第 1 章　复平面的拓扑

定义 1.1

对于任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$，以及 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，定义

$$U(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$$

称为一个 r-开圆盘，或 α 的 r-邻域。

定义

$$\overline{U}(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - r| \leq r\}$$

称为一个 r-闭圆盘。♣

定义 1.2

对于给定的 $E \subseteq \mathbb{C}$，$\alpha \in \mathbb{C}$

1. 若对于任意的 $r > 0$，都有 $\sharp(U(\alpha, r)) \cap E \geq 2$，则称 α 为 E 的一个聚点或极限点。
2. 若存在 $r > 0$，使得 $U(\alpha, r) \subseteq E$，则称 α 为 E 的一个内点，记 E 的全体内点集为 $\text{Int } E$，称为 E 的内部。
3. 若存在 $r > 0$，使得 $U(\alpha, r) \subseteq E^c = C \setminus E$，则称 α 为 E 的一个外点。记 E 的所有外点构成的集合为 $\text{Ext } E$，称为 E 的外部。
4. 若 $\alpha \in (\text{Int } E \cup \text{Ext } E)^c$，换言之，对于任意的 $r > 0$，$U(\alpha, r) \cap E \neq \varnothing$ 且 $U(\alpha, r) \cap E^c \neq \varnothing$，则称 α 为 E 的一个边界点。E 的全体边界点记作 ∂E，称为 E 的边界。
5. 若存在 $r > 0$，使得 $U(\alpha, r) \cap E = \{\alpha\}$，此时称 α 为 E 上的一个孤立点。♣

Remark

1. 将 $\sharp(U(\alpha, r)) \cap E \geq 2$ 改为 $\sharp(U(\alpha, r)) \cap E = \infty$ 给出等价的定义。其中 $\sharp$ 表示点的个数。
2. 聚点不一定是边界点，边界点不一定是聚点：
   (a). 考虑 $E = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Z}\}$，则 $\partial E = \varnothing$，但是 $\text{Int } E = \varnothing$，$E$ 无极限点，事实上，E 上的每一个点都是一个孤立点。
3. 孤立点是边界点，但不是聚点。

定义 1.3

对于 $E \subseteq \mathbb{C}$，

1. 若 $\text{Int } E = E$，则称 E 是一个开集。
2. 若 $\mathbb{C} \setminus E$ 是一个开集，则称 E 为一个闭集。
3. 约定 $\varnothing$ 是既开又闭的。
4. 定义 E 的闭包为 $\bar{E} := E \cup \partial E$。

5. 称 E 是一个紧集，若 E 的任意开覆盖都存在有限的子覆盖。

Remark

1. $\overline{E}$ 是包含了 E 的最小的闭集，即对于任意的闭集 $y \subseteq \mathbb{C}$，若 $y \supseteq E$，则 $y \supseteq \bar{E}$
2. E 是紧的，当且仅当它是有界闭集。

定义 1.4

对于任意的 r，定义

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\} \cup \infty$$

为 ∞ 的一个 r-邻域。

练习 1.1 给出 $E \subseteq \mathbb{C}_\infty$ 的聚点、内点、外点、边界点、孤立点的定义。

定义 1.5

对于 $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$，定义线段 $[z_0, z_1]$

$$[z_0, z_1] := \{z_0 + \lambda (z_1 - z_0) : \lambda \in [0, 1]\}$$

定义 1.6

称 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是道路连通的，若对于任意的 $\alpha, \beta \in D$，存在 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in D$，使得线段 $[\alpha, A_1], [A_1, A_2], \cdots, [A_{n-1}, A_n], [A_n, \beta]$ 均包含于 D。

Example 1.1(拓扑学家的正弦曲线) 令 $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 为 $y = \sin \frac{1}{x}, x \in [0, 1]$ 的图像，$\Gamma_2 := \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ 。则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是连通但不是道路连通的。

定义 1.7

1. 称 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是一个区域，若 D 是道路连通的开集。
2. 称 $D' \subseteq \mathbb{C}_\infty$ 是一个区域，若存在 $\mathbb{C}$ 上的区域 D_1，以及 ∞ 的一个邻域 U，使得 $D' = D_1 \cup U$，且 $D_1 \cap U \neq \varnothing$。

定义 1.8 (曲线)

若映射 $z : [a, b] \to \mathbb{C}, z = x(t) + iy(t)$, 满足 $x(t), y(t)$ 均连续。则称

$$C := \{z(t) : t \in [a, b]\}$$

为一条连续的曲线。

Remark

1. 若对于任意不全属于 $\{a, b\}$ 的 $t_1, t_2 \in [a, b]$ 都有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，则称 $\mathbb{C}$ 为一个简单连续曲线或 Jordan 曲线。
2. 若简单连续曲线 C 的映射 $z : [a, b] \to C$ 满足 $z(a) = z(b)$，则称 C 为一个简单连续闭合曲线。

定理 1.1 (Jordan)

若 $C \subseteq \mathbb{C}$ 为一个 Jordan 闭合曲线，存在 $\mathbb{C}$ 中的区域 D_1, D_2，使得 $\mathbb{C} \setminus C = D_1 \cup D_2$，$D_1 \cap D_2 = \varnothing$，$\partial D_1 = \partial D_2 = C$，并且 D_1,D_2 中恰有一个为有界区域，称为是 C 的内区域，以及一个无界区域，称为是 C 的外区域。。 ♡

定义 1.9

对于 $[a, b] \to \mathbb{C}$ 的映射 $z(t) = x(t) + iy(t)$，若 $x(t), y(t) \in C^1[a, b]$ ，并且 $\forall t \in [a, b], z'(t) \neq 0$ ，则称 z 所决定的曲线 C 为一个光滑曲线。 ♣

Remark 由有限段光滑曲线衔接成的曲线称为分段光滑曲线。即存在 $[a, b]$ 的一个分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$，使得 $z(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}], i = 0, \cdots, n-1$ 是光滑的。

✍ **练习 1.2** 令 $x(t) = t^2$，$y(t) = t^3$，说明 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 在 $t = 0$ 处在直观上是不光滑的。

定义 1.10

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是一个区域，若对于任意的 Jordan 闭合曲线 $C \subseteq D$，存在连续映射 $F : I \times D \to D$，其中 $I = [0, 1]$，使得

$$F(t, 0) = z(t), \quad F(t, 1) = \text{常值函数}$$

其中 $z(t)$ 是决定了 C 的映射，则称 D 是一个单连通的区域。 ♣

读 P9-P13, 预习 P17-P22, 作业：第一章 14,15,16,17。
