第 1 章　预备知识

定义 1.1

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是双射，若 T 保持欧氏距离，即对于任意的 $P,Q\in\mathbb{R}^n$，都有 $d(TP,TQ)=d(P,Q)$，则 T 为一个等距同构（isometry）。

Remark

1. 若 $\det A=1$（没有反射，保定向的），则称 T 为刚体运动（Rigid motion）。

定理 1.1

设 T 是 E^n 上的等距同构，那么存在 $n\times n$ 的正交矩阵 A，以及向量 v，使得

$$T(P)=PA+v,\quad \forall P=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Idea

等距同构 = 旋转、反射加平移。

Proof 练习

□

练习 1.1 设 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 是 n 维向量值函数，且可微，则

1. $\langle\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\rangle'=\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{y}(t)\rangle+\langle\mathbf{x}(t),\mathbf{y}'(t)\rangle$
2. 若 $|\mathbf{x}(t)|$ 是常值函数，则对于 $\mathbf{x}'(t)\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathbf{x}(t)\in C^1(\mathbb{R}^n)$，它们的典范配对

$$\big\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}(t)\big\rangle=0$$

Example 1.1 不光滑的光滑曲面极限 锥面在顶点不光滑，但是可以用光滑的曲面逼近。

定义 1.2 (切空间)

设 $p\in\mathbb{R}^n$，则

$$T_p\mathbb{R}^n=\{以p为起点的\mathbb{R}^n中的向量\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 在 p 点处的切空间。

定义 1.3 (微分映射)

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是光滑函数，定义它的微分 $dF|_p:T_p\mathbb{R}^n\to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$，按照

$$\mathrm{d}F|_p(v):=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}F(p+tv)$$

Remark

1. $\mathrm{d}F|_p$ 是 $T_p\mathbb{R}^n$ 到 $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ 的线性映射：证明留作练习

定义 1.4 (微分同胚)

设 U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，$F:U\to V$ 是可微的双射，且 F 的逆映射也可微，则称 F 为 $U\to V$ 的微分同胚。

Example 1.2

1. $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\right\}$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^2$

定理 1.2 (反函数定理)

设 $F:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射, $0\in U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集，满足

1. $F(0)=0$
2. $\mathrm{d}F|_0$ 是线性同构

那么存在 $V\subseteq U$，使得 $0\in V$，且 $f|_V$ 是 V 到 $f(V)$ 的微分同胚。

定理 1.3 (隐函数定理)

设 $0\in U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集，$F:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，满足

1. $F(0)=0$;
2. $\mathrm{d}F|_p$ 是单射。

那么存在 0 的邻域 $W\subseteq\mathbb{R}^m$，以及微分同胚 $\phi:W\to\phi(W)$，使得

$$\phi\circ F(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)$$