第 1 章　向量场

1.1 流形上的向量场

定义 1.1 (向量场)

设 M 是一个（带边）光滑流形，M 上的一个向量场是指，映射 $\pi : TM \to M$ 的一个截面。具体地，一个向量场是指一个连续映射 $X : M \to TM$，记作 $p \mapsto X_p$，具有以下性质

$$\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$$

或者等价地说，$X_p \in T_pM$ 对每个 $p \in M$ 成立。♣

Remark

1. 光滑向量场：称向量场是 X 是光滑的，若它视为 M 到 TM 的映射是光滑的，其中 TM 被赋予了光滑结构。
2. 粗向量场：称 X 是 M 上的一个粗向量场，若 $X : M \to TM$ 是（不必连续）映射，满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$。
3. 支撑集：向量场 $X : M \to TM$ 的支撑集被定义为
$$\overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}$$
4. 紧支撑：若 X 的支撑集是紧的，则称 X 是紧支撑的。
5. 局部基表示：设 $X : M \to TM$ 是粗向量场，$\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 是 M 的任意光滑坐标卡，可以将 X 在任一点 $p \in U$ 处的取值用坐标基向量表示：
$$X_p = X^i\left(p\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$
6. 分量函数：5. 中的每个 $X^i : U \to \mathbb{R}$ 称为 X 在给定坐标卡中的一个分量函数。

命题 1.1 (分量刻画)

设 M 是（带边）光滑流形，$X : M \to TM$ 是粗向量场。若 $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 是 M 上的任一光滑坐标卡，那么 X 在 U 上的限制是光滑的，当且仅当 X 在该坐标卡中的所有分量函数都是光滑的。♠

Proof 令 $\left(x^i, v^i\right)$ 是 $\pi^{-1}\left(U\right) \subset TM$ 与图 $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 对应的自然坐标。$X : M \to TM$ 关于 $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 和 $\left(\pi^{-1}\left(U\right), \left(x^i, v^i\right)\right)$ 的坐标表示为

$$\hat{X}\left(x\right) = \left(x^1, \cdots, x^n, X^1\left(x\right), \cdots, X^n\left(x\right)\right)$$

因此 X 在 U 上光滑，当且仅当 $\hat{X}$ 光滑，当且仅当 $X^1, \cdots, X^n$ 均光滑。

□

定义 1.2 (沿子集的向量场)

设 M 是光滑（带边）流形，$A \subset M$ 是任意子集。称连续映射 $X : A \to TM$ 是沿 A 的一个向量场，若它满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_A$，即对于任意的 $p \in A$，$X_p \in T_pM$。♣

Remark

1. 开子流形：若 A 是 M 的开子集 U。由于 $T_pU \simeq T_pM, p \in U$，进而可以将 TU 等同于 $\pi^{-1}(U) \subset TM$，因此对于向量场 $X : U \to TU$，可以视为 $U \to TM$ 的向量场。若 X 是 M 上的光滑向量场，那么 $X|U$ 亦然。
2. 光滑性：称沿 A 的向量场 X 是光滑的，若对于任意的 $p \in A$，存在 p 在 M 中的邻域 V，和 V 上的光滑向量场 $\tilde{X}$，使得 $X|(V \cap A) = \tilde{X}|(V \cap A)$。

引理 1.1 (延拓引理（闭集上)

设 M 是光滑（带边）流形，$A \subset M$ 是闭子集。设 X 是沿 A 的光滑向量场，对于给定的包含了 A 的开集 U，存在 M 上的光滑向量场 $\tilde{X}$，使得 $\tilde{X}|A = X$，$\operatorname{supp} \tilde{X} \subset U$。♡

Remark

1. 切向量的光滑延拓：特别地，任意切向量可视为沿单点集的向量场，它是光滑的，因为可以在坐标邻域上做常系数的延拓。此外光滑流形是 Hausdorff 空间，单点集在其上是闭的，因此切向量可以延拓为光滑向量场。

Proof 任取 $p \in A$，设 W_p 是 p 在 M 中的邻域，$\tilde{X}_p : W_p \to TM$ 是光滑向量场，使得 $\tilde{X}_p|A \cap W_p = X|A \cap W_p$，不妨设 $W_p \subset U$。$\{W_p : p \in A\} \cup \{M \backslash A\}$ 构成 M 的开覆盖，设 $\{\psi_p\} \cup \{\psi_0\}$ 是从属于此开覆盖的 M 的光滑单位分解，使得 $\operatorname{supp}(\psi_p) \subset W_p, \operatorname{supp}(\psi_0) \subset M \backslash A$。那么 $\psi_p \tilde{X}_p : W_p \to TM$ 是光滑的向量场，通过令它们在 $M \backslash \operatorname{supp} \psi_p$ 上取零，可以光滑地延拓到 M 上。现在，定义

$$\tilde{X} := \sum_p \psi_p \tilde{X}_p$$

是光滑的向量场。任取 $q \in A$，我们有 $\psi_0(q) = 0$，且对于每个 ψ_p，若 $\psi_p(q) > 0$，则 $\tilde{X}_p(q) = X(q)$ 于是

$$\tilde{X}(q) = \sum_p \psi_p \tilde{X}_p(q) + \psi_0 \tilde{X}_p(q) = \left(\sum_p \psi_p + \psi_0 \right) X(q) = X(q)$$

因此 $\tilde{X}|A = X$。最后

$$\operatorname{supp} \tilde{X} \subset \overline{\bigcup_p \operatorname{supp} \psi_p} = \bigcup_p \mathrm{supp}\psi_\mathrm{p} \subset U$$

□

定义 1.3 (光滑向量场空间)

设 M 是光滑（带边）流形，用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上的全体光滑向量场。♣

Remark

1. 线性空间：$\mathfrak{X}(M)$ 在逐点加法和标量乘法下构成线性空间：
$$(aX+bY)_p := aX_p + bY_p.$$
2. 模结构：$\mathfrak{X}(M)$ 是环 $C^\infty(M)$ 上的模：对于 M 上的光滑向量场 X, Y，和 $f, g \in C^\infty(M)$，$fX+gY$ 通过分量函数可以验证是光滑向量场。
3. 基表示：向量场的基表示除了逐点的表示法之外，也可以写成整体的表示
$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
其中 X^i 是第 i 个分量向量场。

1.1.1 标架

以下设 M 是 n-维光滑（带边）流形，$X_1, \cdots, X_k$ 是定义在某个子集 $A \subset M$ 的向量场。

定义 1.4

称有序 k-元组 $(X_1, \cdots, X_k)$ 是线性独立的，若对于任意的 $p \in A$，$(X_1|_p, \cdots, X_k|_p)$ 是 T_pM 中线性独立的 k 个切向量。 ♣

定义 1.5

称 $(X_1, \cdots, X_k)$ 张成了切丛，若对于每个 $p \in A$，k-元组 $(X_1|_p, \cdots, X_k|_p)$ 张成了 T_pM。 ♣

定义 1.6 (局部标架)

称定义在开集 $U \subset M$ 的向量场的有序 n-元组 $(E_1, \cdots, E_n)$ 为 M 的一个局部标架，若它们线性独立且张成了切丛。 ♣

Remark

1. 基：若 $(E_1, \cdots, E_n)$ 是 M 的一个局部标架，那么对于任意的 $p \in U$，$(E_1|_p, \cdots, E_n|_p)$ 构成 T_pM 的一组基。
2. 全局标架：若在此之上 $U = M$，则称 $(E_1, \cdots, E_n)$ 是 M 的一个全局标架。
3. 光滑标架：在此之上每个向量场 E_i 都光滑，则称它为一个光滑标架。
4. 若 $\dim M = n$，验证 $(E_1, \cdots, E_n)$ 线性独立或张成切丛其一即可。

命题 1.2 (标架的补全)

令 M 是光滑 n-维（带边）流形，那么

1. 若 $(X_1, \cdots, X_k)$ 是定义在开子集 $U \subset M$ 的线性独立的 k-个光滑向量场，$1 \leqslant k < n$。那么对于每个 $p \in U$，存在定义在 p 的邻域 V 上的光滑向量场 $X_{k+1}, \cdots, X_n$，使得 $(X_1, \cdots, X_n)$ 是 M 在 $U \cap V$ 上的光滑局部标架。
2. 设 $p \in M$，$(v_1, \cdots, v_k)$ 是 T_pM 上的线性无关的 k 个切向量。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，存在定义在 p 的某个邻域上的光滑局部标架 (X_i)，使得 $X_i|_p = v_i, i = 1, \cdots, k$。

3. 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是闭集 $A\subset M$ 上 n 个线性独立的光滑向量场，那么存在定义在 A 的某个邻域上的光滑局部标架 $\left(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n\right)$，使得 $\tilde{X}_i|A=X_i, i=1,\cdots,n$。

定义 1.7 (正交标架)

对于定义在 $A\subset\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $(E_1,\cdots,E_k)$，称它们是正交的，若对于每个 $p\in A$，$(E_1|_p,\cdots,E_k|_p)$ 关于欧式内积是正交的（通过 $T_p\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的标准同构定义 $T_p\mathbb{R}^n$ 上的内积）。一个由正交的向量场组成的（局部或全局的）标架，称为一个正交标架。

引理 1.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设 (X_j) 是 $T\mathbb{R}^n$ 的在开子集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑局部标架。那么存在 U 上的光滑正交标架 (E_j)，使得 $\operatorname{span}(E_1|_p,\cdots,E_j|_p)=\operatorname{span}(X_1|_p,\cdots,X_j|_p)$。

Proof 对于每一点 $p\in U$，对 $(X_j|_p)$ 应用 Gram-Schmidt 正交化，可以通过

$$E_j:=\frac{X_j-\sum_{i=1}^{j-1}(X_j\cdot E_i)E_i}{\left|X_j-\sum_{i=1}^{j-1}(X_j\cdot E_i)E_i\right|}$$

归纳地得到粗向量场的 n 元组 $(E_1,\cdots,E_n)$。对于每个 $j=1,\cdots,n$ 和 $p\in U$，由于 $X_j|_p\notin\operatorname{span}(E_1|_p,\cdots,E_{j-1}|_p)$，故分母在 U 上无处退化，因此 (E_j) 是光滑的正交标架。 □

定义 1.8 (可平行化)

称一个光滑（带边）流形是 ** 可平行化 ** 的，若它容许一个光滑的全局标架。

Remark

1. 例如 $\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^1,\mathbb{T}^n$ 是可平行化的。

1.1.2 向量场作为导子

定义 1.9 (向量场在光滑函数上的作用)

设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，f 是定义在开子集 $U\subset M$ 上的光滑函数，我们可以得到新的函数 $Xf:U\to\mathbb{R}$，按以下方式定义

$$(Xf)(p)=X_pf$$

Remark

1. 局部性：由于某点处切向量对函数的作用被函数在任意邻域上的取值决定，从而 Xf 也是被局部确定的。特别地，对于任意开子集 $V\subset U$，我们有

$$(Xf)|_V=X(f|_V)$$

即对于每个 $p\in V$，$X_p(f)=X_p(f|_V)$。

命题 1.3 (向量场光滑性的刻画)

设 M 是光滑（带边）流形，$X: M \to TM$ 是粗向量场，以下几条等价：

1. X 是光滑的；
2. 对于每个 $f \in C^{\infty}(M)$，Xf 是 M 上的光滑函数；
3. 对于每个开子集 $U \subset M$，和每个 $f \in C^{\infty}(U)$，Xf 是 U 上的光滑函数。

Proof (a) $\implies$ (b)：任取 $p \in M$，设 $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 是包含了 p 的光滑坐标卡，设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，则 $X^i \in C^{\infty}(M)$，于是

$$Xf = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

是 U 上的光滑函数，这表明 Xf 在 M 上光滑。

(b) $\implies$ (c)：设 $U \subset M$ 是开集，任取 $f \in C^{\infty}(U)$，和 $p \in U$，设 ψ 是 p 的支撑在 U 的 bump 函数，定义 $\tilde{f} = \psi f$，并在 $M \backslash \operatorname{supp} \psi$ 上对 $\tilde{f}$ 做零延拓。得到 $\tilde{f}$ 是在 p 的某个邻域与 f 相等的光滑函数，因此 $Xf = X\left(\tilde{f}|U\right)$ 是光滑函数。

(c) $\implies$ (a)：任取 $p \in M$，设 $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ 是包含了 p 的光滑坐标卡，设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，注意到坐标函数 x^i 是 U 上的光滑函数，故

$$X^i = X x^i$$

是光滑函数，进而 X 是光滑的。

□

命题 1.4

光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 定义出从 $C^{\infty}(M)$ 到自身的映射 $f \mapsto Xf$。

Remark

1. $C^{\infty}(M)$-线性：X 是 $C^{\infty}(M)$ 上的 $\mathbb{R}$-线性映射。
2. 导子性：X 具有导子性，即对于 $f, g \in C^{\infty}(M)$，我们有

$$X(fg) = fXg + gXf$$

命题 1.5 (导子 $\iff$ 光滑向量场)

设 M 是光滑（带边）流形。映射 $D: C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ 是一个导子，当且仅当存在某个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，使得 $Df = Xf$ 对于任意的 $f \in C^{\infty}(M)$ 成立。

Proof $\impliedby$ 前面已经说明了。

$\implies$ 对于给定的导子 $D: C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$，定义

$$X_p f := (Df)(p)$$

那么 D 的导子性给出 $(D(\cdot))(p)$ 是 p 处的一个点导子，进而 $X_p: C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ 是切向量，因此 X 定义出一个粗向量场。又对于任意的 $f \in C^{\infty}(M)$，$Xf = Df$ 是光滑函数，因此由 1.2. 知

X 是光滑的向量场。

□

1.2 向量场和光滑映射

1.2.1 F-相关性

定义 1.10 (F-相关)

设 $F: M \to N$ 是光滑的，X 是 M 上的向量场，Y 是 N 上的向量场。若对于每个 $p \in M$，都有 $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$，则称 X 和 Y 是 F-相关的。

Idea

对于任意的 $p \in M$，都有 $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$。一般而言，这种方式无法定义出 N 上的向量场：若 F 非满，则对于 $q \in N \backslash F(M)$ 上无法通过这种方式给出切向量；若 F 非单，则切向量可能不止有一种选择。

命题 1.6 (光滑函数的刻画)

设 $F: M \to N$ 是（带边）光滑流形之间的光滑函数，$X \in \mathfrak{X}(M)$，$Y \in \mathfrak{X}(N)$。X 和 Y 是 F-相关的向量场，当且仅当对于任意定义在 N 的开子集的光滑实函数 f，都有

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F$$

Proof 任取 $p \in M$，和定义在 $F(p)$ 的某个邻域上的光滑实值函数 f，我们有

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p) f$$

以及

$$(Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)} f$$

因此 $X(f \circ F) = (Yf) \circ F, p \in M$ 当且仅当 $dF_p(X_p) f = Y_{F(p)} f, p \in M$，当且仅当 $dF_p(X_p) = Y_{F(p)} f, p \in M$，即 X 和 Y 是 F-相关的。

□

命题 1.7

是 M, N 是光滑（带边）流形，$F: M \to N$ 是微分同胚。对于每个 $X \in \mathfrak{X}$，存在唯一 $Y \in \mathfrak{X}(N)$，使得 X 与 Y 是 F-相关的。

Proof 对每个 $q \in N = F(M)$，定义

$$Y_q := dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right)$$

显然 Y 是唯一的 F-相关于 X 的（粗）向量场。此外，Y 的光滑性来自于 Y 是光滑映射的复合

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{dF} TN$$

□

定义 1.11 (推出)

设 $F : M \to N$ 是光滑（带边）流形之间的微分同胚。设 $X \in \mathfrak{X}(M)$，由 1.4.，存在唯一的 F-相关于 X 的向量场，记作 F_*X，称为 X 通过 F 的推出。具体地

$$(F_*X)_q := dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right), \quad q \in N$$

♣

推论 1.1

设 $F : M \to N$ 是微分同胚，$X \in \mathfrak{X}(M)$，那对于任意的 $f \in C^\infty(N)$，我们有

$$((F_*X) f) \circ F = X (f \circ F)$$

♡

1.2.2 向量场和子流形

定义 1.12 (相切)

设 $S \subset M$ 是 M 的浸入或嵌入（带边）子流形。对于给定的 $p \in S$，称 M 上的向量场 X 在点 p 与 S 相切，若 $X_p \in T_pS \subset T_pM$。称 X 与 S 相切，若它在 S 的每一点上与 S 相切。♣

Idea

向量场 X 未必能限制在 S 上，因为可能存在 $X_p \notin T_pS$，所以我们要引入相切的概念。

命题 1.8 (相切条件)

设 M 是光滑流形，$S \subset M$ 是（带边）嵌入子流形，X 是 M 上的光滑向量场。那么 X 与 S 相切，当且仅当 $(Xf)|_S = 0$ 对于每个满足 $f|_S \equiv 0$ 的 $f \in C^\infty(M)$ 成立。

♠

Proof 利用事实

$$T_pS = \{v \in T_pM : vf = 0 \text{ whenever } f \in C^\infty(M) \text{ and } f|_S = 0\}$$

立即得到。

□

命题 1.9 (含入)

设 $S \subset M$ 是（带边）浸入子流形，Y 是 M 上的光滑向量场。若存在 ι-相关于 Y 的向量场 $X \in \mathfrak{X}(S)$，其中 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是含入映射，则 Y 与 S 相切。

♠

Proof $Y_p = d\iota_p(X_p) \in T_pS$

□

命题 1.10 (限制)

设 M 是光滑流形, $S\subset M$ 是(带边)浸入子流形, 令 $\iota: S\hookrightarrow M$ 是含入映射。若 $Y\in\mathfrak{X}(M)$ 与 S 相切, 则存在唯一的 S 上的光滑向量场, 记作 $Y|_S$, 它与 Y 是 ι-相关的。

Idea

为了说明光滑性, 利用浸入是局部嵌入, 给出 X 继承自 Y 的光滑的分量函数。

Proof 由 Y 于 S 相切, 任取 $p\in S$, 存在 $X_p\in T_pS$, 使得 $Y_p=d\iota_p(X_p)$。由于 $d\iota_p$ 是单射, X_p 是唯一的, 因此 X 定义出 S 上唯一的粗向量场。此外若 X 是光滑的, 那么 X 与 Y 是 ι-相关的, 因此只需要说明 X 在每个局部上都光滑即可。由于浸入是局部的嵌入, 任取 $p\in S$, 存在 p 在 S 中的邻域 V, 使得 V 可以嵌入到 M 中。令 $(U,(x^i))$ 是 V 在 M 中以 p 为中心的切片图, 使得 $V\cap U$ 是使得 $x^{k+1}=\cdots=x^n=0$ 的子集 (并且对于 $p\in\partial S, x^k\geqslant 0$), 且 $(x^1,\cdots,x^k)$ 是 S 在 $V\cap U$ 中的局部坐标。设 $Y=Y^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+Y^n\frac{\partial}{\partial x^n}$, 那么 X 有坐标表示 $Y^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ 是 $V\cap U$ 上的光滑向量场。

□

1.3 李括号

设 X,Y 是 M 上的光滑向量场, 它们可视为作用在光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$ 的导子。我们希望通过 X,Y 给出新的导子。但是最简单的依次作用的方式 $f\mapsto YXf:=Y(Xf)$ 有时并不满足 Lebniz 律, 从而不能成为一个 YX 不能成为一个光滑向量场。

Example 1.1 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $X=\frac{\partial}{\partial x}, Y=x\frac{\partial}{\partial y}$, 令 $f(x,y)=x, g(x,y)=y$, 则直接计算, 可以得到 $XY(fg)=2x$, 而 $fXYg+gXYf=x$, 所以 XY 不是 $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的导子。

我们需要观察的是 XY 距离成为一个导子多出了什么, 计算 $XY(fg)=XfYg+XgYf+fXYg+gXYf$, 注意到后两项就是导子性所需要的, 而前两项是多余的, 但是我们发现前两项对于 f,g 的位置具有对称性, 因此如果减去调换后的结果, 就可以消去多余项, 这就引出了李括号运算 $[X,Y]$。

内容提要

- 李括号的导子性
- 李括号的坐标表示

定义 1.13 (李括号)

设 X,Y 是光滑 (带边) 流形 M 上的两个光滑向量场。定义 X 和 Y 的李括号算子 $[X,Y]: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 按照

$$[X,Y]f:=XYf-YXf$$

引理 1.3

任意一对光滑向量场的李括号，也是一个光滑向量场。

Proof 由命题1.5，只需要证明 $[X,Y]$ 是 $C^\infty(M)$ 上的一个导子。任取 $f,g\in C^\infty(M)$,，计算

$$\begin{aligned}[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg))\\ &= X(fYg+gYf) - Y(fXg+gXf)\\ &= fXYg+YgXf+gXYf+YfXg-(fYXg+XgYf+gYXf+XfYg)\\ &= fXYg+gXYf-fYXg-gYXf\\ &= f[X,Y]g+g[X,Y]f\end{aligned}$$

故导子性成立。

□

命题 1.11

向量场 $[X,Y]$ 在点 $p\in M$ 处的取值由以下公式给出

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

命题 1.12

设 X,Y 是光滑流形（带边）流形 M 上的光滑向量场，令 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ 为 X,Y 在 M 的某个局部坐标 (x^i) 下的坐标表示。那么 $[X,Y]$ 可以有由以下坐标表示得到

$$[X,Y]=\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

或者简单地写作

$$[X,Y]=\left(XY^j-YX^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Proof 由于 $[X,Y]$ 是一个向量场，它在函数上的作用是被局部决定的:$([X,Y]f)|_U=[X,Y](f|_U)$。因此只需要在单个坐标卡上计算即可，我们有

$$\begin{aligned}[X,Y]f &= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)-Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\\ &= X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}+X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}-Y^jX^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\\ &= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\\ &= \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}f\end{aligned}$$

因此

$$[X,Y]=\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

□

推论 1.2

对于任意的坐标向量场 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0, \quad \forall i, j$$

Example 1.2 定义光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x\left(y+1\right)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

利用 $[X,Y] = \left(XY^j - YX^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$ 计算，得到

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left(X\left(1\right) - Y\left(x\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(X\left(0\right) - Y\left(1\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(X\left(y\right) - Y\left(x\left(y+1\right)\right)\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} + \left(1 - \left(y+1\right)\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

命题 1.13 (李括号的性质)

对于所有的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}\left(M\right)$，李括号满足以下性质

1. 双线性：对于 $a, b \in \mathbb{R}$
$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y]$$
2. 反对称性：
$$[X,Y] = -[Y,X]$$
3. Jacobi 恒等式：
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$
4. 对于 $f, g \in C^\infty\left(M\right)$,
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + \left(fXg\right)Y - \left(gYf\right)X$$

Proof 双线性和反对称性由定义容易得到。为了得到 Jacobi 恒等式，直接计算

$$
\begin{aligned}
&[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] \\
&=[X,YZ-ZY]+[Y,ZX-XZ]+[Z,XY-YX] \\
&=[X,YZ]-[X,ZY]+[Y,ZX]-[Y,XZ]+[Z,XY]-[Z,YX] \\
&=XYZ-YZX-XZY+ZYX+YZX-ZXY \\
&-YXZ+XZY+ZXY-XYZ-ZYX+YXZ \\
&=0
\end{aligned}
$$

对于最后一条性质，直接计算

$$
\begin{aligned}
[fX,gY]h&=(fX)(gY)h-(gY)(fX)h \\
&=(fX)(g(Yh))-(gY)(f(Xh)) \\
&=gfX(Yh)+(fXg)(Yh)-fgY(Xh)-(gYf)(Xh) \\
&=fg[X,Y]h+(fXg)Yh-(gYf)Xh
\end{aligned}
$$

□

命题 1.14 (李括号的自然性)
设 $F:M\to N$ 是光滑（带边）流形之间的光滑映射，令 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$，$Y_1,Y_2\in\mathfrak{X}(N)$ 是向量场，使得 X_i 是 F-相关于 Y_i 的，$k=1,2$ 。则 $[X_1,X_2]$ 是 F-相关于 $[Y_1,Y_2]$ 的。♠

Proof 利用命题1.6，对于任意的 $f\in C^\infty(N)$，考虑

$$
\begin{aligned}
[X_1,X_2](f\circ F)&=X_1X_2(f\circ F)-X_2X_1(f\circ F) \\
&=X_1[(Y_2f)\circ F]-X_2[(Y_1f)\circ F] \\
&=(Y_1Y_2f)\circ F-(Y_2Y_1f)\circ F \\
&=([Y_1,Y_2]f)\circ F
\end{aligned}
$$

□

推论 1.3 (李括号的推出)
设 $F:M\to N$ 是微分同胚 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$。则 $F_*[X_1,X_2]=[F_*X_1,F_*X_2]$ ♡

Proof 微分同胚的 F-相关函数存在且唯一，因此由上述命题立即得到

$$F_*[X_1,X_2]=[Y_1,Y_2]=[F_*X_1,F_*X_2]$$

□

推论 1.4 (相切与子流形向量场的李括号)
设 M 是光滑流形，S 是 M 的（带边）浸入子流形。若 Y_1,Y_2 是 M 上相切与 S 的光滑向量场，则 $[Y_1,Y_2]$ 也相切与 S。♡

Proof 由命题1.10，存在 S 上的光滑向量场 X_1, X_2，使得 X_i 是 ι-相关于 Y_i 的 $i = 1, 2$。于是 $[X_1, X_2]$ 是 ι-相关于 $[Y_1, Y_2]$ 的，从而与 S 相切。

□