目录

第 0 章 练习 1

第 0 章 练习

Problem 0.1 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集, $f: U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 令 $M = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 f 的图像, 配备了诱导 Riemann 度量和向上的单位法向量场.

1. 计算图像坐标下形状算子的分量, 用 f 及其偏导数表示.
2. 令 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $f(x) = |x|^2$ 定义的抛物面. 计算 M 的主曲率.

Solution

1. 设 M 由 X 参数化

$$X\left(u^1, \cdots, u^n\right) = \left(u^1, \cdots, u^n, f(u)\right)$$

度量

$$g = X^* \bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + f_i^2\right) \left(\mathrm{d}u^i\right)^2 + 2 \sum_{i \neq j} f_i f_j \, \mathrm{d}u^i \, \mathrm{d}u^j$$

则

$$X_i\left(u^1, \cdots, u^n\right) = (0, \cdots, 1, \cdots, 0, f_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

一个法向量 N_1 为

$$N\left(u^1, \cdots, u^n\right) = (-f_1, \cdots, -f_n, 1)$$

一个单位法向量为

$$N = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} (-f_1, \cdots, -f_n, 1)$$

$$h_{ij} = \langle s(X_i), X_j \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^i u^j}, N \right\rangle = \frac{f_{ij}}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}}$$

这是参数坐标下的坐标表示.

接下来计算欧式坐标上的坐标表示. 在坐标下

$$N\left(x^1, \cdots, x^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} (-f_1, \cdots, -f_n, 1)$$

其中右侧在 $(x^1, \cdots, x^n)$ 上取值.

$$s(\partial_i) = -\overline{\nabla}_{\partial_i} N = \sum_{j=1}^{n} \partial_i \left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} f_j \right) \partial_j - \partial_i \left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} \right) \partial_{n+1}$$

当 $i=1,\cdots,n$ 时，其中

$$\partial_i \frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}} = -\frac{\sum_{k=1}^n f_k f_{ki}}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\nabla f \cdot \nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \partial_i f_j = f_{ji}$$

于是

$$s\left(\partial_i\right) = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{f_j \nabla f \cdot \nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f_{ji}}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}} \right) \partial_j + \frac{\nabla f \cdot \nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \partial_{n+1}$$

或者写成

$$s_i^j = \left\langle s\left(\partial_i\right), \partial_j \right\rangle = -\frac{f_j \nabla f \cdot \nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f_{ji}}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}, \quad i,j=1,\cdots,n$$

此外

$$s\left(\partial_{n+1}\right) = 0$$

由于 $X^*\left(\partial_i\right) = \frac{\partial}{\partial u^i}, i=1,\cdots,n$. 在图像坐标的坐标表示下,$s$ 的形式与欧式坐标下的相同.

2.

$$f_{ij} = 2\delta_i^j, \quad |\nabla f|^2(u) = 4|u|^2$$

$$\nabla f = 2x^k \partial_k, \quad \nabla f_i = 2\partial_i$$

于是

$$s_i^j = -\frac{8u^j u^i}{\left(4|u|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\delta_i^j}{\sqrt{4|u|^2+1}}$$

由于抛物面是旋转曲面，任一点出的主曲率与它旋转到第一个坐标平面上的主曲率相同. 只需要计算 $x=(a,0,\cdots,0)$ 处的主曲率. 此时

$$s_1^1 = \frac{2}{(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad s_i^i = \frac{2}{\sqrt{4|u|^2+1}}(i \neq 1), \quad s_{ij} = 0\,(i \neq j).$$

主曲率为

$$\kappa_1 = \frac{2}{\left(4|u|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_2 = \cdots = \kappa_n = \frac{2}{\sqrt{4|u|^2+1}}$$

Problem 0.2 令 (M,g) 是 Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 超曲面，F 是 M 的一个局部定义函数，令 $N = \mathrm{grad}\ F / |\mathrm{grad}\ F|$

1. 说明 M 关于单位法向量 N 的标量第二基本形式由以下给出
$$h(X,Y)=-\frac{\tilde{\nabla}^2 F(X,Y)}{|\text{grad } F|}$$
对于所有的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.
2. 说明 M 的平均曲率由以下给出
$$H=-\frac{1}{n}\operatorname{div}_{\tilde{g}}\left(\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}\right)$$
其中 $n=\dim M$, $\operatorname{div}_{\tilde{g}}$ 是 $\tilde{g}$ 的散度算子.

Proof

1. $$\tilde{\nabla}^2 F(X,Y)=X(YF)-\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)F$$
其中
$$YF=\langle\text{grad } F,Y\rangle=0$$
此外,
$$\begin{aligned}0&=\tilde{\nabla}_X\langle\text{grad } F,Y\rangle\\&=\left\langle\tilde{\nabla}_X\text{grad } F,Y\right\rangle+\left\langle\text{grad } F,\tilde{\nabla}_X Y\right\rangle\\&=|\text{grad } F|\left\langle\tilde{\nabla}_X N,Y\right\rangle+\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)F\\&=-|\text{grad } F|\,h(X,Y)-\tilde{\nabla}^2 F(X,Y)\end{aligned}$$

□

Problem 0.3 设 C 是半平面 $H=\{(r,z):r>0\}$ 上的嵌入光滑曲线.$S_c\subseteq\mathbb{R}^3$ 是 C 生成的旋转曲面. $\gamma(t)=(a(t),b(t))$ 是 C 的一个单位速度参数化. X 是对应的 S_C 的局部参数表示.

1. 计算 S_C 的形状算子和主曲率, 用 a,b 表示, 并说明每一点的主方向都与子午线和纬圆相切.
2. 说明 S_C 在 $X(t,\theta)$ 处的 Gauss 曲率等于 $-a''(t)/a(t)$.

Proof

- $$X(t,\theta)=(a(t)\cos\theta,a(t)\sin\theta,b(t))$$
- $$X_1=(a'(t)\cos\theta,a'(t)\sin\theta,b'(t))$$

- $$X_2 = (-a(t)\sin\theta, a(t)\cos\theta, 0)$$
- $X_1 \times X_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a'\cos\theta & a'\sin\theta & b' \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = (-ab'\cos\theta, -ab'\sin\theta, aa')$
- $|X_1 \times X_2| = \sqrt{a^2(b')^2 + a^2(a')^2} = a$
- 一个法向量为 $N = (-b'\cos\theta, -b'\sin\theta, a')$
- $X_{11} = (a''\cos\theta, a''\sin\theta, b'')$，$h_{11} = \langle X_{11}, N\rangle = -a''b' + a'b''$
- $X_{12} = (-a'\sin\theta, a'\cos\theta, 0)$，$h_{12} = \langle X_{12}, N\rangle = 0$
- $X_{22} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$, $h_{22} = \langle X_{22}, N\rangle = ab'$
- $$s\mathbf{x} = \mathbf{x}\begin{pmatrix} -a''b' + a'b'' & 0 \\ 0 & ab' \end{pmatrix}$$
- (t, θ) 处子午线的切向就是 X_1, 纬圆的切向就是 X_2.
- $\det h = -aa''(b')^2 + aa'b'b''$
- 对 $(a')^2 + (b')^2 + 1$ 求导, 得到
$$2a'a'' + 2b'b'' = 0 \implies b'b'' = -a'a''$$
  于是
$$\det h = -aa''(b')^2 - aa''(a')^2 = -aa''$$
- $$\begin{aligned} g = X^*\bar{g} = & \ \mathrm{d}(a\cos\theta)^2 + \mathrm{d}(a\sin\theta)^2 + \mathrm{d}(b)^2 \\ & = (a'\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 + (a'\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 \\ & + (b'\,\mathrm{d}t)^2 \\ & = \mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$
- $\det g = a^2$
- $K = (\det g)^{-1}\det h = -\frac{a''}{a}$
- $\kappa_2 = \frac{b'}{a}$, $\kappa_1 = \frac{K}{\kappa_2} = -\frac{a''}{b'}$

$\square$

Problem 0.4 说明存在 $\mathbb{R}^3$ 上的旋转曲面, 具有恒等于 1 的 Gauss 曲率, 而主曲率不是常值的.

Remark 事实上, 这个曲面局部等距同构于 $\mathbb{S}^2$. 它给出了两个 $\mathbb{R}^3$ 上局部等距同构但有不同主曲率的非平坦曲面.

Proof 上题给出了旋转曲面的 Gauss 曲率为 $-a''(t)/a(t)$, 解 ODE, 得到 $a(t)=\cos t$ 满足 $-a''(t)/a(t)=1$. 取 $b(t)=t$, 考虑 $\gamma(t)=(\cos t, t)$ 是定义在合适区间上的光滑曲线, 它生成的旋转曲面, 的 Gauss 曲率为 1, 主曲率为 $\kappa_1=-\frac{a''}{b'}=\cos t, \kappa_2=\frac{b'}{a}=\csc t$.

□

Problem 0.5 令 $S\subseteq\mathbb{R}^3$ 是 $z=x^2+y^2$ 给出的抛物面, 配备了诱导度量. 证明 S 只在一点是迷向的.

Proof 考虑参数化

$$X:(u_1,u_2)\mapsto\left(u_1,u_2,u_1^2+u_2^2\right)$$

则

$$\kappa_1=\frac{2}{\left(4|u|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \kappa_2=\frac{2}{\sqrt{4|u|^2+1}}$$

设对应的特征向量分别为 v_1,v_2. 若 S 在一点处迷向, 则存在保持 p 点的等距同构 φ, 使得 $(\mathrm{d}\varphi)_p v_1=v_2$. 则

$$\kappa_2 v_2=s v_2=s\left((\mathrm{d}\varphi)_p v_1\right)=\pm(\mathrm{d}\varphi)_p(s v_1)=\pm(d\varphi)_p(\kappa_1 v_1)=\pm\kappa_1 v_2$$

由于 $\kappa_1,\kappa_2>0$, 只能有 $\kappa_1=\kappa_2$. 因此 S 在非原点处均不是迷香的. 而在原点处, $s_i^j=2\delta_i^j$, 特征向量正交. 通过一个旋转相互转化. 故 S 只在原点处是迷向的.

□

Problem 0.6 设 (M,g) 是 Riemann 流形, $\gamma: I\to M$ 是 M 上的一个正则 (不一定是单位速度的) 曲线. 说明 γ 在 $t\in I$ 处的测地曲率是

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\wedge D_t\gamma'(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

其中分子的范数被定义为

$$|\gamma'(t)\wedge D_t\gamma'(t)|:=\sqrt{|\gamma'(t)|^2|D_t\gamma'(t)|^2-\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle_g^2}$$

并说明在配备了欧式度量 $\mathbb{R}^3$ 上, 公式写作

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

Proof 弧长函数为

$$s(t)=\int_0^t|\gamma'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

$$\kappa\left(t\left(s\right)\right)=\left|D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)\right)'\right|$$

$$\gamma\left(t\left(s\right)\right)'=\gamma'\left(t\left(s\right)\right)t'\left(s\right)=\frac{\gamma'\left(t\left(s\right)\right)}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}$$

从而

$$D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)'\right)=\frac{D_s\left(\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right)}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}+D_s\left(\frac{1}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}\right)\gamma'\left(t\left(s\right)\right)$$

其中

$$D_s\left(\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right)=\nabla_{\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)\right)'}\gamma'\left(t\left(s\right)\right)=\nabla_{\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}}\gamma'\left(t\right)=\frac{D_t\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}$$

$$\begin{aligned}D_s\frac{1}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}\\&=-\frac{1}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|^2}D_s\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|\end{aligned}$$

由度量性，

$$D_s\left\langle\gamma'\left(t\left(s\right)\right),\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right\rangle=2\left\langle\gamma'\left(t\left(s\right),D_s\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right)\right\rangle=2\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}$$

$$D_s\left\langle\gamma'\left(t\left(s\right)\right),\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right\rangle^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}\left(D_s\left\langle\gamma'\left(t\left(s\right)\right),\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right\rangle\right)$$

于是

$$D_s\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|=\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2}$$

于是

$$D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)'\right)=\frac{D_t\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2}-\gamma'\left(t\right)\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^4}$$

模长的平方为

$$\begin{aligned}&\left\langle D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)'\right),D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)'\right)\right\rangle\\&=\frac{\left|D_r\gamma'\left(t\right)\right|^2}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^4}+\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle^2}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^6}-2\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^6}\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle\\&=\frac{\left|D_t\gamma'\left(t\right)\right|^2}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^4}-\frac{\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle^2}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^6}\\&=\frac{\left|\gamma'\left(t\right)\wedge D_t\gamma'\left(t\right)\right|^2}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^6}\end{aligned}$$

最终

$$\kappa\left(t\right)=\kappa\left(t\left(s\right)\right)=\left|D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)\right)\right|=\frac{\left|\gamma'\left(t\right)\wedge D_t\gamma'\left(t\right)\right|}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^3}$$

在欧式空间上, $\gamma'(t) \wedge D_t\gamma'(t)$ 和 $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ 通过 Hodge 星算子对应, 它们具有相同的范数.

$\square$

Problem 0.7 对于 $w > 0$, 令 $M_w \subseteq \mathbb{R}^3$ 是由 $\gamma(t) = \left(w\cosh\left(\frac{t}{w}\right), t\right)$ 绕 z 轴生成的旋转曲面, 成为悬链面. 说明 M_w 对于每个 w 都是极小曲面.

Proof 参数化为

$$X(t,\theta) = (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, t)$$

其中 $a(t) = w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)$

- $$\begin{aligned} g &= \mathrm{d}(a(t)\cos\theta)^2 + \mathrm{d}(a(t)\sin\theta)^2 + \mathrm{d}t^2 \\ &= (a'\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 + (a'\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 + \mathrm{d}t^2 \\ &= \left((a')^2 + 1\right)\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta^2 \\ &= \cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta^2 \end{aligned}$$
- $a'(t) = \sinh\left(\frac{t}{w}\right)$
- $a''(t) = \frac{1}{w}\cosh\left(\frac{t}{w}\right)$
- $X_1 = (a'\cos\theta, a'\sin\theta, 1) = \left(\sinh\left(\frac{t}{w}\right)\cos\theta, \sinh\left(\frac{t}{w}\right)\sin\theta, 1\right)$
- $X_2 = (-a\sin, a\cos, 0) = \left(-w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)\sin\theta, w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)\cos\theta, 0\right)$
- $X_1 \times X_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a'\cos & a'\sin & 1 \\ -a\sin & a\cos & 0 \end{pmatrix} = (-a\cos, -a\sin, aa') = a(-\cos, \sin, a')$
- $N = \left(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh\left(\frac{t}{w}\right)\right)\frac{1}{\cosh\left(\frac{t}{w}\right)}$
- $X_{11} = (a''\cos\theta, a''\sin\theta, 0), X_{22} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$
- $s_1^1 = \frac{1}{\cosh}(-a'')\frac{1}{\cosh^2} = -\frac{1}{w\cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)}, \quad s_2^2 = \frac{a}{\cosh}\frac{1}{a^2} = \frac{1}{w\cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)}$ 故平均曲率

$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^1 + s_2^2\right) = 0$$

$\square$

Problem 0.8 设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 Riemann 超曲面, N 是沿 M 的光滑单位法向量场. 在每个 $p \in M$, $N_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ 可以看做是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的单位向量, 从而视为 $\mathbb{S}^n$ 上面的一个点. 因此, 每个单位法向量场都给出一个车光滑映射 $\nu: M \to \mathbb{S}^n$, 称为是 M 的 Gauss 映射. 说明 $\nu^*\,\mathrm{d}V_{\mathring{g}} = (-1)^K\,\mathrm{d}V_g$, 其中 K 是 M 的 Gauss 曲率.