目录

第 5 章　Taylor 级数

内容提要

- 局部一致收敛 $\iff$ 紧一致收敛
- 局部一致收敛解析函数列满足

1. 解析函数列的极限解析
2. 导数列一致收敛到极限函数导数

定义 5.1

1. 称函数 $f:\mathbb{Z}_{\geq 1}\to\mathbb{C}$ 或 $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ 为一个复序列. 记 $z_k:=f(k)$.
2. 称形式和 $z_1+z_2+z_3+\cdots$, 或 $z_{-n}+z_{-n-1}+\cdots+z_{-1}+z_0+z_1+\cdots$ 为一个复级数. ♣

Remark 给定序列 $(f_k)_{k=1}$, 容易给出一个级数 $f_1+(f_2-f_1)+(f_3-f_2)+\cdots$. 反过来, 给定级数 $z_1+z_2+\cdots+z_n$, 容易得到序列 $z_1,z_2,\cdots$

命题 5.1

1. 设 $(z_k)_k=(a_k+ib_k)_k$, 则 $z_k\to a+bi$, 当且仅当 $a_k\to a$,$b_k\to b$.
2. Cauchy 准则: $\sum_{k=1}^{\infty}z_k$ 收敛, 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,s.t. $\forall n\geq N,p\geq 1$, 都有
$$|z_{n+1}+\cdots+z_{n+p}|<\varepsilon$$
3. 绝对收敛:$\sum_{k=1}^{\infty}z_k$ 绝对收敛, 当且仅当 $(|a_k|)_k,(|b_k|)_k$ 均绝对收敛.
4. Cauchy 乘积: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n',\sum_{n=1}^{\infty}z_n''$ 分别绝对收敛到 σ',σ''. 则
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i+j=n}z_i'z_j''$$
绝对收敛到 σ',σ''. [a]

[a]事实上, 一个绝对收敛即可.

♠

定义 5.2 (函数项级数)

设 $E\subseteq\mathbb{C}$ 是一个子集, 设 $\forall n\geq 1$, $f_n:E\to\mathbb{C}$ 是函数. 若 $\forall z_0\in E$, $f_n(z_0)\to f(z_0)$, $n\to\infty$. 则称 $(f_n)_{n\geq 1}$ 是 (逐点) 收敛到 $f:E\to C$ 的. 此时 f 为极限函数或和函数. ♣

定义 5.3

设 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$ 是 E 上的函数项级数. 若 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon,E)>0$, 使得对于所有的 $n\geq N$, 以及 $z\in E$, 均与
$$\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon$$

则称 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 一致收敛到 f.

定理 5.1 (Cauchy 一致收敛原理)

$E, \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 同上, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 在 E 上一致收敛, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得 $\forall n \geq N, p \geq 1$, 都有

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

对于所有的 n 成立.

定理 5.2 (Weierstrass 判别法)

设 $f_k : E \to \mathbb{C}$ 是函数, $\forall z \in E$, 都有 $|f_k(z)| \leq a_k$. 若非负项数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 在 E 上一致收敛.

Example 5.1 考虑

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kz}{k^2}$$

若 $E = R$, 容易看出级数收敛.
当 $E = \mathbb{C}$ 时, 是否仍一致收敛?

定理 5.3 (一致收敛保持连续性)

设 $f_k : E \to \mathbb{C}\ \forall k \geq 1$ 均连续, 且 $\sum_{k=1}^{n} f_k$ 在 E 上一致收敛到 f, 则 $f \in C(E)$.

定理 5.4 (级数的逐项积分)

设 $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ 是分段光滑的 Jordan 曲线. $\forall k \geq 1$, $f_k : \gamma \to \mathbb{C}$ 是连续函数[a]. $\sum_{k=1}^{n} f_k$ 在 γ 上局部一致收敛到 f. 则

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

[a]保证积分存在

Idea 注意到曲线像是紧集, 故 $\sum f_k$ 在其上一致收敛, 故我们有误差的一致性. 利用曲线弧长的上界估计, 给出积分列的一致逼近.

定义 5.4

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是区域. $f_k : D \to \mathbb{C}. \forall k \geq 1$. 若 $\forall K \subseteq D$ 是紧的, 都有 $\sum_{k=1}^{n} f_k$ 在 K 上一致收敛到 f, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 在 D 上是紧一致收敛到 f 的 (内闭一致收敛).

定理 5.5

D, f_n 同上. $f_n \in \mathcal{H}(D), \forall n \geq 1$. 且 $\sum_{n=1}^{m} f_n$ 在 D 上紧一致收敛到 f，则 $f \in \mathcal{H}(D)$, 且 $\forall k \geq 1$, 都有

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

且 $\sum_{n=1}^{m} f_n^{(k)}$ 在 D 上紧一致收敛到 $f^{(k)}$.

♡

Proof $\forall z_0 \in D$, 取 K 为 z_0 的一个紧邻域, 则 $\sum f_n$ 在 K 上一致收敛到 f. 故 $f \in C(K)$, 进而 $f \in C(D)$.

$\forall z_0 \in D$, 取 $r > 0$, 使得 $\overline{U} := \overline{U}(z_0, r) \subseteq D$. 任取 $\gamma \subseteq U := U(z_0, t)$ 是分段光滑的 Jordan 闭合曲线. 由于 $\sum f_n$ 在 $\overline{U}$ 上一致收敛到 f, 进而在 γ 上亦然, 我们要

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

由 Morera 定理, $f \in \mathcal{H}(U)$, 进而 $f \in \mathcal{H}(D)$.

任取紧集 K, 它含于更大的紧集 $\overline{G}$, 其中 G 是开集. 由于开集内部每一点都含于一个与边界有正距离的圆盘, 利用紧性, 只需要说明在任一点的落在 G 的紧圆盘上, 一致收敛性成立即可. 我们有 Cauchy 不等式

$$\sup\left\{\left|S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right|\right\} \leq C \sup\left\{\left|S_n(z) - f(z)\right|\right\}$$

在任意一个合适圆盘内成立, 其中 C 是与 z 无关的常数. 由 Cauchy 准则, 得到一致收敛性. □

阅读 P61-68

预习 P68-76

作业 P87 2.3.5.

5.1 幂级数

内容提要

- 收敛半径的存在性

定义 5.5

称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n. \quad z_0 \in \mathbb{C}, \alpha_n \in \mathbb{C} \tag{*}$$

为一个幂级数. ♣

定理 5.6 (Abel 第一定理)

若 (*) 在 $z_1\ (\neq z_0)$ 处收敛, 则幂级数在 $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<|z_1-z_0|\}$ 上绝对收敛. ♡

Proof 通项 $\to 0$, 故存在 $M>0$, 使得

$$|\alpha_n\left(z_1-z_0\right)^n|<M,\quad \forall n\geq 0$$

令

$$k:=\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\left(z_1-z_0\right)^n\right)\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$$

$$\text{通项模长最终}\leq Mk^n$$

由比较判别法, 绝对收敛.

□

定理 5.7

若下列成立其一

1. $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$
2. $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}$
3. $l=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}$

则称 $R=\frac{1}{l}$ 为幂级数的收敛半径. 约定 $l=0$ 时,$R=+\infty$, $l=+\infty$ 时, $R=0$.

此时, $|z-z_0|>R$ 时, 幂级数发散. $|z-z_0|<R$ 时, 幂级数收敛. ♡

引理 5.1

若 $K_1,K_2\subseteq\mathbb{R}^n$ 是两个闭集, 且至少其中一个有界, 且 $K_1\cap K_2=\varnothing$, 则

$$\operatorname{dist}\left(K_1,K_2\right)>0$$ ♡

定理 5.8

设 $R>0$, 则 $\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\left(z-z_0\right)^n$ 在 $U\left(z_0,R\right)$ 上紧一致收敛到 $f\left(z\right)$. 且和函数 $f\left(z\right)\in\mathcal{H}\left(U\left(z_0,R\right)\right)$, 且对于任意的 $k\geq 1$, 有

$$f^{(k)}\left(z\right)=k!\alpha_k+\frac{(k+1)!}{1!}\alpha_{k+1}\left(z-z_0\right)+\frac{(k+2)!}{2!}\alpha_{k+2}\left(z-z_0\right)^2+\cdots$$

特别地,

$$\alpha_k=\frac{f^{(k)}\left(z_0\right)}{k!}$$ ♡

阅读 67-74

预习 75-81

作业第四节 6,7,9,11

5.2 全纯函数的 Taylor 展开

定理 5.9

若 $f \in \mathcal{H}(B(z_0, R))$, 则 f 可以在 $B(z_0, R)$ 上展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{\neq 0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R)$$

定理 5.10

f 在 z_0 处全纯, 当且仅当 f 在 z_0 的邻域内可以展开成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z - z_0)^n$$

定义 5.6

设 f 在 z_0 处全纯且不恒为零, 如果

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \cdots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

则称 z_0 为 f 的 m 阶零点.

定理 5.11

z_0 为 f 的 m 阶零点, 当且仅当 f 在 z_0 的邻域内表为

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

其中 g 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0) \neq 0$

Proof 若 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \cdots \right) \\ &= (z-z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

其中 $g(z)$ 为括号中的幂级数. 它在 z_0 处全纯, 且

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

反之, 若存在 g 使得 $f = (z-z_0)^m g(z)$, 显然 f 在 z_0 处全纯, 且直接计算容易得到 z_0 是 f 的 m 阶零点.

□

命题 5.2

设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的区域, $f \in \mathcal{H}(D)$, 如果 f 在 D 中的小圆盘 $B(z_0, \varepsilon)$ 上恒为零, 则 f 在 D 上恒为零.

♠

Proof 一方面, 全纯函数的泰勒系数在一个邻域内相等, 泰勒系数恒为零是一个开的条件. 另一方面, 任意阶导数的连续性给出泰勒系数不全为零是闭的条件. 又泰勒系数恒为零的点存在, 故 D 上 f 的泰勒系数恒为零.

□

命题 5.3

设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的区域, $f \in \mathcal{H}(D)$,$f(z)$ 不恒为零. 则 f 在 D 中的零点是孤立的. 即若 z_0 为 f 的零点, 则必存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$, 使得 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 零点只有 z_0.

♠

Proof f 在 z_0 的邻域上不恒为零. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则 f 在 z_0 的一个邻域上表为 $f(z) = (z-z_0)^m f(z)$, $g(z_0) \neq 0$, 故 g 在 z_0 的一个邻域 $B(z_0, \varepsilon)$ 上恒不为零, 从而 f 在其上没有 z_0 以外的零点.

□

定理 5.12 (解析函数的唯一性)

设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的区域, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$, 若存在 D 上的点列 $\{z_n\}$, 使得 $f_1(z_n) = f_2(z_n), \neq 1, \cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in D$, 则在 D 上 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

♡

Proof 令 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 则 $g(z_n) = 0, n = 1, \cdots,$. 由于 $g \in \mathcal{H}(D)$, 故 $g(a) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = 0$. 但是 $\{z_n\}$ 也都是 g 的零点, 这表明 g 的零点不孤立, 只能有 $g(z) \equiv 0$.

□

命题 5.4 (常用展开)

1.
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

2.
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

3.
$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

4.
$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

Proof 利用幂级数的全纯性, 泰勒级数在实轴上的一致性, 解析函数的唯一性, 可以将实函数的泰勒展开公式推广到幂级数在复平面的收敛域上.

□

阅读 73-77

预习 78-84

作业 88 页 8,10
