PDE

作者：Autin

目录

第 1 章　Fourier 变换

1.1　Fourier 变换

定义 1.1 (内积)

1. 定义 $[-L, L]$ 上分段连续的两个复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为
$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-L}^{L} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
2. 定义 f 的范数 $\|f\|$ 为
$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Remark

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L}\left[f_1(x)\,g_1(x) + f_2(x)\,g_2(x)\right]\mathrm{d}x + i\int_{-L}^{L}\left[f_2(x)\,g_1(x) - f_1(x)\,g_2(x)\right]\mathrm{d}x$$

定理 1.1

记 $e_m(x) = e^{im\pi x/L}$，则
$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n\rangle &= \int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}\,\overline{e^{in\pi x/L}}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} e^{i(m-n)\pi x/L}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + i\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n\\ 2L, & m = n\end{cases}\end{aligned}$$

命题 1.1

若 f 连续，分段 C^1 并且 $f(-L) = f(L)$，则
$$c_m = \frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle$$
$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im\pi x/L} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\langle f, \frac{e_m}{\sqrt{2L}}\right\rangle\frac{e_m}{\sqrt{2L}}$$

定理 1.2 (Parseval)

$$\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}} e_m \right\rangle \right|^2$$

$$= 2L \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2L} \langle f, e_m \rangle \right|^2 = 2L \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2$$

♡

定义 1.2 (Fourier 变换)

设 $f(x)$ 是实变量的实值或复值函数. 定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 的函数 $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x,$$

若极限存在. 其中

$$\mathrm{d}'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}x$$

♣

定义 1.3

设 m, n 是非负整数, 称定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 有衰减阶 (m, n), 若 $f(x)$ 是 C^m 的, 且存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $|x| \geq 1$

$$|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + \left|f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{K}{|x|^n}$$

♣

命题 1.2 (求导后变换)

若 f 具有衰减阶 $(1, 2)$, 则对于所有的 ξ,

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

♠

Proof 若先只考虑足够好的函数 (光滑且急速衰减), 由分部积分可以得到等式

$$\begin{aligned}
\hat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x \\
&= i\xi \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

□

推论 1.1

若 f 有衰减阶 $(m,2)$, 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$\left|f^{(m)}(x)\right|^{\wedge}(\xi)=i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$$

Proof 反复利用上面的命题.

□

命题 1.3 (变换后求导)

若 f 有衰减阶 $(0,3)$, 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)=[xf(x)]^{\wedge}(\xi)$$

Proof 对于足够好的函数, 积分下求导

$$\begin{aligned}
i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)&=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x\\
&=i\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)\,f(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x\\
&=[xf(x)]^{\wedge}(\xi)
\end{aligned}$$

□

推论 1.2

若 f 具有衰减阶 $(0,n+2)$, 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$i^n\frac{\mathrm{d}^n\hat{f}}{\mathrm{d}\xi^n}(\xi)=[x^nf(x)]^{\wedge}(\xi)$$

Proof 反复利用上面的命题

□

$$\boxed{\text{Fourier 变换把导数变成多项式, 把多项式变成导数.}}$$

定义 1.4 (卷积)

定义 f 和 g 的卷积 $f*g$ 为

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y$$

若每个积分存在.

命题 1.4

在 $\mathbb{R}^n$ 上,

$$f * g = g * f$$

Idea 从 x 扩散按平移量 $-y$ 反向加权 $g(y)$

定理 1.3 (卷积定理)

设 f, g 分段连续, 且对于 $|x| \geq 1$, 有 $|f(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$, 则

$$\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)^{\wedge}(\xi)$$

Proof

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x \int_{-\infty} g(y)\,e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(y)\,e^{-i\xi(x+y)}\,\mathrm{d}'x\,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x\,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}'y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f * g)(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)^{\wedge}(x)
\end{aligned}$$

□

1.2 Fourier 逆变换

定理 1.4 (反演定理)

设 f 是分段 C^1 且 L^1, 则对于每个 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

定义 1.5 (Fourier 逆变换)

定义 $g(\xi)$ 的 Fourier 逆 $\check{g}(x)$ 为

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}'\xi$$

若极限存在. 其中 $\mathrm{d}'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}\xi$ ♣

定理 1.5 (Parseval)

若 $f, \hat{f}, g$ 绝对可积, 且 f 分段 C^1, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \, \mathrm{d}\xi$$

♡

Proof 由于两个函数逆变换后的权重通过共轭抵消, 通过不断交换次序可以得到恒等式.

□

1.3 重要例子

Example 1.1 设 $a > 0, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-a|x|}$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'x \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} \, \mathrm{d}'x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)x} \, \mathrm{d}'x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)} + \frac{e^{-(a-i\xi)x}}{-(a-i\xi)} \right]_{x=0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-(a+i\xi)} + \frac{1}{-(a-i\xi)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}
\end{aligned}$$

Example 1.2 令 $f(x) = e^{-ax^2}, a > 0, -\infty < x < \infty$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

1.4 PDE 的 Fourier 方法

定义 1.6 (好核)

称 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 称它为一族好核, 若它满足以下性质

1. **归一化**:
$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$
2. **集中性**: 对于任意的 $\delta > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$
3. **一致 L^1**: 存在常数 $M > 0$, 使得
$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x \le M, \quad \forall \varepsilon > 0$$

♣

定理 1.6 (好核定理)

若 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一族好核, 则对于 L^1 或有界的函数 f,
$$\lim_{t\to 0^+}(K_\varepsilon * f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(f * K_\varepsilon)(x) = f(x)$$
对于所有 f 的连续点 x 成立.

特别地, 若 f 处处连续, 则上面的极限是一致的.

♡

Proof 任取 $\delta > 0$, 由归一性
$$\begin{aligned}|(f * K_\varepsilon)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x)\right|\,\mathrm{d}y \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\mathrm{d}y\right|\end{aligned}$$
将积分区域分解, 若 f 有界, 则
$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{|x|>\delta} K_\varepsilon(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{|x|\le\delta} K_\varepsilon(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\mathrm{d}y\right| \\ &\le 2\sup_{|x|>\delta}|f(x)|\int_{|x|>\delta}|K_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x + M\sup_{|x|<\delta}|f(x-y) - f(x)|\end{aligned}$$
令 $\varepsilon \to 0$, 得到
$$\operatorname{limsup}_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\right| \le M\sup_{|x|<\delta}|f(x-y) - f(x)|$$

若 x 是 f 的连续点, 则

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|x|<\delta}|f(x-y)-f(x)|=0$$

令 $\delta\to 0$, 可知在 f 的连续点 x 上,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(y)\left[f(x-y)-f(x)\right]\right|=0$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f*K_\varepsilon)(x)=f(x)$$

特别地, 若 f 处处连续

□

1.4.1 热方程

1.4.1.1 形式推导

考虑以下一维无界域上热方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}, & x\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

对微分方程做 x 的 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t+k\xi^2\hat{u}=0$$

解关于 t 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi,t)=F(\xi)e^{-k\xi^2t}$$

其中 $F(\xi)$ 待定. 令 $t=0$, 得到

$$F(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2t}$$

令 $\hat{h}(\xi)=e^{-k\xi^2t}$ 则

$$h(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\xi^2t+ix\xi}\,\mathrm{d}'\xi$$

其中

$$-k\xi^2t+ix\xi=-kt\left(\xi-\frac{ix}{2kt}\right)^2-\frac{x^2}{4kt}$$

于是

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

由卷积定理,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

1.4.1.2 解的有效性

定义 1.7

定义

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad (t>0)$$

称为热方程的热核.

引理 1.1

热核 $H(x,t)$ 视为以 $t>0$ 为参数的热核族 $\{H(x,t)\}_{t>0}$ 是一族好核.

Proof

1. 首先, 由 Gauss 积分, 易见
$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4kt}}} = 1$$
故热核族是归一且一致 L^1 的
2. 任取 $\delta > 1$, 考虑积分
$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>\delta} |H(x,t)|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|x|>\delta} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \mathrm{d}x \\
&\le \frac{2}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{x>\delta} e^{\frac{-\delta x}{4kt}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{4\pi kt}} \frac{4kt}{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{4kt}} \to 0 \left(t \to 0^+\right)
\end{aligned}$$
故热核族是集中的.

综上, 热核族是一族好核.

□

命题 1.5

设 $H(x,t)$ 是热核.

1. 对于 $\mathbb{R}$ 上的 Riemann 可积函数 f,
$$\lim_{t\to 0^+}(H*f)(x)=f(x)$$
对于 f 的所有连续点 x 成立.
2. 特别地, 取 $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. 可知当 $t\to 0$ 时, $H(x,t)$ 在分布意义下收敛于 Dirac 函数 $\delta(x)$, 进而可以将 $H(x,t)$ 视为分布, 在 $t=0$ 处补充定义 $H(x,0)=\delta(x)$.

定理 1.7

令 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且有界或 L^1, 则
$$u(x,t):=(H(\cdot,t)*f)(x)\,,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$$
是以下初值问题
$$\begin{cases} u_t=ku_{xx}, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\\ u(x,0)=f(x)\,, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
在满足连续性条件: $u(x,t)\to f(x_0)\,((x,t)\to(x_0,0^+))$ 下的解.

Proof 热核 $H(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 满足以下问题
$$\begin{cases} H_t=H_{xx}, & x\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_{>0}\\ H(x,0)=\delta(x)\,, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
对于函数 f,
$$\begin{aligned}\Delta_x(H*f)=\Delta_x\int_{-\infty}^{\infty}H(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y&=\int_{-\infty}^{\infty}(\Delta_x H(x-y))f(y)\,\mathrm{d}y\\&=(\Delta_x H)*f\end{aligned}$$
于是
$$u_t=H_t*f=k(\Delta_x H)*f=k\Delta_x(H*f)=ku_{xx}$$
此外,
$$u(x,0)=(\delta*f)(x)=f(x)$$
□

1.4.2 波动方程

1.4.2.1 形式推导

考虑以下无限域上波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

对方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

两边做关于 x 的 Fourier 变换，得到

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) = -a^2\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

解方程，得到

$$\hat{u}(\xi, t) = c_1(\xi)\cos(a\xi t) + c_2(\xi)\sin(a\xi t)$$

以及

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -a\xi c_1(\xi)\sin(a\xi t) + a\xi c_2(\xi)\cos(a\xi t)$$

对两个初值条件施行 Fourier 变换，得到

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(x, 0) = c_1(\xi), \quad \hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(\xi, 0) = a\xi c_2(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\cos(a\xi t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

其中

$$\left(\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)\right)^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * (\cos(a\xi t))^{\vee}$$

其中

$$\cos(a\xi t)^{\vee} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(x+at) + \delta(x-at)\right)$$

于是

$$\left(\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)\right)^{\vee} = \frac{1}{2} f * \delta(x+at) + \frac{1}{2} f * \delta(x-at) = \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2} f(x-at)$$

由

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\frac{\xi}{2}}$$

其中

$$\mathrm{rect}\left(x\right)=\begin{cases}1, & |x|\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

结合 Fourier 变换的伸缩率, 得到

$$F\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right]=\frac{2at}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi at}{\xi at}=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi at}{a\xi}$$

于是

$$\left(\frac{\sin\left(a\xi t\right)}{a\xi}\right)^{\vee}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)$$

由卷积定理,

$$\begin{aligned}\left(\hat{g}\left(\xi\right)\frac{\sin\left(a\xi t\right)}{a\xi}\right)^{\vee}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g*\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right)&=\frac{1}{2a}g\left(x\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x-y}{2at}\right)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g\left(y\right)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

最终, 在形式上我们得到

$$\boxed{\begin{aligned}u\left(x,t\right)&=k*f+h*g\\&=\frac{1}{2}f\left(x-at\right)+\frac{1}{2}f\left(x+at\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g\left(y\right)\,\mathrm{d}y\\&\text{其中 }k\left(x,t\right)=\tfrac{1}{2}\left[\delta\left(x-at\right)+\delta\left(x+at\right)\right]\\&,h\left(x,t\right)=\tfrac{1}{2a}\mathrm{rect}\left(\tfrac{x}{2at}\right)\end{aligned}}$$

1.4.3 半平面上的 Laplae

1.4.3.1 形式推导

考虑以下问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R},y>0\\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

其中 f 是在 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数. 希望寻求 $y\ge0$ 的有界的连续解.

对

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

做关于 x 的 Fourier 变换, 得到

$$(i\xi)^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0$$

即

$$\hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0$$

解关于 y 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{\xi y} + c_2(\xi) e^{-\xi y}$$

其中 $c_1(\xi), c_2(\xi)$ 由初值决定. 对初值条件 $u(x, 0) = f(x)$ 做关于 x 的 Fourier 变换, 得到

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

当 $\xi > 0$ 时, 取 $c_2(\xi) = \hat{f}(\xi), c_1(\xi) = 0$. 当 $\xi \leq 0$ 时, 取 $c_1(\xi) = \hat{f}(\xi)$,$c_2(\xi) = 0$. 易见这种取法使得 $\hat{u}(\xi, y)$ 连续. 于是这里

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}$$

由卷积定理,

$$u(\xi, y) = \sqrt{2\pi} f * \left(\left(e^{-|\xi| y}\right)^{\vee}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}
\left(e^{-|\xi| y}\right)^{\vee} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| y} e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}'\xi \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\xi y - i\xi x} \, \mathrm{d}'x + \int_{-\infty}^{0} e^{\xi y - i\xi x} \, \mathrm{d}'\xi \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\xi(y + ix)} \, \mathrm{d}'\xi + \int_0^{\infty} e^{-\xi(y - ix)} \, \mathrm{d}'\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{y + ix} + \frac{1}{y - ix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2y}{y^2 + x^2}
\end{aligned}$$

于是

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{2y}{y^2 + (x - s)^2} \, \mathrm{d}s$$

形式上, 我们得到

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}\,\mathrm{d}s$$

是以下问题的一个有界连续解:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}, y>0 \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

其中 f 是在 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数.

第 1 章 练习

Problem 1.1 求解如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+cu=0, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\cos x, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $c>0, a\in\mathbb{R}$ 为常数

Proof 对方程

$$u_t-a^2u_{xx}+cu=0$$

做 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t+\left(a^2\xi^2+c\right)\hat{u}=0$$

得到

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)\,e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t}$$

其中 $A(\xi)$ 由初值决定. 对

$$u(x,0)=\cos x$$

视为缓增分布, 施行 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(\xi-1)+\delta(\xi+1)\right)$$

带入 $t=0$, 得到

$$A(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(x-1)+\delta(\xi+1)\right)$$

于是

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(\xi-1)+\delta(\xi+1)\right)e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t}$$

两边施行 Fourier 逆变换, 得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(\xi-1)\, e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t} e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(\xi+1)\, e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)} e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2} e^{-\left(a^2+c\right)t} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-\left(a^2+c\right)t} e^{-ix} \\
&= e^{-\left(a^2+c\right)t} \cos x
\end{aligned}
$$

□

第 2 章　分布理论初步

2.1 基本概念

定义 2.1 (测试函数空间)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 定义测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 为全体紧支光滑的复值函数 $\varphi:\Omega\to\mathbb{C}$ 的集合, 即满足:

1. $$\varphi\in C^{\infty}(\Omega)$$
2. $$\operatorname{supp}(\varphi)=\overline{\{x\in\Omega:\varphi(x)\neq 0\}}\text{是}\Omega\text{的一个紧子集}$$

♣

定义 2.2 (测试函数空间上的收敛)

给定序列 $\{\varphi_p\}_{p\geq 1}\subseteq\mathcal{D}(\Omega)$. 称该序列收敛到 $0\in\mathcal{D}(\Omega)$, 若以下两条成立:

1. 存在紧集 $K\subseteq\Omega$, 使得对于每个 $p\geq 1$,$\operatorname{supp}(\varphi_p)\subseteq K$
2. 对于每个多重指标 α, $\{\partial^{\alpha}\varphi_p\}_{p\geq 1}$ 在 K 上一致收敛到 0, 即
$$\lim_{p\to\infty}\|\partial^{\alpha}\varphi_p\|_{L^{\infty}(K)}=0$$

♣

定义 2.3 (分布)

一个分布 (或广义函数) T, 被定义为从测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个线性泛函
$$T:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C},\quad \varphi\mapsto\langle u,\varphi\rangle$$
满足以下两个条件

1. 对于任意的 $\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\Omega)$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 我们有
$$\langle u,\alpha\varphi+\beta\psi\rangle=\alpha\langle u,\varphi\rangle+\beta(u,\psi)$$
2. 对于任意的紧集 $K\subseteq\Omega$, 存在非负整数 p 和正常数 C, 使得对于任意的 $\varphi\in C_K^{\infty}(\Omega)$, 都有
$$|\langle u,\varphi\rangle|\leq C\sup_{|\alpha|\leq p}\|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L^{\infty}(K)}$$

全体 Ω 上的分布记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$.

♣

定义 2.4 (分布意义下的收敛)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空开集. 考虑一个分布序列 $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, $T_k \in \mathcal{D}^{i(\Omega)}$. 称 $\{T_k\}$ 在分布意义下收敛到分布 $T \in \mathcal{D}^{i(\Omega)}$, 若对于任意的测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 都有

$$\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

♣

定义 2.5 (分布的导数)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空开集. 对于分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义它的导数 T', 为满足以下关系的分布 $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

由此, 可以递归地定义高阶导数 $T^{(n)}$:

$$\left\langle T^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \varphi^{(n)} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

♣

Remark

1. 这是我们从边界项退化 (紧支性) 的分部积分公式抽象出来的定义
2. 需要说明良定义性.

Example 2.1 Dirac 函数 对于任意的 $a \in \Omega$, 定义分布 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 其中

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

可以验证这是一个分布.

对于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Dirac 函数 δ_0, 简记作 δ.

Example 2.2 正则分布 对于一个局部可积的函数 $f(x)$, 可以定义出分布 T_f , 成为 f 对应的正则分布

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

尽管 δ 不是一个函数, 在应用的过程中, 方便起见, 约定

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

2.2 Schwartz 空间与 Fourier 变换

定义 2.6 (Schwartz 空间)

Schwartz 空间, 记作 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 为全体 $\mathbb{R}^n$ 上的复值光滑速降函数, 确切地说, 称 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 属于 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若:

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. 对于任意的多重指标 α 和 β,

$$\left\|x^\beta D^\alpha f(x)\right\|_{L^\infty} < \infty$$

♣

定义 2.7 (Schwartz 空间上的 Fourier 变换与逆变换)

对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其中 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$(或记作 $\mathcal{F}f(\xi)$), 被定义为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x$$

其逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

♣

定理 2.1 (Fourier 变换的性质)

1. 对于任意的 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $a, b \in \mathbb{C}$, 都有

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

2.
$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

是一个同胚映射.

3.
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$$

4. 对于多重指标 α,

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

5. 对于多重指标 β,

$$\mathcal{F}\left(x^\beta f(x)\right)(\xi) = (i)^{|\beta|} D^\beta \hat{f}(\xi)$$

6. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$,
$$\mathcal{F}\left(f\left(\cdot - a\right)\right)\left(\xi\right) = e^{-ia\cdot\xi}\hat{f}\left(\xi\right)$$
7. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$
$$\mathcal{F}\left(e^{ia\cdot(\cdot)}f\right)\left(\xi\right) = \hat{f}\left(\xi - a\right)$$
8. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$,
$$\mathcal{F}\left(f\left(a\cdot\right)\right)\left(\xi\right) = \frac{1}{|a|^n}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$
9. 对于 $f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$
$$\mathcal{F}\left(f * g\right)\left(\xi\right) = \left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\hat{f}\left(\xi\right)\hat{g}\left(\xi\right)$$
10. 对于任意的 $f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$,
$$\mathcal{F}\left(fg\right)\left(\xi\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}}\left(\hat{f} * \hat{g}\right)\left(\xi\right)$$
11. 对于 $f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}\left(\xi\right)\overline{\hat{g}\left(\xi\right)}\,\mathrm{d}\xi$$
这表明 $Fourier$ 变换在 $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上是等距同构.

♡

定义 2.8 (缓增分布)

一个缓增分布 T 是指一个从 $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 到 $\mathbb{C}$ 的线性泛函 $T : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{C}$. 满足

1. $\forall f, g \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$,
$$T\left(af + bg\right) = aT\left(f\right) + bT\left(g\right)$$
2. 存在常数 $C > 0$ 和有限个多重指标对 $\left(\alpha_1, \beta_1\right), \cdots, \left(\alpha_m, \beta_m\right)$, 使得对于所有的 $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 都有
$$\left|T\left(f\right)\right| \leq C\sum_{j=1}^{m}\left\|x^{\beta_j}D^{\alpha_j}f\left(x\right)\right\|_{L^\infty}$$
全体缓增分布构成的空间记作 $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

♣

Example 2.3 缓增函数诱导的缓增分布 对于" 缓增的" $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, 即它的增长速度不超过某个多项式, g 可以定义出缓增分布 T_g :
$$T_g\left(f\right) = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(x\right)f\left(x\right)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$$
由于 f 速降而 g 增长不快于多项式, 右侧积分绝对收敛且良定义.

Example 2.4 Dirac 分布 $\delta_a\left(f\right) = f\left(a\right), \quad \forall f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是一个缓增分布.

定义 2.9 (缓增分布上的 Fourier 变换)

对于一个缓增分布 $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，定义其 Fourier 变换 $\hat{T}$(或记作 $\mathcal{F}T$)，为满足以下的分布

$$\hat{T}(f)=T\left(\hat{f}\right),\quad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

♣

定理 2.2 (缓增分布上的 Fourier 变换的性质)

对于 $T,T_1,T_2\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，

1. 对于任意的 $a,b\in\mathbb{C}$，

$$\mathcal{F}(aT_1+bT_2)=a\mathcal{F}T_1+b\mathcal{F}T_2$$

2. Fourier 变换是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同胚.

♡

命题 2.1

在分布的意义下，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(k)$$

其中，左侧不是真正的积分，它代表一个分布，按以下方式定义

$$\left\langle\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\,\mathrm{d}x,\varphi(x)\right\rangle:=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\,\mathrm{d}x\right)\varphi(k)\,\mathrm{d}k$$

♠

Proof 一方面

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\varphi(k)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)\,e^{-i(-x)k}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(-x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)\,e^{i\cdot 0\cdot x}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\varphi(0)\end{aligned}$$

另一方面

$$\langle 2\pi\delta(k),\varphi(k)\rangle=2\pi\langle\delta(k),\varphi(k)\rangle=2\pi\varphi(0)$$

这表明在分布的意义下

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(k)$$

□

命题 2.2 (常用 Fourier(逆) 变换)

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 上,
$$\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\delta, \quad \mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$
2.
$$\mathcal{F}\left(\delta\left(x-a\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi a}$$
3.
$$\mathcal{F}[e^{-iax}]\left(\xi\right) = \sqrt{2\pi}\delta\left(\xi + a\right)$$
4. 记
$$\operatorname{rect}\left(t\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \texttt{otherwise} \end{cases}$$
则
$$\mathcal{F}[\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)]\left(\xi\right) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}\left(\xi T/2\right) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(\xi T/2\right)}{\xi T/2}$$
特别地
$$\mathcal{F}[\operatorname{rect}]\left(\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$
5.
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+x^2}\right]\left(\xi\right) = e^{-|\xi|a}$$
6.
$$\mathcal{F}\left\{\Delta f\left(x\right)\right\}\left(\xi\right) = -\left|\xi\right|^2\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\xi\right)$$

Proof

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{ia\xi x} + e^{-ia\xi x}\right] = \frac{1}{2}\left(\delta\left(\right)\right)$$

□

第 3 章　高维积分

3.1 分部积分

定理 3.1 (流形上的 Stokes 公式)

对于 n-维定向带边流形 M, 以及任意的 $(n-1)$-形式 ω, 都有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

引理 3.1

设 (M, g) 是 n-维定向带边 Riemann 流形. $\mathrm{d}V_g$ 和 $\mathrm{d}S_g$ 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$\mathrm{d}S_g = i_N \,\mathrm{d}V_g|_{\partial M}$$

具体地, 在给定局部标架 $x^1, \cdots, x^n$ 下, 设 $N = N^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\mathrm{d}V_g = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_g &= \sqrt{g}\left(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right)\left(N^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{g} N^i (-1)^{i-1}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

引理 3.2

设 (M, g) 是 n-维定向带边 Riemann 流形. $\mathrm{d}V_g$ 和 $\mathrm{d}S_g$ 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则对于任意 M 上的向量场 X, 在 ∂M 上有以下成立

$$i_X \,\mathrm{d}V_g = g(X, N)\,\mathrm{d}S_g$$

Proof 令

$$X^\top = X - g(X, N)\,N$$

则 $X^\top$ 是 ∂M 上的一个切向量场. 设 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 是 ∂M 上的 $(n-1)$ 个向量场, 则

$$\begin{aligned} i_X \,\mathrm{d}V_g\left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right) &= \mathrm{d}V_g\left(X, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) \\ &= \mathrm{d}V_g\left(X^\top + g\left(X, N\right) N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) \\ &= g\left(X, N\right) \mathrm{d}V_g\left(N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) + \mathrm{d}V_g\left(X^\top, v_1, \cdots, v_{n-1}\right). \end{aligned}$$

其中

$$g\left(X, N\right) \mathrm{d}V_g\left(N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g\left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right)$$

此外, $X^\top, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 是 $(n-1)$-流形 ∂M 上的 n 个光滑向量场, 其必 $C^\infty\left(\partial M\right)$-线性相关. 从而

$$\mathrm{d}V_g\left(X^\perp, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = 0$$

于是

$$i_X \,\mathrm{d}V_g\left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g\left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right)$$

即

$$i_X \,\mathrm{d}V_g = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g$$

□

定义 3.1 (Lie 导数)

设 M 是光滑流形, 设 X 是 M 上的一个向量场, T 上 M 上的一个张量场. 按一以下方式定义 T 沿着 X 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X T$

1. 若 $T = f \in C^\infty\left(M\right)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X f = X\left(f\right)$$
2. 若 $T = Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X Y := [X, Y]$$
3. 若 $T = \omega \in \Omega\left(M\right)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X \omega = \mathrm{d}\left(i_X \omega\right) + i_X \,\mathrm{d}\omega$$
这个等式被称为是 Cartan 魔术公式.
4. 对于两个张量场 S, T ,
$$\mathcal{L}_X\left(S \otimes T\right) = \left(\mathcal{L}_X S\right) \otimes T + S \otimes \left(\mathcal{L}_X T\right)$$
因此递归地定义出任意 (k, l)-张量场沿着 X 的 Lie 导数.

♣

定义 3.2 (散度)

对于光滑流形 M. 设 X 是 M 上的光滑向量场, Ω 是 M 上的一个体积形式, 定义 X 关于 Ω 的散度, 为一个光滑函数 $\operatorname{div}_\Omega(X)$ 使得

$$\mathcal{L}_X\Omega = (\operatorname{div}_\Omega(X))\,\Omega$$

特别地, 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$, 向量值函数 $\mathbf{F} = (F^1, \cdots, F^n)$ 关于标准体积形式 $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \mathrm{d}x^n$ 的散度为

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial x^i}$$

♣

Remark

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}x) + i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}F^j\,\widehat{\mathrm{d}x^j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^j}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x$$

定理 3.2 (散度定理)

设 (M, g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V_g = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{F}, N)\,\mathrm{d}S_g$$

♡

Proof 由 Stokes 定理

$$\int_M \mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}V_g) = \int_{\partial M} i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}V_g$$

其中

$$i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}V_g = g(\mathbf{F}, N)\,\mathrm{d}S_g$$

且由 Cartan 魔术公式,

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V_g = \mathcal{L}_{\mathbf{F}}(\mathrm{d}V_g) = \mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}V_g) + i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}(\mathrm{d}V_g) = \mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}V_g)$$

带入即得

□

推论 3.1 (Gauss-Green)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_n)$ 是标准坐标, 则

$$\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uN^i\,\mathrm{d}S$$

其中 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$; $i = 1, \cdots, n$.

♡

Proof 令 $\mathbf{F}=u\frac{\partial}{\partial x^{i}}$. 则

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})=u_{x^{i}}$$

$$\mathbf{F}\cdot N=uN^{i}$$

由散度定理立即得到. □

引理 3.3

设 (M,g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的函数, 则

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})\,v=\operatorname{div}(v\mathbf{F})-g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})$$

♡

Proof 由

$$\mathcal{L}_{v\mathbf{F}}(\mu)=\mathrm{d}(i_{v\mathbf{F}}\mu)=\mathrm{d}(v i_{\mathbf{F}}\mu)=\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu+v\,\mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\mu)$$

其中, 设 $\mu=\mathrm{d}x^{1}\wedge\cdots\mathrm{d}x^{n}$, 则

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^{1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n}}\right)&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\mathrm{d}v)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)\mu\left(\mathbf{F},\frac{\partial}{\partial x^{1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{j}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n}}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}g\left(\operatorname{grad}\,v,\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)F^{j}=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})\end{aligned}$$

即 $(\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu)=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})$. 此外 $v\,\mathrm{d}(i_{F}\mu)\,\mu=v\mathcal{L}_{\mathbf{F}}(\mu)$ 这表明

$$\operatorname{div}(v\mathbf{F})=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})+v\operatorname{div}(\mathbf{F})$$

□

定理 3.3 (高维分部积分)

设 (M,g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的一个光滑函数. 则

$$\int_{M}(\operatorname{div}\mathbf{F})\,v\,\mathrm{d}V_{g}=\int_{\partial M}vg(\mathbf{F},N)\,\mathrm{d}S_{g}-\int_{M}g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})\,\mathrm{d}V_{g}$$

♡

Proof 对引理的等式在 Ω 上积分, 并利用散度定理立即得到.

□

推论 3.2 (某一方向上的分部积分)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^{n}$ 上的一个可定向嵌入 Riemann 超曲面, $(x^{1},\cdots,x^{n})$ 是 $\mathbb{R}^{n}$ 的标准坐标.

设 u, v 是 Ω 上的光滑函数, $N = N^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量场. 则

$$\int_{\Omega} uv \,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} uvN^i \,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} uv_{x_i} \,\mathrm{d}V$$

Proof 上面的分部积分公式令 $\mathbf{F} = u\frac{\partial}{\partial x^i}$ 即可.

□

定理 3.4 (Green 公式)

设 $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$,$\nu$ 是单位外法向量, 那么

1. $$\int_{\Omega} \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S$$
2. $$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega} u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \,\mathrm{d}S$$
3. $$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \,\mathrm{d}S$$

其中 2,3 分别称为格林第一, 二公式.

Proof

1. 在欧氏空间上, $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$. 令 $F = \nabla u$, 由散度定理,
$$\int_{\Omega} \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S$$
2. 令 $\mathbf{F} = \nabla v$, 由高维分部积分
$$\int_{\Omega} u \,\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x$$
3. 由 2.
$$\int_{\Omega} u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x$$
交换 u, v 的地位
$$\int_{\Omega} v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial O} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla_u \cdot \nabla_v \,\mathrm{d}x$$
两式相减即可.

□

3.2 极坐标

定理 3.5 (球坐标下的 Laplace)

考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的球坐标 (r,θ,φ) 其上的 Laplace 算子表示为

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

特别地, 若 $f=f\left(r\right)$ 是只依赖于径向的函数, 则

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

♡

第 4 章　能量方法

定理 4.1

设 $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$，则以下边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

最多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Proof　设 $\bar{u}$ 是另一个解，令 $w = \bar{u} - u$. 则

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由 Green 公式，能量

$$E = \int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega w\Delta w + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0 + 0 = 0$$

于是

$$\nabla w \equiv 0$$

表面 w 是常值的，又 w 在边界上为零，故 w 在 $\bar{\Omega}$ 上恒为零. 这表明解是唯一的.

□

引理 4.1 (微分 Gronwall)

设 $u, k, h \in C([a, b])$，且 u 非负可微，满足

$$u'(t) \leq k(t) u(t) + h(t)$$

则

$$u(t) \leq e^{\int_a^t k(s) \, \mathrm{d}s} \left(u(a) + \int_a^t h(s) e^{\int_s^a k(\tau) \, \mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}s \right)$$

引理 4.2 (积分 Gronwall)

设 u, k, h 是 $I = [a, b]$ 上的非负连续函数，若

$$u(t) \leq k(t) + \int_a^t h(s) u(s) \, \mathrm{d}s, \forall t \in [a, b]$$

则

$$u(t) \leq k(t) e^{\int_a^t h(s) \, \mathrm{d}s}, \quad \forall t \in [a, b]$$

定义 4.1 (Sobolev 空间)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界开区域, $k \in \mathbb{N}$, $D^\alpha u, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 表示多重弱导数, $L^2(\Omega)$ 为平方可积空间. 定义

$$H^k(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \le k\right\}$$

♣

定义 4.2 (零边值 Sobolev 空间)

Ω, $K, D^\alpha u$ 同前. 定义

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

♣

引理 4.3 (Poincare 不等式)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 且有 Lipschitz 边界. 则存在仅依赖与 Ω 的常数 C, 使得对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

♡

4.1 热方程的能量估计

定理 4.2 (Dirichlet 边界条件)

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$, $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\Omega_T)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

设解 u 的一个能量泛函 E 为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x$$

那么存在常数 C, 使得

$$E(t) \le C\left(E(0) + \int_0^t \|f\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s\right)$$

♡

Proof

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega u_t \cdot u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta u \cdot u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f \cdot u \,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_{\Omega}\Delta u\cdot u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,\,\mathrm{d}x=-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,\,\mathrm{d}x=-\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_{\Omega}f\cdot u\,\mathrm{d}x\le\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}$$

合并不等式, 得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\le-\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}$$

由 Poincare 不等式, 存在常数 C_P, 使得

$$C_p\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

由不等式 $ab\le\frac{a^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon b^2}{2}$, 得到

$$\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}=\sqrt{2E}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{E}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\le\left(\frac{1}{\varepsilon}-2C_p\right)E+\frac{\varepsilon}{2}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{C_p}$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\le-C_pE+\frac{C_p}{2}\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

由 Gronwall 不等式,

$$E\left(t\right)\le e^{-C_pt}\left(E\left(0\right)+\frac{C_p}{2}\int_0^t\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}^2e^{-C_p(t-s)}\,\mathrm{d}s\right)$$

取 $C>\max\left\{e^{-C_pt},\frac{C_p}{2}\right\}$ 即可.

□

推论 4.1 (唯一性)

设 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T:=\Omega\times(0,T]$, $\Gamma_T=\overline{\Omega_T}-\Omega_T$, $g\in C\left(\Gamma_T\right)$, $f\in C\left(\Omega_T\right)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f\left(x,t\right), & (x,t)\in\Omega_T,\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), & x\in\Omega\\ u\left(x,t\right)=\psi\left(x,t\right), & (x,t)\in\Gamma_T\end{cases}$$

该问题的解是唯一的.

Proof 若 $u,\bar{u}$ 是两个解, 令 $w=u-\bar{u}$ 则方程是以下问题的解

$$\begin{cases} w_t-\Delta w=0, & (x,t)\in\Omega_T \\ w(x,0)=0, & x\in\Omega \\ w(x,t)=0, & (x,t)\in\Gamma_T \end{cases}$$

由上面的能量估计, 存在常数 C, 使得

$$E(t)\leq CE(0)$$
$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega |w(x,t)|^2\,\mathrm{d}x,\quad E(0)=0$$

于是

$$w(x,t)\equiv 0$$

这表明解唯一. □

4.2 波动方程的能量估计

定理 4.3

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域,$\Omega_T:=\Omega\times[0,T]$, $u\in C^2(\Omega_T)\cap C^1\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 是以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t), & (x,t)\in\Omega_T, \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\Omega \end{cases}$$

的解. 定义能量

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|u_t|^2+a^2|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}a^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

则存在常数 M, 使得

$$E(t)\leq M\left(E(0)+\int_0^T\|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right)$$

♡

Proof

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega\left(u_tu_{tt}+a^2\nabla u\nabla u_t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$a^2\int_\Omega \nabla u\nabla u_t = a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S - a^2\int_\Omega u_t\Delta u\,\mathrm{d}x$$
$$= a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega u_{tt}u_t\,\mathrm{d}u + \int_\Omega f(x,t)\,u_t\,\mathrm{d}x$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式,

$$\int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{2E}$$

再由不等式 $ab\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, 得到

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{2E} \le E + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le E + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

由微分形式的 Gronwall 不等式,

$$E(t) \le e^t\left(E(0) + \int_0^T \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \le e^T\left(E(0) + \int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right)$$

取 $M = e^T$ 即可. □

推论 4.2 (唯一性)

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域,$\Omega_T := \Omega\times[0,T]$, $u\in C^2(\Omega_T)\cap C^1\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 则以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & (x,t)\in\Omega_T, \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x\in\Omega \end{cases}$$

的解是唯一性的.

Proof 设 $\bar u, u$ 是两个解, $w = \bar u - u$, 则

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2\Delta w = 0, & (x,t)\in\Omega_T \\ w(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,t) = 0, & x\in\Omega \end{cases}$$

令

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(|w_t|^2 + |\nabla w|^2\right) \mathrm{d}x$$

则存在常数 M, 使得

$$E(t) \leq ME(0)$$

其中

$$E(0) = 0$$

故

$$E(t) \equiv 0 \implies w_t \equiv 0, \nabla w \equiv 0$$

这表明 $w(x,t)$ 是常值的, 又 $w(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0$, 故 $w \equiv 0$. 这表明解是唯一的.

$\square$

第 5 章　Green 函数

Green 函数是在线性系统 L 的作用下表现为“瞬时脉冲”的函数.

定义 5.1

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的区域, L 是一个线性微分算子, 定义关于以下非齐次方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的格林函数 $G(x, x')$ 为以下分布意义下方程的解

$$LG(x, x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \Omega$$

其中 $u(x)$ 是未知函数, δ 是 Dirac 分布.

定理 5.1

Ω, L 同前, G 是方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的 Green 函数, 则

$$u(x) = \int_\Omega G(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'$$

是该方程的一个解.

Proof 设 $u(x)$ 有题述表示, 由线性叠加原理,

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= L\left(\int_\Omega G(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'\right) \\
&= \int_\Omega (LG(x, x') f(x')) \, \mathrm{d}x' \\
&= \int_\Omega (\delta(x - x')) f(x') \, \mathrm{d}x' \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$\square$

5.1 Dirichlet 问题的 Green 函数法

本节希望通过 Green 函数法, 给出 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 0, & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解的表示形式.

定义 5.2 (Green of Dirichlet)

定义区域 Ω 上 Dirichelet 问题对应的 Green 函数, 为以下问题的解

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), & \forall x \in \Omega \\ G(x, x') = 0, & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

♣

5.1.1 非齐次方程, 齐次边界

定理 5.2

$\Omega, G(x, x')$ 同前. 令

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'$$

则 $u(x)$ 是以下有齐次边界条件的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

♡

Proof 结合定理5.1, 这是显然的

□

5.1.2 齐次方程, 非齐次边界

定理 5.3

Ω, G 同前, 令

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial x'} \, \mathrm{d}S_{x'}$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Proof 由 Green 第二恒等式，我们有

$$\int_\Omega G(x, x_0)\Delta u(x) - u(x)\Delta_x G(x, x_0)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(G(x, x_0)\frac{\partial u}{\partial n_x} - u(x)\frac{\partial G}{\partial n_x}\right)\mathrm{d}S_x$$

其中

1. $$\int_\Omega \Delta u(x) G(x, x_0)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega 0 \cdot G(x, x_0)\,\mathrm{d}x = 0$$
2. $$\int_\Omega u(x)\Delta_x G(x, x_0)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = u(x_0)$$
3. $$\int_\Omega G(x, x_0)\frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S_x = \int_\Omega 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S_x = 0$$
4. $$\int_\Omega u(x)\frac{\partial G}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S_x = \int_\Omega g(x)\frac{\partial G}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S_x$$

全部带入，得到

$$u(x_0) = \int_\Omega g(x)\frac{\partial G}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S_x$$

以 x 代 x_0，以 x' 代 x，得到

$$u(x) = -\int_\Omega g(x')\frac{\partial G(x', x)}{\partial n_{x'}}\,\mathrm{d}S_{x'}$$

□

5.1.3 最终表示

定理 5.4

Ω, G 同前，令

$$u(x) = \int_\Omega g(x')\frac{\partial G(x', x)}{\partial x'}\,\mathrm{d}S_{x'} - \int_\Omega g(x, x') f(x')\,\mathrm{d}x'$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Proof 由线性叠加原理立即得到.

□

5.2 几种空间 Green 函数

定理 5.5

$\Omega = \mathbb{R}^3$ 上的拉普拉斯算子的 Green 函数为

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi |x - x'|}$$

即上面的表达式在分布意义下满足

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), & x, x' \in \mathbb{R}^3 \\ \lim_{|x| \to \infty} G(x, x') = 0, & x' \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Proof 我们希望找到 $G(x, x')$, 使得

$$\Delta_x G(x, x') = \delta(x - x')$$

方便起见, 固定 x', 令 $y = x - x'$, 则 $\Delta_x = \Delta_y$, 记 $G(y) = G(x, x')$, 只需要找到 $G(y)$, 使得

$$\Delta_y G(y) = \delta(y)$$

希望寻找径向的 G, 利用

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

在 $y \neq 0$ 处, 解方程

$$\frac{\partial G}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r}\right) = 0$$

解得

$$G(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

接下来确定 C_1, C_2, 任取测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, 我们需要

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

根据分布的导数的定义, 以及 Dirac 函数的筛选性, 上面写作

$$\langle G, \Delta\varphi \rangle = \varphi(0)$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(-\frac{C_1}{|x|} + C_2 \right) \Delta\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

由散度定理

$$\int_{\mathbb{R}^3} C_2 \Delta\varphi(x)\, \mathrm{d}x = C_2 \int_{\partial\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}x = 0$$

其中最后的等号是因为 φ 的紧支性导致的无穷远处的消失性. 我们发现 C_2 不影响 ΔG 与 δ 的关系, 通常取 $C_2 = 0$. 对于

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi\, \mathrm{d}x$$

在 $V_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$ 上, 使用第二格林公式, 得到

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi\, \mathrm{d}x = \int_{V_\varepsilon} \varphi\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) \mathrm{d}x - \int_{\partial V_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|}\nabla\varphi - \varphi\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot e_r\, \mathrm{d}S$$

由于 φ 是测试函数, φ 和 $\nabla\varphi$ 在无穷远处消失, 并且 $\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$ 在 V_ε 上成立, 于是右侧积分化为

$$\begin{aligned}
&-\int_{\partial_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|}\nabla\varphi + \varphi\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot e_r\, \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\varphi \right) \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 + O(r) \right) + \frac{1}{r^2}\left(\varphi(0) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 r + O\left(r^2\right) \right) \right) \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2}\varphi(0) + \frac{2}{r}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 + O(1) \right) \mathrm{d}S \to -4\pi\varphi(0), (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

于是

$$C_1 (4\pi\varphi(0)) = \varphi(0)$$

得到

$$C_1 = \frac{1}{4\pi}$$

进而

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$$

即

$$G\left(x, x'\right)=-\frac{1}{4\pi\left|x-x'\right|}$$

□

第 5 章 练习

Problem 5.1

1. 定义 $\Psi(x):=\frac{1}{|x|}\exp(-|x|), 0\neq x\in\mathbb{R}^3$. 证明 $\Psi(x)$ 满足如下方程:
$$-\Delta\Psi(x)+\Psi(x)=0,\quad 0\neq x\in\mathbb{R}^3.$$
2. 并以此 (仿照调和方程的 Green 函数法) 求解如下定解问题:
$$\begin{cases}-\Delta u+u=0, & x\in\mathbb{R}_+^3\\ u|_{\partial\mathbb{R}_+^3}=g.\end{cases}$$

Proof

1. 令 $r=|x|$, 设 $G(r)=\Psi(x)=\frac{1}{r}\exp(-r)$, 则对于径向函数 $G(r)$, 其关于 x 的 Laplace 算子满足
$$\Delta G(r)=\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)$$
计算即可.
2. 根据无限域上 Dirichlet 上的基本解, 我们已经知道在分布的意义下,
$$\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)=\delta(x)$$
利用 Laplace 算子的乘积法则
$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\nabla v$$
那么
$$\begin{aligned}
&\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)\\
&=\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\Delta_x\exp(-x)+2\nabla\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)\cdot\nabla(\exp(-|x|))\\
&=\delta(x)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\left(1-\frac{2}{|x|}\right)\exp(-|x|)+2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3}\right)\exp(-|x|)\left(-\frac{x}{|x|}\right)\\
&=\delta(x)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)
\end{aligned}$$

于是在分布的意义下

$$\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)-\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)=\delta(x)\exp(-|x|)=\delta(x)$$

令 $G_0(x,x_0)=-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\exp(-|x-x_0|)$，则下述方程在分布的意义下成立

$$(-\Delta_x+I)G_0(x,x_0)=\delta(x-x_0)$$

接下来，设 x' 是 x 关于 $\partial\mathbb{R}^3_+$ 的镜像对称点，定义

$$G(x,x_0)=G_0(x,x_0)-G_0(x',x_0)$$

则由线性叠加原理，下述方程在分布意义下成立

$$\begin{cases}(-\Delta_x+I)G(x,x_0)=\delta(x-x_0), & x\in\mathbb{R}^3_+\\ G(x,x_0)=0, & x\in\partial\mathbb{R}^3_+\end{cases}$$

记 $L_x=(-\Delta_x+I)$ 是一个线性微分算子，根据 Green 第二恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}u(x)\Delta_xG(x,x_0)-G(x,x_0)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}u\frac{\partial G}{\partial n_x}-G\frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S$$

得到

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}G(x,x_0)L_xu(x)-u(x)L_xG(x,x_0)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}u\frac{\partial G}{\partial n_x}-G\frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S$$

若上面的 u 满足

$$\begin{cases}L_xu=0, & x\in\mathbb{R}^3_+\\ u|_{\partial\mathbb{R}^3_+}=g\end{cases}$$

则上述积分式化为

$$-\int_{\mathbb{R}^3_+}u(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}g(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S$$

其中左侧为 $u(x_0)$. 依据此，取

$$u(x_0)=-\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}g(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S$$

即

$$u(x)=-\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}g(x_0)\frac{\partial G(x_0,x)}{\partial n_{x_0}}\,\mathrm{d}S_{x_0}$$

带入回上述过程，可知 $u(x)$ 满足边界条件

$$u|_{\partial\mathbb{R}^3_+}=g$$

此外，由微分算子 L 的线性

$$L_x u = -\int_{\partial\mathbb{R}_+^3} g(x) \frac{\partial L_x G(x_0, x)}{\partial n_{x_0}} \, \mathrm{d}S_{x_0} = -\int_{\partial\mathbb{R}_+^3} g(x) \cdot 0 = 0$$

这上述构造的 u 确实是方程的解.

最后，计算 $\frac{\partial G(x_0,x)}{\partial n_{x_0}}$，无非是 x_0 关于第三个分量的偏导数的相反数，计算过程略去.

$\square$

第 6 章　调和函数的极值原理

6.1 预备知识

定义 6.1 (调和函数)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上成立, 则称 u 是 Ω 上的调和函数. ♣

定理 6.1 (平均值性质)

若 u 是 Ω 上的调和函数,$B_r(x_0) \subseteq \Omega$. 则

1. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x$$
2. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{area}(\partial B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}S$$

♡

6.2 调和函数的极值原理

定理 6.2 (弱极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 则

1. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$
2. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

♡

定理 6.3 (强极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个连通开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数. 若以下成立其一:

1. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最大值
2. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最小值.

，则 u 在整个 Ω 上是常函数. ♡