第 1 章　极值原理

1.1 调和函数的极值原理

定义 1.1 (调和函数)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上成立, 则称 u 是 Ω 上的调和函数.

定理 1.1 (平均值性质)

若 u 是 Ω 上的调和函数,$B_r(x_0) \subseteq \Omega$. 则

1. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x$$
2. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{area}(\partial B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}S$$

1.2 调和函数的极值原理

定理 1.2 (弱极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 则

1. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$
2. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

定理 1.3 (强极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个连通开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数. 若以下成立其一:

1. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最大值
2. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最小值.

，则 u 在整个 Ω 上是常函数.

1.3 热方程的极值原理

本节中，考虑区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上，时间 $t \in (0, T]$ 内的热方程

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

定义 1.2 (抛物型边界)

对于热方程，定义其抛物型边界 (Parabolic Boundary) $\partial_p \Omega_T$ 为

$$\partial_p \Omega_T = \left(\bar{\Omega} \times \{0\}\right) \cup \left(\partial\Omega \times [0, T]\right)$$

定理 1.4 (弱最大值原理)

设 $u(x,t) \in C^2(\Omega_T) \cap C_0\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 是在 Ω_T 上满足 $u_t - \Delta u = 0$ 的一个经典解. 那么 u 在 $\bar{\Omega}_T$ 上的最大值和最小值一定在抛物型边界 $\partial_p \Omega_T$ 上取得. 即:

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial_p\Omega_T} u(x,t)$$

定理 1.5 (强最大值原理)

设 $u(x,t) \in C^2(\Omega_T) \cap C_0\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 是在 Ω_T 上满足 $u_t - \Delta u = 0$ 的一个经典解. 如果 u 在 Ω_T 的内部某个点 (x_0, t_0) 处达到 $\overline{Q_T}$ 上的最大值，那么 u 在区域 $\bar{\Omega} \times [0, T]$ 上必须是常数.

第 1 章 练习

Problem 1.1

1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，记 $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. 考虑如下调和方程的 Dirichlet 外问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega' \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \\ \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

   利用调和方程的极值原理，证明上述外问题的经典解是唯一的.

2. 并举例说明，在没有 $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$ 的条件下经典解可以是不唯一的.

Proof

1. 设 u_1, u_2 是外问题的两个经典解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 是满足以下性质

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \\ \lim_{|x|\to+\infty} w(x) = 0 \end{cases}$$

对于任意的 $R > 0$, 使得 $\bar{\Omega} \subseteq B_R(0)$, 定义 $D_R := B_R(0) \setminus \bar{\Omega}$, 则 D_R 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集, 并且 $\partial D_R = \partial\Omega \cup \partial B_R(0)$.

由于 $\lim_{|x|\to+\infty} w(x)$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R(\varepsilon) > 0$, 使得 $\bar{\Omega} \subseteq B_R(0)$ 且 $\sup_{x\in\partial B_R(0)} |w(x)| < \varepsilon$ 对于所有的 $R > R(\varepsilon)$ 成立. 又 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 由极值原理,

$$-\varepsilon < \min_{x\in D_R} w(x) \le w(x) \le \max_{x\in D_R} w(x) < \varepsilon, \quad \forall R > R(\varepsilon), \forall x \in \partial D_R,$$

对于 Ω' 中任意一点 x_0, 可以选取足够大的 R(比如 $R = \max(R(\varepsilon), |x_0| + 1)$), 使得

$$|w(x_0)| \le \varepsilon$$

由于 ε 是任取的, $w(x_0) = 0$. 这表明 $w \equiv 0$. 经典解唯一.

2. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的外问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \\ u|_{\partial B_1(0)} = 0 \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

令

$$u(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

, 则

$$\Delta u = \Delta\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\left(-\frac{1}{r}\right)\right) = 0, \quad r > 0$$

于是

$$u(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

是外问题的一个解, 但是 $u \equiv 0$ 也是一个解, 这就说明了外问题不具有唯一性.

□