第 1 章　共形映射

1.1 单叶解析函数

引理 1.1

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的一个邻域内解析，并记 $w_0=f(z_0)$。假设存在一个正整数 $p\geq 1$，使得：

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(p-1)}(z_0)=0$$

并且

$$f^{(p)}(z_0)\neq 0$$

那么，可以得到以下两个结论：

1. 函数 $g(z)=f(z)-w_0$ 在 z_0 处有一个 p 阶零点。
2. 存在 z_0 的一个足够小的邻域 $D_\rho=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\rho\}$ 和 w_0 的一个邻域 $D_\mu=\{w\in\mathbb{C}:|w-w_0|<\mu\}$，使得对于任意一个 $w\in D_\mu\setminus\{w_0\}$ ，方程 $f(z)=w$ 在 $D_\rho\setminus\{z_0\}$ 内恰好有 p 个一阶零点.

Idea 对于方程 $f(z)=w$, 一个对 w 的微扰不会改变解的个数 (记重数), 但会改变解的临界状态, 将一个 “p 阶解” 化为 p 个 “一阶解” .

Proof 第一个结论是显然的, 下面应用 Rouche 定理证明第二个. f 不恒为常数, z_0 同时是 $f-w_0$ 和 f' 的孤立零点, 于是存在以 z_0 为心的圆盘 D_ρ, 使得 $f-w_0$ 在 $\bar{D}_\rho$ 上无其它零点. 进而

$$\mu:=\min_{x\in\partial D_\rho}|f-w_0|>0$$

取以 w_0 为中心的圆盘 D_μ, 则由

$$f(z)-w=(f(z)-w_0)+(w-w_0)$$

可知

$$|f-w_0|\geq\mu>|w-w_0|,\quad\forall w\in D_\mu$$

$f-w$ 和 $f-w_0$ 有相同的零点个数 p (记重数).

最后, 只需说明零点的阶数. 显然 z_0 不是 $f-w$ 的零点. 任取 $f-w$ 在 D 上的零点 $z_1\in D_\rho\setminus\{z_0\}$, 根据 D_ρ 的取法, $(f-w)'(z_1)\neq 0$, 故 z_1 是一阶零点.

□

定理 1.1

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 f' 在 D 上无零点.

Proof 否则由引理, 存在 $w \in \mathbb{C}$, $f - w$ 有两个一阶零点. □

定理 1.2 (开映射定理)

若函数 f 在区域 D 内解析, 且不为常数, 则 $f(D)$ 也是一个区域.

Proof 由于连续映射保持连通性, 只需要证明 $f(D)$ 是一个开集. 任取 $w_0 \in f(D)$. 由上面的引理, 存在 w_0 的一个邻域 D_μ, 使得对于任意的 $w \in D_\mu$, $f - w$ 的零点存在. 即 $D_\mu \subseteq f(D)$.

□

定理 1.3 (反函数)

若函数 f 在区域 D 内单叶解析. 则 f 存在一个在 $f(D)$ 上单叶解析的反函数 f^{-1}, 使得

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad \left(w_0 \in f(D), z_0 = f^{-1}(w_0)\right)$$

定理 1.4 (保角)

设 U 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，并且 $f: U \to \mathbb{C}$ 是一个在 U 上单叶解析的函数。那么 f 在 U 上是保角的。即，对于 U 中任意一点 z_0，以及通过 z_0 的任意两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$，如果它们在 z_0 处的夹角是 θ，那么它们的像曲线 $f(\gamma_1(t))$ 和 $f(\gamma_2(t))$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角也是 θ，并且保持方向不变。

Proof 设 $z_0 \in U$ 是两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 的交点，即 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$。这两条曲线在 z_0 处的切向量分别为 $\gamma_1'(t_0)$ 和 $\gamma_2'(t_0)$。它们之间的夹角 θ 等于 $\arg(\gamma_2'(t_0)) - \arg(\gamma_1'(t_0))$。通过函数 f 映射后，得到新的曲线 $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ 和 $\Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))$。它们在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切向量，根据链式法则，为:

1. $\Gamma_1'(t_0) = f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0) = f'(z_0)\gamma_1'(t_0)$
2. $\Gamma_2'(t_0) = f'(\gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0) = f'(z_0)\gamma_2'(t_0)$

其中 $f'(z_0) \neq 0$. 曲线切向量之间的夹角是 $\arg(\Gamma_2'(t_0)) - \arg(\Gamma_1'(t_0))$, 计算

$$\begin{aligned}
\arg(\Gamma_2'(t_0)) - \arg(\Gamma_1'(t_0)) &= \arg(f'(z_0)\gamma_2'(t_0)) - \arg(f'(z_0)\gamma_1'(t_0)) \\
&= (\arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma_2'(t_0))) - (\arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma_1'(t_0))) \\
&= \arg(\gamma_2'(t_0)) - \arg(\gamma_1'(t_0)) \\
&= \theta
\end{aligned}$$

就完成了说明.

□

定义 1.1 (伸缩率)

设 $f: U \to \mathbb{C}$ 是一个在开集 U 上解析的函数。对于 U 中任意一点 z_0, 函数 f 在 z_0 处的伸缩率 (magnification factor) 或尺度因子 (scale factor) 定义为其导数在 z_0 处的模 $|f'(z_0)|$

.

1.2 分式线性变换

定义 1.2

一个分式线性变换 (Fractional Linear Transformation, FLT) 是一个函数 $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$，其形式为：$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 且 $ad - bc \neq 0$。这里的 $\mathbb{C}_\infty$ 表示扩展复平面或黎曼球面. 约定：

1. 若 $c = 0$，则 $f(z) = \frac{az+b}{d}$。此时 $f(\infty) = \infty$。
2. 若 $c \neq 0$，则 $f(-d/c) = \infty$ 且 $f(\infty) = a/c$。

定义 1.3

1. 定义 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$: 是所有二阶可逆复数矩阵的集合，在矩阵乘法下构成一个群。
$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det(A) = ad - bc \neq 0 \right\}$$
2. 定义 $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$: 是形如 $kI = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 的矩阵，其中 $k \in \mathbb{C}, k \neq 0$，且 I 是单位矩阵。这些矩阵在矩阵乘法下构成 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的一个正规子群，记作 $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$（这是它的中心）。
3. 定义 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$: 是商群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$。它的元素是 $GL_2(\mathbb{C})$ 中矩阵的等价类，其中如果 $A = kB$ 对于某个 $k \neq 0$，则 A 和 B 属于同一个等价类。

定理 1.5

分式线性变换的集合（在复合运算下）与投影线性群 $PGL_2(\mathbb{C})$ 是同构的。

Proof 我们定义一个映射 $\Phi: GL_2(\mathbb{C}) \to$ FLT，它将矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 映射到对应的分式线性变换 $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. 由于 $\det(A) = ad - bc \neq 0$，所以 $f_A(z)$ 是一个有效的 FLT.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

。所以

$$\Phi(AB)(z) = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}$$

. 另一方面，

$$\Phi(B)(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$$

.

$$\Phi(A)(\Phi(B)(z)) = \frac{a(\frac{ez+f}{gz+h}) + b}{c(\frac{ez+f}{gz+h}) + d} = \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)}$$

由此可见 $\Phi(AB)(z) = \Phi(A)(\Phi(B)(z))$，即 $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$。因此，$\Phi$ 是一个群同态。此外, 不难验证

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = Z(GL_2(\mathbb{C})), \quad \mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{LFT}$$

由群同构定理

$$PGL_2(\mathbb{C}) \cong GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{FLT}$$

□

定义 1.4

定义 $\mathbb{C}^\infty$ 上的广义圆为全体的圆或直线, 以下都简称为圆. ♣

定理 1.6

球面投影将复平面上的圆映射到黎曼球上的圆。反之，黎曼球上的圆在球面投影下映射为复平面上的圆。♡

Proof 复平面上的广义圆可以表示为形式:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

其中

$$A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

，且 $A \neq 0$ 表示一个圆，$A = 0$ 且 $B^2 + C^2 \neq 0$ 表示一条直线。现在，我们用球面投影的逆映射来代换 x, y 和 $|z|^2$:

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{x_1}{1-x_3}$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{x_2}{1-x_3}$$

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1+x_3}{1-x_3}$$

将这些代入广义圆的方程:

$$A\left(\frac{1+x_3}{1-x_3}\right) + B\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right) + C\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right) + D = 0$$

乘以 $(1-x_3)$ (由于 $x_3 \neq 1$, 即不考虑北极点的情况):

$$A(1+x_3)+Bx_1+Cx_2+D(1-x_3)=0$$

重新整理，得到一个关于 x_1, x_2, x_3 的线性方程:

$$Bx_1+Cx_2+(A-D)x_3+(A+D)=0$$

这是一个平面方程, 平面与球面相交必然上一个圆. □

定义 1.5

分式线性变换把圆变为圆. ♣

Proof

1. 整线性变换 $w=az+b$ 把圆周变为圆周: 若记 $a=re^{i\theta}$, 则 $w=re^{i\theta}z+b$. 容易看出, 它可由下列三个简单的变换复合而成:

$$z'=e^{i\theta}z,$$
$$z''=rz',$$
$$w=z''+b.$$

   第一个是旋转变换, 第二个是伸缩变换, 第三个是平移变换. 这里, 每一个变换都把圆周变为圆周, 因此整线性变换把圆周变为圆周.

2. 变为圆周, 因此整线性变换把圆周变为圆周. 对于一般的分式线性变换, 不妨设 $c \neq 0$, 于是

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

   若记 $\alpha=\frac{a}{c}, \beta=\frac{bc-ad}{c}$, 则上式可写为 $w=\alpha+\frac{\beta}{cz+d}$. 它由下列三个变换复合而成:

$$z'=cz+d,$$
$$z''=\frac{1}{z'},$$
$$w=\alpha+\beta z''.$$

   其中, 有两个变换是整线性变换, 它们都把圆周变为圆周. 如果能证明 $w=\frac{1}{z}$ 也把圆周变为圆周, 就完成了说明. 平面上圆周的方程写作

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0, \quad (|z-\beta|=-\frac{d}{a}, \text{or } \operatorname{Re}\left(\bar{\beta}z\right)=\frac{d}{2})$$

   令 $w=\frac{1}{z}$, 方程化为

$$d\bar{w}w+\bar{\beta}\bar{w}+\beta w+a=0$$

   也是一个圆周

□

命题 1.1

分式线性变换 T 若不是恒等变换, 则最多只有两个不动点. ♠

Proof 设

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

则 $T(z)=z$ 可以写作一个二次方程

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

最多只有两个根, 除非 $T(z)\equiv z$.

□

定义 1.6 (交比)

设 z_1,z_2,z_3,z_4 是给定的四个点, 至少有三个点不同, 称比值

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

为这四个点的交比, 记作 (z_1,z_2,z_3,z_4)

约定:

$$(\infty,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3},\quad (z_1,\infty,z_3,z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4},$$
$$(z_1,z_2,\infty,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4},\quad (z_1,z_2,z_3,\infty)=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

♣

命题 1.2

定义 $L(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$ 则

$$L(z_2)=1,\quad L(z_3)=0,\quad L(z_4)=\infty$$

♠

定理 1.7

对于 $\mathbb{C}_\infty$ 上三个不同的点 z_2,z_3,z_4, 以及 $\mathbb{C}_\infty$ 上另一组三个不同的点 w_2,w_3,w_4, 存在唯一的分式线性变换 T, 使得

$$T(z_i)=w_i,\quad i=2,3,4$$

♡

Remark 下面给出一个构造性的证明, 可以用于寻找具体的分式线性变换.

Proof 令 $L(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$, 则

$$L(z_2)=1,\quad L(z_3)=0,\quad L(z_4)=\infty.$$

令 $S(w)=(w,w_2,w_3,w_4)$, 则

$$S(w_2)=1,\quad S(w_3)=0,\quad S(w_4)=\infty$$

令 $M=S^{-1}\circ L$, 则

$$M(z_2)=S^{-1}(L(z_2))=S^{-1}(1)=w_2$$

类似地, $M(z_3)=w_3, M(z_4)=w_4$.

若存在另一个分式线性变换 M_1 满足条件, 则 $M^{-1}\circ M_1$ 有三个不动点, 矛盾.

□

定理 1.8

交比是分式线性变换下的不变量. 即若 T 是分式线性变换, 则

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

♡

Remark 对于上一个定理中分式线性变换的构造, 可以通过

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

将 w 解出.

Proof 不妨设 z_2, z_3, z_4 是三个不同的点, 令 $T(z_j) = w_j, j = 2, 3, 4$, 则上面定理中的分式线性变换的唯一性表明

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), w_2, w_3, w_4)$$

带入 $z = z_1$ 即可. □

命题 1.3

z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆, 当且仅当

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

♠

Proof 若该四点共圆, 令 $L(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, 则 L 把该圆周变味实轴. 从而 $L(z_1)$ 为实数.

反之, 若 $\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$, 则交比等于某个实数 t, L^{-1} 把实轴变为 z_2, z_3, z_4 确定的圆周 γ. $t \in \mathbb{R}$, $z_1 = L^{-1}(t) \in \gamma$. 故四点共圆.

□

定义 1.7

设 $\mathbb{C}_\infty$ 上的圆周 γ 把平面分成 g_1 和 g_2 两个域, z_1, z_2, z_3 是 γ 上有序的三个点. 如果当我们从 z_1 走到 z_2 再走到 z_3 时, g_1 和 g_2 分别在我们的左边和右边, 就分别称 g_1 和 g_2 为 γ 关于走向 z_1, z_2, z_3 的左边和右边.

♣

命题 1.4

设 z_1, z_2, z_3 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的圆周 γ 上有序的三个点, 那么 γ 关于走向 z_1, z_2, z_3 右边和左边的点 z 分别满足 Im$(z, z_1, z_2, z_3) > 0$ 和 Im$(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

♠

Remark 可以通过观察 $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = \infty$, 此时这三个点确定的是从右往左方向的实轴. 交比 $(z, z_1, z_2, z_3) = z$. $\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$ 对应于上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$, 是右侧.

Remark 换言之, 交比映射 $L(z) = \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3)$ 把这三点确定圆周的左侧区域映成下半平面, 右侧区域映成上半平面

定理 1.9

设 γ_1 和 γ_2 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的两个圆周, z_1, z_2, z_3 是 γ_1 上有序的三个点. 如果分式线性变换 T 把 γ_1 映为 γ_2, 那么它一定把 γ_1 关于走向 z_1, z_2, z_3 的右边和左边分别变为 γ_2 关于走向 $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ 的右边和左边. ♡

Example 1.1 月牙区域变带状 求一分式线性变换, 把月牙形域 $D = \{z : |z| > 1, |z-1| < 2\}$ 变为带状域 $G = \{w : 0 < \text{Re}w < 1\}$

Solution 设变换为 T, 则一定有 $T(-1) = \infty$. 再考虑让 $T(1) = 0$, 则此时 T 形如

$$T(z) = \lambda \frac{w-1}{w+1}$$

再让 $T(3) = 1$, 取 $\lambda = 2$ 得到

$$T(z) = 2\frac{z-1}{z+1}$$

此时发现 $T(i) = 2i$, T 将 $-1, i, 1$ 映到 $\infty, 2i, 0$, 将圆的外部 (左侧), 映到直线实部大的一侧. 此外, T 将 $-1, 1+2i, 3$ 分别映到 $\infty, 1+i, 1$. 将大圆的内部 (右侧) 映到对应直线实部小的一侧 (右侧). 故 T 恰为符合条件的一个.

定义 1.8

γ 是以 a 为中心、以 R 为半径的圆周, 如果点 z, z^* 在从 a 出发的射线上, 且满足

$$|z-a||z^*-a| = R^2, \tag{1.1}$$

则称 z, z^* 关于 γ 是对称的. 如果 γ 是直线, 则当 γ 是线段 $[z, z^*]$ 的垂直平分线时, 称 z, z^* 关于 γ 是对称的. ♣

命题 1.5

设 γ 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中的圆周, 那么 z, z^* 关于 γ 对称, 当且仅当对 γ 上任意三点 z_1, z_2, z_3, 有

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

♠

定理 1.10

对称点在分式线性变换下不变. 这就是说, 设分式线性变换 T 把圆周变为 Γ, 如果 z, z^* 是关于 γ 的对称点, 那么 $T(z), T(z^*)$ 是关于 Γ 的对称点. ♡

Example 1.2 设 a 是上半平面中的一点, 则分式线性变换

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z+\bar{a}}$$

把上半平面变为单位圆的内部, a 变为圆心

Proof a 映到 0, 对称点 $\bar{a}$ 映到对称点 ∞, 于是变换形如

$$w=\lambda\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

当 $z=0$ 时, $|w|=1$, 于是 $\lambda=e^{i\theta}$.

□

Example 1.3 单叶函数 $w=e^z$ 将带状区域 $0<\mathrm{Im}\ z<\pi$ 映到上半平面.

Proof 令 $z=a+i\theta$, 则 $e^z=e^a e^{i\theta}$

$$\left\{e^a e^{i\theta}:a\in\mathbb{R},0<\theta<\pi\right\}=\{z:\mathrm{Im}\ z>0\}$$

□

Example 1.4 单叶函数

$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

把单位半圆盘 $|z|<1,\mathrm{Im}\ z>0$ 保形映射到上半平面.

Proof

$$T_1(z)=\frac{z+1}{z-1}$$

把 -1 和 1 分别映到 0 和 ∞. 故它把圆周 $|z|=1$ 和直线 $\mathrm{Im}\ z=0$ 分别映到两条在原点处垂直相交的直线. 由于 $T_1(i)=-i$, 故 T_1 将半圆弧映到下半虚轴. $T_1(0)=-1$ 故 T_1 将半圆的直边映到坐半实轴.

由 T_1 的保定向性, 它将半圆盘映到第三象限. 映射 $T_2(w)=w^2$ 将第三象限映到上半平面, 故令

$$T=T_2\circ T_1=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

即为所需单叶函数. □

Example 1.5 单叶函数

$$T(z)=\frac{e^z-i}{e^z+i}$$

将带状区域 $0<\mathrm{Im}\ z<\pi$ 保形映射到单位圆盘 $|w|<1$

定理 1.11

设 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 是复平面上的开单位圆盘。从 D 到 D 的任意一个全纯自同构(即双射的全纯函数) $f:D\to D$ 都可以表示为以下形式:

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

其中:

a 是一个复数，且满足 $|a|<1$ (即 $a\in D$)。θ 是一个实数 ($e^{i\theta}$ 代表一个旋转因子)。

这个函数族构成了单位圆盘的自同构群，记作 Aut(D)。

♡

Remark $f(a)=0, f'(0)=e^{i\theta}(1-|a|^2)$

1.3 Riemann 映照

定理 1.12

若 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $|f(z)|$ 在 D 内某一点达到最大值, 则 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

定理 1.13 (最大模原理)

设 D 是一有界区域, 边界为有限条简单闭曲线 C. 设 f 在 $\bar{D}$ 上连续, D 上解析, 且不恒为常数. 记 $M:=\max_{x\in\bar{D}}|f(z)|$, 则

$$\max_{x\in\bar{D}}|f(z)|=\max_{x\in\partial D}|f(z)|$$

定理 1.14 (Schwartz 引理)

设 f 是在开圆盘 $|z|<1$ 内的解析函数, 若 f 满足以下两条:

1. $f(0)=0$;
2. 当 $|z|<1$ 时, $|f(z)|<1$. 即 $f(B)\subseteq B$

则以下三条成立

1. 当 $|z|<1$ 时,$|f(z)|\le|z|$
2. $|f'(0)|\le 1$
3. 若以下两条成立其一
   (a). 对于任意的 $0<|z_0|<1$, 都有 $|f(z_0)|=|z_0|$;
   (b). $|f'(0)|=1$.

   即上两条结论中的等号成立一个. 则

$$f(z)=\lambda z,\quad \forall|z|<1$$

   其中 λ 是复常数, 且 $|\lambda|=1$

定理 1.15 (Riemann)

设 G 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域, $G\neq\mathbb{C}$. 对于 G 中任意点 a, 存在唯一的函数 $f:G\to\mathbb{C}$, 使得

1. f 在 G 中单叶全纯;
2. $f(a)=0,f'(a)>0$;
3. $f(G)=B(0,1)$

Idea 意义在于, 它表明在相差一个共形映射的意义下, 几乎所有 (除 $\mathbb{C}$) 单连通开区域都是 “等价” 的. 并且两区域的对应在一个标准化后 (平移和旋转) 是唯一的.

Proof 唯一性部分:

若存在两个这样的函数 f_1, f_2. 令 $g = f_2 \circ f_1^{-1}$. g 是 $B(0,1)$ 的全纯自同构. $g(0) = f_2(a) = 0$. 故 g 符合 Schwartz 引理的条件. 从而

$$1 \geq |g'(0)| = \left|f_2'\left(f^{-1}(0)\right)\left(f^{-1}\right)'(0)\right| = \frac{|f_2'(a)|}{|f_1'(a)|}$$

这表明

$$|f_2'(a)| \leq |f_1'(a)|$$

令 $h = f_1 \circ f_2^{-1}$, 可以类似地得到

$$|f_1'(a)| \leq |f_2'(a)|$$

因此

$$|f_2'(a)| = |f_1'(a)|$$

进而

$$|g'(0)| = 1$$

再由 Schwartz 引理, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, 使得

$$g(z) = \lambda z$$

由于

$$g'(0) = \frac{f_2'(0)}{f_1'(0)} > 0$$

,

$$\lambda = g'(0) > 0, \implies \lambda = 1$$

于是

$$f_2\left(f_1^{-1}(z)\right) = z$$

得到 $f_1(z) = f_2(z)$.

□