目录

第 1 章 Riemann 子流形 **1**

1.1 第二基本形式 1
1.2 曲线的曲率 6
1.3 超曲面 8
1.3.1 标量第二基本形式和形状算子 9
1.3.2 主曲率 11
1.4 欧氏空间上的超曲面 12
1.4.1 欧式空间上的计算 14
1.4.2 曲面 Gauss 曲率的内蕴性 18
1.5 截面曲率 18
1.5.1 模型空间的截面曲率 21

第 1 章 Riemann 子流形

在本章中，都假设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 m 维（伪）Riemann 流形,(M,g) 是 $\tilde{M}$ 的 n 维嵌入子流形，记与 (M,g) 有关的协变导数和曲率量为 $(\nabla, R, Rm, \text{etc.})$，$\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的相关量相应地记作 $\left(\tilde{\nabla},\tilde{R},\widetilde{Rm},\text{etc.}\right)$. 可以不严格地用 $\langle v,w\rangle$ 同时表示关于 g 和 $\tilde{g}$ 的度量配对.

1.1 第二基本形式

类似于 ??中的操作，在 M 适配于 $\tilde{M}$ 的一组正交标架 $(E_1,\cdots,E_m)$ 下，定义称为是**切投影**和**法投影**的正交投影:

$$\pi^{\top}: T\tilde{M}|_M \to TM,$$
$$\pi^{\perp}: T\tilde{M}|_M \to NM.$$

为 $(E_1,\cdots,E_m)$ 向 $\operatorname{span}(E_1,\cdots,E_n)$ 和 $\operatorname{span}(E_{n+1},\cdots,E_m)$ 的通常投影. 它们都是光滑丛同态[1]. 若 X 是 $T\tilde{M}|_M$ 的一个截面，通常简记 $X^{\top}=\pi^{\top}X$，$X^{\perp}=\pi^{\perp}X$ 分别为 X 的切投影和法投影.

若 X,Y 是 $\mathfrak{X}(M)$ 上的光滑向量场，可以将它们延拓到 $\tilde{M}$ 的一个开子集上 (也记作 X 和 Y)，作用氛围协变导数 $\tilde{\nabla}$ 后在 M 上的点分解，得到

$$\tilde{\nabla}_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\top} + \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}$$

定义 1.1 (第二基本形式)

定义M 的**第二基本形式** 为映射 $\mathrm{II}:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(NM)$

$$\mathrm{II}(X,Y)=\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp},$$

其中 X,Y 被延拓到了 $\tilde{M}$ 的任意开子集上. ♣

Remark

1. 由于 $\pi^{\perp}$ 映光滑截面为光滑截面,$\mathrm{II}(X,Y)$ 是 NM 上的一个光滑截面.
2. 这个定义还不完整，它的良定义性在下面的命题中指出.

[1]在每个纤维上线性，且将光滑截面映到光滑截面

命题 1.1 (第二基本形式的性质)

设 (M,g) 是 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 (伪)Riemann 子流形,$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

1. $\mathrm{II}(X,Y)$ 与 X,Y 延拓到 $\tilde{M}$ 中开子集的方式无关.
2. $\mathrm{II}(X,Y)$ 在 $C^\infty(M)$ 关于 X 和 Y 是双线性的.
3. $\mathrm{II}(X,Y)$ 是关于 X 和 Y 对称的.[a]
4. $\mathrm{II}(X,Y)$ 在一点 $p\in M$ 处的取值仅依赖于 X_p 和 Y_p.

[a]命题中这些性质对于 X 来说都是天然的. 由于对称性, Y 也具有 X 拥有的一切性质.

Proof 取 X,Y 到 M 在 $\tilde{M}$ 上的邻域上的一个延拓. 先说明 $\mathrm{II}(X,Y)$ 是对称的. 由联络 $\tilde{\nabla}$ 的对称性,

$$\mathrm{II}(X,Y)-\mathrm{II}(Y,X)=\left(\tilde{\nabla}_XY-\tilde{\nabla}_YX\right)^\perp=[X,Y]^\perp$$

由于 X,Y 都与 M 相切, 故 $[X,Y]$ 亦然, 从而 $[X,Y]^\perp=0$. 这就说明, II 的对称性. $\tilde{\nabla}_XY|_p$ 关于 X 仅依赖与 X_p 处的取值, 关于 X 是 $C^\infty(M)$-线性的, 与 X 在 $\tilde{M}$ 中的延拓方式无关, 故 $\mathrm{II}(X,Y)$ 关于 X 也满足这些性质. 由于对称性,$\mathrm{II}(X,Y)$ 关于 Y 由满足这些性质. □

定义 1.2

对于任意的 $p\in M$, $v,w\in T_pM$, 定义 $\mathrm{II}(v,w)$ 为 $\mathrm{II}(V,W)$ 在 p 处的取值, 其中 V,W 是 M 上满足 $V_p=v,W_p=W$ 的任意向量场.

Remark 由上述第二基本形式的性质4.可得

定理 1.1 (Gauss 公式)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 若 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 被延拓到定义在 M 于 $\tilde{M}$ 中邻域上的任意光滑向量场, 则由以下公式沿着 M 成立:

$$\tilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+\mathrm{II}(X,Y)$$

Idea 由联络的正交分解和第二基本形式的定义, 只需要证明 $\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^\top=\nabla_XY$. 再由 Levi-Civita 联络的唯一性, 只需要证明 $\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^\top$ 给出 M 上良定义的对称度量联络.

推论 1.1 (沿曲线的 Gauss 公式)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形,$\gamma:I\to M$ 是光滑曲

线. 若 X 是沿 γ 处处相切于 M 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_t X = D_t X + \mathrm{II}\left(\gamma', X\right)$$

♡

Proof 任取 $t_0 \in I$, 我们可以找到 $\gamma\left(t_0\right)$ 附近的适配正交标架 $\left(E_1, \cdots, E_m\right)$. 将 $X\left(t\right)$ 展开为 $X\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} X^i\left(t\right) E_i\left(t\right)|_{\gamma(t)}$ 利用 Lebniz 律,Gauss 公式和 E_i 的可扩张性, 得到

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t X &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{X}^i E_i + X^i \tilde{\nabla}_{\gamma'} E_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{X}^i E_i + X^i \nabla_{\gamma'} E_i + X^i\,\mathrm{II}\left(\gamma', E_i\right)\right)\\ &= D_t X + \mathrm{II}\left(\gamma', X\right)\end{aligned}$$

□

定义 1.3 (Weingarten 映射)

对于任意法向量场 $N \in \Gamma\left(NM\right)$, 可以按以下方式得到一个标量值的对称双线性形式 $\mathrm{II}_N : \mathfrak{X}\left(M\right) \times \mathfrak{X}\left(M\right) \to C^\infty\left(M\right)$

$$\mathrm{II}_N\left(X, Y\right) = \left\langle N, \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

令 $W_N : \mathfrak{X}\left(M\right) \to \mathfrak{X}\left(M\right)$ 表示上面的对称双线性型对应的自伴随线性映射, 它由以下刻画

$$\left\langle W_N\left(X\right), Y\right\rangle = \mathrm{II}_N\left(X, Y\right) = \left\langle N, \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

则映射 W_N 称为 N **方向的 Weingarten 映射**. 由于第二基本形式是 $C^\infty\left(M\right)$-双线性的, 故 W_N 是 $C^\infty\left(M\right)$-线性的, 从而给出 TM 到自身的一个光滑丛同态.

♣

命题 1.2 (Weingarten 方程)

设 $\left(M, g\right)$ 是 (伪)Riemann 子流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 对于每个 $X \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ 和 $N \in \Gamma\left(NM\right)$, 以下方程成立:

$$\left(\tilde{\nabla}_X N\right)^\top = -W_N\left(X\right)$$

其中 N 被延拓到 $\tilde{M}$ 的任意开子集上.

♠

Remark 可以说, 法向量能代替氛围联络的法向信息 (第二基本形式).

Proof 在 M 的点上, 协变导数 $\tilde{\nabla}_X N$ 无关于 X 和 N 延拓的方式[2]. 任取 $Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, 将它扩张到 $\tilde{M}$ 上的一个开子集. 由于 $\left\langle N, Y\right\rangle$ 沿着 M 恒等于零, 且 X 相切于 M, 下面

[2]仅由求导方向的曲线像的取值所决定??

的计算对于 M 上的所有点成立:

$$\begin{aligned}
0 &= X\langle N, Y\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \left\langle N, \tilde{\nabla}_X Y\right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, \mathrm{II}(X, Y)\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle W_N(X), Y\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X N + W_N(X), Y\right\rangle
\end{aligned}$$

由于 Y 可以被选为任意于 M 相切的向量场, 我们有

$$0 = \left\langle \tilde{\nabla}_X N + W_N(X)\right\rangle^{\top} = \left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\top} + W_N(X)$$

□

定理 1.2 (Gauss 方程)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 以下方程成立:

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = Rm(W, X, Y, Z) - \langle \mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle + \langle \mathrm{II}(W, Y), \mathrm{II}(X, Z)\rangle$$ ♡

Proof 将 W, X, Y, Z 延拓到 $\tilde{M}$ 的任意开子集上, 按定义展开 $\widetilde{Rm}$, 并由 Gauss 公式, 沿着 M 有以下成立

$$\begin{aligned}
\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) &= \left\langle \tilde{\nabla}_W \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]} Y, Z\right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_W (\nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)), Z\right\rangle - \left\langle \tilde{\nabla}_X (\nabla_W Y + \mathrm{II}(W, Y)), Z\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \tilde{\nabla}_{[W,X]} Y, Z\right\rangle
\end{aligned}$$

对所有 $\tilde{\nabla}.\mathrm{II}(\cdot,\cdot)$ 的项应用 Weingarten 方程, 比如

$$\left\langle \tilde{\nabla}_W \mathrm{II}(X, Y), Z\right\rangle = -\langle \mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle$$

得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = &\left\langle \tilde{\nabla}_W \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X \nabla_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]} Y, Z\right\rangle \\
&- \langle \mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle + \langle \mathrm{II}(X, Z), \mathrm{II}(W, Y)\rangle
\end{aligned}$$

将每个 $\tilde{\nabla}$ 按切向和法向分解, 由于 Z 是切向的, 可以通过 Gauss 公式将 $\tilde{\nabla}$ 的 $\sim$ 去掉,

得到

$$\left\langle \tilde{\nabla}_W \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X \nabla_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]} Y, Z \right\rangle = \langle \nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W,X]} Y, Z \rangle$$
$$= Rm\left(W, X, Y, Z\right)$$

故最终我们得到

$$\widetilde{Rm}\left(W, X, Y, Z\right) = Rm\left(W, X, Y, Z\right) - \langle \mathrm{II}\left(W, Z\right), \mathrm{II}\left(X, Y\right) \rangle + \langle \mathrm{II}\left(W, Y\right), \mathrm{II}\left(X, Z\right) \rangle$$

□

定义 1.4 (法联络)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的 Riemann 子流形. 定义**法联络** $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(NM) \to \Gamma(NM)$ 为

$$\nabla^{\perp}_X N = \left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\perp}$$

其中 N 被延拓成 M 在 $\tilde{M}$ 的邻域上的一个光滑向量场.

♣

命题 1.3

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的一个嵌入 Riemann 子流形, 则 $\nabla^{\perp}$ 是 NM 上良定义的联络, 并且与 $\tilde{g}$ 相容: 对于任意两个 NM 的截面 N_1, N_2, 以及每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有

$$X\langle N_1, N_2 \rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_X N_1, N_2 \right\rangle + \left\langle N_1, \nabla^{\perp}_X N_2 \right\rangle$$

♠

定义 1.5 (对第二基本形式的协变导数)

令 $F \to M$ 是一个向量丛, 它在每个 $p \in M$ 处的纤维为全体双线性映射 $T_pM \times T_pM \to N_pM$. 则 F 是 M 上的一个光滑向量丛. F 的每个截面都对应到一个 $C^{\infty}(M)$-双线性的光滑映射 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(NM)$ [a]. 按以下方式定义 F 上的联络 ∇^F

$$\left(\nabla^F_X B\right)(X, Y) = \nabla^{\top}_X \left(B\left(Y, Z\right)\right) - B\left(\nabla_X Y, Z\right) - B\left(Y, \nabla_X Z\right)$$ [b]

[a]例如第二基本形式

[b]回忆张量场上联络的计算公式

♣

定理 1.3 (Codazzi 方程)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 设 $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$

被延拓到 M 的任意开邻域上, 则

$$\left(\widetilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp}=\left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y)-\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y)$$

Proof 由于等式两边都是法向的, 只需要证明对于任意的 $N\in\Gamma(NM)$,

$$\left\langle \widetilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}=\left\langle \left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y),N\right\rangle-\left\langle \left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y),N\right\rangle$$

由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}&=\left\langle \tilde{\nabla}_W\left(\nabla_XY+\mathrm{II}(X,Y)\right),N\right\rangle^{\perp}\\&\quad-\left\langle \tilde{\nabla}_X\left(\nabla_WY+\mathrm{II}(W,Y)\right),N\right\rangle^{\perp}\\&\quad-\left\langle \tilde{\nabla}_{[W,X]}Y,N\right\rangle^{\perp}\end{aligned}$$

对右侧只保留法向部分展开, 得到

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}&=\left\langle \mathrm{II}(W,\nabla_XY)+\left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y)+\mathrm{II}(\nabla_WX,Y)+\mathrm{II}(X,\nabla_WY),N\right\rangle\\&\quad-\left\langle \mathrm{II}(X,\nabla_WY)+\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y)+\mathrm{II}(\nabla_XW,Y)+\mathrm{II}(\nabla_XY,W),N\right\rangle\\&\quad-\left\langle \mathrm{II}([W,X],Y),N\right\rangle\end{aligned}$$

两对含有 ∇_XY 和 ∇_WY 的项相消, 额外的三项通过 $\nabla_WX+\nabla_XW-[W,X]=0$ 相消, 最终, 得到

$$\left\langle \tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}=\left\langle \left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y)-\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y),N\right\rangle$$

即为所需. □

1.2 曲线的曲率

定义 1.6 (测地曲率)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 子流形, $\gamma:I\to M$ 是 M 上的光滑单位速度曲线. 定义 γ 的 (测地) 曲率为加速度场的模长, 即函数 $\kappa:I\to\mathbb{R}$

$$\kappa(t):=\left|D_t\gamma'(t)\right|.$$ [a]

对于一般的参数曲线, 对 M 分情况定义:

1. M 是黎曼流形, 则任取 γ 是 M 上的任意正则曲线, 可以找到它的单位速度重参数化 $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$, 我们定义 γ 在 t 处的 (测地) 曲率为 $\tilde{\gamma}$ 在 $\varphi^{-1}(t)$ 处的 (测地) 曲率.

2. 若 M 是伪黎曼流形, 需要限制 γ 为使得 $|\gamma'(t)|$ 处处非零的曲线, 做类似地定义.

[a]描述了曲线偏离测地线的程度.

命题 1.4

单位速度曲线有退化的 (测地) 曲率, 当且仅当它是测地线.

定义 1.7

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (伪)Riemann 流形, (M,g) 是它的 Riemann 子流形. 每个 $\gamma : I \to M$ 都有两种测地曲率.

1. γ 视为 M 上的光滑曲线时, 它的测地曲率 κ 称为**内蕴曲率**;
2. γ 视为 $\tilde{M}$ 上的光滑曲线时, 它的测地曲率 $\tilde{\kappa}$ 称为**外蕴曲率**.

命题 1.5 (II 的几何解释)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形, $p\in M$,$v\in T_pM$.

1. $\mathrm{II}(v,v)$ 是 g-测地线 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-加速度.
2. 若 v 是单位向量, 则 $|\mathrm{II}(v,v)|$ 是 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-曲率.

Proof 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是使得 $\gamma(0)=p$,$\gamma'(0)=v$ 的正则曲线. 对 γ' 应用沿 γ 的 Gauss 公式, 得到

$$\tilde{D}_t\gamma' = D_t\gamma' + \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

若 γ 是 M 上的 g-测地线, 则上述公式化为

$$\tilde{D}_t\gamma' = \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

在零处取值得到所需的两个结论.

□

引理 1.1

设 V 是一个内积空间,W 是向量空间, $B,B':V\times V\to W$ 是对称且双线性的. 若 $B(v,v)=B'(v,v)$ 对于所有的单位向量 $v\in V$ 成立, 则 $B=B'$

Remark 由此, II 完全由 $\mathrm{II}(v,v)$ 所决定, 其中 v 取遍单位向量.

Proof 若条件成立, 由 B 和 B' 的双线性, $B(v,v)=B'(v,v)$ 对于所有的向量 v 成立,

而不只是单位向量. 引理由以下极化恒等式立即得到

$$B(v,w)=\frac{1}{4}\left(B(v+w,v+w),B(v-w,v-w)\right)$$

□

定义 1.8 (完全测地)

称 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的子流形 (M,g) 是**完全测地的**, 若对于每个与 M 在某一点 t_0 与 M 相切的 $\tilde{g}$-测地线, 都在某个区间 $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ 上完全地落在 M 上. ♣

命题 1.6

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流域, 则一下三条等价:

1. M 在 $\tilde{M}$ 中是完全测地的.
2. M 上的每个 g-测地线也都是 $\tilde{M}$ 上的 $\tilde{g}$-测地线.
3. M 的第二基本形式恒为零. ♠

Idea 对于 $1.\implies 2$, 将 $\tilde{M}$ 与 M 相切的测地线 $\tilde{\gamma}$ 的加速度利用 Gauss 公式分解, 两项正交故均为零. 测地线的唯一性给出二者在局部上相等. 应用到每个局部上得到全局相等.

$2.\implies 3.$, 利用 Gauss 公式得到 $\mathrm{II}\left(\gamma',\gamma'\right)=0$ 对于任意 M 的 g-测地线 γ 成立. 测地线的存在唯一性给出 TM 上的任意切向量都刻画为测地线的速度, 而 II 由对角量 $\mathrm{II}(v,v)$ 所决定, 故 $\mathrm{II}\equiv 0$.

$3.\implies 1.$ 还是利用 Gauss 公式, 得到曲线加速度的局部相等, 再由唯一性退出测地线的局部相等.

1.3 超曲面

本节考虑 M 是 $\tilde{M}$ 的超曲面[3]的特殊情况. 设 (M,g) 是 $(n+1)$-维 Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的 n-维嵌入 Riemann 子流形.

此时, M 上每一个点只有两个单位法向量. 在局部适配正交标价 $(E_1,\cdots,E_{n+1})$ 下, 唯二的选择是 $\pm E_{n+1}$. 因此, 对于 M 的每一个点, 在充分小的邻域内都能选取光滑的沿 M 的单位法向量场.

若 M 和 $\tilde{M}$ 均可定向, 则可以选取沿 M 的全局光滑单位法向量场. 对于一般情况而言则未必.

[3]余维数为 1 的子流形

1.3.1 标量第二基本形式和形状算子

定义 1.9

选定超曲面 $M \subseteq \tilde{M}$ 的一个光滑单位向量场 N 后，定义 M 的标量第二基本形式为由 $h = \mathrm{II}_N$ 给出的对称协变 2-张量场 $h \in \Gamma\left(\Sigma^2 T^* M\right)$，换言之

$$h\left(X, Y\right) = \left\langle N, \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

♣

Remark 符号由 N 的选取决定，绝对值无关于 N 的选取.

命题 1.7

1. $$h\left(X, Y\right) = \left\langle N, \tilde{\nabla}_X Y\right\rangle$$
2. $h\left(X, Y\right)$ 可以由
$$\mathrm{II}\left(X, Y\right) = h\left(X, Y\right) N$$
确定. 即若 $\mathrm{II}\left(X, Y\right) = h'\left(X, Y\right) N$，则 $h\left(X, Y\right) = h'\left(X, Y\right)$

♠

Proof 对于 $X, Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$，延拓到 $\tilde{M}$ 的开集上，由 Gauss 公式

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}\left(X, Y\right)$$

又 $\nabla_X Y$ 与 N 正交，故 $\tilde{\nabla}_X Y = \mathrm{II}\left(X, Y\right)$.

第二条通过两边与 N 度量配对即可. □

定义 1.10 (形状算子)

选定的法向量 N 决定出 Weingarten 映射 $W_N : \mathfrak{X}\left(M\right) \to \mathfrak{X}\left(M\right)$，记作 $s = W_N$，称为是 M 的形状算子.

♣

Remark 与 h 类似，s 的符号由 N 的选取决定.

命题 1.8

1. s 可以视为通过 h 提升指标得到的 M 的 $(1,1)$-张量场，由一下刻画
$$\left\langle sX, Y\right\rangle = h\left(X, Y\right), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$$
2. 分量形式下，写作
$$s_i^j = h_i^j = g^{jk} h_{ik}$$

3. 由于 h 是对称的, s 是 TM 的自伴随的自同态, 即

$$\langle sX, Y\rangle = \langle X, sY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Remark 设 S, B, I 分别为 s, h, g 的矩阵, 则 $S = B \cdot I^{-1}$, 从而 $\det s = \det h (\det g)^{-1}$

Proof

$$h_{ij} = h(E_i, E_j) = \langle sE_i, E_j\rangle = \left\langle s_i^k E_k, E_j\right\rangle = s_i^k g_{kj}$$

从而

$$g^{jk} h_{ij} = s_i^k g_{kj} g^{jk} = s_i^k$$

互换 k, j, 得到

$$s_i^j = g^{jk} h_{ik}$$

可以写成矩阵

$$(s) = (g)^{-1}(h)$$

□

定理 1.4 (超曲面的基本方程)

设 (M, g) 是黎曼流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的 Riemann 超曲面,N 是沿 M 的光滑单位法向量.

1. **超曲面的 Gauss 公式**: 若 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 延拓到 $\tilde{M}$ 的开集上, 则

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) N$$

2. 超曲面曲线的 Gauss 公式: 若 $\gamma : I \to M$ 是一个光滑曲线, $X : I \to TM$ 是沿 γ 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_t X = D_t X + h(\gamma', X) N$$

3. 超曲面的 Weigarten 方程: 对于所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\tilde{\nabla}_X N = -sX$$

[a]

4. 超曲面的 Gauss 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = Rm(W, X, Y, Z) - \frac{1}{2}(h \owedge h)(W, X, Y, Z)$$

5. 超曲面的 Codazzi 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, N) = (Dh)(Y, W, X)$$

[b]

[a]可以说法向量完全提纯了氛围联络的法向信息 (第二基本形式)
[b]外微分是后两个作为求导项交换; 是先对着最后一项求导的, 是负的.

Proof 1.2. 由一般情况的方程立即得到. 对于 3. 先写出一般的 Weigarten 方程
$$\left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\top}=-sX$$
由于 $\langle\nabla_{\tilde{X}}N,N\rangle=\frac{1}{2}X\left(|N|^2\right)=0$[4], 立即有 $\tilde{\nabla}_X N$ 与 M 相切, 故 3. 成立.

最后来说明 Codazzi 方程, 首先由一般的 Codazzi 方程
$$\left(\tilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp}=\left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y)-\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y)$$
由于 N 是单位向量场,
$$0=\nabla_W^{\perp}\langle N,N\rangle_{\tilde{g}}=2\left\langle\nabla_W^{\perp}N,N\right\rangle_{\tilde{g}}$$
故 N 关于法向联络平行. 因此
$$\begin{aligned}\left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y)&=\nabla_W^{\perp}(h(X,Y)N)-\mathrm{II}(\nabla_W X,Y)-\mathrm{II}(X,\nabla_W Y)\\&=(W(h(X,Y))-h(\nabla_W X,Y)-h(X,\nabla_W Y))N\\&=(\nabla_W h)(X,Y)N\end{aligned}$$
类似地
$$\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y)=(\nabla_X h)(W,Y)N$$
注意到由于 h 是对称的, 故 $(\nabla_W h)$ 和 $(\nabla_X h)$ 亦然. 因此
$$\left(\tilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp}=-(\nabla_X h)(Y,W)N+(\nabla_W h)(Y,X)N=(Dh)(Y,W,X)N$$
两边与 N 度量配对即可. □

1.3.2 主曲率

引理 1.2

设 V 是有限维内积空间, $s:V\to V$ 是自伴随的线性自同态. 令 C 表示 V 的单位向量集, 则存在 $v_0\in C$, 使得函数 $v\mapsto\langle sv,v\rangle$ 在 v_0 处达到极大值, 并下每个这样的向量都是 s 关于特征值 $\lambda_0=\langle sv_0,v_0\rangle$ 的一个特征向量.

[4]由于法空间只有一个方向, 故当模长不变时, 法向量沿某个切向的偏移趋势只可能是切向的

命题 1.9 (有限维谱定理)

设 V 是有限维内积空间, $s: V \to V$ 是自伴随的线性自同态. 则 V 有一个 s-特征向量组成的正交基, 并且每个特征值都是实数.

命题 1.10

形状算子 $s: T_pM \to T_pM$ 有实特征值 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$, 以及由 s-正交向量组成的 T_pM 的正交基 $(b_1, \cdots, b_n)$, 使得 $sb_i = \kappa_i b_i, \forall i$. 在这组基下,$h$ 和 s 都表为正对角矩阵, h 有以下形式

$$h(v, w) = \kappa_1 v^1 w^1 + \cdots + \kappa_n v^n w^n$$

定义 1.11

称形状算子 s 在点 $p \in M$ 处的特征值为 M **在点** p **处的主曲率**，相应的特征空间称为主方向.

Remark

1. 当反转选定的法向量时, 主曲率都改变方向.
2. 主方向和主曲率无关于坐标基的选取.

定义 1.12

1. 定义 Gauss 曲率为

$$K = \det(s)$$

2. 定义平均曲率为

$$H = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(s) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}_g(h)$$

由于迹和行列式都无关于坐标基的选取, 当单位法向量选定时, 上面的两个曲率是良定义的, 并且可以通过主曲率表示为

$$K = \kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n, \quad H = \frac{1}{n}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_n)$$

Remark 当反转法向量时, H 改变符号, K 变为 $\coprod_{n=1}^{\infty}(-1)^n K$

1.4 欧氏空间上的超曲面

用 (M, g) 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 n 维嵌入 Riemann 子流形, $\bar{g}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的欧式度量, g 是 $\bar{g}$ 在 M 上的诱导度量.

命题 1.11

对于欧式空间上的超曲面 M, 有以下 Gauss 方程和 Codazzi 方程成立

$$\frac{1}{2}h \owedge h = Rm,$$

$$Dh = 0$$

在 M 的一组局部标价下,

$$h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl} = R_{ijkl}$$

$$h_{ij;k} - h_{ik;j} = 0$$

特别地, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上超曲面的 Riemann 曲率张量完全由第二基本形式决定.

Remark

1. 满足 $Dh = 0$ 的对称 2-张量被称为是一个 **Codazzi 张量**. 因此 $Dh = 0$ 可以看作是 h 称为一个 Codazzi 张量.
2. 对于 n-Riemann 流形 (M, g), 以及给定的光滑对称 2-张量 h. 定理给出了存在以 h 为表带第二基本形式的等距同构浸入 $M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 的必要条件.
3. 事实上, Gauss 方程和 Codazzi 方程至少在局部上给出了上面这种情况的充分条件.

命题 1.12

设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是超曲面. 对于每个单位向量 $v \in T_pM$, 令 $\gamma = \gamma_v : I \to M$ 是 M 上以 v 为初速度的测地线. 则 $|h(v, v)|$ 是 γ 在 0 处的欧式曲率. 并且 $h(v, v) = \langle \gamma''(0), N_p \rangle > 0$ 当且仅当 $\gamma''(0)$ 与 N_p 有相同的方向.

Proof 由 Gauss 公式

$$\gamma''(0) = \bar{D}_t\gamma'(0) = D_t\gamma'(0) + h(v, v)N_p = h(v, v)N_p$$

故

$$|\gamma''(0)| = |h(v, v)|$$

且

$$\langle \gamma''(0), N_p \rangle_{\bar{g}} = h(v, v)$$

□

命题 1.13

设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ 是单位速度曲线, $t_0 \in I$,$\kappa(t_0) \neq 0$. 则

1. 存在单位速度参数化的圆 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, 被称为是 $\gamma(t_0)$ 处的 **密切圆**, 使得在

$t=t_0$ 处, c 与 γ 有着相同的位置, 速度和加速度.

2. γ 在 t_0 处的欧式曲率 $\kappa(t_0)=\frac{1}{R}$, 其中 R 是密切圆的半径.

Proof $\mathbb{R}^m$ 上的任意圆都存在形如下的单位参数化 c

$$c(t)=q+R\cos\left(\frac{t-t_0}{R}\right)v+R\sin\left(\frac{t-t_0}{R}\right)w$$

其中 (v,w) 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一对正交的单位向量. 它满足

$$c(t_0)=q+Rv,\quad c'(t_0)=w,\quad c''(t_0)=-\frac{v}{R}$$

通过令

$$R=\frac{1}{\kappa(t_0)},\quad w=\gamma'(t_0),\quad v=-\frac{\gamma''(t_0)}{\kappa(t_0)},\quad q=\gamma(t_0)+\frac{\gamma''(t_0)}{\kappa^2(t_0)}$$

可以得到对应的 c 就是符合条件的密切圆.

接下来说明唯一性, 设

$$c_1(t)\equiv 1+R_1\cos\left(\frac{t-t_0}{R_1}\right)v_1+R_1\sin\left(\frac{t-t_0}{R_1}\right)w_1$$

是另一个密切圆. 则

$$w_1=\gamma'(t_0)=w$$

$$-\frac{v_1}{R_1}=\gamma''(t_0)=-\frac{v}{R}\implies v_1=v,R_1=R$$

进而

$$q_1=\gamma(t_0)-R_1v_1=\gamma(t_0)-Rv=q$$

从而得到 $c\equiv c_1$, 这就说明了唯一性.

□

1.4.1 欧式空间上的计算

对于光滑嵌入超曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$, 通常来说在一组局部参数表示下的计算是最简单的. 设 $X:U\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是 M 的一个光滑局部参数化. $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的坐标 $(u^1,\cdots,u^n)$ 给出了 M 上的一个局坐标. 坐标向量场 $\partial_i=\frac{\partial}{\partial u^i}$ 推出到 M 上的向量场 $\mathrm{d}X(\partial_i)$. 既可以将 $\mathrm{d}X(\partial_i)$ 看作是限制切丛 $T\mathbb{R}^{n+1}|_M$ 上的截面, 也可以将它看成是 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数. 在这种等同下, $\mathrm{d}X(\partial_i)$ 在 $T\mathbb{R}^{n+1}\simeq\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准基下的坐标表示, 等同于他作为 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数的坐标表示. 事实上, 对于视为向量值函数的情况我们可以计算

$$\mathrm{d}X_u(\partial_i)=\partial_iX(u)=\left(\partial_iX^1(u),\cdots,\partial_iX^n(u)\right)$$

另一方面, 在坐标上考虑微分映射在切向量上的作用: 如果将切向量视为行向量, 则 $\mathrm{d}X_u(\partial_i)$ 表为第 i 个单位坐标行向量右乘 Jacobi 矩阵, 结果为 Jacobi 矩阵的第 i 行. 这与向量值函数按每个分量求导如出一辙.

定义 1.13

方便起见, 记

$$X_i = \partial_i X$$

M 上沿着 U 的向量场.

一旦我们计算出了向量场 $X_1, \cdots, X_n$, 可以通过以下方式计算处一个单位法向量场: 任取不含于 $\operatorname{span}(X_1, \cdots, X_n)$ 的坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial x^{j_0}}$, 对局部标价 $(X_1, \cdots, X_n, \frac{\partial}{\partial x^{j_0}})$ 施行 Gram-Schmidt 正交化, 得到与 M 适配的正交标价 $(E_1, \cdots, E_{n+1})$. 两个单位法向量的选择是 $N = \pm E_{n+1}$.

对于 3 维欧式空间的情况, 特别的可以通过叉乘后做单位化的方式得到使得标架正定向的单位法向量

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

命题 1.14

设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是嵌入超曲面. $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 M 的一个局部参数化. $(X_1, \cdots, X_n)$ 是由 X 决定的 TM 的一个局部标架. 则标量第二基本形式 h 由以下给出:

1. $$h(X_i, X_j) = \langle sX_i, X_j \rangle = -\langle \nabla_{X_i} N, X_j \rangle = -\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} N, X_j \right\rangle$$

2. $$h(X_i, X_j) = \langle X_{ij}, N \rangle := \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^j u^i}, N \right\rangle$$

[a]

[a]这里是法向量场的参数表示

Remark 同时视 N 为 M 上的向量场和 M 上沿 U 的向量场.

Proof 对以下恒等于零的函数对 u_j 求导

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}(u), N(X(u)) \right\rangle$$

得到

$$0=\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^j u^i}(u), N(X(u))\right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \frac{\partial}{\partial u^j} N(X(u))\right\rangle \tag{*}$$

接下来利用曲线速度计算 $\frac{\partial}{\partial u^j}N(X(u_0))$, 考虑 U 上的一个局部标架 $(u^1,\cdots,u^n)$, 定义曲线 $\gamma(t)=X\left(u_0^1,\cdots,u_0^j+t,\cdots,u_0^n\right)$, 则 $\gamma(0)=X(u_0)$, $\gamma'(0)=\frac{\partial X}{\partial u^j}(u_0)$. 从而

$$\frac{\partial}{\partial u^j}N(X(u_0))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N\circ\gamma(0)=D_t(N\circ\gamma)(0)=\overline{\nabla}_{\gamma'(0)}N(\gamma(0))=\overline{\nabla}_{X_j(u_0)}N(X(u_0))$$

接下来由 Weingarten 方程, 我们有

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \frac{\partial}{\partial u^j}N(X(u))\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \overline{\nabla}_{X_j(u_0)}N(X(u))\right\rangle\\ &=\langle X_i(u), -s(X_j(u))\rangle\\ &=-h(X_i(u),X_j(u))\end{aligned}$$

带入 (*) 式即可. □

命题 1.15

设 $M\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ 是 Riemann 超曲面. 在给定单位法向量下, $\kappa_1,\cdots,\kappa_n$ 是 M 在 p 处的主曲率. 存在等距同构 $\varphi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$, 将 p 映到原点, 将 p 的一个邻域映到形如 $x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$ 的图像. 其中

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\kappa_1\left(x^1\right)^2+\kappa_2\left(x^2\right)^2+\cdots+\kappa_n\left(x^n\right)^2\right)+O\left(|x|^3\right)$$

Proof 通过一个平移和一个旋转, 不妨设 p 为原点, 且 T_pM 等于 $\operatorname{span}(\partial_1,\cdots,\partial_n)$. 通过对前 n 个分量的一个正交变换, 不妨 $\partial_1,\cdots,\partial_n$ 使得 M 的标量第二基本形式的坐标表示具有对角型, 分别以 $\kappa_1,\cdots,\kappa_n$ 为对角元. 必要时, 通过一个反射, 不妨设 $(0,\cdots,1)$ 为单位法向量.

由隐函数定理, 存在函数 f, 使得在 $0\in\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个邻域 U 上, 成立

$$q\in M \iff x^{n+1}(q)=f\left(x^1(q),\cdots,x^n(q)\right)$$

于是 M 有参数表示

$$X=\left(x^1,\cdots,x^n,f\left(x^1,\cdots,x^n\right)\right)$$

由于 $T_0M=\operatorname{span}(X_1,\cdots,X_n)=\operatorname{span}(\partial_1,\cdots,\partial_n)$, 故

$$\partial_1 f=\cdots=\partial_n f=0,\quad X_i=\partial_i,\quad i=1,\cdots,n$$

于是由上面的命题

$$h(X_i,X_j)=\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i x^j}, e_n\right\rangle=\partial_i\partial_j f$$

由 Taylor 展开即得命题成立. □

命题 1.16

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 Riemann 超曲面. 若 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的向量场 $N = N^i\partial_i$ [a] 在 M 上的限制成为它的一个单位法向量场. 则对于每个与 M 相切的向量场 $X = X^j\partial_j$, 可以利用 Weingarten 方程直接计算

$$sX = -\overline{\nabla}_X N = -X^j\left(\partial_j N^k\right)\partial_k$$

[a] 这里是几何坐标上的表示, 而非参数坐标

命题 1.17

若 M 在 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上被局部地定义为光滑实函数 F 的正则水平集 $U \cap M$. 则 $\operatorname{grad} F$ 在 $M \cap U$ 上非零, 可以选取沿 M 的单位法向量场为

$$N = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$$

Example 1.1 球面的形状算子 函数 $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|^2$ 是每个球面 $\mathbb{S}^n(R)$ 的光滑定义函数. 梯度为 $\operatorname{grad} F = 2x^i\partial_i$, 沿着 $\mathbb{S}^n(R)$ 长度为 $2R$, 且为外向指向的. 沿着 $\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ 的一个单位法向量场为

$$N = \frac{1}{R}x^i\partial_i$$

容易计算出形状算子为

$$sX = -\frac{1}{R}X^j\left(\partial_j x^i\right)\partial_i = \frac{1}{R}X^i\partial_i = -\frac{1}{R}X$$

于是

$$s = -\frac{1}{R}\,\mathrm{Id}$$

主曲率均为 $-\frac{1}{R}$, 平均曲率为 $-\frac{1}{R}$, Gauss 曲率为 $(-1)^n\frac{1}{R^n}$.

命题 1.18

对于 $\mathbb{R}^3$ 上的曲面, 若参数化 X 给定, 由于 X_1, X_2 在每一点处与 M 相切, 内积为非零法向量, 故一个单位法向量的选择是

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

1.4.2 曲面 Gauss 曲率的內蘊性

定理 1.5 (Gauss 绝妙定理)

设 (M,g) 是 $\mathbb{R}^3$ 的 2-维嵌入 Riemann 子流形. 对于每个 $p\in M$, M 在 p 处的 Gauss 曲率等于 g 在 p 处的标量曲率的一半, 或者等价地说, 选定 T_pM 的一组规正基 (b_1,b_2) 下,

$$R_{1221}=Rm_p\left(b_1,b_2,b_2,b_1\right)=h_{11}h_{22}-h_{12}^2=K\left(p\right)$$

因此 Gauss 曲率是 (M,g) 的局部等距同构不变量.

Proof 二维 (伪)Riemann 流形 (M,g) 成立

$$Rm=\frac{1}{4}Sg \owedge g$$

Gauss 方程 $Rm=\frac{1}{2}h\owedge h$ 直接给出 $K\left(p\right)$ 用曲率张量的表示. □

定义 1.14

对于抽象的 2-维 Riemann 流形 (M,g), 定义它的 Gauss 曲率 K 为 $K=\frac{1}{2}S$, 其中 S 是它的标量曲率.

1.5 截面曲率

定义 1.15

设 $n\geq 2$, M 是 n 维 Riemann 流形, $p\in M$, $V\subseteq T_pM$ 是原点的星形邻域, 使得 $\exp_p$ 将它微分同胚地映到一个开集 $U\subseteq M$. 令 Π 是 T_pM 的一个二维子空间. 由于 $\Pi\cap V$ 是 V 的一个嵌入子流形, 故 $S_\Pi:=\exp_p\left(\Pi\cap V\right)$ 是 U 的一个包含了 p 的一个嵌入子流形, 成为 **由 Π 决定的平截面** .

Remark

1. S_Π 是初速度取在 Π 上的测地线扫过的集合.
2. 由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0:T_0\left(\Pi\cap V\right)\simeq\Pi\to T_pS_\Pi$ 是单位映射, 故 $T_pS_\Pi=\Pi$.

定义 1.16

定义 Π 的**截面曲率**, 记作 $\sec\left(\Pi\right)$, S_Π 在 p 处的内蕴 Gauss 曲率. 其中 S_Π 配备了嵌入 $S_\Pi\subseteq M$ 的诱导度量.

若 (v, w) 是 Π 的一组基，也记 $\sec(v, w) = sec(\Pi)$.

定义 1.17

对于内积空间 V 上的向量 v, w，引入以下记号

$$|v \wedge w| = \sqrt{|v|^2 |w|^2 - \langle v, w\rangle^2}$$

Remark 由 Cauchy 不等式，$|v \wedge w| \geq 0$，取等当且仅当 w, v 线性相关. 且 v, w 规范正交时，$|v \wedge w| = 1$.

命题 1.19 (截面曲率的计算公式)

令 (M, g) 是 Riemann 流形，$p \in M$. 若 v, w 是 T_pM 上线性无关的向量，则由 v, w 张成的平面的截面曲率由以下给出

$$\sec(v, w) = \frac{Rm_p(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2}$$

Proof 设 Π 是 v, w 张成的 T_pM 的二维子空间. S_Π 是它决定的一个平截面. 设 $\hat{g}$ 是它作为嵌入子流形 $S_\Pi \subseteq M$ 的诱导度量.

先说明 S_Π 的第二基本形式 $\hat{\mathrm{II}}$ 在 p 处退化. 任取 $z \in \Pi$，存在落在 p 充分小邻域的 g-测地线 γ，它以 p 为起点，z 为初速度，并且也落在 S_Π 上. 由曲线的 Gauss 公式，以及测地线方程，我们有

$$0 = D_t\gamma' = \hat{D}_t\gamma' + \hat{\mathrm{II}}(\gamma', \gamma')$$

由于右侧两项始终正交，在 p 处取值，得到 $\hat{\mathrm{II}}(z, z) = 0$. $\hat{\mathrm{II}}$ 的对称性和极化恒等式给出 $\hat{\mathrm{II}} \equiv 0$. 进而由 Gauss 公式，

$$Rm_p = \hat{Rm}_p$$

可以在任意一组 $\hat{\mathrm{II}}$ 的规正基 (b_1, b_2) 下，得到

$$\sec(b_1, b_2) = \hat{Rm}_p(b_1, b_2, b_2, b_1) = Rm_p(b_1, b_2, b_2, b_1).$$

最后通过下列正交化计算任意 Π 的基 (v, w) 下的截面曲率表示:

$$b_1 = \frac{v}{|v|}$$

$$b_2 = \frac{w - \langle w, b_1\rangle b_1}{|w - \langle w, b_1\rangle b_1|} = \frac{w - \langle w, v\rangle \frac{v}{|v|^2}}{\left|w - \langle w, v\rangle \frac{v}{|v|^2}\right|}$$

计算

$$\begin{aligned}
\sec(v,w) &= \sec(b_1,b_2)\\
&= Rm_p(b_1,b_2,b_2,b_1)\\
&= Rm_p\left(\frac{v}{|v|},\frac{w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}}{\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|},\frac{w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}}{\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|},\frac{v}{|v|}\right)\\
&= \frac{Rm_p(v,w,w,v)}{|v|^2\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|^2}
\end{aligned}$$

这里使用了 Rm 关于前 2 和后 2 分量的反对称性. 最后, 化简

$$\begin{aligned}
&|v|^2\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|^2\\
&= |v|^2\left(|w|^2+\langle w,v\rangle^2\frac{1}{|v|^2}-2\langle w,v\rangle^2\frac{1}{|v|^2}\right)\\
&= |v|^2|w|^2-\langle w,v\rangle^2\\
&= |v\wedge w|^2
\end{aligned}$$

□

命题 1.20

设 R_1,R_2 是有限维内积空间 V 上的代数曲率张量. 若对于任意一对线性无关的 $v,w\in V$, 都有

$$\frac{R_1(v,w,w,v)}{|v\wedge w|}=\frac{R_2(v,w,w,v)}{|v\wedge w|}$$

则 $R_1=R_2$.

Proof 令 $D=R_1-R_2$, 则 D 也是一个 V 上的代数曲率张量. 并且对于任意的 $v,w\in V$, $D(v,w,w,v)=0$.

任取 $w,v,x\in V$,

$$\begin{aligned}
0 &= D(w+v,x,x,w+v)\\
&= D(w,x,x,w)+D(v,x,x,v)+D(w,x,x,v)+D(v,x,x,w)\\
&= 2D(w,x,x,v)
\end{aligned}$$

上面的结果还立即给出

$$\begin{aligned}
0 &= D(w,x+u,x+u,v)\\
&= D(w,x,x,v)+D(w,x,u,v)+D(w,u,x,v)+D(w,u,u,v)\\
&= D(w,x,u,v)+D(w,u,x,v)
\end{aligned}$$

此外，代数 Bianchi 恒等式给出

$$\begin{aligned}0 &= D(w,x,u,v)+D(x,u,w,v)+D(u,w,x,v)\\ &= D(w,x,u,v)-D(x,w,u,v)-D(w,u,x,v)\\ &= D(w,x,u,v)+D(w,x,u,v)+D(w,x,u,v)\\ &= 3D(w,x,u,v)\end{aligned}$$

对于所有的 $w,x,u,v\in V$ 成立. □

命题 1.21 (Ricci 曲率和标量曲率的几何意义)

设 (M,g) 是 n 维 Riemann 流形 ($n\geq 2$), $p\in M$.

1. 对于每个单位向量 $v\in T_pM$, $Rc_p(v,v)$ 等于 $(v,b_2),\cdots,(v,b_n)$ 张成的平截面的截面曲率之和. 其中 $(b_1,\cdots,b_n)$ 是使得 $b_1=v$ 的 T_pM 的任意规正基.
2. p 处的标量曲率，等于在任意 T_pM 的规正基下，所有不相等的基向量张成平截面的截面曲率之和.

Proof

1. 任取符合条件的规正基 $(b_1,\cdots,b_n)$,

$$Rc_p(v,v)=R_{11}(p)=R_{k11}{}^{k}(p)=\sum_{k=1}^{n}Rm_p(b_k,v,v,b_k)=\sum_{k=2}^{n}\sec(v,b_k)$$

2. 任取 T_pM 的规正基 $(b_1,\cdots,b_n)$,

$$S(p)=R_j{}^{j}=g^{jk}R_{jk}=\sum_{k=1}^{n}R_{kk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{kjj}{}^{k}=\sum_{j\neq k}\sec(b_j,b_k)$$

□

1.5.1 模型空间的截面曲率

定义 1.18

称一个 Riemann 度量或 Riemann 流形是有常值截面曲率的，若它的截面曲率在所有点的所有平面上都相同.