Proof

$$\mathrm{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

$$0 = Rm\left(\gamma', w, w, \gamma'\right) - \left\langle \mathrm{II}\left(W, Z\right), \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

□

8.2 2023

Problem 8.8 曲线 $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 的弧长参数化、Frenet 标架、曲率和挠率.

Problem 8.9 球面有参数化 $r(u, v) = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u)$, 计算

1. 自然标架 r_u, r_v, n;
2. 纬线 $u = \frac{\pi}{4}$ 的测地曲率;
3. r_v 沿 u-线的协变导数.

Problem 8.10 设曲面有参数化

$$r(u, v) = (\ln(\cosh u) \cos v, \ln(\cosh u) \sin v, \arctan(\sinh u))$$

求它的第一基本形式和 Gauss 曲率.

Problem 8.11 设 $c(s)$ 是曲面 S 上的曲线, $X(s)$ 是沿 $c(s)$ 的向量场, 满足 $\frac{\nabla X(s)}{ds} = X(s)$. 求沿 $c(s)$ 的平行向量场 $Y(s)$, 使得 $Y(0) = X(s)$ 且 $Y(s)$ 与 $X(s)$ 方向相同.

Problem 8.12 设曲面包含一条直线, 求证:

1. 该直线一定是测地线;
2. 在该直线上的每个点, 曲面的 Gauss 曲率 $K \leq 0$.

Problem 8.13 设 P 是曲面上的一个点, 记以 P 为中心、以 r 为半径的测地圆盘的面积为 $A(r)$. 已知 $A(r)$ 当 r 足够小的时候是光滑函数, 试证明

$$A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12} K(P) r^4 + o(r^4)$$

其中 $K(P)$ 是 P 点处的 Gauss 曲率.

Problem 8.14 设 S 是凸曲面, 且 S 上任意点处的 Gauss 曲率 $K > 1$.

1. 证明: S 的面积小于单位球面的面积.
2. 设 $D(r)$ 是 S 上以 P 为中心、r 为半径的测地圆盘, $0 < r < \pi$, 且 $D(r)$ 包含于以 P 为中心的测地极坐标系中, 证明: $D(r)$ 的面积小于单位球面上以 r 为半径的测地圆盘的面积.

8.3 2022

Problem 8.15 给定一个圆螺面的参数表示

$$r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v), \quad u,v\in\mathbb{R}$$

请计算:

- (a) r 的第一基本形式和第二基本形式;
- (b) r 在 (u,v) 点处的主曲率、平均曲率和 Gauss 曲率;
- (c) 坐标 v-曲线的测地曲率.

Problem 8.16 设曲面的第一基本形式为

$$ds^2=du^2+G(u,v)dv^2$$

- (1) 求曲面的联络系数 (即 Christoffel 符号) Γ_{ij}^k, 并证明 Gauss 曲率 K 的表达式为
$$K=-\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\frac{1}{\sqrt{G}}$$
- (2) 利用 (1) 的结果, 求出 Gauss 曲率 K 恒为常数的曲面的第一基本形式;
- (3) 设 $G=e^{2u}$, 求曲面上的测地线.

Problem 8.17 证明: 若 (u,v) 是曲面上的参数系, 使得参数曲面网是正交的曲线网 (坐标 u-曲线是主曲率 k_1 的曲率线、坐标 v-曲线是主曲率 k_2 的曲率线), 则主曲率 k_1,k_2 满足下列方程:

$$\frac{\partial k_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(k_2-k_1)$$
$$\frac{\partial k_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(k_1-k_2)$$

Problem 8.18 设 $ds^2=g_{ij}du^idu^j$ 为曲面 $r=r(u^1,u^2)$ 的第一基本形式, $V^i=V^i(u^1,u^2)$ 是偏微分方程组

$$\frac{\partial V^i}{\partial u^k}=-\Gamma_{kl}^iV^l$$

的非零解, 其中 Γ_{kl}^i 是关于曲面 r 的自然标架场 $\{r_{u^1},r_{u^2}\}$ 的联络系数. 证明:

- (1) $||V||^2=g_{ij}V^iV^j$ 是一个非零常数;
- (2) $V=V^ir_{u^i}$ 是曲面上的切向量场, 它沿曲面上的任意一条曲线都是平行的.

Problem 8.19

- (1) 设 D 是曲面 S 上的一个四边形闭区域, P_i 是顶点, α_i 是相应的内角, $i=1,2,3,4$. 证明:
$$\iint_D KdA+\oint_{\partial D}k_gds=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-2\pi$$

- (2) 证明一曲面若在每一点的邻域内均存在两族相交成定角的测地线, 则其 Gauss 曲率恒为零. (提示: 利用 (1), 选取 D 的边界是由测地线构成的四边形区域)