目录

第 1 章　子流形

1.1 嵌入子流形

定义 1.1 (嵌入子流形)

设 M 是光滑（带边）流形。称 M 的子集 $S \subseteq M$ 是一个嵌入子流形，若 S 在配备了子空间拓扑，和使得含入映射 $S \hookrightarrow M$ 成为光滑嵌入的光滑结构下，成为一个光滑（带边）流形。

Remark

1. 嵌入子流形也被称为是正则子流形。

命题 1.1

设 M 是一个光滑流形，则 M 的余维数为 0 的嵌入子流形与 M 的开子流形等价。

命题 1.2 (嵌入像作为子流形)

设 M 是一个光滑(带边)流形,N 是一个光滑流形,令 $F: N \to M$ 是光滑嵌入。$S = F(N)$。那么在子空间拓扑下，S 是一个拓扑流形，并且其上存在唯一的光滑结构，使得 S 成为 M 的嵌入子流形，且 F 是从 N 到 $F(N)$ 的微分同胚。

Idea 之所以要求 N 是不带边的，是因为我们需要找到非边界的中间坐标卡 (U, φ)，避免 $F^{-1}(p)$ 落在边界上。

Proof

1. 唯一性：若有两个光滑结构 $(S, \mathcal{A}_1)$, $(S, \mathcal{A}_2)$ 满足条件，分别取一坐标卡 (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2)，需要说明 $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ 在 $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ 上光滑，只需要说明在其上每一点 $\psi_1(p) \in \psi_1(V_1 \cap V_2)$ 附近光滑。$F^{-1}(V_1 \cap V_2) = F^{-1}(V_1) \cap F^{-1}(V_2)$ 是开集，点 $F^{-1}(p)$ 附近存在 N 的光滑坐标卡 (U, φ)，F 的光滑性要求 $\psi_1 \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑，F 是微分同胚，故 $\varphi \circ F^{-1} \circ \psi_1^{-1}$ 也是光滑映射，对于 ψ_2 有类似地结论。
   于是在 $\psi_1(p)$ 附近，有
   $$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \psi_2 \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ F^{-1} \circ \psi_1^{-1}$$
   是光滑的。
2. 存在性：F 要是微分同胚，那么 $F(U)$ 就得是开集，$\varphi \circ F^{-1}$ 亦然是双射，可以直截了当的取 $\{(F(U), \varphi \circ F^{-1})\}$ 作为图册，其中 (U, φ) 是 N 的任意光滑图册。相容性是容易得到的。

□

1.1.1 嵌入子流形的切片图

注意本小节的概念和结论都是对开集和光滑流形谈的，先不考虑带边的流形。

定义 1.2 (欧式开集的切片)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$k \in \{0, \cdots, n\}$，U 的一个 k-维切片 [1]是指一个形如下的子集

$$S = \left\{ \left(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n \right) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n \right\}$$

其中 $c^{k+1}, \cdots, c^n$ 是常数。♣

定义 1.3 (坐标开集[2]的 k-切片)

设 M 是光滑 n-流形，(U, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡。若 S 是 U 的一个子集，使得 $\varphi(S)$ 称为 $\varphi(U)$ 的一个 k-切片，则称 S 是 U 的一个 k-切片。♣

定义 1.4 (k-切片条件)

设 M 是光滑 n-流形。给定子集 $S \subseteq M$ 和非整数 k。我们说 S 是满足局部 k-切片条件 [a]的，若 S 上的每一点都含于 M 的某个光滑坐标卡 (U, φ)，使得 $S \cap U$ 是 U 上的一个 k-切片。每个这样的坐标卡都被称为是 S 在 M 中的一个切片图，相应的坐标 $\left(x^1, \cdots, x^n\right)$ 被称为切片坐标[b]。

[a]满足切片条件的子流形，就是局部上，在某组坐标下，能被看成是父流形的截面的东西。

[b]切片坐标就是使得 S 能被看成是截面的那些坐标。♣

定理 1.1 (嵌入子流形的局部切片判据)

设 M 是一个光滑 n-流形。若 $S \subseteq M$ 是一个嵌入 k-维子流形，则 S 满足局部 k-切条件。反之，若 $S \subseteq M$ 是满足局部 k-切片条件的子集，则在 S 的子空间拓扑下，S 是 k-拓扑流形，并且存在使得它成为 M 的 k-维嵌入子流形的光滑结构。♡

[1]固定后面的分量，看成是开集 U 的“截面”

[2]在流形上谈论切片时，只对坐标开集考虑