第 1 章　测地坐标

1.1 测地平行坐标

定义 1.1

设 S 是正则曲面, $\gamma(v)$ 是 S 上的一条测地线, $v \in I=(a, b)$. 对于任意的 $v \in I$, 令:

1. $n(v)$ 是 S 在 $\gamma(v)$ 处的单位法向量.
2. $w(v)=c^{\prime}(v) \times n(v)$ 是切平面上与 $c^{\prime}(v)$ 正交的向量.

则存在 $\delta>0$, 使得下面的映射是坐标空间到 S 上一开子集的微分同胚

$$\sigma(u, v)=\exp _{\gamma(v)}(u \cdot w(v))$$

坐标空间为

$$\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^{2}:-\delta<u<\delta, v \in I\right\}$$

♣

1.2 测地极坐标

定义 1.2

设 S 是正则曲面, $p \in S$. 令 $\varepsilon>0$ 是 p 的一个法邻域的半径. $\left\{e_{1}, e_{2}\right\}$ 是 $T_{p} S$ 的一组正交基. 定义 p 处的法极坐标为

$$\sigma(r, \theta)=\exp _{p}\left((r \cos \theta) e_{1}+(r \sin \theta) e_{2}\right)$$

坐标空间为

$$\left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^{2}: 0<r<\varepsilon, 0<\theta<2 \pi\right\}$$

♣

引理 1.1 (Gauss 引理)

设 S 是正则曲面, $p \in S$,p 处法极坐标的局部第一基本形式形如

$$\mathcal{F}_{1}=\mathrm{d} r^{2}+G \,\mathrm{d} \theta^{2}$$

♡

Proof 固定 $0<\theta<2 \pi$. 记 $\gamma_{v}(t)$ 为 p 处以 $v:=\cos \theta_{0} e_{1}+\sin \theta e_{2}$ 为初速度的弧长参数测地线, 则

$$\gamma_{v}(r)=\gamma_{r v}(1)=\exp _{p}(r v)=\sigma\left(r, \theta_{0}\right)$$

则 $\sigma_r(r,\theta)=\gamma_v'(r)$,

$$\langle\sigma_r,\sigma_r\rangle=\langle\gamma_v',\gamma_v'\rangle=1$$

这表明 $E=1$.

$$\begin{aligned}F_r&=\frac{\partial}{\partial r}\langle\sigma_\theta,\sigma_r\rangle\\&=\langle\sigma_{\theta r},\sigma_r\rangle+\langle\sigma_\theta,\sigma_{rr}\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_{rr}=\gamma_v''=0$$

于是

$$F_r=\langle\sigma_{\theta r},\sigma_r\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle\sigma_r,\sigma_r\rangle=\frac{1}{2}E_\theta=0$$

依旧固定 $0<\theta<2\pi$, 则

$$\lim_{r\to0}\sigma_\theta(r,\theta)=0$$

故

$$\lim_{r\to0}F=\lim_{r\to0}\langle\sigma_r,\sigma_\theta\rangle=0$$

于是对于所有的 r,θ, $F(r,\theta)=0$.

□

定理 1.1 ($G(r,\theta)$ 的几何意义)

设 S 是正则曲面, $p\in S$, p 处极坐标的度量为

$$g(r,\theta)=\mathrm{d}r^2+G(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

则

1. 测地圆 $r=r_0$ 的弧长形式为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

进而测地圆的周长为

$$L(r_0)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r_0,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

2. 面积元形式 $\mathrm{d}A$ 为

$$\mathrm{d}A=\sqrt{G(r,\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

♡

Proof

1. 设

$$\sigma(r,\theta)=\exp_p((r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)e_2)$$

是测地极坐标映射. 则

$$\gamma(\theta):=\sigma(r_0,\theta)$$

构成 $r=r_0$ 的一个坐标表示.

$$\gamma'(\theta)=\partial_\theta|_{(r_0,\theta)}$$

于是

$$\mathrm{d}s=|\gamma'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{\left\langle \partial_\theta|_{(r_0,\theta)},\partial_\theta|_{(r_0,\theta)}\right\rangle}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{G(r_0,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

2. 体积形式为

$$\mathrm{d}V=\sqrt{\det g_{ij}}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}x^n$$

面积形式即为 2 维的体积形式, 这里 $\det g_{ij}=G$

□

定理 1.2 (G 的极限行为)

设 S 是正则曲面, $p\in S$, p 处极坐标的度量为

$$g(r,\theta)=\mathrm{d}r^2+G(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

则

1. $$\lim_{r\to 0}G(r,\theta)=0$$

2. $$\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{G(r,\theta)}}{r}=1$$

3. $$\sqrt{G(r,\theta)}=r-\frac{K(p)}{6}r^3+O(r^4)$$

   特别地, 当 $K\equiv 1$ 时, $\sqrt{G}=\sin(r)$, 是单位球面的情况.

♡

Proof

1. 参数映射是

$$\sigma(r,\theta)=\exp_p((r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)e_2)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta} &= \partial_\theta\sigma\left(r,\theta\right)\\ &= \left(\mathrm{d}\exp\right)_{ru(\theta)}\left(-r\sin\theta e_1 + r\cos\theta e_2\right)\end{aligned}$$

其中 $u\left(\theta\right) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, 则

$$\lim_{r\to 0}\left(\mathrm{d}\exp\right)_{ru(\theta)} = \left(\mathrm{d}\exp\right)_0 = \mathrm{Id}_{T_pS}$$

从而

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial\theta} = \mathrm{Id}_{T_pS}\lim_{r\to 0}\left(-r\sin\theta e_1 + r\cos\theta e_2\right) = 0$$

这表明 $\lim_{r\to 0} G\left(r,\theta\right) = 0$

2. 直接证明 3. 正交标价的方法给出

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

由于 $\sqrt{G}$ 的展开式只有奇数次幂, 设 $\sqrt{G} = Ar + Br^3 + Cr^5 + O\left(r^7\right)$ 带入计算即可.

□

1.3 常曲率度量的极分解

引理 1.2

方程

$$u''\left(t\right) + cu\left(t\right) = 0, \quad u\left(0\right) = 0$$

的解空间是函数

$$s_c\left(t\right) = \begin{cases} t, & c = 0\\ R\sin\frac{t}{R}, & c = \frac{1}{R^2} > 0\\ R\sinh\frac{t}{R}, & c = -\frac{1}{R^2} < 0\end{cases}$$

张成的一维线性子空间.

命题 1.1 (常曲率空间的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是有常曲率 c 的 Riemann 流形, γ 是 M 上的单位速度测地线. 则沿 γ 法向, 且在 $t=0$ 处消失的 Jacobi 场具有以下形式:

$$J\left(t\right) = ks_c\left(t\right)E\left(t\right)$$

其中 E 是任意沿 γ 平行的单位法向量场, k 是任意常数. 这样的 Jacobi 场的初值是

$$D_t J(0) = kE(0)$$

范数为

$$|J(t)| = |s_c(t)|\,|D_t J(0)|$$

定义 1.3

令 $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ 是径向投影

$$\pi(x) = \frac{x}{|x|}$$

定义 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的一个对称 2-张量

$$\hat{g} = \pi^* \mathring{g}$$

其中 $\mathring{g}$ 是半径为 1 的 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的圆度量.

Idea $\hat{g}$ 只保留角度信息.

引理 1.3 (欧氏度量的极分解)

在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上, 欧式度量 $\bar{g}$ 分解为

$$\bar{g} = \mathrm{d}r^2 + r^2 \hat{g}$$

其中 $r(x) = |x|$ 是到原点的欧氏距离.

Proof

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \Phi(\rho, \omega) = \rho\omega$$

给出 warped 积空间 $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1}$ 到欧氏子空间 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的等距同构. $\Phi^{-1}(x) = (r(x), \pi(x))$, 于是

$$\bar{g} = \left(\Phi^{-1}\right)^* \left(\mathrm{d}\rho^2 \oplus \rho^2 \mathring{g}\right) = \mathrm{d}r^2 + r^2 \hat{g}$$

□

定理 1.3 (法坐标上的常曲率度量)

设 (M, g) 是具有常值截面曲率的黎曼流形. 给定 $p \in M$, 令 (x^i) 是 p 的法邻域 U 上的一个法坐标. r 是 U 上的径向距离函数. $\hat{g}$ 是上面定义的对称 2-张量. 则在

$U\setminus\{p\}$ 上，度量 g 可以进行考虑曲率修正的极分解

$$g = \mathrm{d}r^2 + s_c(r)^2\,\hat{g}$$

♡

Proof 令 g_c 是右侧形式的度量，$\bar{g}$ 是欧式度量. g, $\bar{g}$ 和 g_c 均在 ∂_r 上产生相同的作用. 因此只需要证明对于每个对于任意的水平集 $r=b$, 以及任意相切于该水平集的切向量 w, 都有 $g(w,w) = g_c(w,w)$. 首先根据定义

$$g_c(w,w) = s_c\left(r^2\right)\hat{g}(w,w) = \frac{s_c(b)^2}{b^2}\bar{g}(w,w)$$

令 $q\in U\setminus\{p\}$,$w\in T_pM$,w 相切于包含了 q 的 r-水平集. $b = d_g(p,q)$. 由于 g 只有在原点是我们熟知的，与 $\bar{g}$ 相等. 上面的等式告诉我们联系 g 和 g_c 相当于联系 $\bar{g}$ 和 g, 我们通过沿 p 到 q 的径向测地线的 Jacobi 场将 g 在 p 的取值和 q 的取值联系起来. 设 $\gamma:[0,b]\to U$ 是单位参数化的 p 到 q 的径向测地线. 令 $J\in\mathfrak{X}(\gamma)$ 是沿 γ 的测地线，满足

$$J(t) = \frac{t}{b}w^i\,\partial_i|_{\gamma(t)}$$

. 则 $D_tJ(0) = \left(\frac{1}{b}\right)w^i\,\partial_i|_p$. $J(0)=0, J(b)=w$ 在两点处与 γ' 正交，从而是一个法向量场. 于是有范数的关系

$$\begin{aligned}|w|_g^2 &= |J(b)|_g^2 = s_c(b)^2\,|D_tJ(0)|_g^2\\ &= s_c(b)^2\,\frac{1}{b^2}\left|w^i\,\partial_i|_p\right|_g^2 = s_c(b)^2\,\frac{1}{b^2}\,|w|_{\bar{g}}^2 = |w|_{g_c}^2\end{aligned}$$

□

推论 1.1 (常曲率度量的局部唯一性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是有着相同维数，且具有相同常曲率 c 的 Riemann 流形. 则对于每个 $p\in M$,$\tilde{p}\in\tilde{M}$, 存在 p 的邻域 U 和 $\tilde{p}$ 的邻域 $\tilde{U}$, 使得它们之间存在等距同构 $\varphi: U\to\tilde{U}$.

♡

Proof 常曲率度量的这种与法坐标选取无关的显式的一致表达，就能给出一个坐标的等同就是一个等距同构. 即令 $\psi: U\to B_\varepsilon(0)\subseteq\mathbb{R}^n$ 和 $\tilde{\psi}:\tilde{U}\to B_\varepsilon(0)\subseteq\mathbb{R}^n$ 是法坐标映射，$\tilde{\Psi}^{-1}\circ\Psi$ 就是所需的等距同构: 原点以外形式上一致，原点上都是单位阵.

□