



PDE

作者: Autin

目录

第1章特征函数法	1
1.1 基本概念	1
1.2 齐次边界问题的解法	3
1.3 处理非齐次边界条件	4
第1章 练习	5
第2章Fourier 变换	7
2.1 Fourier 变换	7
2.2 Fourier 逆变换	10
2.3 重要例子	11
2.4 无限域 PDE 的 Fourier 方法	12
2.4.1 无限杆的热方程	13
2.4.1.1 形式推导	13
2.4.1.2 解的有效性	14
2.4.2 无限域波动方程	16
2.4.2.1 形式推导	16
2.4.3 半平面上的 Laplace	17
2.4.3.1 形式推导	17
第2章 练习	19
第3章分布理论初步	22
3.1 基本概念	22
3.2 Schwartz 空间与 Fourier 变换	24
第4章高维积分	29
4.1 分部积分	29
4.2 极坐标	34
第5章能量方法	35
5.1 热方程的能量估计	36
5.2 波动方程的能量估计	38

第6章Green函数	41
6.1 Dirichlet 问题的 Green 函数法	42
6.1.1 非齐次方程, 齐次边界	42
6.1.2 齐次方程, 非齐次边界	42
6.1.3 最终表示	43
6.2 波动方程的 Green 函数	44
6.2.1 只有源项的贡献	45
6.2.2 只有初始位移的贡献	45
6.2.3 只有初速度的贡献	46
6.2.4 只有边界条件的贡献	47
6.2.5 最终表示	47
6.2.6 波动方程的 Green 函数	48
6.3 几种空间 Green 函数	48
第6章 练习	50
第7章极值原理	53
7.1 调和函数的极值原理	53
7.2 调和函数的极值原理	53
7.3 热方程的极值原理	54
第7章 练习	54

第 1 章 特征函数法

1.1 基本概念

考虑一下形式的线性 PDE:

$$\text{E.Q: } \partial_t u = L_x u + F(x, t), \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_x u + F(x, t)$$

$$\text{B.C: } B[u(x, t)] = g(x, t), \quad \text{on the boundary } \partial\Omega$$

$$\text{I.C: } u(x, 0) = f(x), \quad \text{or} \quad u(x, 0) = f(x), \partial_t u(x, 0) = h(x)$$

定义 1.1 (特征值与特征函数)

对于上述问题中的空间算子 L_x , 和区域 Ω . 若存在值 λ 和函数 $X(x)$, 满足

$$L_x X(x) + \lambda X(x) = 0$$

并且

$$B[X(x)] = 0$$

则称 λ 是区域上空间算子的一个特征值, $X(x)$ 是关于 λ 的一个特征函数.



定义 1.2 (内积)

在函数空间中, 两个是指函数 $f(x), g(x)$ 在区域 Ω 上的标准 L^2 内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) \, dV$$



定理 1.1 (Laplace 算子特征函数的正交性)

对于 Laplace 算子 Δ 在有界区域 Ω 上. 满足齐次 Dirichlet 或齐次 Neumann 边界条件的特征函数, 如果它们对应于不同的特征值, 那么它们是正交的.



Proof 设

$$\Delta \varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad \Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \lambda_m \neq \lambda_n$$

由 Green 第二恒等式,

$$\int_{\Omega} (\varphi_m \Delta \varphi_n - \varphi_n \Delta \varphi_m) \, dV = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right) \, dS$$

将特征方程带入左侧积分, 化为

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle$$

检查右侧积分:

1. Dirichlet: 若 $\varphi_m = 0, \varphi_n = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立, 则右侧积分化为

$$\int_{\partial\Omega} \left(0 \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - 0 \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right) dS = 0$$

2. Neumann: 若 $\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0, \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立, 右侧积分化为

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi_m \cdot 0 - \varphi_n \cdot 0) dS = 0$$

因此, 在以上两种边界条件下, 均有

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$$

则当 $\lambda_n \neq \lambda_m$ 时,

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$$

□

定理 1.2 (完备性定理)

对于一个有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 其边界 $\partial\Omega$ 足够光滑 (例如 C^1 或分段光滑), Laplace 算子 Δ 在上述任何一种齐次边界条件下, 都拥有一系列离散的、正的特征值:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

(对于 Neumann 边界条件, $\lambda_1 = 0$ 对应常数特征函数)。这些特征值趋于无穷大 ($\lambda_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$), 且每个特征值都有有限的重数 (即对应有限个线性独立的特征函数)。

更重要的是, 对应的特征函数集合 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成了一个完备的正交基 (Complete Orthonormal Basis) 在 $L^2(\Omega)$ 空间中 (或者更精确地说, 在满足相应齐次边界条件的 $L^2(\Omega)$ 的子空间中)。

这意味着, 对于任何函数 $f(x) \in L^2(\Omega)$ (且满足相应的齐次边界条件), 它可以被唯一地表示为这些特征函数的无限线性组合:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

其中系数 c_n 可以通过内积 (利用正交性) 计算得到:

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_{\Omega} f(x) \overline{\phi_n(x)} dx}{\int_{\Omega} |\phi_n(x)|^2 dx}$$

(如果特征函数已经归一化, 即 $\int_{\Omega} |\phi_n(x)|^2 dx = 1$, 则分母为 1)。

这个级数在 L^2 范数下收敛, 即:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{L^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = 0$$



之后均假设 L_x 是像 Δ 这样, 具有可数个实特征值, 且特征函数有类似的完备性和正交性的算子。

1.2 齐次边界问题的解法

定理 1.3

对于 L_x, Ω . 设 $\{\lambda_n\}$ 是 L_x 的所有特征值, $\{X_n\}$ 是其对应的一族特征函数. 则解 $u(x, t)$ 和非齐次源项 $F(x, t)$ 可以按特征函数展开:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x)$$

其中

$$F_n(t) = \frac{\langle F(x, t), X_n(x) \rangle}{\langle X_n(x), X_n(x) \rangle}$$

且每个 $T_n(t)$ 都是形如下的 ODE 的解:

1. 对于一阶时间导数 (热方程):

$$T'_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t)$$

2. 对于二阶时间导数 (波动方程):

$$T''_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t)$$



Proof 由于 $\{X_n\}$ 构成一族完备基, 固定 t , $u(x, t)$ 总可以按 $X_n(x)$ 展开, 关于每个 t 的系数函数即为 $T_n(t)$. 以一阶时间导数的方程为例将展开式带入原始 PDE, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) X_n(x) = L_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x)$$

由于 L_x 是线性的, 且 $T_n(t)$ 不依赖于 x , 带入特征关系, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) X_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x)$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T'_n(t) + \lambda_n T_n(t) - F_n(t)) X_n(x) = 0$$

两边与 X_n 做内积, 由正交性得到

$$T'_n(t) + \lambda_n T_n(t) - F_n(t) = 0$$

□

定理 1.4

承接上面的定理. 除了上面这些之外, 初始条件 $u(x, t) = f(x)$ 展开为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \quad B_n = \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x), \quad H_n = \frac{\langle h, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$$

1. 一阶时间导数: 方程

$$T'_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t)$$

具有初始条件 $T_n(0) = B_n$ 确定出唯一解.

2. 二阶时间导数: 方程

$$T''_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t)$$

具有初始条件 $T_n(0) = B_n, T'_n(0) = H_n$, 确定出唯一解.



1.3 处理非齐次边界条件

定理 1.5

若 $w(x, t)$ 满足非齐次边界条件, 且 $L_x w$ 尽可能简单. 令

$$\tilde{F}(x, t) = F(x, t) + L_x w - \frac{\partial w}{\partial t}$$

并令 $v(x, t)$ 是以下齐次边界问题的解

$$\text{E.Q: } \partial_t v = L_x v + \tilde{F}(x, t), \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L_x v + F(x, t)$$

$$\text{B.C: } B[v(x, t)] = 0, \quad \text{on the boundary } \partial\Omega$$

$$\text{I.C: } v(x, 0) = f(x), \quad \text{or} \quad v(x, 0) = f(x), \partial_t v(x, 0) = h(x)$$

令

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

则 u 是原问题的解.

Proof

$$B[u] = B[w] + B[v] = g(x, t)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_t w + \partial_t v \\ &= \partial_t w + L_x v + \tilde{F}(x, t) \\ &= \partial_t w + L_x u - L_x w + F(x, t) + L_x w - \partial_t w \\ &= L_x u + F(x, t) \end{aligned}$$



第 1 章 练习

Problem 1.1 求解以为波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = \sin x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \sin 2x, \partial_t u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Proof

方程为

$$\partial_{tt} u = \partial_{xx} u + \sin x$$

考虑特征值问题

$$\begin{cases} \partial_{xx} X + \lambda X = 0, \\ B[X] = 0 \end{cases}$$

 $\partial_{xx} = \Delta_x$ 有非负的特征值, 解得

$$X(x) = C_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}x) + D_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

带入边界条件, 得到

$$C_\lambda = 0, \quad D_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

特征值 λ 满足

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

即

$$\lambda_n = n^2$$

取 $X_n(x) = \sin(nx)$. 则 $u(x, t)$ 展开为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

其中, $T_n(t)$ 满足方程

$$T_1''(t) + T_1(t) = 1, \quad T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, n \geq 2$$

解得

$$T_1(t) = A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t) + 1$$

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$$

带入初值,

$$B_n = T_n'(0) = 0, n \geq 1$$

$$A_n = T_n(0) = 0, \quad n \neq 1, 2, \quad A_1 = T_1(0) - 1 = -1, \quad A_2 = T_2(0) = \frac{1}{2}$$

于是

$$T_1(t) = -\cos t + 1, \quad T_2(t) = \frac{1}{2} \cos(2t), \quad T_n(t) = 0, \quad n \neq 1, 2$$

最终

$$u(x, t) = (1 - \cos t) \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(2t) \sin(2x)$$

□

第2章 Fourier 变换

2.1 Fourier 变换

定义 2.1 (内积)

1. 定义 $[-L, L]$ 上分段连续的两个复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx$$

2. 定义 f 的范数 $\|f\|$ 为

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$



Remark

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)] dx + i \int_{-L}^L [f_2(x) g_1(x) - f_1(x) g_2(x)] dx$$

定理 2.1

记 $e_m(x) = e^{im\pi x/L}$, 则

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n \rangle &= \int_{-L}^L e^{im\pi x/L} \overline{e^{in\pi x/L}} dx = \int_{-L}^L e^{i(m-n)\pi x/L} dx \\ &= \int_{-L}^L \left(\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + i \sin \frac{(m-n)\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2L, & m = n \end{cases} \end{aligned}$$



命题 2.1

若 f 连续, 分段 C^1 并且 $f(-L) = f(L)$, 则

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2L} \langle f, e_m \rangle \\ f(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{im\pi x/L} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{e_m}{\sqrt{2L}} \right\rangle \frac{e_m}{\sqrt{2L}} \end{aligned}$$



定理 2.2 (Parseval)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}} e_m \right\rangle \right|^2 \\ &= 2L \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2L} \langle f, e_m \rangle \right|^2 = 2L \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2\end{aligned}$$

**定义 2.2 (Fourier 变换)**

设 $f(x)$ 是实变量的实值或复值函数. 定义 $f(x)$ 的 **Fourier 变换** 为 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 的函数 $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

若极限存在. 其中

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

**定义 2.3**

设 m, n 是非负整数, 称定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 有**衰减阶** (m, n) , 若 $f(x)$ 是 C^m 的, 且存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $|x| \geq 1$

$$|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + |f^{(m)}(x)| \leq \frac{K}{|x|^n}$$

**命题 2.2 (求导后变换)**

若 f 具有衰减阶 $(1, 2)$, 则对于所有的 ξ ,

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^\wedge(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$



Proof 若先只考虑足够好的函数 (光滑且急速衰减), 由分部积分可以得到等式

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-i\xi) e^{-i\xi x} dx \\ &= i\xi \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$



推论 2.1

若 f 有衰减阶 $(m, 2)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$|f^{(m)}(x)|^\wedge(\xi) = i^m \xi^m \hat{f}(\xi)$$



Proof 反复利用上面的命题.

**命题 2.3 (变换后求导)**

若 f 有衰减阶 $(0, 3)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$i \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = [xf(x)]^\wedge(\xi)$$



Proof 对于足够好的函数, 积分下求导

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) &= i \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= [xf(x)]^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

**推论 2.2**

若 f 具有衰减阶 $(0, n+2)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$i^n \frac{d^n \hat{f}}{d\xi^n}(\xi) = [x^n f(x)]^\wedge(\xi)$$



Proof 反复利用上面的命题



Fourier 变换把导数变成多项式, 把多项式变成导数.

定义 2.4 (卷积)

定义 f 和 g 的卷积 $f * g$ 为

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

若每个积分存在.



命题 2.4在 \mathbb{R}^n 上,

$$f * g = g * f$$

**Idea** 从 x 扩散按平移量 $-y$ 反向加权 $g(y)$ **定理 2.3 (卷积定理)**设 f, g 分段连续, 且对于 $|x| \geq 1$, 有 $|f(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$, 则

$$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * g)^\wedge(\xi)$$

**Proof**

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\xi y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) e^{-i\xi(x+y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-i\xi x} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * g)^\wedge(x) \end{aligned}$$



2.2 Fourier 逆变换

定理 2.4 (反演定理)设 f 是分段 C^1 且 L^1 , 则对于每个 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$



定义 2.5 (Fourier 逆变换)

定义 $g(\xi)$ 的 Fourier 逆 $\check{g}(x)$ 为

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d'\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(\xi) e^{i\xi x} d'\xi$$

若极限存在. 其中 $d'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\xi$



定理 2.5 (Parseval)

若 f, \hat{f}, g 绝对可积, 且 f 分段 C^1 , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$



Proof 由于两个函数逆变换后的权重通过共轭抵消, 通过不断交换次序可以得到恒等式.



2.3 重要例子

Example 2.1 设 $a > 0, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-a|x|}$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

Solution

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} d'x \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} d'x + \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\xi x} d'x \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} d'x + \int_0^{\infty} e^{-(a-i\xi)x} d'x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)} + \frac{e^{-(a-i\xi)x}}{-(a-i\xi)} \right]_{x=0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-(a+i\xi)} + \frac{1}{-(a-i\xi)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} \end{aligned}$$

Example 2.2 令 $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0, -\infty < x < \infty$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

2.4 无限域 PDE 的 Fourier 方法

定义 2.6 (好核)

称 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族 \mathbb{R}^n 上的函数, 称它为一族好核, 若它满足以下性质

1. 归一化:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

2. 集中性: 对于任意的 $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)| dx = 0$$

3. 一致 L^1 : 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)| dx \leq M, \quad \forall \varepsilon > 0$$



定理 2.6 (好核定理)

若 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 \mathbb{R}^n 上的一族好核, 则对于 L^1 或有界的函数 f ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (K_\varepsilon * f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f * K_\varepsilon)(x) = f(x)$$

对于所有 f 的连续点 x 成立.

特别地, 若 f 处处连续, 则上面的极限是一致的.



Proof 任取 $\delta > 0$, 由归一性

$$\begin{aligned} |(f * K_\varepsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \end{aligned}$$

将积分区域分解, 若 f 有界, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \\ &= \left| \int_{|x|>\delta} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| + \left| \int_{|x|\leq\delta} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq 2 \sup_{|x|>\delta} |f(x)| \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)| dx + M \sup_{|x|<\delta} |f(x-y) - f(x)| \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \leq M \sup_{|x|<\delta} |f(x-y) - f(x)|$$

若 x 是 f 的连续点, 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|x| < \delta} |f(x-y) - f(x)| = 0$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 可知在 f 的连续点 x 上,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] \right| = 0$$

即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * K_\varepsilon)(x) = f(x)$$

特别地, 若 f 处处连续

□

2.4.1 无限杆的热方程

2.4.1.1 形式推导

考虑以下一维无界域上热方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

对微分方程做 x 的 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t + k\xi^2 \hat{u} = 0$$

解关于 t 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi, t) = F(\xi) e^{-k\xi^2 t}$$

其中 $F(\xi)$ 待定. 令 $t = 0$, 得到

$$F(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t}$$

令 $\hat{h}(\xi) = e^{-k\xi^2 t}$ 则

$$h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\xi^2 t + ix\xi} d'\xi$$

其中

$$-k\xi^2 t + ix\xi = -kt \left(\xi - \frac{ix}{2kt} \right)^2 - \frac{x^2}{4kt}$$

于是

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

由卷积定理,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy$$

2.4.1.2 解的有效性

定义 2.7

定义

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad (t > 0)$$

称为热方程的热核.



引理 2.1

热核 $H(x, t)$ 视为以 $t > 0$ 为参数的热核族 $\{H(x, t)\}_{t>0}$ 是一族好核.



Proof

1. 首先, 由 Gauss 积分, 易见

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right| dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4kt}}} = 1$$

故热核族是归一且一致 L^1 的

2. 任取 $\delta > 1$, 考虑积分

$$\begin{aligned} & \int_{|x|>\delta} |H(x, t)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|x|>\delta} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{x>\delta} e^{-\frac{\delta x}{4kt}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\pi kt}} \frac{4kt}{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{4kt}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

故热核族是集成的.

综上, 热核族是一族好核.



命题 2.5

设 $H(x, t)$ 是热核.

1. 对于 \mathbb{R} 上的 Riemann 可积函数 f ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (H * f)(x) = f(x)$$

对于 f 的所有连续点 x 成立.

2. 特别地, 取 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. 可知当 $t \rightarrow 0$ 时, $H(x, t)$ 在分布意义下收敛于 Dirac 函数 $\delta(x)$, 进而可以将 $H(x, t)$ 视为分布, 在 $t = 0$ 处补充定义 $H(x, 0) = \delta(x)$

**定理 2.7**

令 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数, 且有界或 L^1 , 则

$$u(x, t) := (H(\cdot, t) * f)(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

是以下初值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

在满足连续性条件: $u(x, t) \rightarrow f(x_0)$ ($(x, t) \rightarrow (x_0, 0^+)$) 下的解.



Proof 热核 $H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 满足以下问题

$$\begin{cases} H_t = H_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0} \\ H(x, 0) = \delta(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

对于函数 f ,

$$\begin{aligned} \Delta_x (H * f) &= \Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_x H(x-y)) f(y) dy \\ &= (\Delta_x H) * f \end{aligned}$$

于是

$$u_t = H_t * f = k(\Delta_x H) * f = k\Delta_x (H * f) = ku_{xx}$$

此外,

$$u(x, 0) = (\delta * f)(x) = f(x)$$



2.4.2 无限域波动方程

2.4.2.1 形式推导

考虑以下无限域上波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

对方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

两边做关于 x 的 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

解方程, 得到

$$\hat{u}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t)$$

以及

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -a\xi c_1(\xi) \sin(a\xi t) + a\xi c_2(\xi) \cos(a\xi t)$$

对两个初值条件施行 Fourier 变换, 得到

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(x, 0) = c_1(\xi), \quad \hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(\xi, 0) = a\xi c_2(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(a\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

其中

$$\left(\hat{f}(\xi) \cos(a\xi t) \right)^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * (\cos(a\xi t))^\vee$$

其中

$$\cos(a\xi t)^\vee = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} (e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(x + at) + \delta(x - at))$$

于是

$$\left(\hat{f}(\xi) \cos(a\xi t) \right)^\vee = \frac{1}{2} f * \delta(x + at) + \frac{1}{2} f * \delta(x - at) = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2} f(x - at)$$

由

$$\mathcal{F}[\text{rect}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\frac{\xi}{2}}$$

其中

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

结合 Fourier 变换的伸缩率, 得到

$$F\left[\text{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right] = \frac{2at}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi at}{\xi at} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi at}{a\xi}$$

于是

$$\left(\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \text{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)$$

由卷积定理,

$$\begin{aligned} \left(\hat{g}(\xi) \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \text{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right) = \frac{1}{2a} g(x) * \text{rect}\left(\frac{x}{2at}\right) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \text{rect}\left(\frac{x-y}{2at}\right) dy \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy \end{aligned}$$

最终, 在形式上我们得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= k * f + h * g \\ &= \frac{1}{2} f(x - at) + \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy \\ \text{其中 } k(x, t) &= \frac{1}{2} [\delta(x - at) + \delta(x + at)] \\ h(x, t) &= \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{x}{2at}\right) \end{aligned}$$

2.4.3 半平面上的 Laplace

2.4.3.1 形式推导

考虑以下问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 f 是在 \mathbb{R} 上的有界连续函数. 希望寻求 $y \geq 0$ 的有界的连续解.

对

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

做关于 x 的 Fourier 变换, 得到

$$(i\xi)^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0$$

即

$$\hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0$$

解关于 y 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{\xi y} + c_2(\xi) e^{-\xi y}$$

其中 $c_1(\xi), c_2(\xi)$ 由初值决定. 对初值条件 $u(x, 0) = f(x)$ 做关于 x 的 Fourier 变换, 得到

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

当 $\xi > 0$ 时, 取 $c_2(\xi) = \hat{f}(\xi), c_1(\xi) = 0$. 当 $\xi \leq 0$ 时, 取 $c_1(\xi) = \hat{f}(\xi), c_2(\xi) = 0$. 易见这种取法使得 $\hat{u}(\xi, y)$ 连续. 于是这里

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}$$

由卷积定理,

$$u(\xi, y) = \sqrt{2\pi} f * \left((e^{-|\xi|y})^\vee \right)$$

其中

$$\begin{aligned} (e^{-|\xi|y})^\vee &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d'\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\xi y - i\xi x} d'\xi + \int_{-\infty}^0 e^{\xi y - i\xi x} d'\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\xi(y+ix)} d'\xi + \int_0^{\infty} e^{-\xi(y-ix)} d'\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{y+ix} + \frac{1}{y-ix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2y}{y^2 + x^2} \end{aligned}$$

于是

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{2y}{y^2 + (x-s)^2} ds$$

形式上, 我们得到

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{2y}{y^2 + (x-s)^2} ds$$

是以下问题的一个有界连续解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 f 是在 \mathbb{R} 上的有界连续函数.

第2章 练习

Problem 2.1 求解如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + cu = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $c > 0, a \in \mathbb{R}$ 为常数

Proof 对方程

$$u_t - a^2 u_{xx} + cu = 0$$

做 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t + (a^2 \xi^2 + c) \hat{u} = 0$$

得到

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) e^{-(a^2 \xi^2 + c)t}$$

其中 $A(\xi)$ 由初值决定. 对

$$u(x, 0) = \cos x$$

视为缓增分布, 施行 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\xi - 1) + \delta(\xi + 1))$$

带入 $t = 0$, 得到

$$A(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\xi - 1) + \delta(\xi + 1))$$

于是

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\xi - 1) + \delta(\xi + 1)) e^{-(a^2 \xi^2 + c)t}$$

两边施行 Fourier 逆变换, 得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi - 1) e^{-(a^2 \xi^2 + c)t} e^{i\xi x} d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi + 1) e^{-(a^2 \xi^2 + c)t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2} e^{-(a^2 + c)t} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-(a^2 + c)t} e^{-ix} \\ &= e^{-(a^2 + c)t} \cos x \end{aligned}$$

□

Problem 2.2 考虑

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Proof 对于

$$u_{tt} = u_{xx} + 2x$$

两边做 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_{tt} = -\xi^2 \hat{u} + 2i\sqrt{2\pi}\delta'$$

解得

$$\hat{u}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(\xi t) + c_2(\xi) \sin(\xi t) + \frac{2i}{\xi^2} \sqrt{2\pi} \delta'(\xi)$$

对

$$u(x, 0) = x^2$$

做 Fourier 变换, 得到

$$c_1(\xi) + \frac{1}{\xi^2} \sqrt{2\pi} i \delta'(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = -\sqrt{2\pi} \delta''(\xi)$$

对

$$u_t(x, 0) = 0$$

做 Fourier 变换, 得到

$$c_2(\xi) = \hat{u}_t(\xi, 0) = 0$$

于是

$$\hat{u}(\xi, t) = -\sqrt{2\pi} \left(\frac{2i}{\xi^2} \delta'(\xi) + \delta''(\xi) \right) \cos(\xi t) + \frac{2i}{\xi^2} \sqrt{2\pi} \delta'(\xi)$$

整理得到

$$\hat{u}(\xi, t) = 2i\sqrt{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(\xi t)}{\xi^2} \right) \delta'(\xi) - \sqrt{2\pi} \cos(\xi t) \delta''(\xi)$$

其中

$$\frac{1 - \cos \xi t}{\xi^2} \delta'(\xi) = \left(\frac{1}{2} \xi^2 + o(\xi^4) \right) \delta'(\xi) = \frac{1}{2} t^2 \delta'(\xi)$$

这里用到了

$$\varphi(\xi) \delta'(\xi) = \varphi(0) \delta'(\xi) - \varphi'(0) \delta(\xi)$$

此外,

$$\cos(\xi t) \delta''(\xi) = \delta''(\xi) + t \sin(\xi t) \delta'(\xi) = \delta''(\xi) - t^2 \cos(\xi t) \delta(\xi) = \delta''(\xi) - t^2 \delta(\xi)$$

于是

$$\hat{u}(\xi, t) = i\sqrt{2\pi} t^2 \delta'(\xi) - \sqrt{2\pi} \delta''(\xi) + \sqrt{2\pi} t^2 \delta(\xi)$$

两边做 Fourier 逆变换, 得到

$$u(x, t) = t^2 \mathcal{F}^{-1}[iD\mathcal{F}[1]] + \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[x^2]) + t^2 \mathcal{F}[\mathcal{F}[1]]$$

于是

$$u(x, t) = xt^2 + x^2 + t^2$$

□

Problem 2.3 求三维半空间中波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^3, t > 0 \\ u(x_1, x_2, 0, t) = 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}_+^3 \end{cases}$$

第3章 分布理论初步

3.1 基本概念

定义 3.1 (测试函数空间)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集. 定义测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 为全体紧支光滑的复值函数 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 的集合, 即满足:

1.

$$\varphi \in C^\infty(\Omega)$$

2.

$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ 是 Ω 的一个紧子集



定义 3.2 (测试函数空间上的收敛)

给定序列 $\{\varphi_p\}_{p \geq 1} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$. 称该序列收敛到 $0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, 若以下两条成立:

1. 存在紧集 $K \subseteq \Omega$, 使得对于每个 $p \geq 1$, $\text{supp}(\varphi_p) \subseteq K$

2. 对于每个多重指标 α , $\{\partial^\alpha \varphi_p\}_{p \geq 1}$ 在 K 上一致收敛到 0, 即

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha \varphi_p\|_{L^\infty(K)} = 0$$



定义 3.3 (分布)

一个分布 (或广义函数) T , 被定义为从测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 到 \mathbb{C} 的一个线性泛函

$$T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$$

满足以下两个条件

1. 对于任意的 $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 我们有

$$\langle u, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle u, \varphi \rangle + \beta \langle u, \psi \rangle$$

2. 对于任意的紧集 $K \subseteq \Omega$, 存在非负整数 p 和正常数 C , 使得对于任意的 $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, 都有

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

全体 Ω 上的分布记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$.



定义 3.4 (分布意义下的收敛)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的一个非空开集. 考虑一个分布序列 $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}, T_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 称 $\{T_k\}$ 在分布意义下收敛到分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 若对于任意的测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

**定义 3.5 (分布的导数)**

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空开集. 对于分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义它的导数 T' , 为满足以下关系的分布 $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

由此, 可以递归地定义高阶导数 $T^{(n)}$:

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Remark**

1. 这是我们从边界项退化 (紧支性) 的分部积分公式抽象出来的定义
2. 需要说明良定义性.

Example 3.1 Dirac 函数 对于任意的 $a \in \Omega$, 定义分布 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 其中

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

可以验证这是一个分布.

对于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Dirac 函数 δ_0 , 简记作 δ .

Example 3.2 正则分布 对于一个局部可积的函数 $f(x)$, 可以定义出分布 T_f , 成为 f 对应的正则分布

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

尽管 δ 不是一个函数, 在应用的过程中, 方便起见, 约定

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

Example 3.3

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$H'(t) = \delta(t)$$

命题 3.1

$$f(x) \delta'(x) = f(0) \delta'(x) - f'(x) \delta(x)$$



3.2 Schwartz 空间与 Fourier 变换

定义 3.6 (Schwartz 空间)

Schwartz 空间, 记作 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 为全体 \mathbb{R}^n 上的复值光滑速降函数, 确切地说, 称 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 属于 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若:

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. 对于任意的多重指标 α 和 β ,

$$\|x^\beta D^\alpha f(x)\|_{L^\infty} < \infty$$



定义 3.7 (Schwartz 空间上的 Fourier 变换与逆变换)

对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其中 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ (或记作 $\mathcal{F}f(\xi)$), 被定义为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

其逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$



定理 3.1 (Fourier 变换的性质)

1. 对于任意的 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $a, b \in \mathbb{C}$, 都有

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

- 2.

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

是一个同胚映射.

- 3.

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$$

4. 对于多重指标 α ,

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

5. 对于多重指标 β ,

$$\mathcal{F}(x^\beta f(x))(\xi) = (i)^{|\beta|} D^\beta \hat{f}(\xi)$$

6. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(f(\cdot - a))(\xi) = e^{-ia \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$$

7. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot (\cdot)} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

8. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$,

$$\mathcal{F}(f(a \cdot))(\xi) = \frac{1}{|a|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

9. 对于 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

10. 对于任意的 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$$

11. 对于 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

这表明 Fourier 变换在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是等距同构.



定义 3.8 (缓增分布)

一个缓增分布 T 是指一个从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 \mathbb{C} 的线性泛函 $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. 满足

1. $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall a, b \in \mathbb{C}$,

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$$

2. 存在常数 $C > 0$ 和有限个多重指标对 $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_m, \beta_m)$, 使得对于所有的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有

$$|T(f)| \leq C \sum_{j=1}^m \|x^{\beta_j} D^{\alpha_j} f(x)\|_{L^\infty}$$

全体缓增分布构成的空间记作 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.



Example 3.4 缓增函数诱导的缓增分布 对于“缓增的” $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, 即它的增长速度

不超过某个多项式, g 可以定义出缓增分布 T_g :

$$T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

由于 f 速降而 g 增长不快于多项式, 右侧积分绝对收敛且良定义.

Example 3.5 Dirac 分布 $\delta_a(f) = f(a)$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个缓增分布.

定义 3.9 (缓增分布上的 Fourier 变换)

对于一个缓增分布 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 定义其 Fourier 变换 \hat{T} (或记作 $\mathcal{F}T$), 为满足以下的分布

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$



定理 3.2 (缓增分布上的 Fourier 变换的性质)

对于 $T, T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

1. 对于任意的 $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}(aT_1 + bT_2) = a\mathcal{F}T_1 + b\mathcal{F}T_2$$

2. Fourier 变换是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同胚.



命题 3.2

在分布的意义下,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

其中, 左侧不是真正的积分, 它代表一个分布, 按以下方式定义

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx, \varphi(x) \right\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \right) \varphi(k) dk$$



Proof 一方面

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(k) dx dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-i(-x)k} dk dx \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(-x) dx = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x) e^{i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= 2\pi\varphi(0) \end{aligned}$$

另一方面

$$\langle 2\pi\delta(k), \varphi(k) \rangle = 2\pi \langle \delta(k), \varphi(k) \rangle = 2\pi\varphi(0)$$

这表明在分布的意义下

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

□

命题 3.3 (常用 Fourier(逆) 变换)

1. 在 \mathbb{R}^n 上,

$$\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta, \quad \mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

2.

$$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi a}$$

3.

$$\mathcal{F}[e^{-iax}](\xi) = \sqrt{2\pi} \delta(\xi + a)$$

4. 记

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则

$$\mathcal{F}[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)](\xi) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\xi T/2) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi T/2)}{\xi T/2}$$

特别地

$$\mathcal{F}[\text{rect}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

5. 一维的情况

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + x^2}\right](\xi) = e^{-|\xi|a}$$

6. 三维空间上,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4\pi c^2} \partial_t \left(\frac{\delta(|x| - ct)}{t}\right)\right] = \cos(c|k|t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct)\right] = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$$

7.

$$\mathcal{F}[H(x)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\xi) + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\xi}$$

8.

$$\mathcal{F}\{\Delta f(x)\}(\xi) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$



第 4 章 高维积分

4.1 分部积分

定理 4.1 (流形上的 Stokes 公式)

对于 n -维定向带边流形 M , 以及任意的 $(n-1)$ -形式 ω , 都有

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$



引理 4.1

设 (M, g) 是 n -维定向带边 Riemann 流形. dV_g 和 dS_g 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$dS_g = i_N dV_g|_{\partial M}$$

具体地, 在给定局部标架 x^1, \dots, x^n 下, 设 $N = N^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\begin{aligned} dV_g &= \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ dS_g &= \sqrt{g} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \left(N^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{g} N^i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$



引理 4.2

设 (M, g) 是 n -维定向带边 Riemann 流形. dV_g 和 dS_g 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则对于任意 M 上的向量场 X , 在 ∂M 上有以下成立

$$i_X dV_g = g(X, N) dS_g$$



Proof 令

$$X^\top = X - g(X, N) N$$

则 X^\top 是 ∂M 上的一个切向量场. 设 v_1, \dots, v_{n-1} 是 ∂M 上的 $(n-1)$ 个向量场, 则

$$\begin{aligned} i_X dV_g(v_1, \dots, v_{n-1}) &= dV_g(X, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= dV_g(X^\top + g(X, N)N, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= g(X, N) dV_g(N, v_1, \dots, v_{n-1}) + dV_g(X^\top, v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

其中

$$g(X, N) dV_g(N, v_1, \dots, v_{n-1}) = g(X, N) dS_g(v_1, \dots, v_{n-1})$$

此外, $X^\top, v_1, \dots, v_{n-1}$ 是 $(n-1)$ -流形 ∂M 上的 n 个光滑向量场, 其必 $C^\infty(\partial M)$ -线性相关. 从而

$$dV_g(X^\perp, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$$

于是

$$i_X dV_g(v_1, \dots, v_{n-1}) = g(X, N) dS_g(v_1, \dots, v_{n-1})$$

即

$$i_X dV_g = g(X, N) dS_g$$

□

定义 4.1 (Lie 导数)

设 M 是光滑流形, 设 X 是 M 上的一个向量场, T 是 M 上的一个张量场. 按以下方式定义 T 沿着 X 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X T$

1. 若 $T = f \in C^\infty(M)$, 定义

$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X f = X(f)$$

2. 若 $T = Y \in \mathfrak{X}(M)$, 定义

$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X Y := [X, Y]$$

3. 若 $T = \omega \in \Omega(M)$, 定义

$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X d\omega$$

这个等式被称为是 Cartan 魔术公式.

4. 对于两个张量场 S, T ,

$$\mathcal{L}_X (S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T)$$

因此递归地定义出任意 (k, l) -张量场沿着 X 的 Lie 导数.



定义 4.2 (散度)

对于光滑流形 M . 设 X 是 M 上的光滑向量场, Ω 是 M 上的一个体积形式, 定义 X 关于 Ω 的散度, 为一个光滑函数 $\operatorname{div}_\Omega(X)$ 使得

$$\mathcal{L}_X \Omega = (\operatorname{div}_\Omega(X)) \Omega$$

特别地, 在标准欧式空间 \mathbb{R}^n , 向量值函数 $F = (F^1, \dots, F^n)$ 关于标准体积形式 $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ 的散度为

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^i}$$

**Remark**

$$\mathcal{L}_X(dx) = d(i_F dx) + i_F d(dx) = d\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} F^j \hat{dx}^j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^j} dx$$

定理 4.2 (散度定理)

设 (M, g) 是光滑可定向黎曼流形. F 是 M 上的一个光滑向量场, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dV_g = \int_{\partial\Omega} g(F, N) dS_g$$

**Proof** 由 Stokes 定理

$$\int_M d(i_F dV_g) = \int_{\partial M} i_F dV_g$$

其中

$$i_F dV_g = g(F, N) dS_g$$

且由 Cartan 魔术公式,

$$\operatorname{div}(F) dV_g = \mathcal{L}_F(dV_g) = d(i_F dV_g) + i_F d(dV_g) = d(i_F dV_g)$$

带入即得

**推论 4.1 (Gauss-Green)**

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n)$ 是标准坐标, 则

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u N^i dS$$

其中 $dx = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n; i = 1, \dots, n$.



Proof 令 $\mathbf{F} = u \frac{\partial}{\partial x^i}$. 则

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = u_{x^i}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = u N^i$$

由散度定理立即得到. □

引理 4.3

设 (M, g) 是光滑可定向黎曼流形. \mathbf{F} 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的函数, 则

$$(\operatorname{div} \mathbf{F}) v = \operatorname{div}(v \mathbf{F}) - g(\operatorname{grad} v, \mathbf{F})$$



Proof 由

$$\mathcal{L}_{v\mathbf{F}}(\mu) = d(i_{v\mathbf{F}}\mu) = d(vi_{\mathbf{F}}\mu) = dv \wedge i_{\mathbf{F}}\mu + v d(i_{\mathbf{F}}\mu)$$

其中, 设 $\mu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 则

$$\begin{aligned} (dv \wedge i_{\mathbf{F}}\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (dv) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \mu \left(\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n g \left(\operatorname{grad} v, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) F^j = g(\operatorname{grad} v, \mathbf{F}) \end{aligned}$$

即 $(dv \wedge i_{\mathbf{F}}\mu) = g(\operatorname{grad} v, \mathbf{F}) \mu$. 此外 $v d(i_{\mathbf{F}}\mu) \mu = v \mathcal{L}_{\mathbf{F}}(\mu)$ 这表明

$$\operatorname{div}(v \mathbf{F}) = g(\operatorname{grad} v, \mathbf{F}) + v \operatorname{div}(\mathbf{F})$$



定理 4.3 (高维分部积分)

设 (M, g) 是光滑可定向黎曼流形. \mathbf{F} 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的一个光滑函数. 则

$$\int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) v dV_g = \int_{\partial M} v g(\mathbf{F}, \mathbf{N}) dS_g - \int_M g(\operatorname{grad} v, \mathbf{F}) dV_g$$



Proof 对引理的等式在 Ω 上积分, 并利用散度定理立即得到. □

推论 4.2 (某一方向上的分部积分)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的一个可定向嵌入 Riemann 超曲面, (x^1, \dots, x^n) 是 \mathbb{R}^n 的标准坐标.

设 u, v 是 Ω 上的光滑函数, $N = N^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量场. 则

$$\int_{\Omega} uv \, dV = \int_{\partial\Omega} uv N^i \, dS - \int_{\Omega} uv_{x_i} \, dV$$



Proof 上面的分部积分公式令 $F = u \frac{\partial}{\partial x^i}$ 即可.



定理 4.4 (Green 公式)

设 $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, ν 是单位外法向量, 那么

1.

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

2.

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS$$

3.

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS$$

其中 2,3 分别称为格林第一, 二公式.



Proof

1. 在欧氏空间上, $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$. 令 $F = \nabla u$, 由散度定理,

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

2. 令 $F = \nabla v$, 由高维分部积分

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx$$

3. 由 2.

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx$$

交换 u, v 的地位

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

两式相减即可.



定理 4.5 (散度算子的乘积律)

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v$$



4.2 极坐标

定理 4.6 (球坐标下的 Laplace)

考虑 \mathbb{R}^3 上的球坐标 (r, θ, φ) 其上的 Laplace 算子表示为

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

特别地, 若 $f = f(r)$ 是只依赖于径向的函数, 则

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$



第5章 能量方法

定理 5.1

设 $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, 则以下边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

最多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$



Proof 设 \bar{u} 是另一个解, 令 $w = \bar{u} - u$. 则

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由 Green 公式, 能量

$$E = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = - \int_{\Omega} w \Delta w + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = 0 + 0 = 0$$

于是

$$\nabla w \equiv 0$$

表面 w 是常值的, 又 w 在边界上为零, 故 w 在 $\bar{\Omega}$ 上恒为零. 这表明解是唯一的.



引理 5.1 (微分 Gronwall)

设 $u, k, h \in C([a, b])$, 且 u 非负可微, 满足

$$u'(t) \leq k(t) u(t) + h(t)$$

则

$$u(t) \leq e^{\int_a^t k(s) ds} \left(u(a) + \int_a^t h(s) e^{\int_s^a k(\tau) d\tau} ds \right)$$



引理 5.2 (积分 Gronwall)

设 u, k, h 是 $I = [a, b]$ 上的非负连续函数, 若

$$u(t) \leq k(t) + \int_a^t h(s) u(s) ds, \forall t \in [a, b]$$

则

$$u(t) \leq k(t) e^{\int_a^t h(s) ds}, \quad \forall t \in [a, b]$$



定义 5.1 (Sobolev 空间)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界开区域, $k \in \mathbb{N}$, $D^\alpha u, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 表示多重弱导数, $L^2(\Omega)$ 为平方可积空间. 定义

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

**定义 5.2 (零边值 Sobolev 空间)**

$\Omega, K, D^\alpha u$ 同前. 定义

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

**引理 5.3 (Poincare 不等式)**

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 且有 Lipschitz 边界. 则存在仅依赖于 Ω 的常数 C , 使得对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$



5.1 热方程的能量估计

定理 5.2 (Dirichlet 边界条件)

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$, $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\Omega_T)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

设解 u 的一个能量泛函 E 为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx$$

那么存在常数 C , 使得

$$E(t) \leq C \left(E(0) + \int_0^t \|f\|_{L^2}^2 ds \right)$$

**Proof**

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} u_t \cdot u dx = \int_{\Omega} \Delta u \cdot u dx + \int_{\Omega} f \cdot u dx$$

其中

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_{\Omega} f \cdot u \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

合并不等式, 得到

$$\frac{dE}{dt} \leq - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

由 Poincare 不等式, 存在常数 C_P , 使得

$$C_P \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

由不等式 $ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$, 得到

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{2E} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{E}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

$$\frac{dE}{dt} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2C_P \right) E + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{C_P}$, 得到

$$\frac{dE}{dt} \leq -C_P E + \frac{C_P}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

由 Gronwall 不等式,

$$E(t) \leq e^{-C_P t} \left(E(0) + \frac{C_P}{2} \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-C_P(t-s)} \, ds \right)$$

取 $C > \max \left\{ e^{-C_P t}, \frac{C_P}{2} \right\}$ 即可.

□

推论 5.1 (唯一性)

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$, $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\Omega_T)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = \psi(x, t), & (x, t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

该问题的解是唯一的.

♡

Proof 若 u, \bar{u} 是两个解, 令 $w = u - \bar{u}$ 则方程是以下问题的解

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & (x, t) \in \Omega_T \\ w(x, 0) = 0, & x \in \Omega \\ w(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

由上面的能量估计, 存在常数 C , 使得

$$\begin{aligned} E(t) &\leq CE(0) \\ E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w(x, t)|^2 dx, \quad E(0) = 0 \end{aligned}$$

于是

$$w(x, t) \equiv 0$$

这表明解唯一. □

5.2 波动方程的能量估计

定理 5.3

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\Omega_T := \Omega \times [0, T]$, $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$ 是以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

的解. 定义能量

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2) dx = \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} a^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

则存在常数 M , 使得

$$E(t) \leq M \left(E(0) + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)$$



Proof

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + a^2 \nabla u \nabla u_t) dx$$

其中

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t &= a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - a^2 \int_{\Omega} u_t \Delta u dx \\ &= a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx + \int_{\Omega} f(x, t) u_t dx \end{aligned}$$

于是

$$\frac{dE}{dt} = a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \int_{\Omega} f u_t dx = \int_{\Omega} f u_t dx$$

由 Cauchy 不等式,

$$\int_{\Omega} f u_t dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{2E}$$

再由不等式 $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, 得到

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{2E} \leq E + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

$$\frac{dE}{dt} \leq E + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

由微分形式的 Gronwall 不等式,

$$E(t) \leq e^t \left(E(0) + \int_0^t \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-t} dt \right) \leq e^T \left(E(0) + \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)$$

取 $M = e^T$ 即可. □

推论 5.2 (唯一性)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\Omega_T := \Omega \times [0, T]$, $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$ 则以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

的解是唯一性的. ♡

Proof 设 \bar{u}, u 是两个解, $w = \bar{u} - u$, 则

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 \Delta w = 0, & (x, t) \in \Omega_T \\ w(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

令

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\nabla w|^2) \, dx$$

则存在常数 M , 使得

$$E(t) \leq M E(0)$$

其中

$$E(0) = 0$$

故

$$E(t) \equiv 0 \implies w_t \equiv 0, \nabla w \equiv 0$$

这表明 $w(x, t)$ 是常值的, 又 $w(x, t)|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0$, 故 $w \equiv 0$. 这表明解是唯一的.

□

第 6 章 Green 函数

Green 函数是在线性系统 L 的作用下表现为“瞬时脉冲”的函数.

定义 6.1

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的区域, L 是一个线性微分算子, 定义关于以下非齐次方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的格林函数 $G(x, x')$ 为以下分布意义下方程的解

$$LG(x, x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \Omega$$

其中 $u(x)$ 是未知函数, δ 是 Dirac 分布.



定理 6.1

Ω, L 同前, G 是方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的 Green 函数, 则

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, x') f(x') \, dx'$$

是该方程的一个解.



Proof 设 $u(x)$ 有题述表示, 由线性叠加原理,

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L \left(\int_{\Omega} G(x, x') f(x') \, dx' \right) \\ &= \int_{\Omega} (LG(x, x') f(x')) \, dx' \\ &= \int_{\Omega} (\delta(x - x')) f(x') \, dx' \\ &= f(x) \end{aligned}$$



6.1 Dirichlet 问题的 Green 函数法

本节希望通过 Green 函数法, 给出 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 0, & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解的表示形式.

定义 6.2 (Green of Dirichlet)

定义区域 Ω 上 Dirichlet 问题对应的 Green 函数, 为以下问题的解

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), & \forall x \in \Omega \\ G(x, x') = 0, & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$



6.1.1 非齐次方程, 齐次边界

定理 6.2

$\Omega, G(x, x')$ 同前. 令

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x, x') f(x') \, dx'$$

则 $u(x)$ 是以下有齐次边界条件的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



Proof 结合定理 6.1, 这是显然的



6.1.2 齐次方程, 非齐次边界

定理 6.3

Ω, G 同前, 令

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial x'} \, dS_{x'}$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



Proof 由 Green 第二恒等式, 我们有

$$\int_{\Omega} G(x, x_0) \Delta u(x) - u(x) \Delta_x G(x, x_0) dx = \int_{\Omega} \left(G(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} \right) dS_x$$

其中

1.

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) G(x, x_0) dx = \int_{\Omega} 0 \cdot G(x, x_0) dx = 0$$

2.

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta_x G(x, x_0) dx = \int_{\Omega} u(x) \delta(x - x_0) dx = u(x_0)$$

3.

$$\int_{\Omega} G(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial n_x} dS_x = \int_{\Omega} 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial n_x} dS_x = 0$$

4.

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} dS_x = \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} dS_x$$

全部带入, 得到

$$u(x_0) = \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} dS_x$$

以 x 代 x_0 , 以 x' 代 x , 得到

$$u(x) = - \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial n_{x'}} dS_{x'}$$

□

6.1.3 最终表示

定理 6.4

Ω, G 同前, 令

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial x'} dS_{x'} - \int_{\Omega} g(x, x') f(x') dx'$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Omega \end{cases}$$



Proof 由线性叠加原理立即得到.



6.2 波动方程的 Green 函数

我们考虑以下在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的非齐次波动方程初始-边界值问题 (IBVP):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x, t) & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{on } \Omega \\ u(x, t) = \phi(x, t) & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (\text{Dirichlet Boundary Condition})$$

其中 $c > 0$ 是波速, $f(x, t)$ 是源项, $g(x)$ 是初始位移, $h(x)$ 是初始速度, $\phi(x, t)$ 是边界上的位移.

定义 6.3 (波动方程的 Green 函数)

波动方程的 Green 函数 $G(x, t; x_0, t_0)$ 是满足以下条件的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \Delta G = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ G(x, t; x_0, t_0) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \\ G(x, t; x_0, t_0) = 0 & \text{for } t < t_0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(x, t; x_0, t_0) = 0 & \text{for } t < t_0 \end{cases}$$

其中:

- $x \in \Omega, t \in (0, T]$ 是观测点和时间。
- $x_0 \in \Omega, t_0 \in (0, T]$ 是点源的位置和发生时间。
- 最后两个条件 $G(x, t; x_0, t_0) = 0$ for $t < t_0$ 和 $\frac{\partial G}{\partial t}(x, t; x_0, t_0) = 0$ for $t < t_0$ 确保了因果性, 即波只在源出现之后才传播, 并且在源出现之前, 系统处于静止状态。



6.2.1 只有源项的贡献

定理 6.5

我们考虑以下齐次初始条件和齐次边界条件下的非齐次波动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_f = f(x, t) & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u_f(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_f}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_f(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

设 $G(x, t; x', t')$ 是波动方程的 Green 函数, 则

$$u_f(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; x', t') f(x', t') \, dx' \, dt'$$

是问题的解.



Proof 只验证源项, 由算子的线性,

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} - c^2 \Delta) u_f(x, t) &= \int_0^t \int_{\Omega} ((\partial_{tt} - c^2 \Delta) G) f \, dx' \, dt' \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \delta(x - x') \delta(t - t') f(x', t') \, dx' \, dt' \\ &= \int_0^t \delta(t - t') f(x, t') \, dt' \\ &= f(x, t) \end{aligned}$$



6.2.2 只有初始位移的贡献

定理 6.6

我们考虑以下齐次源项、齐次初始速度和齐次 Dirichlet 边界条件下的波动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_g = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u_g(x, 0) = g(x) & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_g}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_g(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

设 $G(x, t; x', t')$ 是波动方程的 Green 函数, 则

$$u_g(x, t) = - \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G}{\partial t'}(x, t; x', 0) dx'$$

是上述问题的解。



Proof 只验证初始位移项, 延迟 Green 函数在 $t = t'$ 处具有跳跃条件

$$\lim_{t \rightarrow t'} \frac{\partial G}{\partial t}(x, t; x', t') = \delta(x - x')$$

将极限过程反向, 由对称性

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{\partial G}{\partial t'}(x, t; x', t') = -\delta(x - x')$$

于是

$$\begin{aligned} u_g(x, 0) &= - \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G}{\partial t'}(x, 0; x', 0) dx' \\ &= - \int_{\Omega} g(x') \delta(x - x') dx' \\ &= g(x) \end{aligned}$$



6.2.3 只有初速度的贡献

定理 6.7

我们考虑以下齐次源项、齐次初始位移和齐次 Dirichlet 边界条件下的波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_h = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u_h(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{on } \Omega \\ u_h(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

设 $G(x, t; x', t')$ 是波动方程的 Green 函数, 则

$$u_h(x, t) = \int_{\Omega} h(x') G(x, t; x', 0) dx'$$

是上述问题的解。



Proof 只验证初始速度项, 延迟 Green 函数在 $t = t'$ 处具有跳跃条件

$$\lim_{t \rightarrow t'} \frac{\partial G}{\partial t}(x, t; x', t') = \delta(x - x')$$

$$\partial_t u_h(x, 0) = \int_{\Omega} h(x') \delta(x - x') \delta' dx' = h(x)$$

□

6.2.4 只有边界条件的贡献

定理 6.8

我们考虑以下齐次源项和齐次初始条件下的非齐次 Dirichlet 边界条件波动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{\phi}}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_{\phi} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u_{\phi}(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_{\phi}}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_{\phi}(x, t) = \phi(x, t) & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

设 $G(x, t; x', t')$ 是波动方程的 Green 函数，则

$$u_{\phi}(x, t) = -c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \phi(x', t') \frac{\partial G}{\partial \nu'}(x, t; x', t') dS(x') dt'$$

是上述问题的解。



6.2.5 最终表示

定理 6.9

我们考虑以下在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的非齐次波动方程初始-边界值问题 (IBVP)：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x, t) & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{on } \Omega \\ u(x, t) = \phi(x, t) & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \quad (\text{Dirichlet Boundary Condition}) \end{cases}$$

设 $G(x, t; x', t')$ 是波动方程的 Green 函数，则上述 IBVP 的解 $u(x, t)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; x', t') f(x', t') dx' dt' \\ & - \int_{\Omega} g(x') \frac{\partial G}{\partial t'}(x, t; x', 0) dx' \\ & + \int_{\Omega} h(x') G(x, t; x', 0) dx' \end{aligned}$$

$$-c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \phi(x', t') \frac{\partial G}{\partial \nu'}(x, t; x', t') dS(x') dt'$$

其中 $\frac{\partial G}{\partial \nu'}$ 表示 Green 函数对源空间变量 x' 在边界 $\partial\Omega$ 上的外法向导数。



6.2.6 波动方程的 Green 函数

定理 6.10

以下给出几个空间上波动方程的 Green 函数

1. 三维

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{4\pi r c^2} \delta\left(t - t_0 - \frac{r}{c}\right)$$

或者使用相对坐标表示

$$G(r, \tau) = \frac{1}{4\pi r c^2} \delta\left(\tau - \frac{r}{c}\right)$$

2. 二维

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2\pi c \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - r^2}} H\left(t - t_0 - \frac{r}{c}\right)$$

或者使用相对坐标表示

$$G(r, \tau) = \frac{H\left(\tau - \frac{r}{c}\right)}{2\pi c \sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}}$$

3. 一维

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2c} H(c(t - t_0) - |x - x_0|)$$

或者使用相对坐标表示

$$G(r, \tau) = \frac{1}{2c} H(c\tau - r)$$



6.3 几种空间 Green 函数

定理 6.11

$\Omega = \mathbb{R}^3$ 上的拉普拉斯算子的 Green 函数为

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi |x - x'|}$$

即上面的表达式在分布意义下满足

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), & x, x' \in \mathbb{R}^3 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x, x') = 0, & x' \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$



Proof 我们希望找到 $G(x, x')$, 使得

$$\Delta_x G(x, x') = \delta(x - x')$$

方便起见, 固定 x' , 令 $y = x - x'$, 则 $\Delta_x = \Delta_y$, 记 $G(y) = G(x, x')$, 只需要找到 $G(y)$, 使得

$$\Delta_y G(y) = \delta(y)$$

希望寻找径向的 G , 利用

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

在 $y \neq 0$ 处, 解方程

$$\frac{\partial G}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0$$

解得

$$G(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

接下来确定 C_1, C_2 , 任取测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, 我们需要

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

根据分布的导数的定义, 以及 Dirac 函数的筛选性, 上面写作

$$\langle G, \Delta \varphi \rangle = \varphi(0)$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(-\frac{C_1}{|x|} + C_2 \right) \Delta \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$$

由散度定理

$$\int_{\mathbb{R}^3} C_2 \Delta \varphi(x) \, dx = C_2 \int_{\partial \mathbb{R}^3} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dx = 0$$

其中最后的等号是因为 φ 的紧支性导致的无穷远处的消失性. 我们发现 C_2 不影响 ΔG 与 δ 的关系, 通常取 $C_2 = 0$. 对于

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi \, dx$$

在 $V_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$ 上, 使用第二格林公式, 得到

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi \, dx = \int_{V_\varepsilon} \varphi \Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) \, dx - \int_{\partial V_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|} \nabla \varphi - \varphi \nabla \left(\frac{1}{|x|} \right) \right) \cdot e_r \, dS$$

由于 φ 是测试函数, φ 和 $\nabla \varphi$ 在无穷远处消失, 并且 $\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$ 在 V_ε 上成立, 于是右侧积分化为

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|} \nabla \varphi + \varphi \nabla \left(\frac{1}{|x|} \right) \right) \cdot e_r \, dS \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \varphi \right) \, dS \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_0 + O(r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_0 r + O(r^2) \right) \right) \, dS \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2} \varphi(0) + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_0 + O(1) \right) \, dS \rightarrow -4\pi \varphi(0), (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

于是

$$C_1 (4\pi \varphi(0)) = \varphi(0)$$

得到

$$C_1 = \frac{1}{4\pi}$$

进而

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$$

即

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi |x - x'|}$$

□

第6章 练习

Problem 6.1

1. 定义 $\Psi(x) := \frac{1}{|x|} \exp(-|x|)$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$. 证明 $\Psi(x)$ 满足如下方程:

$$-\Delta \Psi(x) + \Psi(x) = 0, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3.$$

2. 并以此 (仿照调和方程的 Green 函数法) 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^3 \\ u|_{\partial \mathbb{R}_+^3} = g. \end{cases}$$

Proof

1. 令 $r = |x|$, 设 $G(r) = \Psi(x) = \frac{1}{r} \exp(-r)$, 则对于径向函数 $G(r)$, 其关于 x 的 Laplace 算子满足

$$\Delta G(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right)$$

计算即可.

2. 根据无限域上 Dirichlet 上的基本解, 我们已经知道在分布的意义下,

$$\Delta_x \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \right) = \delta(x)$$

利用 Laplace 算子的乘积法则

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \nabla v$$

那么

$$\begin{aligned} & \Delta_x \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \exp(-|x|) \right) \\ &= \Delta_x \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \right) \exp(-|x|) - \frac{1}{4\pi |x|} \Delta_x \exp(-|x|) + 2\nabla \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \right) \cdot \nabla (\exp(-|x|)) \\ &= \delta(x) \exp(-|x|) - \frac{1}{4\pi |x|} \left(1 - \frac{2}{|x|} \right) \exp(-|x|) + 2 \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3} \right) \exp(-|x|) \left(-\frac{x}{|x|} \right) \\ &= \delta(x) \exp(-|x|) - \frac{1}{4\pi |x|} \exp(-|x|) \end{aligned}$$

于是在分布的意义下

$$\Delta_x \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \exp(-|x|) \right) - \left(-\frac{1}{4\pi |x|} \exp(-|x|) \right) = \delta(x) \exp(-|x|) = \delta(x)$$

令 $G_0(x, x_0) = \frac{1}{4\pi |x - x_0|} \exp(-|x - x_0|)$, 则下述方程在分布的意义下成立

$$(-\Delta_x + I) G_0(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

接下来, 设 x' 是 x 关于 $\partial\mathbb{R}_+^3$ 的镜像对称点, 定义

$$G(x, x_0) = G_0(x, x_0) - G_0(x', x_0)$$

则由线性叠加原理, 下述方程在分布意义下成立

$$\begin{cases} (-\Delta_x + I) G(x, x_0) = \delta(x - x_0), & x \in \mathbb{R}_+^3 \\ G(x, x_0) = 0, & x \in \partial\mathbb{R}_+^3 \end{cases}$$

记 $L_x = (-\Delta_x + I)$ 是一个线性微分算子, 根据 Green 第二恒等式

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} u(x) \Delta_x G(x, x_0) - G(x, x_0) \Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\mathbb{R}_+^3} u \frac{\partial G}{\partial n_x} - G \frac{\partial u}{\partial n_x} \, dS$$

得到

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} G(x, x_0) L_x u(x) - u(x) L_x G(x, x_0) \, dx = \int_{\partial \mathbb{R}_+^3} u \frac{\partial G}{\partial n_x} - G \frac{\partial u}{\partial n_x} \, dS$$

若上面的 u 满足

$$\begin{cases} L_x u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^3 \\ u|_{\partial \mathbb{R}_+^3} = g \end{cases}$$

则上述积分式化为

$$-\int_{\mathbb{R}_+^3} u(x) \delta(x - x_0) \, dx = \int_{\partial \mathbb{R}_+^3} g(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n_x} \, dS$$

其中左侧为 $u(x_0)$. 依据此, 取

$$u(x_0) = -\int_{\partial \mathbb{R}_+^3} g(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n_x} \, dS$$

即

$$u(x) = -\int_{\partial \mathbb{R}_+^3} g(x_0) \frac{\partial G(x_0, x)}{\partial n_{x_0}} \, dS_{x_0}$$

带入回上述过程, 可知 $u(x)$ 满足边界条件

$$u|_{\partial \mathbb{R}_+^3} = g$$

此外, 由微分算子 L 的线性

$$L_x u = -\int_{\partial \mathbb{R}_+^3} g(x) \frac{\partial L_x G(x_0, x)}{\partial n_{x_0}} \, dS_{x_0} = -\int_{\partial \mathbb{R}_+^3} g(x) \cdot 0 = 0$$

这上述构造的 u 确实是方程的解.

最后, 计算 $\frac{\partial G(x_0, x)}{\partial n_{x_0}}$, 无非是 x_0 关于第三个分量的偏导数的相反数, 计算过程略去.

□

第 7 章 极值原理

7.1 调和函数的极值原理

定义 7.1 (调和函数)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的一个开集. 设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上成立, 则称 u 是 Ω 上的调和函数.



定理 7.1 (平均值性质)

若 u 是 Ω 上的调和函数, $B_r(x_0) \subseteq \Omega$. 则

1.

$$u(x_0) = \frac{1}{\text{vol}(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx$$

2.

$$u(x_0) = \frac{1}{\text{area}(\partial B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \, dS$$



7.2 调和函数的极值原理

定理 7.2 (弱极值原理)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 上的一个有界开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 则

1. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

2. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x)$$



定理 7.3 (强极值原理)

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的一个连通开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数. 若以下成立其一:

1. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最大值

2. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最小值.

, 则 u 在整个 Ω 上是常函数.



7.3 热方程的极值原理

本节中, 考虑区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上, 时间 $t \in (0, T]$ 内的热方程

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

定义 7.2 (抛物型边界)

对于热方程, 定义其抛物型边界 (Parabolic Boundary) $\partial_p \Omega_T$ 为

$$\partial_p \Omega_T = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$



定理 7.4 (弱最大值原理)

设 $u(x, t) \in C^2(\Omega_T) \cap C_0(\bar{\Omega}_T)$ 是在 Ω_T 上满足 $u_t - \Delta u = 0$ 的一个经典解. 那么 u 在 $\bar{\Omega}_T$ 上的最大值和最小值一定在抛物型边界 $\partial_p \Omega_T$ 上取得. 即:

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial_p \Omega_T} u(x, t)$$



定理 7.5 (强最大值原理)

设 $u(x, t) \in C^2(\Omega_T) \cap C_0(\bar{\Omega}_T)$ 是在 Ω_T 上满足 $u_t - \Delta u = 0$ 的一个经典解. 如果 u 在 Ω_T 的内部某个点 (x_0, t_0) 处达到 $\bar{\Omega}_T$ 上的最大值, 那么 u 在区域 $\bar{\Omega} \times [0, T]$ 上必须是常数.



第 7 章 练习

Problem 7.1

1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 记 $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. 考虑如下调和方程的 Dirichlet 外问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega' \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

利用调和方程的极值原理, 证明上述外问题的经典解是唯一的.

2. 并举例说明, 在没有 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ 的条件下经典解可以是不唯一的.

Proof

1. 设 u_1, u_2 是外问题的两个经典解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 是满足以下性质

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} w(x) = 0 \end{cases}$$

对于任意的 $R > 0$, 使得 $\bar{\Omega} \subseteq B_R(0)$, 定义 $D_R := B_R(0) \setminus \bar{\Omega}$, 则 D_R 是 \mathbb{R}^n 上的有界开集, 并且 $\partial D_R = \partial\Omega \cup \partial B_R(0)$.

由于 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} w(x) = 0$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R(\varepsilon) > 0$, 使得 $\bar{\Omega} \subseteq B_R(0)$ 且 $\sup_{x \in \partial B_R(0)} |w(x)| < \varepsilon$ 对于所有的 $R > R(\varepsilon)$ 成立. 又 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 由极值原理,

$$-\varepsilon < \min_{x \in D_R} w(x) \leq w(x) \leq \max_{x \in D_R} w(x) < \varepsilon, \quad \forall R > R(\varepsilon), \forall x \in \partial D_R,$$

对于 Ω' 中任意一点 x_0 , 可以选取足够大的 R (比如 $R = \max(R(\varepsilon), |x_0| + 1)$), 使得

$$|w(x_0)| \leq \varepsilon$$

由于 ε 是任取的, $w(x_0) = 0$. 这表明 $w \equiv 0$. 经典解唯一.

2. 考虑 \mathbb{R}^3 上的外问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \\ u|_{\partial B_1(0)} = 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

令

$$u(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

, 则

$$\Delta u = \Delta \left(-\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \left(-\frac{1}{r} \right) \right) = 0, \quad r > 0$$

于是

$$u(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

是外问题的一个解, 但是 $u \equiv 0$ 也是一个解, 这就说明了外问题不具有唯一性.

□