数学分析

詹伟城

作者： Autin

目录

第 1 章 多元积分 1

1.1 Green 公式 1

第 2 章 含参积分 2

2.1 Bochner-Lebesgue 含参积分 2

第 1 章 多元积分

1.1 Green 公式

定理 1.1 (面积公式)

$$\sigma(D) = -\oint_{\partial D} y\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

♡

命题 1.1 (第二型曲线积分与第一型曲线积分的关系)

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) = \oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D}(-P\vec{n_y} + Q\vec{n_x})\,\mathrm{d}s$$

其中 $\vec{n} = (\vec{n_x}, \vec{n_y})$ 是 ∂D 的单位外法向量

♠

推论 1.1

设 D 同上，$\vec{n} = (\vec{n_x}, \vec{n_y})$ 为 ∂D 的单位外法向量，$P, Q \in C^1\left(\overline{D}\right)$ 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D}(P\vec{n}_x + Q\vec{n}_y)$$

♡

推论 1.2 (二维分部积分公式)

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x}\cdot Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D P\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} PQ\vec{n}_x ds$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\cdot Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D P\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} PQ\vec{n}_y\,\mathrm{d}s$$

♡

Proof 以第一个式子为例

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(PQ)}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot Q + P\frac{\partial Q}{\partial x}\\
&\Longrightarrow \iint_D \frac{\partial PQ}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x}Q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D P\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中

$$\iint_D \frac{\partial PQ}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} PQ\vec{n_x}\,\mathrm{d}s$$

第 2 章 含参积分

2.1 Bochner-Lebesgue 含参积分

定理 2.1 (连续性)

设 M 是度量空间，$f : X \times M \to E$ 满足

1. $f(\cdot, m) \in \mathcal{L}_1(X, \mu, E)$ 对于每个 $m \in M$ 成立；
2. $f(x, \cdot) \in C(M, E)$ 对于 μ-几乎所有 $x \in X$ 成立；
3. 存在 $g \in \mathcal{L}_1(X, \mu, E)$，使得 $|f(x, m)| \leq g(x)$ 对于 $(x, m) \in X \times M$ 成立。

则

$$F : M \to E, \quad m \mapsto \int_X f(x, m)\, \mu(\mathrm{d}x)$$

是良定义且连续的。

Proof 良定义性由 1. 立即得到。设 $m \in M$，令 (m_j) 是在 M 中收敛到 m 的列。令 $f_j := f(\cdot, m_j)$，$j \in \mathbb{N}$，则由 2.，$f_j \to f$ μ-a.e。且由 1，$f_j \in \mathcal{L}_1(X, \mu, E)$，$j \in \mathbb{N}$ ，由 3. $|f_j| \leq |g|$，因此由控制收敛定理

$$\lim_{j\to\infty} F(m_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j = \int_X \lim_{j\to\infty} f_j = \int_X f(x, m)\, \mu(\mathrm{d}x) = F(m)$$

这表明 F 是连续的。

$\square$

定理 2.2 (可微性)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，设 $f : X \times U \to E$ 满足

1. $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}_1(X, \mu, E)$ 对所有 $y \in U$ 成立；
2. $f(x, \cdot) \in C^1(U, E)$ 对于 μ-几乎所有 $x \in X$ 成立；
3. 存在 $g \in \mathcal{L}_1(X, \mu, \mathbb{R})$，使得
$$\left|\frac{\partial}{\partial y^j} f(x, Y)\right| \leq g(x), \quad (x, y) \in X \times U, \quad 1 \leq j \leq n$$

则

$$F : U \to E, \quad y \mapsto \int_X f(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x)$$

是连续可微的，并且

$$\partial_j F(y) = \int_X \frac{\partial}{\partial y^j} f(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x), \quad y \in U, \quad 1 \leq j \leq n$$