目录

第 1 章 绪论

成绩构成：平时加期中 50，期末 50，往年一般四六开。

主要教学内容：

主要讲三类方程，椭圆、抛物、双曲。

1. 二阶 PDE 分类与定解问题
2. 行波法，分离变量法，Fuurier 变换法，Green 函数法，能量不等式，极值原理
3. 三类典型二阶方程定解问题及解的存在性、唯一性、稳定性，包括：波动方程、热传导方程和位势方程

将非线性问题线性化是常用的技法，回忆 ODE 的解法，考虑方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x,y\right) \\ y = \varphi\left(x_0\right) \end{cases}$$

转换成积分方程

$$\varphi\left(x\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,\varphi\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

转换成线性方程

$$\varphi_{n+1}\left(x\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,\varphi_n\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

1.1 分部积分

定理 1.1

设 f,g 在 $[a,b]$ 中可到，且导数可积，则

$$\int_a^b f\left(x\right)g'\left(x\right)\,\mathrm{d}x = f\left(x\right)g\left(x\right)|_a^b - \int_a^b f'\left(x\right)g\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

定理 1.2

设 Ω 为平面有界区域，其边界由有限条 C^1 曲线组成，边界的定向为诱导定向，$\vec{n} = (\cos\alpha,\cos\beta)$ 是单位外法向量，如果 P,Q 为 Ω 上的 C^1 函数，则

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega}\left(P\cos\left(t,x\right) + Q\cos\left(t,y\right)\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial D}\left(Q\cos\left(n,x\right) - P\cos\left(n,y\right)\right)\mathrm{d}s = \int_{\partial D}\left(Q,-P\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

其中的 t 代表沿边界的单位切向向量，n 表示沿边界的单位外法向量。

Idea

把一维牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

中的符号理解成向外的方向，它与公式

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int_{\partial D} (Q, -P) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s$$

在形式上是一致的。

Proof

第三个等号是因为对于单位外法向量 n，

$$\cos(t, y) = \cos(n, x)$$

并且

$$\cos(t, x) = -\cos(n, y)$$

□

定理 1.3

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\partial D} P\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + R\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_D (P, Q, R) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

$$\int_D \mathrm{div} X\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\partial D} X \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

其中

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

以上这些公式无非一句话：把区域上的积分写作边界散度。

定理 1.4

$$\int_D u \mathrm{div} X\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_D [\mathrm{div}(uX) - X \cdot \nabla u]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\partial D} uX \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S - \int_D X \cdot \nabla u\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Idea

它在形式上与分部积分公式

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x$$

1.2 算子运算

定义 1.1 (梯度算子)

设 $f=f(x), x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^n$ ， $f=f(x)$ 的梯度定义为

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$$

♣

定义 1.2 (散度算子)

设 $f=f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, x\in\mathbb{R}^n$ ， $f=f(x)$ 的散度定义为

$$\mathrm{div} f:=\nabla\cdot f=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

♣

定义 1.3 (旋度算子)

设 $f=f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x)):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^3$ $f=f(x)$ 的旋度定义为

$$\mathrm{rot}=\mathrm{curl}\ f:=\nabla\times f=(\partial_2 f_3-\partial_3 f_2,\partial_3 f_1-\partial_1 f_3,\partial_1 f_2-\partial_2 f_1)=\begin{pmatrix} i & j & k\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ f_1 & f_2 & f_3\end{pmatrix}$$

特别地，对于 $f=f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, x=(x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^2$, $f=f(x)$ 的旋度（涡度）定义为：

$$\nabla^{\mathsf{T}}\cdot f=\partial_1 f_2-\partial_2 f_1, \nabla^{\perp}:=(-\partial_2,\partial_1)$$

♣

命题 1.1

设 $f=f(x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^3$ ， 则

$$\mathrm{curl}\ \nabla f=\nabla\times(\partial_1 f,\partial_2 f,\partial_3 f)=0$$

$$\mathrm{div}\ \nabla f=\nabla\cdot(\partial_1 f,\partial_2 f,\partial_3 f):=\partial_1^2 f+\partial_2^2 f+\partial_3^2 f=\Delta f(\text{拉普拉斯算子})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\ (\mathrm{curl}\ f)&=\nabla\times(\partial_2 f_3-\partial_3 f_2,\partial_3 f_1-\partial_1 f_3,\partial_1 f_2-\partial_2 f_1)\\&=(\partial_2(\partial_1 f_2-\partial_2 f_1)-\partial_3(\partial_3 f_1-\partial_1 f_3),\partial_3(\partial_2 f_3-\partial_3 f_2)-\partial_1(\partial_1 f_2-\partial_2 f_1),\\&\quad\partial_1(\partial_3 f_1-\partial_1 f_3)-\partial_2(\partial_2 f_3-\partial_3 f_2))=-\nabla f+\nabla(\mathrm{div}\ f)\end{aligned}$$

♠

1.3 守恒律与 PDE

物理模型：一根长为 l 的柔软、有弹性、不考虑重量的均匀细弦，拉紧之后让其离开平衡位置，在垂直于弦的外力作用下做微小横振动，求在不同时刻弦的形状。

- 细：弦的长度远大于直径，在数学上可以当做一根线段处理；

1.3.1 弦的微小横振动方程

1. 建立坐标系：取弦的平衡位置为 x 轴，在弦运动的平面内，垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴。于是，在任意时刻 t，弦线上个点的位移为 $u = u\,(x,t)$。
2. 动量增量
   - 在弦上任取以线段 $(x, x+\Delta x)$，弧长为 $\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$，($t$时刻)，由于作微小横振动，因此 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$。于是 $|u_x| \sim 0$，$\Delta s \sim \Delta x$
   - 在任意时刻 t，线段 (a,b) 的动量为：
   $$\lim_{\Delta\to 0}\sum \rho\Delta s\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta\to 0}\sum \rho\Delta x\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x$$
   因此，(t_1,t_2) 内动量的变化为：
   $$\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_2}\mathrm{d}x - \int_a^b \rho\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\mathrm{d}x$$
3. 垂直于弦线的外力产生的冲量
   - 外加强迫力：设 f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度 (单位：N/m)，则强迫外力在时段 $[t_1,t_2]$ 内产生的冲量为
   $$\lim_{\Delta\to 0}\sum f_0\Delta s\Delta t = \lim_{\Delta\to 0}\sum f_0\Delta x\Delta t = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_b^a f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
4. 弦张力的冲量
   (a). 竖直方向上
   $$\begin{aligned} T_a\cdot i_u &= -\left|T_a\right|\cos\langle T_a, i_u\rangle = -\left|T_a\right|\sin\alpha \\ T_b\cdot i_u &= -\left|T_b\right|\cos\langle T_b, i_u\rangle = \left|T_b\right|\sin\beta, \quad \alpha,\beta\ll 1 \end{aligned}$$
   水平方向上
   $$\left|T_a\right|\cos\alpha = \left|T_b\right|\cos\beta \implies \left|T_a\right| = \left|T_b\right|$$
   由于 $|\alpha|, |\beta| \ll 1$，$\sin\alpha\sim\tan\alpha, \sin\beta\sim\tan\beta$，于是
   $$\begin{aligned} \left|T_a\right|\sin\alpha &\sim |T|\tan\alpha =: T_0\tan\alpha = T_0\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} \\ \left|T_b\right|\sin\beta &\sim |T|\tan\beta =: T_0\tan\beta = T_0\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} \end{aligned}$$
   因此张力垂直于弦线的分量在 $[t_1,t_2]$ 内产生的冲量就是
   $$\int_{t_1}^{t_2} T_0\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b}\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} T_0\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}\mathrm{d}t$$

5. 得到由动量守恒定律给出的弦线作微小横振动所满足的方程

$$\begin{aligned}I &:= \int_a^b \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} - T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}\right] \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =: J_1 + J_2\end{aligned}$$

由牛顿莱布尼兹公式

$$\begin{aligned}I &= \int_a^b \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_2} - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\right) \mathrm{d}x \\ &= \rho \int_a^b \mathrm{d}x \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \rho \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$J_1 = T_0 \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x = T_0 \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

于是

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

为弦振动方程，或者写作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f}{\rho} =: a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$$

移项得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$$

称为是一维的波动方程。

1.3.2 薄膜的微小横振动

- 物理问题：考虑一个均匀的膜，张紧在平面的某一曲线上，受到与膜所在平面垂直的外力作用，作微小的横振动，假设运动方向与平面垂直，求膜上各个点的位移随时间变化的规律。
- 分析：膜受到外力作用时，由于膜的张力作用，膜产生往返上下运动，在运动过程中膜上各点的位移、加速度、张力都在不断的变化，但遵循物理规律。

$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

1. 一小块曲面的面积为

$$\Delta S = \iint_\delta \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

薄膜基本是平的，因此 $|u_x|, |u_y| \ll 1$，从而

$$\Delta S \sim \iint_\delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Delta\sigma$$

不随时间变化。

2. 如果假设薄膜的面密度 ρ，取一小段 $\rho\Delta S$ ，竖直加速度为 $\rho\Delta S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，求和取极限
$$\lim_{\Delta\to 0}\sum \rho\Delta S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\lim_{\Delta\to 0}\sum \rho\Delta \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\iint \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
3. 外力：设外力密度为 $F=(x,y,t)$，取一小块求和取极限，为
$$\lim_{\Delta\to 0}\sum F\Delta S=\lim_{\Delta\to 0}\sum F\Delta\sigma=\iint F(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
4. 张力：取边界上的一小段，设 ν 为法向量，τ 是切向向量由于膜不能抵抗弯曲和切边的平面薄片，故薄膜的张力垂直于切向和法向，则
$$T\text{的方向与}\tau\times\nu\text{的方向一致}$$
薄膜的曲面方程是 $u=u(x,y,t)$，它的单位法向为 $\nu=\frac{(-u_x,-u_y,1)}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\sim(-u_x,-u_y,1)$ 。考虑边界的参数方程
$$\begin{cases} x=x(s)\\ y=y(s)\\ u=u(x(s),y(s))\end{cases}$$
可得单位切向为
$$\tau=\frac{(x',y',u_xx'+u_yy')}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(u_xx'+u_yy')^2}}$$
其中
$$(u_xx'+u_yy')^2\ll 1$$
于是
$$\tau\sim\frac{(x'(s),y'(s),u'(s))}{\sqrt{(x'(s))^2+(y'(s))^2}}$$
计算
$$\begin{aligned}\tau\times\nu&=\left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},\frac{u'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right)\times(-u_x,u_y,1)\\ &\sim\left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},-\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},\frac{u_xy'-u_yx'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right)\end{aligned}$$
取薄膜上的一小块，考虑它在 xy 平面上的投影，不妨设它为一块矩形，横纵坐标端点为 x_1,x_2,y_1,y_2。薄膜只有上下振动，沿 x,y 方向力的分量均为 0。张力为
$$T=|T|(\tau\times\nu)$$
分量为
$$T_y=0,\quad T_x=0$$

将 T 做分解，作用在投影的平行于 x 的两条边上，得到

$$T_y = \int_{x}^{x+\Delta x} |T(x, y_1)| \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x+\Delta x} |T(x, y_1 + \delta y)| \, \mathrm{d}x$$

中值定理并消去 Δx，得到

$$|T(\xi, y_1)| = |T(\eta, y + \Delta y)|$$

得到 $|T(x_1, y_1)| = |T(x_1, y_1 + \Delta y)|$ 由于 y 是任取的，因此 T 的大小与 y 无关。类似地，T 与 x 无关。

综上，T 与 x, y, t 无关。

沿竖直方向，

$$T = \int_{\Gamma} T_0 \frac{u_x y' - u_x x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \, \mathrm{d}s$$

其中 Γ 是薄膜在 xy 平面上的投影。以上写作

$$\begin{aligned} T &= \int_{\Gamma} T_0 (u_x, u_y) \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma} T_0 (u_x, u_y) \cdot n \, \mathrm{d}s = T_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}s = T_0 \iint_{\Omega} \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

1.3.3 流体力学基本方程组 (乱写的)

设流体运动区域为 Ω，在 Ω 内截取一个区域 D，考虑时段 $[t_1, t_2]$，

- 质量守恒与连续性方程：

$$t_2\text{时刻质量} - t_1\text{时刻质量} = [t_1, t_2]\text{ 时段通过边界的流入质量} + [t_1, t_2]\text{ 时段源生成的质量}$$

- 动量守恒与运动方程；

$$\begin{aligned} [t_1, t_2]\text{ 时段动量增量} &= [t_2, t_3]\text{ 时段通过边界的流入质量产生的动量} \\ &+ [t_1, t_2]\text{ 时段外力与法向应力产生的冲量 K} \end{aligned}$$

外力（密度）f+ 周围流体对它产生的法向应力 $p_n = -pn$，其中 p 为压强，于是由“动量 = 质量 × 速度”，可得

$$\begin{aligned} &\iiint_D \rho \vec{V}|_{t=t_2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \iiint_D \rho \vec{V}|_{t=t_1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iint_{\partial D} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot n \, \mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint_D f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iint_{\partial D} (-pn) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Proof

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint_n \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \vec{V} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iint_{\partial n} \vec{V} \left(\rho \vec{V} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}S + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint_{\Omega} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint \nabla P \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$\vec{V}=(u,v,w)$$

$$\begin{aligned}I_1=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial n}u\left(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial n}\rho u\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{n}\mathrm{div}\,(\rho u\vec{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{n}\left(u\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\vec{V}\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial n}v\left(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{n}\left(v\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\vec{V}\cdot\nabla v\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial n}w\left(\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{n}\left(w\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\vec{V}\cdot\nabla w\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$I=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{n}\left(\vec{V}\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\right)\vec{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

□

- $$\frac{\partial V}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)+\nabla P=f$$

  为动量守恒方程

  $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+\vec{V}\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=f$$

  展开第一项，为

  $$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial t}\vec{V}+\vec{V}\,\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)+\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=f$$

  $$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}+\nabla P=f$$

  如果 ρ 是常数，

  $$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\nabla\vec{V}+\nabla\frac{P}{\rho}=\frac{f}{\rho},\quad \mathrm{div}\ V=0$$

定义 1.4

设 $A=(a_1,a_2,a_3)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$A\otimes B:=(a_ib_j)_{3\times3}$$

$$[\mathrm{div}\ (A\otimes B)]_j=\sum_i\partial\left(a_ib_j\right)$$

♣

1.4 变分

定义 1.5

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的区域，定义在 $B(0,1)\subseteq\Omega$ 上无穷次连续可微，且在 Ω 的边界附近为零的函数的全体，记作 $C_0^{\infty}(\Omega)$。♣

Example 1.1

$$\rho(x)=\begin{cases} ke^{\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ，k 为常数，可以选取 k 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\,\mathrm{d}x=1$$

对于 $\forall\varepsilon>0$，定义 $\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，则 $\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=1$

Remark $\rho_\varepsilon(x)$ 在半径为 ε 的开圆处大于零，在之外的地方等于 0。

引理 1.1

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界区域，f 在 Ω 上连续，若对于任意的 $\varphi(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$，都有

$$\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0$$

则 $f(x)$ 在 Ω 上恒为零，♡

Proof 若不然，则存在 $x_0\in\Omega$，使得 $f(x_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$。由 f 的连续性，存在 $B_\Delta(x_0)\subseteq\Omega$，使得 $f(x)>0$ 对于任意的 $x\in B_\delta(x_0)$ 上成立。对于任意的 $\varepsilon\in(0,\delta)$，取 $\varphi(x)=\rho_\varepsilon(x-x_0)$，我们有

$$\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{B_\varepsilon(x_0)}f(x)\rho_\varepsilon(x-x_0)\,\mathrm{d}x>\int_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}f(x)\rho_\varepsilon(x-x_0)\,\mathrm{d}x>0$$

矛盾。

□

设 $yF(x)$

1.4.1 变分法与膜平衡

- 几何问题：考虑一个处于张紧状态的薄膜，薄膜抗伸张不抗弯曲，且外力作用引起的面积变化所做的功与变化成正比，比例系数 T 称为薄膜张力。它与这部分的形状和位置无关。先假设薄膜的一部分边界固定在一框架上，另一部分收到外力的作用，且整个薄膜在垂直于平衡位置的外力 $f(x,y)\left(N/m^2\right)$ 作用下处于平衡状态，求膜的形状。
- 最小势能原理：受外力作用的弹性体，在满足已知边界唯一约束的一切可能位移中，达到平衡状态的位移使得物体的总势能最小。

1. 建立坐标系：设膜的水平位置位于 xOy 平面上的区域 Ω，Ω 的边界 $\partial\Omega = \gamma + \Gamma$ 。在 γ 上已知膜的位移为 φ，在 Γ 上收到外力的作用，设外力垂直于膜的平衡位置的分量为 $p = p(x,y)\,(N/m)$，作用在膜内的外力为 $f = f(x,y)\left(N/m^2\right)$，设膜的形状为 $v = v(x,y)$。

$$
\begin{aligned}
&= \iint_\Omega \sqrt{1+v\times^2+v_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega \left(\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}-1\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega \left(1+\frac{1}{2}\left(v_x^2+v_y^2\right)-1\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(v_x+v_y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\text{应变能} = \frac{T}{2}\iint_\Omega \left(v_x^2+v_y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$
\text{外力做功} = \iint_\Omega f(x,y)\,v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_\Gamma p(x,y)\,v(x,y)\,\mathrm{d}S
$$

$$
\text{总势能} = \text{应变能} - \text{外力做功}
$$

$$
\begin{aligned}
J(v) = &\frac{T}{2}\iint_\Omega \left(v_x^2+v_y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_\Omega f(x,y)\,v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&- \int_\Gamma p(x,y)\,v(x,y)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

设 $u = u(x,y)$ 是平衡位置状态的位移，则

$$
J(u) = \min_v J(v)
$$

$v|_\gamma = \varphi$ 是使得 $J(v)$ 有意义

2. 最小势能原理：

引进函数集合（允许函数类，容许集）

$$
M_\varphi = \left\{v : v \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), v|_\gamma = \varphi\right\}
$$

- 最小势能原理的数学表述（变分问题）：若 $u \in M_\varphi$ 为膜达到平衡状态的唯一，则

$$
J(u) = \min_{v\in M_\varphi} J(v)
$$

令

$$
M_0 = \left\{w : w \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), w|_\gamma = 0\right\}
$$

则对于任意的 $t \in R$，$w \in M_0$，有 $u + tw \in M_\varphi$。$J(u) \le J(u+tw)$ 。再令 $j(t) =$

$J\left(u+tw\right)$, 则 $j\left(t\right)$ 在 $t=0$ 取最小值，即 $j\left(0\right)\leq j\left(t\right)$，$t\in\mathbb{R}$ 。

$$j\left(t\right)=J\left(u+tv\right)=\frac{T}{2}\iint_{\Omega}\left(u_x+x\right)$$