目录

第 1 章　测地线和距离

定义 1.1 (极小曲线)

令 (M,g) 是 Riemann 流形，称一个 M 上的容许曲线 γ 是极小的，若 $L_g(\gamma) \leq L_g(\tilde{\gamma})$ 对于所有有着相同端点的容许曲线 $\tilde{\gamma}$ 成立。♣

Remark

1. 当 M 连通时，γ 极小当且仅当 $L_g(\gamma)$ 等于两端点的距离。

1.1 曲线族

定义 1.2 (单参数曲线族)

设 (M,g) 是 Riemann 流形。

给定区间 $I, J \subseteq \mathbb{R}$，称一个连续映射 $\Gamma : J \times I \to M$ 为一个单参数曲线族。这样一个曲线族给出 M 上的两类曲线：

1. 对于固定的 s，定义在 $t \in I$ 上的主曲线：$\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$；
2. 对于固定的 t，定义在 $s \in J$ 上的横截曲线：$\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s,t)$；

♣

定义 1.3 (沿曲线族的向量场)

对于单参数曲线族 $\Gamma : J \times I \to M$，定义沿 Γ 的向量场为一个连续映射 $V : J \times I \to TM$，使得 $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M, \forall (s,t)$。♣

定义 1.4 (速度向量)

若单参数曲线族 $\Gamma : J \times I \to M$ 是光滑的（或至少是连续可微的），我们记主曲线和横街曲线的速度向量分别为

$$\partial_t \Gamma(s,t) = (\Gamma_s)'(t) \in T_{\Gamma(s,t)}M; \quad \partial_s \Gamma(s,t) = \Gamma^{(t)\prime}(s) \in T_{\Gamma(s,t)}M$$

♣

定义 1.5 (容许曲线族)

称单参数曲线族 Γ 为一个容许曲线族，若

1. Γ 的定义域形如 $J \times [a,b]$，其中 J 是开集；
2. 存在 $[a,b]$ 的分划 $(a_0, \cdots, a_k)$，使得 Γ 在每个 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上光滑；
3. 对于每个 $s \in J$，$\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ 是一个容许曲线。

此时称这样的一个分划为曲线族的容许分划。♣

Remark $\partial_s \Gamma$ 和 $\partial_t \Gamma$ 在每个 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上是光滑的，但是在一般来说在整个定义域上不是。

定义 1.6 (变分)

给定容许曲线 $\gamma:[a,b]\to M$,

1. γ 的一个变分是指一个容许曲线族 $\Gamma:J\times[a,b]\to M$，使得 J 是包含了 0 的一个开区间，且 $\Gamma_0=\gamma$;
2. 若在此之上，$\Gamma_s(a)=\gamma(a)$ 和 $\Gamma_s(b)=\gamma(b)$ 对于所有的 $s\in J$ 成立[a]，则称 Γ 为 γ 的一个真变分。

[a]即有相同的起点和终点

定义 1.7 (沿曲线族的分段光滑向量场)

设 Γ 是容许曲线族，沿 γ 的一个分段光滑向量场，是指一个（连续的）沿 Γ 的向量场，使得对于某个 Γ 的容许分划 $(a_0,\cdots,a_k)$，有向量场在每个矩形 $J\times[a_{i-1},a_i]$ 上的限制是光滑的。

Remark 若 V 是沿 Γ 的一个分段光滑的向量场，我们可以分别计算 V 沿主曲线和耿介曲线的协变导数；得到的沿 Γ 的向量场分别记作 D_tV 和 D_sV。

命题 1.1

设 Γ 是一个容许曲线族，它可以定义出 $\partial_s\Gamma$ 是沿 Γ 分段光滑的向量场。

Proof 由 Γ 的光滑性，在每一个矩形上都可以分别定义光滑的 $\partial_s\Gamma$，$\partial_s\Gamma$ 沿集合 $J\times\{a_i\}$ 的取值仅依赖于 Γ 在 $J\times\{a_i\}$ 上的取值，故分别定义在在 $J\times[a_{i-1},a_i]$ 和 $J\times[a_i,a_{i+1}]$ 的 $\partial_s\Gamma$ 在交集上一致。最后由粘合引理可知 $\partial_s\Gamma$ 在 $J\times[a,b]$ 是连续的。 □

定义 1.8 (变分场)

设 Γ 是 γ 的变分，Γ 的变分场是指沿 γ 分段光滑的向量场 $V(t)=\partial_s\Gamma(0,t)$ [a]。

[a]在 γ 的变换行为 Γ 下，γ 在开始时的变化趋势。

定义 1.9

称沿 γ 的向量场 V 为一个真向量场，若 $V(a)=0$ 且 $V(b)=0$。

引理 1.1

若 γ 是容许曲线，V 是沿 γ 逐段光滑的向量场，则 V 是某个 γ 的变分的变分场。若 V 是真向量场，则变分也可以被取成真变分。

Proof 设 γ 和 V 满足条件，对于使得 $\exp_{\gamma(t)}(sV(t))$ 有定义的 s,t，我们令 $\Gamma(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(sV(t))$。由 $[a,b]$ 的紧性，存在 $\varepsilon>0$，使得 Γ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$ 上有定义。通过复合映射，在每个使得 V

光滑的 $[a_{i-1}, a_i]$ 上，Γ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ 上光滑。由指数映射的性质，

$$\Gamma_s(0, t) = \partial_s\left(\exp_{\gamma(t)}(sV(t))\right) = \partial_s\left(\sigma_{V(t)}(s)\right) = \sigma'_{V(t)}(0) = V(t)$$

其中 $\sigma_{V(t)}$ 表示以 $V(t)$ 为初速度的测地线。故 Γ 的变分场是 V。此外，若 $V(a) = 0$ 且 $V(b) = 0$，则上述定义给出 $\Gamma(s, a) \equiv \gamma(a)$，$\Gamma(s, b) \equiv \gamma(b)$，故 Γ 是真变分。

□

引理 1.2 (对称引理)

设 $\Gamma : J \times [a, b] \to M$ 是一个容许曲线族。在使得 Γ 光滑的矩形 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上，有

$$D_s\partial_t\Gamma = D_t\partial_s\Gamma$$

♡

Proof 命题是局部的，我们在 $\Gamma(s_0, t_0)$ 周围的一个局部坐标 (x^i) 上考虑。设 Γ 在其上写作 $\Gamma(s, t) = \left(x^1(s, t), \cdots, x^n(s, t)\right)$，则

$$\partial_t\Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t}\partial_k; \quad \partial_s\Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s}\partial_k$$

由测地线的坐标公式

$$D_s\partial_t\Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$$
$$D_t\partial_s\Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial t\partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$$

交换第二行 i, j 的次序，并由联络的对称性 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 可得二者相等。

□

1.2 极小曲线是测地线

定理 1.1 (第一变分公式)

设 (M, g) 是 Riemann 流形，设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是单位速度容许曲线，$\Gamma : J \times [a, b] \to M$ 是 γ 的一个变分，V 是它的变分场，则 $L_g(\Gamma_s)$ 是 s 的一个光滑函数，并且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = -\int_a^b \left\langle V, D_t\gamma'\right\rangle \mathrm{d}t\text{[1]} - \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle V(a_i), \Delta_i\gamma'\right\rangle\text{[2]} \\ + \left\langle V(b), \gamma'(b)\right\rangle - \left\langle V(a), \gamma'(a)\right\rangle\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $(a_0, \cdots, a_k)$ 是 V 的一个容许分划，对于每个 $i = 1, \cdots, k-1$，$\Delta_i\gamma' := \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-)$ 是速度向量场 γ' 在 a_i 处的跳跃。特别地，若 Γ 是真变分，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = -\int_a^b \left\langle V, D_t\gamma'\right\rangle \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle V(a_i), \Delta_i\gamma'\right\rangle \tag{1.2}$$

内部弯曲成本：平均速度变化的横向弯曲趋势的总和

能量（长度）变化的贡献 = 端点的推动作用-内部的弯曲成本-连接点的折角成本

Proof 在每个使得 Γ 光滑的矩形 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上，由于 $L_g(\Gamma_s)$ 的被积函数是定义在紧集上的光滑函数，故可以做任意次积分下求导，由于 $L_g(\Gamma_s)$ 是这些积分的总和，故它是 s 的光滑函数。

方便起见，引入记号

$$T(s,t) = \partial_t \Gamma(s,t), \quad S(s,t) = \partial_s \Gamma(s,t)$$

在区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_g\left(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}\right) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T\rangle^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2} \langle T, T\rangle^{-\frac{1}{2}} 2 \langle D_s T, T\rangle\ \mathrm{d}t^{3} \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T|} \langle D_t S, T\rangle\ \mathrm{d}t^{4}\end{aligned}$$

在 $s=0$ 处取值，由于 $S(0,t) = V(t), T(0,t) = \gamma'(t)$（长度为 1）。我们有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g\left(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}\right) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \gamma'(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle V, \gamma'(t)\rangle - \langle V, D_t\gamma'(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\gamma'(t)\rangle\ \mathrm{d}t + \langle V, \gamma'(a_i^-)\rangle - \langle V, \gamma'(a_{i-1}^+)\rangle\end{aligned}$$

对 i 求和即得所需公式。 □

定理 1.2 (弧长参数化极小曲线的测地性)

Riemann 流形上的极小曲线若有单位速度参数化，则为一个测地线。

Idea 根据变分公式，在弯折不存在的情况下，因为没有改变长度的趋势，故无非产生依赖于速度变化的真弯曲，而速度变化在通过 bump 函数削弱端点影响后本身给出一种真弯曲，故速度变化无法产生。此时进一步地，无法产生依赖于弯折的真弯曲，而定点的弯折也可以被逐段光滑的真弯曲实现，故弯折也是无法产生的。

Proof 设 $\gamma : [a,b] \to M$ 是单位速度的极小曲线，$(a_0, \cdots, a_k)$ 是 γ 的一个容许分划。任取 γ 的真变分 Γ，则 $L_g(\Gamma_s)$ 是关于 s 的光滑函数，使得它在 $s=0$ 处达到极小值，故 $\mathrm{d}(L_g(\Gamma_s))/\mathrm{d}s$ 在 $s=0$ 处成立。由于每个沿 γ 的真向量场都是某个真变分的变分场，故方程1.2 的右侧对于任意这样的 V 退化。

首先说明 $D_t\gamma' = 0$ 在每个区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上成立。对于给定的这样的区间，令 $\varphi \in C^\infty(M)$ 是在 (a_{i-1}, a_i) 上大于零，其他点等于零的 bump 函数。将真向量场 $V = \varphi D_t\gamma'$ 带入1.2右侧，得

[3] Levi-Civita 联络的度量性

[4] 1.2

到
$$0=-\int_{a_{i-1}}^{a_i}\varphi\left|D_t\gamma'\right|^2\,\mathrm{d}t$$
故 $D_t\gamma'=0$ 在每个子区间上成立。

接下来说明 $\Delta_i\gamma'=0$ 对于每个 0 和 k 之间的 i 成立。对于每个这样的 i，通过坐标卡上的光滑 bump 函数，构造一个沿 γ 的逐段光滑的向量场 V，使得 $V(a_i)=\Delta_i\gamma'$，对于 $j\neq i$，$V(a_j)=0$ [5]。则 1.2化为 $-\left|\Delta_i\gamma'\right|^2=0$，故 $\Delta_i\gamma'=0$ 对于每个 i 成立。

最后，每个单侧速度向量在 a_i 处相接，a_i 处以 $\gamma'\left(a_i^+\right)=\gamma'\left(a_i^-\right)$ 为初速度的局部测地线的存在唯一性给出 $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 和 $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 落在同一个极大测地线上，因此 γ 是光滑的。 □

推论 1.1

单位速度容许曲线 γ 是 L_g 的一个临界点，当且仅当它是一个测地线。 ♡

Proof 若 γ 是一个临界点，则上面定理的证明可以不加修饰地用来说明 γ 是一个测地线。反之，若 γ 是一个测地线，则方程 1.2右侧的第一项由测地线方程可知是退化的，第二项由 γ' 无间断可知是退化的。

□

1.3 测地线的局部极小性

定义 1.10 (局部极小)

令 (M,g) 是 Riemann 流形，称一个正则（或分段正则）曲线 $\gamma:I\to M$ 是局部极小的，若每个 $t_0\in I$ 都有邻域 $I_0\subseteq I$，使得任取 $a,b\in I_0$ 满足 $a<b$，都有 γ 在 $[a,b]$ 上的限制是极小的。 ♣

Remark 每个极小的容许曲线段都是局部极小的。

定义 1.11 (开测地球)

若 $\varepsilon>0$ 使得 $\exp_p$ 是球 $B_\varepsilon(0)\subseteq T_pM$（在 g_p 定义的范数下）到像集的微分同胚，则像集 $\exp_p\left(B_\varepsilon(0)\right)$ 是 p 的一个法邻域，称为是 M 上的一个（开）测地球 。 ♣

定义 1.12 (闭测地球)

若闭球 $\overline{B}_\varepsilon(0)$ 含于一个开集 $V\subseteq T_pM$，使得 $\exp_p$ 是 V 到其像集的微分同胚，则称 $\exp_p\left(\overline{B}_\varepsilon(0)\right)$ 为一个闭测地球，并称 $\exp_p\left(\partial B_\varepsilon(0)\right)$ 为一个测地球面。 ♣

Remark

[5] 利用 bump 函数提取一些点

1. 在 T_pM 上，紧集 $\overline{B}_\varepsilon(0)$ 和闭集 V^c 之间有正的距离，故存在 $\varepsilon' > \varepsilon$，使得 $B_{\varepsilon'}(0) \subseteq V$，故每个闭测地球都含于一个更大的开测地球。
2. 在以 p 为中心的 Riemann 法坐标下，以 p 为中心的开闭测地球和测地球面，无非就是以 p 为中心的坐标球和坐标球面。

定义 1.13

设 U 是 $p \in M$ 的一个法邻域。给定 U 上以 p 为中心的法坐标 $\left(x^i\right)$，定义径向距离函数$r : U \to \mathbb{R}$，

$$r(x) = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \cdots + \left(x^n\right)^2}$$

并定义 $U \setminus \{p\}$ 上的径向向量场 ∂_r

$$\partial_r = \frac{x^i}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

♣

引理 1.3

在每个 $p \in M$ 的法邻域 U 上，径向距离函数和径向向量场是良定义的，无关于法坐标的选取。r, ∂_r 均在 $U \setminus \{p\}$ 上光滑，r^2 在 U 上光滑。

♡

Proof 由**??**，设两个法坐标之间相差一个正交矩阵 $\left(A^i_j\right)$，设两个法坐标的径向距离函数分别是 $r, \tilde{r}$，径向向量场分别是 $\partial_r, \tilde{\partial}_r$，则

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(x) &= \sqrt{\left(\tilde{x}^1\right)^2 + \cdots + \left(\tilde{x}^n\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(A^1_i x^i\right)^2 + \cdots + \left(A^n_i x^i\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_i \sum_{k=1}^n \left(A^k_i\right)^2 \left(x^i\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_i \left(x^i\right)^2} = r(x)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\partial_{\tilde{r}} &= \frac{\tilde{x}^i}{\tilde{r}(x)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \\
&= \frac{\tilde{x}^i}{r(x)} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \frac{A^i_j x^j}{r(x)} \frac{\partial \left(A^k_j \left(x^k\right)\right)}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \frac{A^i_j x^j}{r(x)} A^i_j \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \frac{x^j}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x^j} = \partial_r
\end{aligned}$$

光滑性由分量表示可以见得。

□

定理 1.3 (Gauss 引理)

设 (M,g) 是 Riemann 流形，U 是以 $p\in M$ 中心的测地球，∂_r 表示 $U\setminus\{p\}$ 上的径向向量场。则 ∂_r 是 $U\setminus\{p\}$ 上的正交于测地球面[a]的单位向量场。

[a]即与交点处的切空间正交

♡

Idea ∂_r 由法坐标给出，利用法坐标的性质计算模长。过程中利用到以下重要事实：

1. 径向向量场形式上于点坐标整体相差一个 $r(x)$，速度与点从形式上整体相差一个倍数的曲线是坐标直线，法坐标上的坐标直线就是测地线。
2. 测地线是速度不变的。
3. 法坐标下的度量分量与欧式度量相同。
4. 法坐标下的曲线速度就是对各分量求导[6]

于是我们将一点 q 处的径向向量场 $\partial_r|_q$ 刻画为单位速度测地线在某点处的速度，给出 ∂_r 的模长。

Idea 将切向量用曲线 σ 表示，考虑将 σ 沿径向单位速度地变换到原点得到一个曲线族。证明中会看到，由于径向变换是沿测地线的变换，且变换是均匀的，并且横向曲线在球面上，与原点距离恒等，故 S,T 的正交性不随时间变化。这样原点的正交性就可以给出所需点的正交性。

Proof 设 (x^i) 是 U 上以 p 为中心的法坐标。任取 $q\in U\backslash\{p\}$，设 q 的坐标表示为 $q=\left(q^1,\cdots,q^n\right)$，并记 $b:=r(q)=\sqrt{\left(q^1\right)^2+\cdots+\left(q^n\right)^2}$，我们有 $\partial_r|_q=\frac{q^i}{b}\frac{\partial}{\partial x^i}|_q$。

令 $v=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\in T_pM$ 是 p 处的一个切向量，分量 $v^i=\frac{q^i}{b}$，考虑以 p 为起点，v 为初速度的测地线[7]，在它在法坐标下的坐标表示为

$$\gamma_v(t)=\left(tv^1,\cdots,tv^n\right)$$

我们有

$$\left|\gamma_v'(0)\right|_g=|v|_g=\sqrt{\left(v^1\right)^2+\cdots+\left(v^n\right)^2}=\frac{1}{b}\sqrt{\left(q^1\right)^2+\cdots+\left(q^n\right)^2}=1$$

故 γ_v 是单位速度测地线，又 $\gamma_v(b)=\left(q^1,\cdots,q^n\right)=q$，$\gamma_v'(b)=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_q=\partial_r|_q$，这表明 $\partial_r|_q$ 是单位向量。

接下来说明正交性，取 q,b,v 如上，令 $\Sigma_b=\exp_p\left(\partial B_b(0)\right)$ 是包含了 q 的测地球面。令 $w\in T_qM$ 在 q 点处与 $\sum_n$ 相切，希望证明 $\left\langle w,\partial_r|_q\right\rangle_g=0$。

选取 Σ_b 上的光滑曲线 $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Sigma_b$，使得 $\sigma(0)=q,\sigma'(0)=w$。设 σ 在 (x^i) 下的坐标

[6]因为 Christoffel 符号退化

[7]径向测地线

表示为 $\sigma(s)=\left(\sigma^1(s),\cdots,\sigma^n(s)\right)$。定义曲线族 $\Gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,b]\to U$

$$\Gamma(s,t):=\left(\frac{t}{b}\sigma^1(s),\cdots,\frac{t}{b}\sigma^n(s)\right)$$

同样的记 $S=\Gamma_s,T=\Gamma_t$，则

$$\begin{aligned}
S(0,0)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\Gamma_s(0)=0\\
T(0,0)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Gamma_t(0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma_v(t)=v\\
S(0,b)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\sigma(s)=w\\
T(0,b)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=b}\gamma_v(t)=\gamma_v'(b)=\left.\partial_r\right|_q
\end{aligned}$$

因此当 $(s,t)=(0,0)$ 时，$\langle S,T\rangle=\langle 0,v\rangle=0$，此外当 $(s,t)=(0,b)$ 时，$\langle S,T\rangle=\left\langle w,\left.\partial_r\right|_q\right\rangle$。接下来只需要说明 $\langle S,T\rangle$ 与 t 无关，计算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle S,T\rangle&=\langle D_tS,T\rangle+\langle S,D_tT\rangle\quad(\text{联络的度量性})\\
&=\langle D_sT,T\rangle+\langle S,D_tT\rangle\quad(\text{对称引理})\\
&=\langle D_sT,T\rangle\qquad(\Gamma_s(t)\ \text{是测地线})\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|T|^2\equiv 0,\quad\left(|T|=\left|\Gamma_s'\right|\equiv 1\right)
\end{aligned}$$

这就证明了定理。 □

推论 1.2

令 U 是以 $p\in M$ 为中心的测地球，r,∂_r 分别是径向距离和径向向量场。则 $\operatorname{grad} r=\partial_r$ 在 $U\setminus\{p\}$ 上成立。 ♡

Remark 有事实：设 $f\in C^\infty(M),X\in\mathfrak{X}(M)$ 无处退化。则 $X=\operatorname{grad}$，当且仅当 $Xf\equiv|X|_g\,sr$，且 X 与 f 在所有正则点处的水平集正交。

Proof 只需证明 ∂_r 与 r 的水平集正交，且 $\partial_r(r)\equiv|\partial_r|_g^2$。由于 r 的水平集就是测地球面，故第一个断言由 Gauss 引理直接得到。对于第二个断言，可以直接计算得到 $\partial_r(r)=1$，并由 Gauss 引理知 $|\partial_r|_g\equiv 1$ 得到命题。 □

命题 1.2

设 (M,g) 是 Riemann 流形。令 $p\in M$，q 是含于某个以 p 为中心的测地球。则从 p 到 q 的径向测地线是唯一的（不计重参数化）的从 p 到 q 的 M 上的极小曲线 ♠

Proof 取 $\varepsilon>0$，使得 $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ 是包含了 q 的一个测地球。令 $\gamma:[0,c]\to M$ 是 p 到 q 的弧长参数化的径向测地线。则 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 对某个单位向量 $v\in T_pM$ 成立。此时 $L_g(\gamma)=c$。

为了说明 γ 极小，任取 p 到 q 的容许曲线 $\sigma:[0,b]\to M$，不妨设它也是弧长参数化的。设

$a_0 \in [0, b]$ 是最后一次使得 $\sigma(t) = p$ 的点[8]，$b_0 \in [0, b]$ 是 a_0 之后第一次使得 $\sigma(t)$ 到达 p 为中心 c 为半径的测地球 Σ_c 的点[9]。则 $r \circ \sigma$ 在 $[a_0, b_0]$ 上连续，(a_0, b_0) 上分段光滑，由微积分基本定理

$$\begin{aligned} r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(\sigma(t))\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \mathrm{d}r\left(\sigma'(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \left\langle \operatorname{grad} r, \sigma'(t) \right\rangle_g \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{a_0}^{b_0} |\operatorname{grad} r| \left|\sigma'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \left|\sigma'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &= L_g\left(\sigma|_{[a_0, b_0]}\right) \leq L_g(\sigma) \end{aligned} \tag{1.3}$$

因此 $L_g(\sigma) \geq r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) = c$，故 γ 是极小的。

现在设 $L_g(\sigma) = c$，则方程 1.3 中的不等号都化为等号。不妨设 σ 是单位速度曲线，则第二个不等号给出 $a_0 = 0, b_0 = b = c$。第一个不等号给出非负项 $\left|\operatorname{grad} r_{\sigma(t)}\right| |\sigma'(t)| - \langle \operatorname{grad} r, \sigma'(t)\rangle_g$ 恒为零。这当且仅当 $\sigma'(t)$ 与 $\operatorname{grad} r$ 相差一个正的系数，又 σ 是单位速度的，$\sigma'(t) = \operatorname{grad} r|_{\sigma(t)} = \partial_r|_{\sigma(t)}$。因此 σ 和 γ 都是 ∂_r 在 $t = c$ 时过 q 的积分曲线故 $\sigma = \gamma$。 □

推论 1.3

设 (M, g) 是连通的 Riemann 流形，$p \in M$。在每个以 p 为中心的开或闭的测地球上，径向距离函数 $r(x)$ 与 M 中 p 到 x 的 Riemann 距离相等。 ♡

Proof 闭的径向测地球含于更大的开的测地球，我们只证明开的情况即可。设 x 在开测地球 $\exp_p(B_c(0))$ 上，则又上面的命题，p 到 x 的径向测地线 γ 是极小的。它的速度向量等于 ∂_r，同时是 $g-$ 范数下的单位向量和法坐标的欧式范数[10]下的单位向量，给出 γ 的 g-长度等于欧式长度，后者又等于 $r(x)$。

□

推论 1.4

在连通的 Riemann 流形上，每个开或闭的测地球也是有着相同半径的开或闭的度量球，每个测地球面也是有着相同半径的度量球面。 ♡

Proof 设 (M, g) 是 Riemann 流形，任取 $p \in M$，令 $V = \exp_p\left(\bar{B}_c(0)\right) \subseteq M$ 是半径为 $c > 0$ 的

[8] 为了让曲线在区间内不经过原点（奇点

[9] 为了让它不跑出测地球径向距离函数的定义域

[10] 在坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 上看

绕 p 的闭测地球。任取 M 上一点 q，若 $q\in V$，则上面的推论给出 q 在以 p 为中心，c 为半径的度量球中。反之，若 $q\notin V$，则考虑从 p 到 q 的容许曲线 γ。设 S 是以 p 为中心，c 为半径的测地球面。则 $S^c=\exp_p\left(B_c\left(0\right)\right)\cup\left(M\setminus\exp_p\left(B_c\left(0\right)\right)\right)$ 是不连通的。故存在 $t_0\in(a,b)$，使得 $\gamma\left(t_0\right)\in S$。由于 $q\notin V$，q 和 $\gamma\left(t_0\right)$ 之间存在正的距离，故 $L_g\left(\gamma\right)>L_g\left(\gamma|_{[a,t_0]}\right)\geq c$，这表明 $d_g\left(p,q\right)>c$，q 不在绕 p 的半径为 c 的闭度量球中。

现在设 $W=\exp_p\left(B_c\left(0\right)\right)$ 是以 c 为半径的开的测地球，则 W 可以写成一些闭测地球的并，这些闭测地球也同时是一些闭的度量球，这些闭的度量球并成绕 p 的半径为 c 的度量球。故开的测地球也是相同半径的度量球。

最后关于球面的结论可通过闭球划去开球得到。

□

定义 1.14

对于度量球、球面的记号 $B_c\left(p\right),\bar{B}_c\left(p\right),S_c\left(p\right)$，也可以用来表示测地球。♣