目录

第 1 章 解析函数

1.1 基本概念

定义 1.1

设 $E \subseteq \mathbb{C}$。

1. 若对于任意的 $z \in E$，存在唯一的 $w \in \mathbb{C}$与之对应，则称在 E上确定了一个（单值）单复变函数/映照/映射 $f : E \to \mathbb{C}$ 。
2. 若对于任意的 $z \in E$，存在若干 $w \in \mathbb{C}$（有限或无限）与之对应，且存在 $z \in E$，使得与之对应的 w指数有两个（包含无穷），则称在 E上确定了一个多只函数（不是函数）。

♣

Remark

1. 若非明确指出，“函数”皆指单值函数。

定义 1.2

设 $E, A \subseteq \mathbb{C}$， $f : E \to A$是函数。

1. 若对于任意的 $x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f是一个单射。
2. 若对于任意的 $y \in A$，都存在 $x \in E$，使得 $f(x) = y$，则称 f是满射。
3. 若 f是既单又满的，则称 f是一个双射。

♣

Remark

1. 若 f为双射，则存在反函数 $f^{-1} : A \to E$。
2. 若 $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则称函数 $f : E \to \mathbb{C}$唯一个（复数）数列/序列。

Example 1.1

$$w = f(z) = \text{Re } f(z) + i \,\text{Im } f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

复变函数无非是一对二元实函数。

Example 1.2

- 考虑函数 $w = \bar{z}$，它是关于 x轴的镜像。
- 考虑 $w := f(z) := z^2$，它是对模长取平方，辐角翻倍的映射。
  - 例如对于 $A = \left\{2e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$， $f(A) = \left\{4e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \pi\right\}$ 。
  - 设 B为倾角为 $\frac{\pi}{3}$的直线， $B = \left\{z : \arg\, z = \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{z : \arg\, z = \frac{4\pi}{3}\right\} \cup \{0\}$ 则 $f(B) = \left\{z : \arg\, z = \frac{2\pi}{3}\right\} \cup \{0\}$ ，它把一个直线变成了一个射线；
  - 考虑双曲线 $C := x^2 - y^2 = 4$，令 $w = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

练习 1.1 当 $\left\{2xy : x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 4\right\} = \mathbb{R}$。
故 $f(C) = \{w : \text{Re } w = 4\}$

- 考虑 $(x, y) \to \left(x^2, x + y\right)$，则

$$
\begin{aligned}
w &= x^2 + i(x + y) \\
&= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\
&= \frac{z^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z
\end{aligned}
$$

1.2 极限和连续

定义 1.3

设 $f : E \to \mathbb{C}$是函数，z_0是 E的一个聚点。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, f, z_0) > 0$，使得对于任意的 $z \in E$，$0 < |z - z_0| < \delta$时，都有 $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$。则称 z趋于 z_0时，$f(z)$趋于（极限为）α。记作 $\lim_{z \to z_0, z \in E} f(z) = \alpha$，或者简记 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$，也称 $f(z) \to \alpha$当$z \to z_0$。

Remark

1. z_0是 E的聚点未必有 $z_0 \in E$;

命题 1.1

若将 $f : E \to \mathbb{C}$写作 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$，$\alpha = a + ib$，$a, b, x_0, y_0 \in \mathbb{R}, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。则

$$
\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b \end{cases}
$$

Example 1.3

记 $L_1 := \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} u(x, y)$，$L_2 = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} u(x, y)$，$L_3 = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y)$

1. 考虑

$$
u(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$

   $(x_0, y_0) = (0, 0)$，则 $L_1 = 0$，L_2不存在，但是 L_3存在。

2. 考虑

$$
u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}
$$

$(x_0, y_0) = (0, 0)$。则 $L_1 = 1$， $L_2 = -1$，但是 L_3不存在。

3. 考虑

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

此时 $L_1 = L_2$，但是 L_3不存在。

命题 1.2

考虑 $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$，设 N为北极点， A'_k为 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$在Riemann球面上对应的点，则 N为 $\{A'_1, A'_2, \cdots\}$ 的一个聚点； ∞为 $\{1, 2, \cdots\}$的一个聚点。

定义 1.4

考虑 $E \subseteq \mathbb{C}$， $f : E \to \mathbb{C}$是函数， $z_0 \in \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$为 E的聚点。对于 $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$，称 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$，若对于任意的 α的开邻域 $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$，都存在 z_0的开邻域 $U \subseteq \mathbb{C}_\infty$，使得对于任意的 $z \in (E \cap U) \setminus \{z_0\}$，都有 $f(z) \in V$。

练习 1.2 翻译 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$， $\lim_{z \to \infty} f(z) = \alpha$，其中 $z_0, \alpha \in \mathbb{C}$（用 $\varepsilon - \delta$ 语言）。

定义 1.5 (连续)

设 $f : E \to \mathbb{C}$是函数， $E \subseteq \mathbb{C}$。$z_0 \in E$是 E的聚点。若 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 f在 z_0处连续。

Remark

1. 若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，则 f在 $z_0 = x_0 + iy_0$处连续，当且仅当 u, v均在 (x_0, y_0)处连续。

定义 1.6 (一致连续)

设 $E \subseteq \mathbb{C}$， $f : E \to \mathbb{C}$是函数。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$，使得对于任意的 $z', z'' \in E$，只要 $|z' - z''| < \delta$，就有 $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$。

定理 1.1

设 $E \subseteq \mathbb{C}$是一个紧集。若 $f : E \to \mathbb{C}$是连续的，则称 f在 E上一致连续。

Remark

- 例如 E是一个 Jordan曲线、有界闭区域。

Proof 任取$\varepsilon > 0$。由连续性，对于任意的 $a \in E$，都存在一个 $r_a > 0$，使得对于任意的

$z \in U(a, r_a) \cap E$，都有 $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$。则 $E \subseteq \bigcup_{a \in E} U\left(a, \frac{r_a}{2}\right)$。由于 E是紧的，

$$E \subseteq U\left(a_1, \frac{r_1}{2}\right) \cup \cdots \cup U\left(a_m, \frac{r_m}{2}\right)$$

对于某些以上开邻域成立。

取 $\delta = \min\left\{\frac{r_1}{2}, \cdots, \frac{r_m}{2}\right\}$，此时任取 $z', z'' \in E$，使得 $|z', z''| < \delta$。设 $z' \in U\left(a_k, \frac{r_k}{2}\right)$，则 $|a_k - z''| \leq |a_k - z'| + |z' - z''| < \frac{r_k}{2} + \delta < r_k$。故 $z', z'' \in U(a_k, r_k)$，

$$|f(z') - f(z'')| \leq |f(z') - f(a_k)| + |f(z'') - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这表明 f是一致连续的。 □

定理 1.2

设 $E \subseteq \mathbb{C}$是一个紧集，$f: E \to \mathbb{C}$连续，则

1. f在 E上有界，即 $|f(z)| = \sqrt{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2}$ 有界。
2. $f(E) \subseteq \mathbb{C}$是一个紧集（由于Hausdorff性）。
3. $|f(z)|$在 E能够达到最大值和最小值。

♡

Proof

1. 取 $\varepsilon = 1$，则对于任意的 $a \in E$，存在 $r_a > 0$，使得对于任意的 $z \in E \cap U(a, r_a)$，都有 $|f(z) - f(a)| < 1$。则 $E \subseteq \bigcup_{a \in E} U(a, r_a)$，存在有限的子覆盖，使得 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} U(a_k, r_k)$。任取 $b \in E$，设 $b \in U(a_k, r_k)$，则 $|f(b)| \leq |f(b) - f(a_k)| + |f(a_k)| < 1 + |f(a_k)|$。故

$$|f(b)| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq m} |f(a_k)| < \infty, \quad \forall b \in E$$

2. 任取 $f(E)$的一个开覆盖，$f(E) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$，则由 f的连续性，$f^{-1}(V_i)$是开集，我们有

$$E \subseteq \bigcup_{i \in I} (U_i \cap E) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap E$$

由于 E是紧的，存

□

阅读17-20，预习21-25，作业书38 1,2

1.3 可微和解析

定义 1.7

设 $D \subseteq \mathbb{C}$是区域，$f : D \to \mathbb{C}$是函数，$z_0 \in D$，若极限

$$\lim_{z \to z_0, z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，且等于 α，则称 f在 z_0处可导，导数为 α，记作

$$\begin{cases} f'(z_0) = \alpha \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) = \alpha \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \alpha \end{cases}$$

♣

定义 1.8 (可微)

设 $D \subseteq \mathbb{C}$是区域，$f : D \to \mathbb{C}$是函数，$z_0 \in D$。称 f在 z_0可微，若存在 $\mathbb{C}$-线性函数 $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得

$$f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + o((z - z_0)), \quad z \to z_0$$

♣

命题 1.3

设 $D \subseteq \mathbb{C}$是区域，$f : D \to \mathbb{C}$是函数，$z_0 \in D$。则 f在 z_0处可导当且仅当它在 z_0处可微。

♠

定义 1.9 (解析)

设 $D \subseteq \mathbb{C}$是区域，$f : D \to \mathbb{C}$是函数。

1. 如果 f在 D上的每一点均可导，则称 f在 D内解析。
2. 设 $z_0 \in D$，若 f在 z_0的一个邻域内解析，则称 f在 z_0处解析。
3. 称 f在闭区域 $\bar{D}$上解析，若存在区域 $G \subseteq \mathbb{C}$，使得 $\bar{D} \subseteq G$，且 f在 G内解析。
4. 设 $D' \subseteq D$是一个子集，若 f在 D'的每个点上都解析，在 $D \setminus D'$上的每个点都不解析，则称 $D \setminus D'$上的点为 f的奇点。

♣

命题 1.4

设 $f, g : D \to \mathbb{C}$是解析的，则

1. $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. 若 $g(z) \neq 0$，$\forall z \in D$，$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$
4. 设 $f : D_1 \to D_2$和 $g : D_2 \to D_3$是函数，其中 $D_i \subseteq \mathbb{C}$是区域。设 $z_0 \in D_1$，$\zeta_0 = f(z_0)$。若 f在 z_0处可微，F在 ζ_0处可微，则 $F \circ f : D_1 \to D_3$在 z_0处可微，并

且

$$(F \circ f)'(z_0) = F'(\zeta_0) f'(z_0)$$

5. 设 $f : D \to \mathbb{C}$是单的解析函数，且 $f'(z) \neq 0$ [a] 。则 $f(D) \subseteq \mathbb{C}$也是区域， $f^{-1} : f(D) \to D$也是解析的，并且若 $w_0 = f(z_0)$，则

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

[a]事实对于单的解析函数， $f'(z) \neq$自动成立

练习 1.3 叙述复变函数的反函数定理。

Example 1.4 处处连续单处处不可导的复函数 以下函数在 $\mathbb{C}$上处处连续但是处处不可导。

1. $f(z) = \bar{z}$

   Proof 显然连续，但是

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{(z_0 + \Delta z) - z_0} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

   当 $\Delta z \to 0$时极限不存在

   □

2. $f(z) = \text{Re } z$
3. $f(z) = \text{Im } z$
4. $f(z) = |z|$

Example 1.5 在一点可导但不解析的函数 考虑 $f(z) = (\text{Re } z)^2$，

1.

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\text{Re } z}{z} \cdot z$$

   其中 $\frac{\text{Re } z}{z}$有界， $z \to 0$，故 $f'(0) = 0$，这表明 f在 0处可导。

2. 对于一点 $z_0 \neq 0$，

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 \neq 0$$

   但是

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta y) - f(z_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x_0^2 - x_0^2}{i \Delta y} = 0$$

   故 $f'(z_0)$ 不存在，故 f不解析。

f在 0处可导，但不解析。

Example 1.6 微分中值定理未必成立 考虑 $f(z) = e^z$，则$f'(z) = e^z$ 。令 $z_1 = 0$， $z_2 = 2\pi i$ ，若

中值定理成立，则

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(\lambda 2\pi i)(z_2 - z_1) = 0 = 1 - 1 = e^{\lambda 2\pi i}$$

其中 $\lambda \in (0,1)$，但这是不可能的，因此中值定理对于复函数不成立。

1.4 CR方程

定理 1.3 (CR方程)

设 $f: D \to \mathbb{C}$是函数，其中 $D \subseteq \mathbb{C}$是区域。设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$， $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ 。若 f是解析函数，则有以下Cauchy-Riemann方程对于任意的$(x_0, y_0) \in D$ 成立：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

♡

Proof 一方面

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

两式分别对比实部和虚部，得到 x_0处的CR方程成立。

□

Example 1.7 点CR $\not\Longrightarrow$ 点可导 考虑

$$f(z) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{|\mathrm{Re}\ z \cdot \mathrm{Im}\ z|}$$

在 $(0,0)$处的行为。设$u = \sqrt{|xy|}, v = 0$。

1.
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)\cdot 0}-\sqrt{0\cdot 0}}{\Delta x}=0=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)\cdot 0}-\sqrt{0\cdot 0}}{\Delta y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$
故 f在 $(0,0)$处成立CR方程。
2.
$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{(\Delta x)(\Delta y)}}{\Delta x+i\Delta y}$$
当它沿斜率为 k的直线趋于零时，我们有
$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}\to\frac{\sqrt{|k|}}{1+ik}$$
这表明 $f'(0)$不存在。

定理 1.4

设 $D\subseteq\mathbb{C}$是区域， $f:D\to\mathbb{C}$， $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$， $z_0=x_0+iy_0\in D$。则 f在 z_0处可导，当且仅当 u,v在 (x_0,y_0)处可微，且 CR方程成立[a]。此时
$$\begin{aligned}f'(z_0)&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

[a]也就是说，复可微当且仅当实可微且CR

♡

Proof

1. 必要性：设 $f'(z_0)=\alpha=a+ib$，$a,b\in\mathbb{R}$。则当 $z_0+\Delta z\in D$时，
$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=\alpha\Delta z+o(\Delta z)\\&=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta z)\end{aligned}$$
比较上式两端的实、虚部，
$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=a\Delta x-b\Delta y+o(\Delta z)\tag{*}$$
$$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=b\Delta x+a\Delta y+o(\Delta z)\tag{**}$$
故 u,v均在 x_0处可微，且
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=a$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=-b$$
故点 (x_0,y_0)处的 CR方程成立。

2. 充分性：设 u,v在 (x_0,y_0)处可微，且 CR方程对于一对 (a,b) 成立，则 $(*)$和 $(**)$成立。

$$(*)+i(**) \implies f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\alpha\cdot\Delta z+o(\Delta z)$$

这表明 f在 z_0处可导。

□

推论 1.1

$f=u(x,y)+iv(x,y)$在 $z_0\in D$ 可导的一个充分条件是以下两条成立

1. $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$在 (x_0,y_0)的一个邻域存在，且在 (x_0,y_0)处连续。
2. f在 (x_0,y_0)处成立CR方程。

♡

Example 1.8 考虑 $f(z)=x^2-iy$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=-1,\quad \text{均在 }\mathbb{R}^2\text{上存在且连续}$$

CR成立当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 。故 f仅在 $x=-\frac{1}{2}$处可导。而 $\mathbb{C}$上任一点的任意邻域包含不在 $x=-\frac{1}{2}$上的点，因此 f处处不解析。

阅读21-25，预习26-30，作业是第二章的7，8,9,10
