第 1 章　Cartan 方法

若无特别指出，本章采用以下约定:

1. (M, g) 是一个 n 维 Riemann 流形.
2. ∇ 是 TM 上的 Levi-Civita 联络.
3. U 是 M 上的一个开子集，(E_i) 是 U 上的一组局部标架，(ε^i) 是对偶的余标架.

1.1 基本概念

定义 1.1 (1-形式的内积)

设 $\alpha = \alpha_i \,\mathrm{d}x^i$ 和 $\beta = \beta_j \,\mathrm{d}x^j$ 是两个 1-形式，定义它们的内积为分别提升指标后向量场的内积，即

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \left\langle g^{ik}\alpha_k \frac{\partial}{\partial x^i}, g^{jl}\beta_l \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = g^{kl}\alpha_k\beta_l$$

♣

定义 1.2 (联络 1-形式)

U 上存在唯一的光滑 1-形式的 $n \times n$ 矩阵 $\left(\omega_i^j\right)$，使得

$$\nabla_X E_i = \omega_i^j (X) E_j, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U)$$

或者写作

$$\nabla E_i = \omega_i^j \otimes E_j$$

称为是这组标架的联络 1-形式.

♣

Proof 若存在这样的 1-形式 ω，则

$$\Gamma_{ij}^k E_k = \nabla_{E_i} E_j = \omega_j^k (E_i) E_k$$

得到 $\omega_j^k (E_i) = \Gamma_{ij}^k, \forall i, j, k$. 于是我们定义

$$\omega_i^j (X) = X^k \Gamma_{ki}^j, \quad \forall X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$$

则由 Γ_{ki}^j 的光滑性，ω_i^j 是光滑的余标架. 对于任意的 $X = X^k E_k \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\nabla_X E_i = X^k \nabla_{E_k} E_i = X^k \Gamma_{ki}^l E_l = \omega_i^l (X) E_l = \omega_i^j (X) E_j$$

□

定义 1.3 (曲率 2-形式)

按以下方式定义一个 2-形式的矩阵 (Ω_i^j)

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \varepsilon^k \wedge \varepsilon^l$$

称为是曲率 2-形式

♣

1.2 结构方程

定理 1.1 (Cartan 结构方程)

以下两个 Cartan 结构方程成立

1. $$\mathrm{d}\varepsilon^j = \varepsilon^i \wedge \omega_i^j$$
2. $$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i{}^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

♡

Proof

1. 一方面

$$\mathrm{d}\varepsilon^j\left(E_k, E_l\right) = E_k\left(\varepsilon^j\left(E_l\right)\right) - E_l\left(\varepsilon^j\left(E_k\right)\right) - \varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right) = -\varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon^i \wedge \omega_i^j\right)\left(E_k, E_l\right) &= \varepsilon^i\left(E_k\right)\omega_i^j\left(E_l\right) - \varepsilon^i\left(E_l\right)\omega_i^j\left(E_k\right) \\ &= \omega_k^j\left(E_l\right) - \omega_l^j\left(E_k\right) \\ &= \varepsilon^j\left(\nabla_{E_l} E_k\right) - \varepsilon^j\left(\nabla_{E_k} E_l\right) \\ &= \varepsilon^j\left\langle\nabla_{E_l} E_k - \nabla_{E_k} E_l\right\rangle \\ &= -\varepsilon^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)\end{aligned}$$

2. $$\nabla_X E_i = \omega_i^j(X) E_j$$

$$\Gamma_{ki}^j E_j = \nabla_{E_k} E_i = \omega_i^j\left(E_k\right) E_j$$

故

$$\omega_i^j\left(E_k\right) = \Gamma_{ki}^j$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j\left(E_k, E_l\right) = E_k\left(\omega_i^j\left(E_l\right)\right) - E_l\left(\omega_i^j\left(E_k\right)\right) - \omega_i^j\left(\left[E_k, E_l\right]\right)$$

$$\omega_i^k \wedge \omega_k^j (E_k, E_l) = \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) - \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k)$$

$$\begin{aligned}
R_{kli} &= \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i - \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{[E_k, E_l]} E_i \\
&= \nabla_{E_k} \left(\omega_i^j (E_l) E_j \right) - \nabla_{E_l} \left(\omega_i^j (E_k) E_j \right) - \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^j (E_l) \nabla_{E_k} E_j + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^j (E_k) \nabla_{E_l} E_j - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^j (E_l) \omega_j^m (E_k) E_m + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^j (E_k) \omega_j^m (E_l) E_m - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j \\
&= \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k) E_j + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) E_j - \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) E_j - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) E_j \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l]) E_j
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
R_{kli}^j &= \omega_i^m (E_l) \omega_m^j (E_k) + E_k \left(\omega_i^j (E_l) \right) - \omega_i^m (E_k) \omega_m^j (E_l) - E_l \left(\omega_i^j (E_k) \right) \\
&- \omega_i^j ([E_k, E_l])
\end{aligned}$$

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \left(\varepsilon^k \otimes \varepsilon^l - \varepsilon^l \otimes \varepsilon^k \right) = \sum_{k<l} R_{kli}^j \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l$$

于是

$$\Omega_i^j (E_k, E_l) = R_{kli}^j = \mathrm{d}\omega_i^j (E_k, E_l) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j (E_k, E_l)$$

□

1.3 规正标价

命题 1.1

若 (ε^i) 是规正的余标架. 则黎曼度量 g 在局部上表示为

$$g = \left(\varepsilon^1 \right)^2 + \cdots + \left(\varepsilon^n \right)^2$$

命题 1.2

若 (ε^i) 是正交的余标架, 则

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

Proof

$$0 = \nabla_X \left\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle = \left\langle \nabla_X \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle + \left\langle \varepsilon^i, \nabla_X \varepsilon^j \right\rangle$$

其中由正交性,

$$\left\langle \nabla_X \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle = \omega_i^j(X), \quad \left\langle \varepsilon^i, \nabla_X \varepsilon^j \right\rangle = \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle = \omega_j^i(X)$$

于是

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

□

1.4 超曲面

约定 N 是 M 中余 1-维的超曲面, $E_1, \cdots, E_n$ 是 M 的一个局部规正标架, 其中 $E_1, \cdots, E_{n-1}$ 是 N 的切向量, E_n 是 N 的单位法向量. 相应地, $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^{n-1}$ 是 N 的切规正余标架, ε^n 是法向余标架.

定理 1.2

设 h 是 N 的标量第二基本形式, 则

$$h_{ij} = \omega_j^n(E_i), \quad i, j \in \{1, \cdots, n-1\}$$

Proof

$$h_{ij} = h(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_n \rangle = \left\langle \omega_j^k(E_i) E_k, E_n \right\rangle = \omega_j^n(E_i)$$

□

定理 1.3 (Weingarten)

设 S 是 Weingarten 变换, 则

$$S(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^n(X) E_i$$

$$S_{ij} = \omega_j^n(E_i) = h_{ij}$$

定理 1.4 (Gauss 方程)

设 Ω^N 是 N 上诱导度量的曲率 2-形式. 则

$$\Omega_i^j = \Omega_i^{j,N} + \omega_i^n \wedge \omega_j^n$$

特别地, 若 M 是平坦的 (比如欧式空间), 则

$$0 = \Omega_i^{j,N} + \omega_i^n \wedge \omega_j^n$$

Proof 考虑 N 上的第二结构方程

$$\Omega_i^{j,N} = \mathrm{d}\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n-1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i,j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$$

与 M 上的第二结构方程

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

相减并利用反对称性

□

引理 1.1 (Gauss 曲率)

设 M 是 3 维欧式空间,K 是 N 在 M 中的 Gauss 曲率, 则

$$\Omega_2^{1,N} = K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

♡

Proof 根据定义

$$\Omega_2^{1,N} = \frac{1}{2}R_{122}^1\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \frac{1}{2}R_{212}^1\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^1$$

由曲率张量的对称性和标架的正交性,

$$R_{122}^1 = -R_{212}^1 = R_{1221} = K$$

于是

$$\Omega_2^{1,N} = \frac{1}{2}K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 - \frac{1}{2}K\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^1 = K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

□

推论 1.1

对于二维曲面 N, 正交标价下的第二结构方程简化为

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j$$

♡

Proof 结构方程中 $\omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 中的每一项都含对角元, 而正交标价下联络 1-形式矩阵的对角元为零.

□

推论 1.2

设 M 是 3 维欧式空间,K 是 N 在 M 中的 Gauss 曲率, 则

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1$$

♡

1.5 计算

1.5.1 借助氛围欧式空间的计算

主要是利用适配标架，在欧式空间上计算，再带入到子流形上获得子流形上几何量.

方法 1.1 (联络形式的计算方法)

1. 计算坐标/参数向量场.
2. 对坐标/参数向量场进行正交化，得到规正的切丛的标架.
3. 计算全协变导数
$$\nabla E_i$$
结果是一个 $(1,1)$-张量，通常用欧式空间上的标准向量场 ∂_i，以及坐标余向量场 $\mathrm{d}r_i$ 表示. 计算的过程中，使用 Lebniz 律，以及事实:
$$\nabla f = \mathrm{d}f, \quad f \in C^\infty(M)$$
4. 根据定义
$$\nabla E_i = \omega_i^j \otimes E_j$$
通过将 ∇E_i 与 E_l 做度量配对 $\langle \nabla E_i, E_l \rangle_g$，得到 ω_i^l.

方法 1.2 (Gauss 曲率的计算方法)

1. 根据上面的方法，计算
$$\omega_1^2 = \langle \nabla E_1, E_2 \rangle_g$$
或者
$$\omega_2^1 = \langle \nabla E_2, E_1 \rangle_g$$
2. 计算外微分
$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\mathrm{d}\omega_1^2$$
3. 利用简化的 Gauss 方程
$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1$$
4. 两边按相同的基表示，对比得到 K.

Example 1.1 球面 计算半径为 R 的球面的 Gauss 曲率

Solution 考虑参数化

$$r(\theta,\varphi)=(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$$

$$r_\theta=R(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,0),\quad r_\varphi=R(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$$

则

$$r_\theta\cdot r_\varphi=0$$

令

$$E_1=\frac{r_\theta}{|r_\theta|}=(-\sin\theta,\cos\theta,0),\quad E_2=\frac{r_\varphi}{|r_\varphi|}=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$$

令

$$E_3=E_1\times E_2=\begin{pmatrix} i & j & k\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{pmatrix}=(-\sin\varphi\cos\theta,-\sin\varphi\sin\theta,-\cos\varphi)$$

记球面为 $\mathbb{S}$, 则

$$E_1,E_2\in T\mathbb{S},\quad E_3\in N\mathbb{S}$$

$$\varepsilon^1=|r_\theta|\ \mathrm{d}\theta=R\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta,\quad \varepsilon^2=|r_\varphi|\ \mathrm{d}\varphi=R\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\nabla E_1=\nabla(-\sin\theta\partial_1+\cos\theta\partial_2)=-\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\otimes\partial_1-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\otimes\partial_2$$

其中, $\partial_1,\partial_2,\partial_3$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的标准坐标向量场. 另一方面

$$\nabla E_1=\omega_1^1\otimes E_1+\omega_1^2\otimes E_2+\omega_1^3\otimes E_3=\omega_1^2\otimes E_2+\omega_1^3\otimes E_3$$

$$\omega_1^2=-\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\langle\partial_1,E_2\rangle-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\langle\partial_2,E_2\rangle=-\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\omega_2^1=\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

进而

$$\mathrm{d}\omega_2^1=\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\ \mathrm{d}\varphi=\frac{1}{R\sin\varphi}\sin\varphi\frac{1}{R}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\frac{1}{R^2}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$$

由 Gauss 方程

$$K\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\ \mathrm{d}\omega_2^1$$

得到 $K=\frac{1}{R^2}$

Example 1.2 设曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上没有抛物点, $\mathbf{n}$ 是 S 的法向量; 曲面 $\tilde{S}:\tilde{\mathbf{r}}(u,v)=\mathbf{r}(u,v)+\lambda\mathbf{n}(u,v)$ (常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

1. 证明曲面 S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行;
2. 可以选取 $\tilde{S}$ 的单位法向 $\tilde{\mathrm{n}}$, 使得 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\tilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}, \quad \tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}.$$

Solution

1.

$$\tilde{\mathbf{r}}_u=\mathbf{r}_u+\lambda \mathbf{n}_u, \quad \tilde{\mathbf{r}}_v=\mathbf{r}_v+\lambda \mathbf{n}_v$$

由 Weingarten 方程,

$$\mathbf{n}_u=\nabla_{\mathbf{r}_u}^g \mathbf{n}=-s\left(\mathbf{r}_u\right) \in \operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)$$

类似地

$$\mathbf{n}_v \in \operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)$$

从而

$$T_{\tilde{\mathbf{r}}(u, v)} \tilde{S}=\operatorname{span}\left(\tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v\right)=\operatorname{span}\left(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)=T_{\mathbf{r}(u, v)} S$$

这表明 S 在 $\mathbf{r}(u, v)$ 处的切平面与 $\tilde{S}$ 在 $\tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ 处的切平面平行.

2.

$$g=\left\langle r_u, r_u\right\rangle \mathrm{d} u \otimes \mathrm{~d} u+2\left\langle r_u, r_v\right\rangle \mathrm{d} u \otimes \mathrm{~d} v+\left\langle r_v, r_v\right\rangle \mathrm{d} v \otimes \mathrm{~d} v$$

$$\tilde{g}=\left\langle\tilde{r}_u, \tilde{r}_v\right\rangle \mathrm{d} u \otimes \mathrm{~d} v+2\left\langle\tilde{r}_u, \tilde{r}_v\right\rangle \mathrm{d} u \otimes \mathrm{~d} v+\left\langle\tilde{r}_v, \tilde{r}_v\right\rangle \mathrm{d} v \otimes \mathrm{~d} v$$

注意到

$$\tilde{r}_{\Lambda}=\tilde{r}_{\Lambda}+\lambda n_{\Lambda}=r_{\Lambda}-\lambda S\left(r_{\Lambda}\right)=(\mathrm{Id}-\lambda S) r_{\Lambda}, \quad \Lambda=u, v$$

于是

$$\left\langle\tilde{r}_i, \tilde{r}_j\right\rangle=\operatorname{det}(\mathrm{Id}-\lambda S)^2\left\langle\tilde{r}_j, \tilde{r}_j\right\rangle$$

进而

$$\tilde{g}=\operatorname{det}(I d-\lambda S)^2 \operatorname{det} g$$

$$\omega_2^1=\left\langle\nabla e_2, e_1\right\rangle=\left\langle\nabla^g e_2-h\left(\cdot, e_2\right) e_3, e_1\right\rangle=\left\langle\nabla^g e_2, e_1\right\rangle$$

类似地

$$\tilde{\omega}_2^1=\left\langle\nabla^g e_2, e_1\right\rangle$$

因此

$$\omega_2^1=\tilde{\omega}_2^1$$

进而

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = \mathrm{d}\tilde{\omega}_2^1$$

于是

$$K\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \tilde{K}\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2$$

其中 $\tilde{\varepsilon}^i$ 是 e_i 关于 $\tilde{g}$ 的对偶余标架, ε^i 是 e_i 关于 g 的对偶余标架. 那么

$$\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2 = \sqrt{\tilde{g}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

由于

$$\det \tilde{g} = \det\left(I - \lambda S\right)^2 \det g$$

故

$$\tilde{\varepsilon}^1 \wedge \tilde{\varepsilon}^2 = \det\left(I - \lambda S\right) \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^1$$

进而

$$\tilde{K} = \frac{K}{\det\left(I - \lambda S\right)}$$

在 e_1, e_2 下,

$$S = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

于是

$$\det\left(I - \lambda S\right) = \det\begin{pmatrix} 1 - \lambda\kappa_1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\kappa_2 \end{pmatrix} = \left(1 - \lambda\kappa_1 - \lambda\kappa_2 - \lambda^2\kappa_1\kappa_2\right) = 1 - 2\lambda H - \lambda^2 K$$

最终

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

Problem 1.1 设曲面 S 由方程 $x^2 + y^2 - f(z) = 0$ 给定, f 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 证明: S 在点 $(0,0,0)$ 的法曲率为常数.

Proof 令

$$F\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 - f\left(z\right)$$

, 则

$$\text{grad } F = \left(2x, 2y, -f'\left(z\right)\right)$$

令

$$e_3=\frac{\text{grad }F}{|\text{grad }F|}=\frac{(2x,2y,-f'(z))}{\sqrt{4x^2+4y^2+(f'(z))^2}}$$

设 ∇ 是 S 上的协变导数, 令 $N(x,y,z)=\sqrt{4x^2+4y^2+\left(f'(z)^2\right)}$ 则

$$\begin{aligned}\nabla e_3&=\nabla\left(\frac{1}{N}(2x\partial_1+2y\partial_2-f'(z)\partial_3)\right)\\&=d\left(\frac{1}{N}\right)\otimes(2x\partial_1+2y\partial_2-f'(z)\partial_3)+\frac{1}{N}(2\,\mathrm{d}x\otimes\partial_1+2\,\mathrm{d}y\otimes\partial_2-f''(z)\,\mathrm{d}z\otimes\partial_3)\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{N}\right)=-\frac{\mathrm{d}N}{N^2}$$

$$\mathrm{d}N=\frac{1}{2N}(8x\,\mathrm{d}x+8y\,\mathrm{d}y+2f'(z)f''(z)\,\mathrm{d}z)$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla e_3=&-\frac{1}{2N^3}(8x\,\mathrm{d}x+8y\,\mathrm{d}y+2f'(z)f''(z)\,\mathrm{d}z)\otimes(2x\partial_1+2y\partial_2-f'(z)\partial_3)\\&+\frac{1}{N}(2\,\mathrm{d}x\otimes\partial_1+2\,\mathrm{d}y\otimes\partial_2-f''(z)\,\mathrm{d}z\otimes\partial_3)\end{aligned}$$

选取 e_1,e_2, 使得 $e_1|_0=(1,0,0)=\partial_1, e_2|_0=(0,1,0)=\partial_2$, $\varepsilon^1,\varepsilon^2$ 分别是 e_1,e_2 的对偶余向量场. 那么

$$\mathrm{II}=\omega_1^3\otimes\varepsilon^1+\omega_2^3\otimes\varepsilon^2$$

在原点处,$N(0,0,0)=f'(0)$ 进而

$$\nabla e_3=\frac{1}{f'(0)}f''(0)\,\mathrm{d}z\otimes\partial_3+\frac{1}{f'(0)}(2\,\mathrm{d}x\otimes\partial_1+2\,\mathrm{d}y\otimes\partial_2-f''(0)\,\mathrm{d}z\otimes\partial_3)$$

在原点处成立. 紧接着就有

$$\omega_3^1=\langle\nabla e_3,e_1\rangle=\frac{1}{f'(0)}2\,\mathrm{d}x,\quad\omega_3^2=\langle\nabla e_3,e_2\rangle=\frac{1}{f'(0)}2\,\mathrm{d}y$$

在原点处成立, 其中尖括号表示关于两个向量场的缩并. 又

$$\mathrm{d}x=\varepsilon^1,\quad\mathrm{d}y=\varepsilon^2$$

在原点处成立. 于是

$$\mathrm{II}_0=\left(\frac{2}{f'(0)}\left(\varepsilon^1\otimes\varepsilon^1\right)+\frac{2}{f'(0)}\varepsilon^2\otimes\varepsilon^2\right)_0=\frac{2}{f'(0)}\mathrm{Id}_0$$

第二基本形式在原点处为数量矩阵, 从而法曲率在原点处为常数.

1.5.2 内蕴解法

方法 1.3

1. 写出一组内蕴的正交余标架 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$.
2. 计算 $\mathrm{d}\varepsilon^1$, $\mathrm{d}\varepsilon^2$, 带入 Cartan 第一结构方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^i = \varepsilon^j \wedge \omega_j^i$$

待定系数, 或者通过缩并计算 ω_j^i 的分量.

Problem 1.2 已知曲面的第一基本形式, 求 Gauss 曲率:

1. $I = dudu + u^2 dvdv$;
2. $I = dudu + \sin^2 udvdv$;

Proof

1. 令 $\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \varepsilon^2 = u\,\mathrm{d}v$. 则

$$I = \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2$$

这表明 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 是曲面的一组正交余标阶. 由 Cartan 结构方程

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^1 + \varepsilon^2 \wedge \omega_1^2 = u\,\mathrm{d}v \wedge \omega_1^2$$

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_2^1 = \mathrm{d}u \wedge \omega_2^1$$

可以得到

$$\omega_1^2 = \mathrm{d}v$$

由第二结构方程

$$\frac{1}{u} K\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = K \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \mathrm{d}\omega_2^1 = 0$$

得到 $K = 0$

2. 令 $\varepsilon^1 = \mathrm{d}u, \varepsilon^2 = \sin u\,\mathrm{d}v$, 则

$$I = \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2$$

表明 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 是曲面的一组正交的余标架. 由 Cartan 结构方程

$$0 = \mathrm{d}\varepsilon^1 = \varepsilon^j \wedge \omega_j^1 = \varepsilon^2 \omega_2^1 = \sin u\,\mathrm{d}v \wedge \omega_2^1$$

$$\cos u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\varepsilon^2 = \varepsilon^j \omega_j^2 = \varepsilon^1 \wedge \omega_1^2 = \mathrm{d}u \wedge \omega_1^2$$

得到

$$\omega_2^1 = -\cos u\,\mathrm{d}v$$

从而由 Cartan 第二结构方程

$$\sin uK\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v=K\,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\Omega_2^1=\,\mathrm{d}\omega_2^1=\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v$$

得到 $K=1$

□

Problem 1.3 设两个曲面 S 和 $\tilde{S}$ 的第一基本形式满足 $\mathrm{I}=\lambda\tilde{\mathrm{I}}$ ($\lambda>0$, 常数), 证明:

$$K=\frac{1}{\lambda}\tilde{K}.$$

Proof 设 S 的一组正交余标架是 $\varepsilon^1,\varepsilon^2$, 则

$$I=\left(\varepsilon^1\right)^2+\left(\varepsilon^2\right)^2$$

则

$$\tilde{I}=\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^2\right)^2$$

这表明 $\tilde{\varepsilon}^1:=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1$, $\tilde{\varepsilon}^2:=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^2$ 构成 $\tilde{S}$ 的一个正交余标架. 由 Cartan 第一结构方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^1=\varepsilon^j\wedge\omega_j^1,\quad \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}^1=\tilde{\varepsilon}^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

将 $\tilde{\varepsilon}^1=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^1$ 带入后一个方程, 得到

$$\mathrm{d}\varepsilon^1=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

于是

$$\varepsilon^j\wedge\omega_j^1=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^1$$

类似地

$$\varepsilon^j\wedge\omega_j^2=\varepsilon^j\wedge\tilde{\omega}_j^2$$

利用正交标价的反对称性, 展开得到

$$\varepsilon^2\wedge\omega_2^1=\varepsilon^2\wedge\tilde{\omega}_2^1,\quad \varepsilon^1\wedge\omega_1^2=\varepsilon^1\wedge\tilde{\omega}_1^2$$

于是

$$\omega_2^1=\tilde{\omega}_2^1$$

进而

$$\mathrm{d}\omega_2^1=\,\mathrm{d}\tilde{\omega}_2^1$$

由 Cartan 第二结构方程,

$$K\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2=\,\mathrm{d}\omega_2^1=\,\mathrm{d}\tilde{\omega}_2^1=\tilde{K}\tilde{\varepsilon}^1\wedge\tilde{\varepsilon}^2=\tilde{K}\frac{1}{\lambda}\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2$$

得到

$$K = \tilde{K}\frac{1}{\lambda}$$

□