目录

第 1 章 知识点总结

性质组合	$H^n(M;\mathbb{Z})$	$H^n(M;R)$ (R 是域, $R\neq\mathbb{Z}_2$)	$H^n(M;\mathbb{Z}_2)$
紧致且可定向	$\mathbb{Z}$	R	$\mathbb{Z}_2$
紧致且不可定向	0	0	$\mathbb{Z}_2$
非紧致且可定向	0	0	0
非紧致且不可定向	0	0	0

定理 1.1 (Kunneth 公式)

对于同调

$$H_k(X\times Y;R)\cong\left(\bigoplus_{i+j=k}(H_i(X;R)\otimes_R H_j(Y;R))\right)\oplus\left(\bigoplus_{i+j=k-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_i(X;R),H_j(Y;R))\right)$$

对于上同调

$$H^k(X\times Y;R)\cong\left(\bigoplus_{i+j=k}(H^i(X;R)\otimes_R H^j(Y;R))\right)\oplus\left(\bigoplus_{i+j=k+1}\mathrm{Ext}_R^1(H^i(X;R),H^j(Y;R))\right)$$

♡

特别地, 域上的 Kunneth 公式有简洁的形式

定理 1.2 (域上的 Kunneth 公式)

设 F 上一个域

对于同调

$$H_k(X\times Y;F)\cong\bigoplus_{i+j=k}(H_i(X;F)\otimes_F H_j(Y;F))$$

对于上同调

$$H^k(X\times Y;F)\cong\bigoplus_{i+j=k}(H^i(X;F)\otimes_F H^j(Y;F))$$

♡

Remark

1. 由此导出维数的计算公式, 从而可以方便地计算 Betti 数,Euler 示性式.
2. 在张量积环中, 乘积的定义为

$$(\alpha_1\otimes\beta_1)\cdot(\alpha_2\otimes\beta_2)=(-1)^{|\beta_1||\alpha_2|}(\alpha_1\cup\alpha_2)\otimes(\beta_1\otimes\beta_2)$$