第 1 章　奇异同调

1.1 奇异同调群

定义 1.1 (单形、链、链群)

设 X 是任意拓扑空间, $n \geq 0$ 是整数;

1. X 上的一个奇异 n-单形, 是指一个连续映射 $\sigma : |\Delta_n| \to X$.
2. X 上的一个奇异 n-链, 是指一个有限和 $\sum_i n_i \sigma_i$, 其中 $n_i \in \mathbb{Z}$,σ_i 是 X 上的奇异 n-单形.
3. X 的全体奇异 n-链上可以定义出自然的加法,X 的全体奇异 n-单形作为一组基, 生成出一个自由阿贝尔群, 记作 $S_n(X)$.
4. 对于 $n < 0$ 定义 $S_n(X) = 0$, 则全体 n-链群的直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n(X)$ 构成一个分次阿贝尔群, 记作 $S_\cdot(X)$.

♣

推论 1.1

设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的映射, 则 $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ 扩张出分次群同态 $f_\cdot : S_\cdot(X) \to S_\cdot(Y)$. 此外, . 满足函子性, 从而可以定义出一个函子 $X \rightsquigarrow S_\cdot(X)$.

♡

定义 1.2

若 A 是 X 的子空间, 且 σ 是 A 上的一个奇异单形, 则通过含入映射 $A \hookrightarrow X$, σ 可视为 X 上的一个单形. 此时 $S_n(A)$ 可看做 $S_n(X)$ 的一个子群. 记商群 $S_n(X)/S_n(A)$ 为 $S_n(X, A)$. X 上全体不含于 A 的奇异 n-单形作为一组基生成出自由阿贝尔群 $S_n(X, A)$. 可以类似地定义 $S\cdot(X, A)$.

♣

Remark 当 $A = \varnothing$ 时, $S_n(X, A) = S_n(X)$, 因此对 $S_n(X, A)$ 的研究适用于 $S_n(X)$.

定义 1.3 (面算子)

对于每个整数 $r \geq 0$, 定义面算子 $F^r : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ 按

$$F^r(\mathbf{e}_s) := \begin{cases} \mathbf{e}_s, & s < r \\ \mathbf{e}_{s+1}, & s \geq r \end{cases}$$

并做线性扩张.

♣

引理 1.1

$F^r \circ F^s = F^{s-1} \circ F^r, r < s.$

定义 1.4 (边缘算子)

对于 $n \geq 1$, 以及 X 的任意奇异 n-单形 σ, 定义

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma \circ F^r$$

并做线性扩张, 得到同态 $\partial_n : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$. 对于 $n \leq 0$ 定义 $\partial_n := 0$.

命题 1.1

$(S.(X, A), \partial.) := \{S_n(X, A), \partial_n\}$ 构成一个链复形, 且存在函子 $(X, A) \rightsquigarrow (S.(X, A), \partial)$

Proof 首先说明 $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$ 对于任意的奇异 n-单形 ($n \geq 2$) 成立.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \partial(\sigma) &= \partial\left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma \circ F^r\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= \sum_{r<s} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= \sum_{r \leq s-1} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^{s-1} \circ F^r + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= -\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ F^i \circ F^j + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= 0
\end{aligned}$$

给定映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$, 可以定义 $f_.(\sigma):=f\circ\sigma:S_n(X,A)\to S_n(Y,B)$. 我们有

$$\begin{aligned}
f_.\circ\partial(\sigma)&=f_.\left(\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma\circ F^r\right)\\
&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r f_.\circ\sigma\circ F^r\\
&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(f\circ\sigma)\circ F^r\\
&=\partial(f\circ\sigma)\\
&=\partial\circ f_.(\sigma)
\end{aligned}$$

于是 $f_.$ 给出 $S_n(X,A)\to S_n(Y,B)$ 的链映射. 此外, 若 $g:(Y,B)\to(Z,C)$, 则

$$(g\circ f)_.(\sigma)=(g\circ f)\circ\sigma=g\circ(f\circ\sigma)=g_.(f\circ\sigma)=(g_.\circ f_.)(\sigma)$$

这就说明了函子性. 综上, 我们给出了 (X,A) 到链复形 $(S_.(X,A),\partial)$ 的函子.

$\square$

定义 1.5 (相对同调)

(X,A) 是一对拓扑空间, 使得 $A\subseteq X$. 称 $H_*(X,A):=H_*(S_.(X,A))$ 为 (X,A) 的相对同调群. 取 $A=\varnothing$, 得到同调群 $H_*(X)$. ♣

命题 1.2

存在函子 $X\rightsquigarrow S_.(X,A)$, 以及函子 $S_.(X,A)\rightsquigarrow H_*(X,A)$, 进而存在函子 $X\rightsquigarrow H_*(X,A)$. ♠

Proof 对于满足 $f(A)\subseteq B$ 的映射 $f:X\to Y$, 或者说映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$. 由于 $f_\sharp:C_n(X)\to C_n(Y)$ 将 $C_n(A)$ 中的元素映到 $C_n(B)$, 商关系诱导出良定义的 $f_\sharp:C_n(X,A)\to C_n(Y,B)$. 并且由于 $f_\sharp\partial=\partial f_\sharp$ 对绝对链是成立的, 它对相对链也是成立的.

$\square$

定义 1.6 (R-系数同调)

对于给定的交换环 R, 我们可以完全类似地构造 X 的 R-系数奇异 n-链的自由模 $S_n(X;R)$. 同之前一样, 可以得到链复形 $S_.(X;R)$, 子链复形 $S_.(A;R)$, 以及商复形 $S_.(X,A;R)$. 对应的同调群 $H_*(X;R)$ 称为 X 的 R-系数同调群, 显然是一个分次 R-模. $R=\mathbb{Z}$ 时通常略去记号 R 为 $H_*(X)$. ♣

1.2 同伦不变性

定义 1.7

称 P 是链映射 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 的一个链同伦，若

$$\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$$

♣

Remark

1. 若 α 是循环 P 是链同伦，则 $(g_\sharp - f_\sharp)(\alpha) = \partial P(\alpha)$ 是一个边界，这表明 $g_* = f_*$.

定理 1.1

若 $f, g : X \to Y$ 同伦，则 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 是链同伦的，进而在 $H_*(X)$ 上，$f_* = g_*$ ♡

Proof 将同伦的时间变化，用 prism operator 表现为分解为若干单形的棱柱. 构造 prism operator P，使得它称为 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 之间的链同伦.

□

定理 1.2

若 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ 彼此同伦，则在 $H_*(X, A)$ 上 $f_* = g_*$. ♡

Remark

1. 即同伦的映射诱导出链同伦的链映射.
2. 在 reduced homology 上上的诱导同态也相等.

Proof prism operator P 将 $C_n(A)$ 映到 $C_{n+1}(B)$，从而诱导出良定义的 relative prism operator $P : S_n(X, A) \to S_{n+1}(Y, B)$，满足 $\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$，即相对链同伦也是成立的.

□

推论 1.2

同伦等价的拓扑空间有同构的同调群；特别地，可缩空间有点空间的同调群. ♡

Proof 由同伦不变性立即得到.

□

1.3 奇异同调的其它性质和例子

命题 1.3 (点空间的同调群)

设 X 是一个点, 则 $H_n(X) = 0, \forall n > 0$, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$

Proof 对于每个 n, 奇异 n-单形有且仅有一个 $\sigma_n : \Delta^n \to X$. 边缘算子的像 $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$, 当 n 奇数时为 σ_{n-1}, 偶数时为 0. 相邻两个边缘算子, 一个是 0, 一个是同构, 从而 $\ker$ 和 Im, 要么前者是 0, 要么后者全空间. 正数阶的同调群总是平凡的.

□

命题 1.4 (道路分支的同调)

设 $\{X_j : j \in J\}$ 是 X 的连通分支, 使得 $X = \sqcup_{j\in J} X_j$. 由于 $|\delta_n|$ 道路连通, 因此每个奇异 n-单形都完整地落在某一个道路分支 X_j 上. 这表明 $S.(X)$ 可以分解为 $S.(X_j)$ 的直和. 进而 $H_*(X)$ 也分解为 $H_*(X_j)$ 的直和.

Remark 因此, 总可以只处理道路连通空间.

命题 1.5

若 X 非空且道路连通, 则 $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Proof $H_0(X) = C_0(X) / \mathrm{Im}\ \partial_1$. 断言, 一些 0-单形是边缘, 当且仅当符号和为 0. 首先, 奇异 1-单形的边缘一正一负, 符号和为 0, 是普遍成立的. 关键在于, 道路可以视为其一 1-单形, 道路连通空间上, 一些点的符号和若为 0, 每个点的用一个符号相反 σ_0 配对, 使得它们称为连接两点道路的边缘, 这样我们用来配对的 σ_0 一共有 0 个, 这样就把它们写成了奇异 1-链的边缘.

□

Example 1.1(reduced homology) 定义 ε 为将 0-链映为系数和的同态. 称同态 ε 为增广同态, 可以按以下方式扩张出链复形 $\tilde{S}(X)$

$$\tilde{S}_n(X) = \begin{cases} S_n(X), & \text{if } n \geq 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{if } n = -1, \\ (0), & \text{if } n < -1; \end{cases} \quad \text{and} \quad \tilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, & n \geq 1, \\ \varepsilon, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

相应的同调群记作 $\tilde{H}_*(X)$, 称为约化同调群. 显然 $\tilde{H}_i(X) = (0), i < 0; \tilde{H}_i(X) \simeq H_i(X), i > 1; \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(X)$. 特别地, 对于道路连通空间 X, $\tilde{H}_0(X) = 0$.

Remark

1. 约化同调的引入使得点空间的同调得以完全消失.

2. 对于非空的 $A \subseteq X$，我们有 $\tilde{H}_*(X,A) = H_*(X,A)$，并且命题1.6对于 $\tilde{H}$ 有完全相同的形式.

命题 1.6 ((X,A) 的同调长正合列)

由 $S(X,A)$ 的定义，我们有正合列

$$0 \to S_\cdot(A) \to S_\cdot(X) \to S_\cdot(X,A) \to 0^a$$

由定理??，可以得到长正合列

$$\left.\begin{array}{l} \cdots \to H_i(A) \to H_i(X) \to H_i(X,A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \to \cdots \\ \cdots \to H_1(X,A) \xrightarrow{\delta} H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X,A), \end{array}\right\}$$

并且对应关系满足函子性.

[a] 只是把定义用正合列的说法写一遍

Idea $x \in H_n(X,A)$ 上的一个元素是被 X 上的一个链 α 代表，它满足 $\partial\alpha \in S_{n-1}(A)$

Remark

1. 同样的正合列适用于 reduced homology $\tilde{H}$.
2. 连接同态 δ 几乎就是边缘同态 ∂[1]，$\partial[\alpha]$ 被映到 $\partial\alpha$ 在 $H_{n-1}(A)$ 上的等价类.
3. $H_n(X,A)$ 被用来衡量 $H_n(X)$ 和 $H_n(A)$ 之间的差距. $H_n(X,A)=0$ 当且仅当 $H_n(A) \simeq H_n(X)$.
4. 对于 (X,A),$A \neq \varnothing$ 的 reduced homology：相同非负维数的链复形的短正合列，拼上一个 -1 维的短正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$，得到完全相同的长正合列. 特别地，对于任意的 n，$\tilde{H}_n(X,A)$ 和 $H_n(X,A)$ 在 $A \neq \varnothing$ 时一样. [2]

Example 1.2

1. 截取自同调长正合列的

$$H_i(D^n, \partial D^n) \to \tilde{H}_{i-1}\left(S^{n-1}\right)$$

对于所有的 i 都是一个同构. 从而

$$H_i(D^n, \partial D^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. 对于 $x_0 \in X$，(X, x_0) 给出同构 $H_n(X,x_0) \simeq \tilde{H}_n(X), \forall n$.

---

[1] 故用 ∂ 代替它的记号

[2] 0 阶处的差异，因为做商的原因，被抵消掉了

1.3.1 同调切除

定理 1.3

给定子空间 $Z \subseteq A \subseteq X$，使得 $\overline{Z} \subseteq A^{\circ}$，则含入映射 $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$，对于所有 n，诱导出同构 $H_n(X - Z, A - Z) \to H_n(X, A)$. 等价地说，对于所有的子空间 $A, B \subseteq X$，使得它们的内部覆盖了 X，含入映射 $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ 对于所有的 n 诱导出群同构 $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$.

引理 1.2

给定拓扑空间 X，和它的两个子空间 X_1, X_2. 记 X_i 到 X 的含入映射为 $\eta_i, i = 1, 2$，并记它们在链复形上的诱导也为 $\eta_i : S_{\cdot}(X_i) \to S_{\cdot}(X), i = 1, 2$. 考虑链映射

$$(\eta_1, -\eta_2) : S_{\cdot}(X_1) \oplus S_{\cdot}(X_2) \to S_{\cdot}(X).$$

此映射连同嵌入 $i : S_{\cdot}(X_1 \cap X_2) \to S_{\cdot}(X_1) \oplus S_{\cdot}(X_2), i(a) := (a, a), a \in X_1 \cap X_2$ 给出一个链复形的短正合列

$$0 \to S_{\cdot}(X_1 \cap X_2) \to S_{\cdot}(X_1) \oplus S_{\cdot}(X_2) \to S_{\cdot}(X_1) + S_{\cdot}(X_2) \to 0$$

Proof 对于 $(a, b) \in S_{\cdot}(X_1) \oplus S_{\cdot}(X_2)$，

$$(\eta_1, -\eta_2)(a, b) = 0 \iff \eta_1(a) = \eta_2(b) \iff a = b \in S_{\cdot}(X_1 \cap X_2)$$

这表明

$$\ker(\eta_1, -\eta_2) = \mathrm{Im}\ i$$

又易见 i 单，$(\eta_1, -\eta_2)$ 满，因此短正合列存在.

$\square$

引理 1.3

令 $X = A \cup B$，则以下表述等价

1. $S_{\cdot}(A) + S_{\cdot}(B) \to S_{\cdot}(X)$ 诱导出同调群的同构；
2. $[S_{\cdot}(A) + S_{\cdot}(B)]/S_{\cdot}(B) \to S_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(B)$ 诱导出同调群的同构；
3. $S_{\cdot}(A)/S_{\cdot}(A \cap B) \to S_{\cdot}(X)/S_{\cdot}(B)$ 诱导出同调群上的同构.

Proof 对于前两条的等价性，考虑以下短正合列间的态射在定理??中函子下的作用

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_\cdot(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_\cdot(A)+S_\cdot(B) \arrow[r] \arrow[d] & {[S_\cdot(A)+S_\cdot(B)]/S_\cdot(B)} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ 0 \arrow[r] & S_\cdot(B) \arrow[r] & S_\cdot(X) \arrow[r] & S_\cdot(X)/S_\cdot(B) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

作用的结果是同调群间的梯形长正合列，等价性由五引理??立即得到.

后两条的等价性由同构定理 $[S_\cdot(A)+S_\cdot(B)]/S_\cdot(B) \simeq S_\cdot(A)/S_\cdot(A\cap B)$ 立即得到.

□

定义 1.8 (切除对)

令 X 是拓扑空间，A, B 是 X 的两个子空间，使得 $X = A\cup B$. 则称含入映射 $(A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$ 是一个切除映射. 在此之上，称子空间对 $\{A, B\}$ 是 X 的奇异同调的一个切除对，若含入映射

$$S_\cdot(A)+S_\cdot(B) \hookrightarrow S_\cdot(A\cup B)$$

诱导出同调群的同构. ♣

Remark 上方的引理给出切除对的若干等价条件.

定理 1.4 (同调切除)

设 $\{A, B\}$ 是 X 的一个切除对，则含入映射 $(A, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B, B)$ 诱导出同调群的同构 $H_*(A, A\cap B) \simeq H_*(A\cup B, B)$. ♡

Remark 由上面的引理立即得到.

定理 1.5

若 $X = X_1\cup X_2 = \mathrm{int}_X(X_1)\cup \mathrm{int}_X(X_2)$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的奇异同调的一个切除对. ♡

定义 1.9 (Mayer-Vietoris)

设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个切除对，考虑短正合列

$$0 \to S_\cdot(X_1\cap X_2) \xrightarrow{i} S_\cdot(X_1)\oplus S_\cdot(X_2) \xrightarrow{j} S_\cdot(X_1)+S_\cdot(X_2) \to 0$$

通过定理 ??诱导出的同调长正合列，其中 $i(z) = (i_1 z, -i_2 z)$，$j(z_1, z_2) = (j_1 z_1, j_2 z_2)$，$i_1, i_2, j_1, j_2$ 均为含入映射. 由于 $H_*(S_\cdot(X_1)+S_\cdot(X_2))$ 与 $H_*(X_1\cup X_2)$

同构, 可以将前者用后者替换, 得到长正合列

$$\cdots \to H_{i+1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_i(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_i(X_1) \oplus H_i(X_2) \xrightarrow{j_*} H_i(X_1 \cup X_2) \to \cdots$$

$$\cdots \to H_1(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial} H_0(X_1 \cap X_2) \to H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \to H_0(X_1 \cup X_2)$$

称为 Mayer-Vietoris 列. ♣