第 1 章 平面曲线

1.1 基本概念

定义 1.1 (正则曲线)

设 $c:(a,b)\to E^2\left(\text{或}E^3\right)$ 是 C^∞ 映射，满足正则性条件：

$$\left|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|\neq 0$$

则称 c 为平面（或空间）正则曲线。♣

Remark

1. 对于 $c(t)=(x(t),y(t))$，$c'(t)=(x'(t),y'(t))$
2. 方便起见，若无额外声明，以后提及曲线均指正则曲线
3. 称 $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t)$ 为切向量场
4. 由定义可见，曲线与参数的选取是有关的，我们总希望选取一个好用的参数化方法

   Example 1.1 考虑 $c_1(t)=(\cos t,\sin t)$，$c_2(t)=(\cos 2t,\sin 2t)$，$c_3(t)=\left(\cos t^2,\sin t^2\right)$，它们的像相同，但是不是同一个曲线。其中 c_1,c_2 正则，而 c_3 则不然，这是因为 $c_3'(0)=(0,0,0)$ 。

问题：哪些曲线有正则的参数化？

Example 1.2 在解析几何中，曲线由水平集给出

$$C=\{(x,y):f(x,y)=\text{常数}\}$$

定义 1.2

若 $\nabla f(p)\neq 0$，则称 $f(p)$ 为一个正则值。♣

假设 $c=f(p)$ 是正则，则

$$\nabla f(p)=(f_x(p),f_y(p))\neq 0$$

从而 $f_x(p)\neq 0$ 或者 $f_y(p)\neq 0$。不妨设 $f_x(p)\neq 0$，则由隐函数定理，存在 $x(y)$，使得 $f(x(y),y)\equiv f(p)$ 在 p 附近成立。即 $\{f=f(p)\}$ 可由 $(x(y),y)=:c(y)$ 参数表示。$c'(y)=(x'(y),1)\neq 0$ ，从而 c 是水平集在 p 附近的一个正则的参数化。

Remark 由紧性，若每一点附近都有一个正则参数化，可以拼接成整体的参数化。

定义 1.3 (弧长)

曲线 c 的弧长被定义为

$$L(c) = \int_a^b \left|c'(t)\right| \mathrm{d}t$$

♣

定义 1.4 (弧长函数)

定义

$$s(t) = \int_a^t \left|c'(s)\right| \mathrm{d}s, \quad t \in (a,b)$$

为曲线 c 的弧长函数。

♣

Remark

1. $s(t)$ 表为从 $c(a)$ 到 $c(t)$ 曲线段的弧长。

定义 1.5

对于正则曲线 c，$s'(t) = |c'(t)| > 0$，它的弧长函数 $s(t)$ 严格单增，由反函数定理，它有反函数 $t = t(s), s \in [0,l]$ ，其中 $l = L(c)$。$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|c'(t)|}$ 定义 $\tilde{c}(s) := c(t(s))$，称为 c 的弧长参数化。

♣

Remark

$$\tilde{c}'(s) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

称下列曲线

$$\left|\tilde{c}'(s)\right| = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|}{|c'(t)|} \equiv 1$$

为单位速度曲线，(通常也称为弧长曲线)。

定义 1.6 (标架)

对于正则曲线 c，令 $T(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$ 为单位切向量场，$N(t) = T(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 称为 c 的规正（活动）标架。

♣

由于切向量场与自身的导数垂直，对于每个 t，存在数 $K(t)$，使得 $T'(t) = K(t)N(t)$ ，从而确定出一个函数 $K(t)$。又 $N'(t) = L(t)T(t)$，计算

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle T(t), N(t)\rangle \\ &= \left\langle T', N\right\rangle + \left\langle T, N'\right\rangle = K + L \end{aligned}$$

于是

$$L(t) = -K(t), \quad N'(t) = -K(t)T(t)$$

Example 1.3

1. 直线 $c(t) = (at, bt)$，$a^2 + b^2 = 1$，则 $T(t) = (a, b) \implies K(t) \equiv 0$
2. 圆：$c(t) = (\cos t, \sin t)$,$T(t) = (-\sin t, \cos t)$,$N(t) = (-\cos t, \sin t)$,$T'(t) = (-\cos t, -\sin t) = N(t) \implies K(t) \equiv 1$。对于 $\bar{c}(t) = r(\cos t, \sin t)$，它的 $K(t)$ 也为 1，因此需要对 $K(t)$ 稍作修饰。

定义 1.7 (曲率)

对于正则曲线 c，设 (T, N) 是它的正规标架，定义它的曲率为

$$k(t) = \frac{T'(t) \cdot N(t)}{|c'(t)|}$$

♣

Remark

1. 考虑弧长参数化 $c(s)$，此时 $T(s) = c''(s)$，$T'(s) = c'(s) = k(s) N(s)$ 。可以得到简洁的标架运动方程

$$T'(s) = k(s) N(s)$$

$$N'(s) = -k(s) T(s)$$

   或者写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$$

2. 曲率可以通过弧长参数化方便地计算 $k(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T(s) \cdot N(s)$
3. 也称这样的曲率为符号曲率，它是带符号的，与 N 选取的方向有关。

Example 1.4 计算

$$c(t) = (t, \sin t)$$

曲率

Solution $c'(t) = (1, \cos t)$ ，$|c'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$ ，

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}(1, \cos t)$$

$$N(t) = T(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}(-\cos t, 1)$$

$$T'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}\right)'(1, \cos t) + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}(0, -\sin t)$$

$$k(t) = \frac{T'(t) \cdot N(t)}{|c'(t)|} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)^2 \cdot (-\sin t)}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} = -\frac{\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

命题 1.1 (k 的计算公式)

$$k\left(t\right)=\frac{c'\left(t\right)\times c''\left(t\right)\cdot\left(0,0,1\right)}{\left|c'\left(t\right)\right|^3}$$

Proof $c'\left(t\right)=\left|c'\left(t\right)\right|T\left(t\right)$，$c''\left(t\right)=\left|c'\left(t\right)\right|T\left(t\right)+\left|c'\left(t\right)\right|^2k\left(t\right)N\left(t\right)$，将平面嵌入到三维空间中，计算

$$\begin{aligned}c'\left(t\right)\times c''\left(t\right)&=\left|c'\right|T+\left(\left|c\right|T+\left|c\right|^2kN\right)\\&=\left|c\right|^3k\,T\times N\end{aligned}$$

以两边点乘 $\left(0,0,1\right)$（以 N,T 和与它们垂直的向量构成的基下的坐标），得到

$$k\left(t\right)=\frac{c'\left(t\right)\times c''\left(t\right)\cdot\left(0,0,1\right)}{\left|c'\left(t\right)\right|^3}$$

$$\left|K\left(t\right)\right|=\frac{\left|c'\left(t\right)\times c''\left(t\right)\right|}{\left|c'\left(t\right)\right|}$$

□

1.2 曲率的几何意义

1. 对正则曲线的弧长参数化 $c\left(s\right)$ 做 Taylor 展开，

$$\begin{aligned}c\left(s\right)&=c\left(s_0\right)+c'\left(s_0\right)\left(s-s_0\right)+\frac{1}{2}c''\left(s_0\right)\left(s-s_0\right)^2+o\left(\left(s-s_0\right)^2\right)\\&=c\left(s_0\right)+T'\left(s_0\right)\left(s-s_0\right)+\frac{1}{2}k\left(s_0\right)N\left(s_0\right)\left(s-s_0\right)^2\end{aligned}$$

   用二次曲线逼近 $c\left(s\right)$，k 表示用来逼近的二次曲线的二次部分（抛物线）沿 N 的方向弯曲的程度。

2. 高斯映射：
   对于正则曲线 $c:\left(a,b\right)\rightarrow$，定义高斯映射 $N:\left(a,b\right)\rightarrow S^1\subseteq\mathbb{R}^2$
   把每一点处的单位法向量映到圆周上一点。由 $N'\left(s\right)=-k\left(s\right)T\left(s\right)$，可得 $\left|k\left(s\right)\right|=\left|N'\left(s\right)\right|$。
   曲率的大小为高斯映射在圆周上运动的速度。

Remark

1. 对曲线 $c\left(t\right)$ 做等距变换，记作 $\mathcal{T}\left(c\right)\left(t\right)$，则曲率不变。
2. 在一定的群作用下保持不变的量称为不变量。
3. 从而曲率是等距同构下的不变量。

1.3 曲率对曲线的几乎“决定”

给定连续函数 $k(s)$，给定初值 $T(0), N(0)$ 为一处的规正基，考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

由 ODE 的知识，则该方程存在唯一解 $T(s), N(s)$。给定 $c(0)$，令

$$c(s) = c(0) + \int_0^s T(t)\,\mathrm{d}t$$

为了说明 $c(s)$ 的曲率就是 k，我们希望

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

在每一点处都是正交矩阵。

Proof 令 $A(s) = \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} A =: KA$$

计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}AA^T = KAA^\mathsf{T} + AA^\mathsf{T}K^\mathsf{T}$$

于是 $I(s) = I$ 是上述关于 AA^T 的方程的一个解，又该方程的解唯一，因此

$$AA^T(s) = I$$

□