目录

第 0 章 练习

Problem 0.1 设 M 是光滑 n-流形, ∇ 是 TM 上的一个联络, (E_i) 是某个开子集 $U \subseteq M$ 上的局部标架, (ε^i) 是对偶的余标架.

1. 说明存在唯一的 U 上光滑 1-形式的 $n \times n$ 矩阵 $({\omega_i}^j)$, 称为这组标架的联络 1-形式, 使得

$$\nabla_X E_i = \omega_i^j(X) E_j$$

   对于所有的 $X \in \mathfrak{X}(U)$ 成立.

2. CARTAN 第一结构方程: 证明这些微分形式满足以下方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^j = \varepsilon^i \wedge \omega_i^j + \tau^j$$

   其中 $\tau^1, \cdots, \tau^n \in \Omega^2(M)$ 是挠 2-形式, 通过以下挠张量 τ 和局部标架 (E_i) 定义

$$\tau(X, Y) = \tau^j(X, Y) E_j$$

Proof 若存在这样的 1-形式 ω, 则

$$\Gamma_{ij}^k E_k = \nabla_{E_i} E_j = \omega_j^k(E_i) E_k$$

得到 $\omega_j^k(E_i) = \Gamma_{ij}^k, \forall i, j, k$. 于是我们定义

$$\omega_i^j(X) = X^k \Gamma_{ki}^j, \quad \forall X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$$

则由 Γ_{ki}^j 的光滑性, ω_i^j 是光滑的余标架. 对于任意的 $X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\nabla_X E_i = X^k \nabla_{E_k} E_i = X^k \Gamma_{ki}^l E_l = \omega_i^l(X) E_l = \omega_i^j(X) E_j$$

接下来证明 CARTAN 第一结构方程, 一方面

$$\mathrm{d}\varepsilon^j(E_k, E_l) = E_k\left(\varepsilon^j(E_l)\right) - E_l\left(\varepsilon^j(E_k)\right) - \varepsilon^j([E_k, E_l]) = -\varepsilon^j([E_k, E_l])$$

另一方面

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon^i \wedge \omega_i^j + \tau^j\right)(E_k, E_l) &= \varepsilon^i(E_k)\, \omega_i^j(E_l) - \varepsilon^i(E_l) \wedge \omega_i^j(E_k) + \tau^j(E_k, E_l) \\ &= \omega_k^j(E_l) - \omega_l^j(E_k) + \varepsilon^j(\tau(E_k, E_l))\end{aligned}$$

其中

$$\omega_k^j(E_l) = \varepsilon^j(\nabla_{E_l} E_k) = \Gamma_{lk}^j, \quad \omega_l^j(E_k) = \varepsilon^j(\nabla_{E_k} E_l) = \Gamma_{kl}^j$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^j(\tau(E_l, E_l)) &= \varepsilon^j(\nabla_{E_k} E_l - \nabla_{E_l} E_k - [E_k, E_l]) \\ &= \Gamma_{kl}^j - \Gamma_{lk}^j - \varepsilon^j([E_k, E_l])\end{aligned}$$

于是

$$\left(\varepsilon^j \wedge \omega_i^j + \tau^j\right)(E_k, E_l) = -\varepsilon^j([E_k, E_l]) = \mathrm{d}\varepsilon^j(E_k, E_l)$$

因此

$$\mathrm{d}\varepsilon^j = \varepsilon^i \wedge \omega_i^j + \tau^j$$

□