

第1章 子流形

定理 1.1 (超曲面的基本方程)

设 (M, g) 是黎曼流形 (\tilde{M}, \tilde{g}) 的 Riemann 超曲面, N 是沿 M 的光滑单位法向量.

1. 超曲面的 Gauss 公式: 若 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 延拓到 \tilde{M} 的开集上, 则

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) N$$

2. 超曲面曲线的 Gauss 公式: 若 $\gamma: I \rightarrow M$ 是一个光滑曲线, $X: I \rightarrow TM$ 是沿 γ 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_t X = D_t X + h(\gamma', X) N$$

3. 超曲面的 Weigarten 方程: 对于所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\tilde{\nabla}_X N = -sX$$

^a

4. 超曲面的 Gauss 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = Rm(W, X, Y, Z) - \frac{1}{2}(h \otimes h)(W, X, Y, Z)$$

5. 超曲面的 Codazzi 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, N) = (Dh)(Y, W, X)$$

^b

^a可以说法向量完全提纯了氛围联络的法向信息 (第二基本形式)

^b外微分是后两个作为求导项交换; 是先对着最后一项求导的, 是负的.

