目录

第 1 章 波动方程的 Cauchy 问题 **1**

1.1 一维波动方程 Cauchy 问题的达朗贝尔公式 1

1.2 半无边界问题 4

1.3 高维波动方程的 Cauchy 问题 5

1.3.1 球面平均 6

第 1 章 波动方程的 Cauchy 问题

1.1 一维波动方程 Cauchy 问题的达朗贝尔公式

在上半空间 $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ 上考虑波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.1}$$

利用线性叠加原理将它一分为三, 考虑以下三个方程

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta u_1 = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u_1(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\ u_{1t}(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.2}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \Delta u_2 = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u_2(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\ u_{2t}(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.3}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a^2 \Delta u_3 = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u_3(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\ u_{3t}(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.4}$$

则

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

定理 1.1 (Duhamel 齐次化原理)

设 $u_2(\mathbf{x}, t) = M_\psi(\mathbf{x}, t)$ 是上面第二个方程的解, 其中 M_ψ 表示第二个以 ψ 为初值的解, 则 u_1,u_3 分别表为

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(\mathbf{x}, t) \tag{1.5}$$

$$u_3(\mathbf{x},t)=\int_0^t M_{f_\tau}(\mathbf{x},t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.6}$$

故问题化为解以下特殊的一维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

方程为双曲方程，特征方程为

$$-a^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+1=0$$

两个特征曲线为

$$v=x+at,\quad w=x-at$$

做变量替换

$$u(x,t)=U(v(x,t),w(x,t))$$

链式法则一通计算，方程化为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w\partial v}=0$$

故

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial w}=0,\quad \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial U}{\partial v}=0$$

存在 $g(w),f(v)$，使得

$$\frac{\partial U}{\partial w}=g(w),\quad U=\int g(w)\,\mathrm{d}w+C(v)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v}=f(v),\quad U=\int f(v)\,\mathrm{d}v+C(w)$$

通解形如

$$U(v,w)=F(v)+G(w)$$

从而

$$u(x,t)=U(v,w)=F(x+at)+G(x-at)$$

应用初始条件

$$u(x,0)=F(x)+G(x)=0$$

$$u_t(x,0)=aF'(x)-aG'(x)=\psi(x)$$

对后一个积分，得到

$$aF\left(x\right)-aG\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}\psi\left(x\right)\,\mathrm{d}x+C$$

得到

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2a}$$
$$G\left(x\right)=-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2a}$$

从而

$$F\left(x+at\right)=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2a}$$
$$G\left(x-at\right)=-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2a}$$

于是

$$u\left(x,t\right)=F\left(x+at\right)+G\left(x-at\right)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi$$

应用 duhhamel 齐次化，

$$u_1\left(x,t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi\right)=\frac{1}{2}\varphi\left(x+at\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(x-at\right)$$

$$\begin{aligned}u_3\left(x,t\right)&=\int_0^t M_{f_\tau}\left(x,t-\tau\right)\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2a}\int_0^t\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\xi,\tau\right)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

最终，通过 $u=u_1+u_2+u_3$，我们得到以下达朗贝尔公式

定理 1.2

一维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f\left(x,t\right), & x\in\mathbb{R},t>0\\u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), & x\in\mathbb{R}\\u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解为

$$u\left(x,t\right)=\frac{\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\,\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\xi,\tau\right)\,\mathrm{d}\xi$$

称为达朗贝尔公式.

1.2 半无边界问题

命题 1.1

考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $a > 0, \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$, 则

1. 若 φ, ψ 是关于 x 的奇函数, 则对于每个固定的 $t > 0, u(0,t) = 0$
2. 如果 φ, ψ 是关于 x 的偶函数, 则对于每个固定的 $t > 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0.$

Idea 利用达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

即可.

问题 1.1 解下列问题:

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), x > 0 \end{cases}$$

Proof

1. 将 φ,$\psi(x)$ 做奇延拓, 得到 $\Phi(x), \Psi(x)$, 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ U_t(x,0) = \Psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

解为

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

并且满足 $U(0,t)=0$, 故 U 在 $x>0,t>0$ 上是原问题的一个解, 故

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x>0,t<\frac{x}{a}\\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x>0,t>\frac{x}{a}\end{cases}$$

□

命题 1.2

考虑有齐次初值条件的非齐次方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

则

1. 如果对于每个固定的 $t,f(x,t)$ 是关于 x 的奇函数, 则 $u(0,t)=0$,
2. 如果对于每个固定的 $t,f(x,t)$ 是关于 x 的偶函数, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$

Idea 利用达朗贝尔公式公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$$

1.3 高维波动方程的 Cauchy 问题

考虑初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=0, & (\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^N\times(0,\infty)\\ u(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N\\ u_t(\mathbf{x},0)=\psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N\end{cases}$$

的 C^m 解, 其中 $N\geq 2$, $m\geq 2$.

1.3.1 球面平均

定义 1.1

设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t > 0, r > 0$, 定义

1. 一点处的球面平均函数:
$$U(\mathbf{x}; r, t) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t)\, \mathrm{d}S(\mathbf{y})$$
为 $u(\cdot, t)$ 在球面 $\partial B(\mathbf{x}, r)$ 上的平均, 其中 ω_N 是 N 维单位球的体积.

2. 类似地定义
$$\Phi(\mathbf{x}; r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \varphi(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S(\mathbf{y})$$
$$\Psi(\mathbf{x}; r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \psi(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S(\mathbf{y})$$

♣

定理 1.3 (Euler-Possion-Darboux)

对于固定的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, 对于高维的 Cauchy 问题, 若 $u \in C^m\left(\mathbb{R}^N \times [0, \infty)\right)$ 是一个解, 则按 u 定义的 $U \in C^m\left(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, \infty)\right)$, 并且

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{N-1}{r} U_r = 0, & (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ U(r, 0) = \Phi, & r \in \mathbb{R}_+ \\ U_t(r, 0) = \Psi, & r \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{1.7}$$

♡

Proof 对 $U(\mathbf{x}; r, t)$ 积分下关于 r 求导, 利用格林公式, 得到
$$U_r(\mathbf{x}; r, t) = \frac{r}{N} \cdot \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$
球面平均趋于 0:
$$\lim_{r \to 0^+} U_r(\mathbf{x}; r, t) = 0$$
对于 U_r 求导, 一通计算得到
$$\lim_{r \to 0^+} U_{rr}(\mathbf{x}; r, t) = \frac{1}{N} \Delta u(\mathbf{x}, t)$$
类似地计算 U_{rrr} 等等, 可以验证 $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty))$

另一方面, 由上面计算的 U_r 以及方程 $u_{tt} = \Delta u$, 得到
$$U_r(\mathbf{x}; r, t) = \frac{r}{N} \cdot \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u_{tt}(\mathbf{y}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$
$$r^{N-1} U_r = \frac{1}{N\omega_N} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u_{tt}\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

两边对 r 求导, 得到

$$\begin{aligned}\left(r^{N-1}U_r\right)_r &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u_{tt}\,\mathrm{d}S\\ &= r^{N-1}U_{tt}\end{aligned}$$

□

接下来化 Euler-Possion-Darboux 方程为通常的一维波动方程.
首先, 令 $N=3$,$U\in C^2\left(\mathbb{R}^3\times[0,\infty]\right)$ 是初值问题的解, 令

$$\overline{U}=rU$$

$$\overline{\Phi}=r\Phi$$

$$\overline{\Psi}=r\Psi$$

则

定理 1.4

$\overline{U}$ 满足方程

$$\begin{cases}\overline{U}_{tt}-\overline{U}_{rr}=0, & (r,t)\in\mathbb{R}^+\times(0,\infty)\\ \overline{U}=\overline{\Phi},\overline{U}_t=\overline{\Psi}, & (r,t)\in\mathbb{R}^+\times\{t=0\}\\ \overline{U}=0, & (r,t)\in\{r=0\}\times(0,\infty)\end{cases} \tag{1.8}$$

♡

Proof

$$\begin{aligned}\overline{U}_{tt} &= rU_{tt}=r\left(U_{rr}+\frac{2}{r}U_r\right)\\ &= rU_{rr}+2U_r=\left(U+rU_r\right)_r\\ &= \left(\overline{U}_r\right)_r=\overline{U}_{rr}\end{aligned}$$

□

定理 1.5 (Kirchhoff 公式)

三维波动方程的初值问题的解为

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sigma\left(\partial B_r\right)}\int_{\partial B(\mathbf{x},t)}\left[t\psi(\mathbf{y})+\varphi(\mathbf{y})+\nabla\varphi(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right]\mathrm{d}S(\mathbf{y}),\quad x\in\mathbb{R}^3,t>0$$

♡

Proof 利用达朗贝尔公式, 当 $0\le r\le t$ 时

$$\overline{U(\mathbf{x};r,t)}=\frac{1}{2}\left[\overline{\Phi}(r+t)-\overline{\Phi}(r-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t}\overline{\Psi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

由

$$u(\mathbf{x},t)=\lim_{r\to 0^+}u(\mathbf{x};r,t)$$

可得

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x},t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\overline{U}(\mathbf{x};r,t)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \left[\frac{\overline{\Phi}(r+t)-\overline{\Phi}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \overline{\Psi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \right] \\
&= \overline{\Phi}'(t) + \overline{\Psi}(t)
\end{aligned}
$$

带入, 并利用

$$
\frac{1}{\sigma(\partial B_t)} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma(B_1)} \int_{\partial B(0,1)} \varphi(\mathbf{x}+tz)\,\mathrm{d}S(\mathbf{z})
$$

故

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sigma(\partial_t)} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}) \right) = \frac{1}{\sigma(\partial B_t)} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \nabla\varphi(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t}\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})
$$

□

定理 1.6 (二维波动方程 Cauchy 问题的 Possion 公式)

$$
u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma(\partial B_t)} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \frac{t}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} \left[\varphi(\mathbf{y}) + t\psi(\mathbf{y}) + D\varphi(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right] \mathrm{d}\mathbf{y}
$$

♡