目录

第 1 章　张量

1.1　多线性代数

1.1.1　多线性映射

定义 1.1 (多线性映射)

设 $V_1,\cdots,V_k$，W 是线性空间。映射 $F:V_1\times\cdots\times V_k\to W$ 被称为是多线性的，若对于每个 i

$$F\left(v_1,\cdots,av_i+a'v_i',\cdots,v_k\right)=aF\left(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k\right)+a'F\left(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k\right)$$

记全体 $V_1\times\cdots\times V_k$ 到 W 的多线性映射为 $L\left(V_1,\cdots,V_k;W\right)$ ♣

Remark $L\left(V_1,\cdots,V_k;W\right)$ 在逐点加法和标量乘法下构成线性空间。

Example 1.1 一些多线性映射

1. $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积是双线性映射。
2. $\mathbb{R}^3$ 上的叉乘是双线性映射。
3. $\mathbb{R}^n$ 上 n 个向量的行列式。

Example 1.2 余向量场的张量积

设 V 是向量空间，$\omega,\eta\in V^*$。定义函数 $\omega\otimes\eta:V\times V\to\mathbb{R}$

$$\omega\otimes\eta\left(v_1,v_2\right):=\omega\left(v_1\right)\eta\left(v_2\right)$$

Example 1.3 多线性映射的张量积

令 $V_1,\cdots,V_k$，$W_1,\cdots,W_l$ 是向量空间，设 $F\in L\left(V_1,\cdots,V_k,\mathbb{R}\right)$，$G\in L\left(W_1,\cdots,W_l,\mathbb{R}\right)$，定义函数

$$F\otimes G:V_1\times\cdots\times V_k\times W_1\times\cdots\times W_l\to\mathbb{R}$$

通过

$$F\otimes G\left(v_1,\cdots,v_k,w_1,\cdots,w_l\right):=F\left(v_1,\cdots,v_k\right)G\left(w_1,\cdots,w_l\right)$$

它是 $L\left(V_1,\cdots,V_k,W_1,\cdots,W_l;\mathbb{R}\right)$ 中的元素，称为是 F 和 G 的张量积。

Remark

1. 张量积运算 $\otimes$ 是双线性的，且满足结合律。
2. 由结合律，可以无歧义地定义多个多线性映射的张量积。

命题 1.1 (多线映射空间的基) 设 $V_1,\cdots,V_k$ 是微分分别为 $n_1,\cdots,n_k$ 的实向量空间。对于每个 $j\in\{1,\cdots,k\}$，设 $\left(E_1^{(j)},\cdots,E_{n_j}^{(j)}\right)$ 是 V_j 的一组基，令 $\left(\varepsilon_{(j)}^1,\cdots,\varepsilon_{(j)}^{n_j}\right)$ 是 V_j^* 上的对偶基。那么集合

$$\mathscr{B}:=\{\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}:1\leqslant i_1\leqslant n_1,\cdots,1\leqslant i_k\leqslant n_k\}$$

是 $L\left(V_1,\cdots,V_k,\mathbb{R}\right)$ 的一组基，进而空间的维数为 $n_1\cdots n_k$

Proof 任取 $F\in L\left(V_1,\cdots,V_k;\mathbb{R}\right)$，对于每一组 $(i_1,\cdots,i_k)$，定义一个实数

$$F_{i_1\cdots i_k}:=F\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)$$

接下来说明

$$F=F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

为此，任取 $(v_1,\cdots,v_k)\in V_1\times\cdots\times V_k$，设 $v_1=v_1^{i_1}E_{i_1}^{(1)},\cdots,v_k=v_k^{i_k}E_{i_k}^{(k)}$，那么

$$\begin{aligned}F\left(v_1,\cdots,v_k\right)&=F\left(v_1^{i_1}E_{i_1}^{(1)},\cdots,v_k^{i_k}E_{i_k}^{(k)}\right)\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F_{i_1\cdots i_k},\quad i\text{ as a sum}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\left(F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)\\&=F_{i_1\cdots i_k}\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right),\quad i\text{ as a sum}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)\\&=\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1^{j_1}E_{j_1}^{(1)},\cdots,v_k^{j_k}E_{j_k}^{(k)}\right),\quad \text{j as a sum, i is not}\\&=v_1^{j_1}\cdots v_k^{j_k}\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(E_{j_1}^{(1)},\cdots,E_{j_k}^{(k)}\right),\quad j\text{ as a sum, i is not}\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}\end{aligned}$$

于是 $\left(F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F_{i_1\cdots i_k}$, i as a sum 这就说明了

$$F=F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

为了说明 $\mathscr{B}$ 是线性无关的，设一个线性组合为零

$$F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}=0$$

分别作用在每一组 $\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)$，得到 $F_{i_1\cdots i_k}=0$，这就说明了线性无关性。

1.1.2 线性空间的抽象张量积

定义 1.2 (形式线性组合)

S 中元素的一个形式线性组合，是指一个实值函数 $f \in \mathbb{R}^S$，使得 $f(s) = 0$ 对于有限个 $s \in S$ 以外成立。♣

Remark

1. 对于每个 $x \in S$，存在唯一的 $\delta_x \in \mathscr{F}(S)$，使得 $\delta_x(x) = 1$，$\delta_x^{-1}(0) = S \backslash \{x\}$。通常将 δ_x 与 x 等同。

定义 1.3 (自由线性空间)

S 上的自由（实）线性空间，记作 $\mathscr{F}(S)$，是指 S 上全体形式线性组合构成的空间。♣

Remark

1. 线性结构：在逐点加法和标量乘法下，$\mathscr{F}(S)$ 构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间。
2. 基：$f \in \mathscr{F}(S)$ 唯一地写作 $f = \sum_{i=1}^m a_i x_i$。其中 $\{x_1, \cdots, x_m\} = [f \neq 0]$，$a_i = f(x_i)$。因此 S 是 $\mathscr{F}(S)$ 的一组基，$\mathscr{F}(S)$ 是有限维线性空间当且仅当 S 是有限集合。
3. 泛性质：对于每个集合 S 和任意向量空间 W，每个映射 $A : S \to W$ 有唯一的到线性映射 $\overline{A} : \mathscr{F}(S) \to W$ 的延拓。

   Proof 对于 $f = \sum_{i=1}^m a_i x_i$，$\overline{A}(f)$ 唯一的取法是

$$\overline{A}(f) = \sum_{i=1}^m a_i \overline{A}(x_i) = \sum_{i=1}^m a_i A(x_i)$$

定义 1.4 (抽象张量积)

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是使线性空间。令 $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{F}(V_1 \times \cdots V_k)$ 中全体形如以下元素张成的空间：

$$(v_1, \cdots, av_i, \cdots, v_k) - a(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k),$$

$$\left(v_1, \cdots, v_i + v_i', \cdots, v_k\right) - (v_1, \cdots, v_i, v_k) - \left(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k\right)$$

其中 $v_j, v_j' \in V_j$,$i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,$a \in \mathbb{R}$。

定义 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的张量积空间，记作 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$，为下面的商空间

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k := \mathscr{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \setminus \mathscr{R}$$

令 $\Pi : \mathscr{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 为自然投影。元素 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 在 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 的等价类记作

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k := \Pi(v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

称为 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 的抽象张量积。♣

Remark

1. 线性：显然

$$v_1 \otimes \cdots \otimes av_i \otimes \cdots \otimes v_k = a\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k\right)$$

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \cdots \otimes \left(v_i + v_i'\right) \otimes \cdots \otimes v_k = & \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k\right) \\ & + \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_k\right) \end{aligned}$$

2. 每个 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 中的元素写作 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的线性组合，但不一定能写作单个的 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$

命题 1.2 (张量积的泛性质)

令 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是有限维线性空间，$A : V_1 \times \cdots V_k \to X$ 是多线性映射，那么存在唯一的线性映射 $\tilde{A} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to X$，使得下图交换

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[ur, dashed, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 π 是映射 $\pi\left(v_1, \cdots, v_k\right) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$

Proof 每个映射 $A : V_1 \times \cdots \times V_k \to X$ 唯一地延拓到线性映射 $\overline{A} : \mathscr{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k\right) \to X$ 。A 是多线性映射，无非是 $\mathscr{R} \subseteq \ker \overline{A}$。因此 $\overline{A}$ 诱导出线性映射 $\tilde{A} : \mathscr{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k\right) \backslash \mathscr{R} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to X$ ，使得 $\overline{A} = \tilde{A} \circ \Pi$ ，又 $\pi = \Pi \circ i$，其中 $i : V_1 \times \cdots \times V_k \hookrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 是含入映射，$\overline{A} \circ i = A$ 故 $A = \tilde{A} \circ \pi$ 。
接下来考虑唯一性，注意到形如 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的向量都有唯一的映法 $\tilde{A}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\right) = A\left(v_1, \cdots, v_k\right)$ ，而 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 上的元素写作 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的线性组合，$\tilde{A}$ 的线性保证了映法的唯一性。
可以用下图概括上述论证

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "i"'] & & X \\ \mathscr{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k\right) \arrow[urr, dashed, "\exists ! \bar{A}"] \arrow[rr, "\mathscr{R} \subset \ker \bar{A}", "\Pi"'] & & V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[u, dashed, "\exists ! \tilde{A}"'] \end{tikzcd}$$

命题 1.3 (张量积空间的基)

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是维数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的实线性空间。对于每个 $j = 1, 2, \cdots, k$，设 $\left(E_1^{(j)}, \cdots, E_{n_j}^{(j)}\right)$ 是 V_j 的一组基，则集合

$$\mathscr{C} = \left\{E_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}^{(k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \cdots, 1 \leq i_k \leq n_k\right\}$$

是 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 的一组基，它的维数等于 $n_1 \cdots n_k$。

Proof

1. 根据定义，全体 $v_1\otimes\cdots\otimes v_k$ 张成了空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$，而每个 $v_1\times\cdots v_k$ 写作 $E^{(1)}_{i_1}\times\cdots\times E^{(k)}_{i_k}$ 的线性组合，且投影映射 π 保持线性，故 $\mathscr{C}$ 张成了 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$。
2. 为了说明线性无关系，设以下线性组合为 0

$$a^{i_1,i_2,\cdots,i_k}E^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes E^{(k)}_{i_k}=0$$

对每个 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$，定义

$$\tau^{m_1,m_2,\cdots,m_k}(v_1,\cdots,v_k):=\varepsilon^{m_1}_{(1)}(v_1)\cdots\varepsilon^{m_k}_{(k)}(v_k)$$

由泛性质1.2，它延拓到线性映射 $\tilde{\tau}^{m_1,\cdots,m_k}:V_1\otimes\cdots\otimes V_k\to\mathbb{R}$，作用在上述线性组合上的两边，得到

$$a^{m_1,\cdots,m_k}=0$$

故线性无关性成立。

命题 1.4 (张量积空间的结合律)

设 V_1,V_2,V_3 是有限维实线性空间，那么存在唯一的同构

$$V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\simeq V_1\otimes V_2\otimes V_3\simeq(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$$

使得 $v_1\otimes(v_2\otimes v_3)$，$v_1\otimes v_2\otimes v_3$ 和 $(v_1\otimes v_2)\otimes v_3$ 对应。

Proof 只说明第一个同构，第二个同构完全类似。定义映射

$$\alpha:V_1\times V_2\times V_3\to(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$$

$$(v_1,v_2,v_3)\mapsto(v_1\otimes v_2)\otimes v_3$$

显然它是多线性的，由泛性质1.2，它唯一地延拓到线性映射 $\tilde{\alpha}:V_1\otimes V_2\otimes V_3\to(v_1\otimes v_2)\otimes V_3$，使得 $\tilde{\alpha}(v_1\otimes v_2\otimes v_3)=\alpha(v_1\otimes v_2)\otimes v_3$。$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$ 由形如 $(v_1\otimes v_2)\otimes v_3$ 的元素张成，故 α 是满射，从而 $\tilde{\alpha}=\alpha\circ\pi$ 亦然，又由维数关系，它是同构。故 $V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\simeq V_1\otimes V_2\otimes V_3$。又任意满足性质的其他映射均在每个 $v_1\otimes v_2\otimes v_3$ 上与 $\tilde{\alpha}$ 一致，进而在 $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 上一致，即唯一性成立。

命题 1.5 (抽象张量积与具体张量积)

若 $V_1,\cdots,V_k$ 是有限维线性空间，存在标准同构

$$V_1^*\otimes\cdots\otimes V_k^*\simeq L(V_1,\cdots,V_k;\mathbb{R}),$$

Remark

1. 考虑 V_i 与第二对偶空间的同构 V_i^{**}，我们有另外的同构

$$V_1\otimes\cdots\otimes V_k\simeq V_1^{**}\otimes\cdots\otimes V_k^{**}\simeq L(V_1^*,\cdots,V_k^*;\mathbb{R})$$

Proof 定义

$$\Phi:V_1^*\times\cdots V_k^*\to L(V_1,V_2,\cdots,V_k;\mathbb{R})$$

$$\Phi(\omega_1,\cdots,\omega_k)(v_1,\cdots,v_k):=\omega_1(v_1)\cdots\omega_k(v_k)$$

那么显然 Φ 是多线性的，由泛性质1.2，它诱导出映射 $\tilde{\Phi}$。此外 Φ 映由1.3给出的 $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ 的基为 $L(V_1, \cdots, V_k; \mathbb{R})$ 的基，因此 $\tilde{\Phi}$ 是同构。

1.1.3 线性空间上的共变和反变张量

定义 1.5 (共变张量)

设 V 是有限维线性空间，k 是正整数。V 上的一个共变 k-张量是指，k-折张量积空间 $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ 上的一个元素。通过命题1.5，通常视为一个 V 上的 k-线性映射

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{个}} \to \mathbb{R}.$$

数字 k 被称为是 α 的 rank。♣

Remark

1. 0-tensor: 约定 0-tensor 为一个实数。
2. 简记 k-折张量积空间空间为

$$T^k(V^*) := V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

Example 1.4 一些共变张量

1. 每个线性映射 $\omega : V \to \mathbb{R}$ 都是一个多线性映射，共变 1-向量就是余向量。因此 $T^1(V^*)$ 就是 V^*。
2. 每个内积都是一个 2-tensor，也就是双线线型。
3. 行列式函数视为 n 个向量的函数，是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 k -tensor。

定义 1.6 (反变张量)

类似地，设 V 是有限维线性空间，反变张量是指

$$T^k(V) = V \otimes \cdots \otimes V$$

中的一个元素。♣

Remark

1. 由 T 是有限维空间，

$$T^k(V) \simeq \{\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}\}$$

Proof 考虑 $\Phi : T^k(V) \to \{\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}\}$

$$\Phi(v_1, \cdots, v_k)(w_1, \cdots, w_k) := w_1(v_1)\, w_2(v_2) \cdots w_k(v_k)$$

其中 $(v_1, \cdots, v_k) \in V \otimes \cdots \otimes V$，$(w_1, \cdots, w_k) \in V^* \times \cdots \times V^*$ 易见 Φ 是良定义的。 □

定义 1.7 (混合张量积)

对于非负整数 k,l，定义 V 上的 (k,l) 型混合张量积空间为

$$T^{(k,l)}(V) := \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{l\text{个}}$$

♣

Remark

$$\begin{aligned}
T^{(0,0)}(V) &= T^0(V^*) = T^0(V) = \mathbb{R},\\
T^{(0,1)}(V) &= T^1(V^*) = V^*,\\
T^{(1,0)}(V) &= T^1(V) = V,\\
T^{(0,k)}(V) &= T^k(V^*),\\
T^{(k,0)}(V) &= T^k(V).
\end{aligned}$$

定义 1.8 (混合张量积空间的基)

设 V 是有限维实线性空间。设 (E_i) 是 V 的一组基，(ε^j) 是相应的 V^* 的对偶基。那么

$$\left\{\varepsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{i_k}:1\le i_1,\cdots,i_k,\le n\right\}\text{是}T^k(V^*)\text{的一组基}$$

$$\left\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_l}:1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n\right\}\text{是}T^k(V)\text{的一组基}$$

$$\left\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_\ell}:1\le i_1,\cdots,i_k\le n,j_1,\cdots j_l\le n\right\}\text{是}T^{(k,l)}(V)\text{的一组基}$$

♣

Proof 这是命题1.3的一个特殊情况。

命题 1.6

令 V 是有限维线性空间。存在自然的（与基无关的）$T^{(k+1,l)}(V)$ 和以下多线性映射空间的同构

$$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{k\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{l\text{个}}\to V$$

♠

Proof 由命题1.5，

$$T^{(k+1,l)}(V)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k+1\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};\mathbb{R}\right)$$

定义 $\Phi: T^{(k+1,l)}(V)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};V\right)\to T^{(k+1,l)}(V)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k+1\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};\mathbb{R}\right)$

$$\Phi(A)(w_1,\cdots,w_{k+1},v_1,\cdots,v_l) := w_{k+1}\left(A\left(w_1,\cdots,w_k,v_1,\cdots,v_l\right)\right)$$

易见 Φ 是线性同构。 □

定义 1.9 (缩并)

由上面的命题，$T^{(1,1)}(V)$ 可视为 V 的自同态空间，可以在其上定义出自然的算子 tr : $T^{(1,1)}(V) \to \mathbb{R}$ 为 V 的自同态的迹，即任意一组基下的表示矩阵的对角和。更一般地，我们定义 $\mathrm{tr} : T^{(k+1,l+1)} \to T^{(k,l)}(V)$，通过令 $(\mathrm{tr}\ F)\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, v_1, \cdots, v_l\right)$ 为以下 $(1,1)$-张量的迹

$$F\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, \cdot, v_1, \cdots, v_l, \cdot\right) \in T^{(1,1)}(V)$$

此算子称为迹或缩并。♣

命题 1.7

在一组基下，tr F 的分量为

$$(\mathrm{tr}\ F)^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_l} = \sum_m F^{i_1,\cdots,i_k,m}_{j_1,\cdots,j_l,m}$$

♠

Idea 因此 tr 无非就是令最后一个上下指标相等并求和。

Remark 更一般地，我们可以让张量在任意一对指标上做缩并，只要这对指标一个是共变的，一个是反变的。这样的算子没有各自的记号，我们需要时单独提及。

1.2 对称张量和交错张量

1.2.1 对称张量

定义 1.10

设 V 是有限维线性空间。V 上的一个共变 k-张量 α 被称为是对称的，若对于每个 $1 \le i < j \le k$，

$$\alpha\left(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k\right) = \alpha\left(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k\right)$$

显然对称张量空间是线性的，记作 $\Sigma^k\left(V^*\right)$。♣

Remark

对于共变 k-张量 α，以下三条等价

1. α 是对称的；
2. 对于每组 $v_1, \cdots, v_k \in V$，和置换 $\tau \in S_k$，
$$\alpha\left(v_1, \cdots, v_k\right) = \alpha\left(v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(k)}\right)$$
3. α 关于任意组基的函数 $\alpha_{i_1\cdots i_k}$ 是在指标置换下不变。

Proof 每个置换写作对换的积，故前两条等价。设 $\left(\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_k}\right)$ 是一组基，那么

$$\alpha = \alpha_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_k}$$

任取 $\tau \in S_k$，由对称性

$$a_{i_1\cdots i_k} = \alpha\left(E_{i_1},\cdots,E_{i_k}\right) = \alpha\left(E_{i_{\tau(1)}},\cdots,E_{i_{\tau(k)}}\right) = a_{i_{\tau(1)}}\cdots a_{i_{\tau(k)}}$$

故 1. $\Longrightarrow$ 3. 成立。对于 3. $\Longrightarrow$ 1.，只需要取定一组基，将每个 v_i 写作基表示，并利用多线性将求和符号提出。此时发现条件 3. 保证了调换 $v_1,\cdots,v_k$ 的顺序只是求和顺序的一个调换。

定义 1.11 (对称子)

$T^k\left(V^*\right)$ 到 $\Sigma^k\left(V^*\right)$ 存在自然的投影 Sym，按以下方式定义

$$\mathrm{Sym}\,\alpha := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\sigma\alpha$$

其中 $\sigma\alpha$ 按以下方式定义

$$\sigma\alpha\left(v_1,\cdots,v_k\right) := \alpha\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)$$

♣

命题 1.8 (对称子的性质)

设 α 是有限维线性空间上的共变张量，那么

1. $\mathrm{Sym}\,\alpha$ 是对称的；
2. $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$ 当且仅当 α 是对称的。

♠

即便 α 和 β 都是 V 上的对称张量，但是 $\alpha\otimes\beta$ 不一定对称。不过利用对称子，可以定义出一种新的乘积运算，使得运算结果仍为对称张量。

定义 1.12 (对称积)

设 $\alpha\in\Sigma^k\left(V^*\right)$,$\beta\in\Sigma^l\left(V^*\right)$，定义对称积 $\alpha\beta$ 为下述的 $(k+\ell)$-张量

$$\alpha\beta := \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$$

具体地，

$$\alpha\beta\left(v_1,\cdots,v_{k+l}\right) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\alpha\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)\beta\left(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)}\right)$$

♣

命题 1.9 (对称积的性质)

1. 对称积是对称的双线性映射：对于每个对称张量 α,β,γ 和所有的 $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$(a\alpha+b\beta)\,\gamma = a\alpha\gamma + b\beta\gamma = \gamma\,(a\alpha+b\beta)$$

2. 若 α,β 是余向量，那么

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha\right)$$

♠

1.2.2 交错张量

定义 1.13 (交错张量)

设 V 是有限维线性空间，α 是 V 上的共变 k-张量。称 α 是交错的，若任取 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$，和一对不同的指标 i, j ，都有

$$\alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = \alpha(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$$

交错 k-张量也被称为是外形式、多余向量、k-余向量。V 上全体交错 k-张量空间记作 $\Lambda^k(V^*)$，它是 $T^k(V^*)$ 的线性子空间。

Remark 对于共变 k-张量 $l = \alpha$ ，以下几条等价

1. α 交错；
2. 任取向量 $v_1, \cdots, v_k$，和 $\sigma \in S_k$，
$$\alpha\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\right) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\alpha(v_1, \cdots, v_k)$$
3. 在任一组基下，α 对应的分量函数 $\alpha_{i_1 \cdots i_k}$ 在指标的对换下变号。

Remark 0-张量和 1-张量均同时是对称的和交错的。2-交错张量是反称双线性型。

命题 1.10

设 β 是一个共变 2-张量，那么 β 可以写作对称张量和交错张量的和，具体地

$$\begin{aligned}\beta(v, w) &= \frac{1}{2}(\beta(v, w) + \beta(w, v)) + \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v)) \\ &= \alpha(v, w) + \sigma(v, w)\end{aligned}$$

其中 $\alpha(v, w) := \frac{1}{2}(\beta(v, w) + \beta(w, v))$ 是对称张量，$\sigma(v, w) := \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v))$ 是交错张量。

1.3 流形上的张量和张量场

定义 1.14 (流形上的张量丛)

设 M 是光滑（带边）流形。

定义 M 上的共变 k -张量丛为

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k\left(T_p^* M\right).$$

定义 M 上的反变 k-张量丛为

$$T^k T M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M)$$

定义 M 上的 (k,l)-型混合张量丛为

$$T^{(k,l)}TM = \coprod_{p\in M} T^{(k,l)}\left(T_pM\right)$$

♣

Remark 有自然的等同

$$\begin{aligned}
&T^{(0,0)}TM = T^0T^*M = T^0TM = M\times\mathbb{R},\\
&T^{(0,1)}TM = T^1T^*M = T^*M,\\
&T^{(1,0)}TM = T^1TM = TM,\\
&T^{(0,k)}TM = T^kT^*M,\\
&T^{(k,0)}TM = T^kTM.
\end{aligned}$$

Remark $T^{(k,l)}TM$ 上有自然 rank-$(k+l)$ 的光滑向量丛结构。

定义 1.15 (张量场)

M 上张量丛的一个截面被称为是一个张量场。由于其上定义了光滑结构，可以谈论张量场的光滑性。

♣

Remark 在做自然的等同下，共变 1-张量场等同于余向量场，反变 1-张量场等同于向量场。

命题 1.11 (光滑张量场空间)

全体光滑张量场空间，被分别记作 $\Gamma\left(T^kT^*M\right)$,$\Gamma\left(T^kTM\right)$,$\Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right)$。它们是 $\mathbb{R}$ 上的无穷维线性空间，且是环 $C^\infty(M)$ 上的模。在任意光滑坐标 $\left(x^i\right)$ 下，光滑张量场有坐标表示

$$A = \begin{cases}
A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}, & A\in\Gamma\left(T^kT^*M\right);\\
A^{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A\in\Gamma\left(T^kTM\right);\\
A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_l}, & A\in\Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right).
\end{cases}$$

♠

Remark

1. $A_{i_1\cdots i_k}$,$A^{i_1\cdots i_k}$,$A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}$ 被称为是分量函数；
2. 记光滑共变 k-余向量空间为

$$\mathscr{T}^k(M) := \Gamma\left(T^kT^*M\right)$$

命题 1.12 (张量场的光滑性判据)

设 M 是光滑（带边）流形，$A: M\to T^kT^*M$ 是粗截面，那么以下几条等价

1. A 是光滑的；
2. 在每个光滑坐标卡下，A 的分量函数光滑；

3. M 上的每一个点都含于某个光滑坐标卡，使得 A 在其上有光滑的分量函数。
4. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$，那么函数 $A(X_1, \cdots, X_k): M \to \mathbb{R}$,

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_k)(p) = A_p(X_1|_p, \cdots, X_k|_p)$$

光滑。
5. 任取定义在某个开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑向量场 $X_1, X_2, \cdots, X_k$, $A(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 在 U 上光滑。

Remark 对于混合张量场有类似的命题。

Proof A 光滑，当且仅当在每个（任一点都有某个）光滑坐标卡下，A 的坐标表示光滑。任取 M 的光滑坐标卡 $(U, (x^i))$，它给出 T^kT^*M 上的自然坐标。A 在其上的坐标表示为

$$p \mapsto \left(\left(A_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k}(p)\right), \left(x^i(p)\right)\right)$$

易见上面的函数光滑，当且仅当 $A_{i_1 \cdots i_k}$ 光滑。

因此 1. 和 2. 等价，1. 和 3. 等价，故 1.2.3. 等价。

设在某个坐标上

$$A = A_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}$$

$$X_j = X_j^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad j = 1, \cdots, k$$

那么

$$A(X_1, \cdots, X_k) = A_{i_1 \cdots i_k} X_1^{i_1} \cdots X_k^{i_k}$$

因此得 3. $\Longrightarrow$ 4.

对每一组 $i_1, \cdots, i_k$ 我们有

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = A_{i_1 \cdots i_k}$$

由此得 5. $\Longrightarrow$ 2.

对于开子集 $U \subseteq M$，以及 $p \in U$，设 ψ 是 p 的支撑在 U 的光滑 bump 函数，定义 $\tilde{X}_j := \psi X$，并在 $M \setminus U$ 上补充定义为 0，得到 $\tilde{X}_j$ 是在 p 附近与 X_j 一致的光滑向量场。4. 的条件给出 $A\left(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_k\right)$ 在 p 处光滑。故 4. $\Longrightarrow$ 5. 成立。

5. $\Longrightarrow$ 4. 只需要将全局向量场限制在任一点 p 的某个邻域上即可。

命题 1.13 (数乘与张量积的分量)

设 M 是光滑（带边）流形，$A \in \mathscr{T}^k(M), B \in \mathscr{T}^l(M)$，$f \in C^\infty(M)$。那么 fA 和 $A \otimes B$ 也是光滑张量场，且在任意坐标上，有分量函数的关系

$$(fA)_{i_1 \cdots i_k} = fA_{i_1 \cdots i_k}$$

$$(A \otimes B)_{i_1 \cdots i_{k+l}} = A_{i_1 \cdots i_k} B_{i_{k+1} \cdots B_{i_{k+l}}}$$

Proof 若在某个坐标上

$$A = A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$$

$$B = B_{j_1\cdots j_l}\,\mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_l}$$

那么

$$fA = fA_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\cdots \mathrm{d}x^{i_k}$$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \left(A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}\right)\left(B_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}\,\mathrm{d}x^{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_{k+l}}\right) \\ &= A_{i_1\cdots i_k}B_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_{k+l}} \end{aligned}$$

定义 1.16 (诱导)

设 A 是 M 上的光滑共变 k-张量，它诱导出映射

$$\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

Remark

1. 映射是 $C^\infty(M)$ 上的多线性映射，即对于 $f, f' \in C^\infty(M)$，和 $X_i, X_i' \in \mathfrak{X}(M)$，

$$\begin{aligned} &A\left(X_1, \cdots, fX_i + f'X_i', \cdots, X_k\right) \\ &= fA(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_k) + f'A\left(X_1, \cdots, X_i', \cdots, X_k\right) \end{aligned}$$

Proof 固定其他分量，A 可视为 1-张量，等同于光滑向量场，而光滑余向量场具有 $C^\infty(M)$ 上的线性。

引理 1.1 (张量场的刻画引理)

一个映射

$$\mathscr{A} : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

被某个光滑共变 k-张量诱导，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 $C^\infty(M)$ 上的多线性映射。

Proof 必要性在定义1.16的 Remark 中已经说明，接下来考虑充分性。
类似余向量场的刻画引理，依次说明局部性、逐点性，导出在每一点给出诱导的形式的良定义性，最后说明光滑性。

1.3.1 张量场的拉回

定义 1.17 (逐点拉回)

设 $F : M \to N$ 是光滑映射。任取 $p \in M$ 和 k-张量 $\alpha \in T^k\left(T^*_{F(p)N}\right)$，定义 α 通过 F 在点 p 处的逐点拉回，为一个张量 $dF_p^*(\alpha) \in T^k\left(T_p^*M\right)$

$$dF_p^*(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha\left(dF_p(v_1), \cdots, dF_p(v_k)\right)$$

定义 1.18 (拉回)

若 A 是 N 上的共变 k-张量，定义 A 通过 F 的拉回，为 M 上的一个粗向量场 F^*A，按

$$(F^*A)_p := dF_p^*\left(A_{F(p)}\right)$$

它在 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in T_pM$ 上的作用为

$$(F^*A)_p\,(v_1, v_2, \cdots, v_k) = A_{F(p)}\left(dF_p\,(v_1)\,, \cdots, dF_p\,(v_k)\right)$$

♣

命题 1.14

设 $F : M \to N$ 和 $G : N \to P$ 是光滑映射，A, B 是 N 上的共变张量场，且 f 是定义在 N 上的实值函数，那么

1. $F^*\,(fB) = (f \circ F)\,F^*B$；
2. $F^*\,(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$；
3. $F^*\,(A + B) = F^*A + F^*B$;
4. F^*B 是（连续的）张量场，并且若 B 光滑，则 F^*B 光滑；
5. $(G \circ F)^*\,B = F^*\,(G^*B)$;
6. $(\mathrm{Id}_N)^*\,B = B$.

♠

Proof

1.
$$\begin{aligned} F^*\,(fB)_F\,(v_1, \cdots, v_k) &= (fB)_{F(p)}\left(dF_p\,(v_1)\,, \cdots, dF_p\,(v_k)\right) \\ &= (f \circ F)\,B_{F(p)}\left(dF_p\,(v_1)\,, \cdots, dF_p\,(v_k)\right) \\ &= (f \circ F)\,F^*B\,(v_1, \cdots, v_k) \end{aligned}$$

   因此 $F^*\,(fB) = (f \circ F)\,F^*B$

2.
$$\begin{aligned} F^*\,(A \otimes B)\,(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}) &= F^*\left(A\,(v_1, \cdots, v_k)\,B\,(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l})\right) \\ &= A\left(dF_p\,(v_1)\,, \cdots dF_p\,(v_k)\,B\left(dF_p\,(v_{k+1})\,, \cdots, dF_p\,(v_{k+l})\right)\right) \\ &= F^*A\,(v_1, \cdots, v_k)\,F^*B\,(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}) \\ &= (F^*A \otimes F^*B)\,(v_1, \cdots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

   因此 $F^*\,(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$。

3. 略
4. 选定 N 上的光滑坐标 $\left(y^j\right)$，设 $B = B_{j_1 \cdots j_l}\,\mathrm{d}y^{j_1} \cdots \mathrm{d}y^{j_l}$ 那么

$$\begin{aligned} F^*B &= F^*\left(B_{j_1 \cdots j_l}\,\mathrm{d}y^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{j_l}\right) \\ &= B_{j_1 \cdots j_l} \circ F\,\mathrm{d}\left(y^{j_1} \circ F\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\left(y^{j_l} \circ F\right) \end{aligned}$$

   其中 $\mathrm{d}\left(y^{j_k} \circ F\right), k = 1, \cdots, l$ 是光滑的余向量场，由1.13 F^*B 是光滑的。

5. 略

6. 略

推论 1.1 (拉回的坐标表示)

设 $F: M \to N$ 是光滑映射，B 是 N 上的共变 k-张量。若 $p \in M, (y^i)$ 是 N 的在 $F(p)$ 附近的光滑坐标，那么 F^*B 有以下表示

$$F^*B\left(B_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{i_k}\right) = \left(B_{i_1\cdots i_k} \circ F\right) \mathrm{d}\left(y^{i_1} \circ F\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\left(y^{i_k} \circ F\right)$$

♡

Example 1.5 令 $M = \left\{(r,\theta) : r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}\right\}$ 并且 $N = \{(x,y) : x > 0\}$，令 $F: M \to \mathbb{R}^2$ 是光滑映射 $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$。张量场 $A := x^{-2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$ 通过 F 的拉回通过替换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得到。

$$\begin{aligned} F^*A &= (r\cos\theta)^{-2} d(r\sin\theta) \otimes d(r\sin\theta) \\ &= (r\cos\theta)^{-2}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \otimes (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r^{-2}\tan^2\theta dr \otimes dr + r^{-1}\tan\theta(d\theta \otimes dr + dr \otimes d\theta) + d\theta \otimes d\theta. \end{aligned}$$