# 第 1 章　拓扑空间

## 1.1 和空间与积空间

**定义 1.1 (和空间)**

设 $(X_j|j \in J)$ 是一族非空且两两无交的拓扑空间，则集合

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq \coprod X_j : \text{对于任意的} j \in J, U \cap X_j \subseteq X_j \text{是开集} \right\}$$

构成无交并集 $\coprod X_j$ 上的一个拓扑。称 $(\coprod X_j, \mathcal{O})$ 为 $X_j$ 的拓扑和。♣

## 1.2 连续映射

**定义 1.2 (嵌入)**

设 $X, Y$ 是拓扑空间，$f : X \to Y$ 是连续映射。若 $X \simeq f(X)$，则称 $f$ 是一个拓扑嵌入。♣

**Example 1.1** 设 $X, Y$ 是拓扑空间，$X \times Y$ 是积空间。对于任意的 $y \in Y$，定义映射

$$i_y : X \to X \times Y$$

$$x \mapsto (x, y)$$

则 $i_y$ 是嵌入映射。

**Proof**

$i_y(X) = X \times \{y\}$，$X$ 到 $X \times \{y\}$ 之间存在连续的双射 $f : x \mapsto (x, y)$。这是因为 $X \times \{y\}$ 上的开集形如 $U \cap (X \times \{y\})$，其中 $U$ 是 $X \times Y$ 上的开集，$U \cap (X \times \{y\})$ 写作 $V \times \{y\}$，其中 $V$ 是 $X$ 上开集的并，进而也是开集。则 $f^{-1}(V \times \{y\}) = V$ 是开集，从而 $f$ 是连续映射。又显然 $f$ 是开映射，故 $f$ 是拓扑空间之间的同构，这表明 $i_y$ 是嵌入。

□

## 1.3 商空间

**定义 1.3**

令 $X$ 是拓扑空间，$X' = \{X_j : j \in J\}$ 是 $X$ 的一个分划。自然映射 $v : X \to X'$ 被定义为 $v(x) = X_j$，其中 $X_j$ 是（唯一的）包含了 $x$ 的分划中的子集。那么 $X'$ 上的商拓扑是指全体 $U'$ 组成的集族，其中 $U'$ 是 $X'$ 的子集，它使得 $v^{-1}(U')$ 是 $X$ 中的开集。♣

**Remark** $X$ 上的一个等价关系确定了 $X$ 上的一个分划，我们记相应的商空间为 $X/\sim$，其中 $\sim$ 表示所说的等价关系。

**命题 1.1 (泛性质)**

设 $h: X \to Y$ 是映射，$\ker h$ 是 $X$ 上的一个等价关系，使得 $x \sim x'$ 当且仅当 $h(x) = h(x')$。相应的商空间记作 $X/\ker\varphi$。那么存在唯一的映射 $\varphi : X/\ker\varphi \to Y$ 使得下图交换。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "v"'] & & Y \\
& X/\ker\varphi \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

**Proof** 唯一的取法是 $\varphi([x]) = h(x)$，显然该映射良定义，且是单的。

□

### 1.3.1 等化

**定义 1.4 (等化)**

称一个连续的满射 $f : X \to Y$ 是一个等化，若 $U$ 是 $Y$ 中的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的开集。

**Example 1.2**

1. 给定 $X$ 上的等价关系 $\sim$，$X/\sim$ 给出一个商拓扑。自然映射 $v : X \to X/\sim$ 是一个等化。
2. 若 $f : X \to Y$ 是一个连续的满射，且 $f$ 是开（闭）的，那么 $f$ 是一个等化。

   **Proof** 若 $f$ 满足条件，任取 $Y$ 中的开集 $U$，$f$ 的连续性给出 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的开集；任取 $Y$ 中的集合 $V$，使得 $f^{-1}(V)$ 是 $X$ 中的开集，那么 $f$ 是满射给出 $V = f\left(f^{-1}(V)\right)$，再由 $f$ 是开映射可知，$V$ 是一个开集。(若 $f$ 是闭映射，$Y \backslash V = f\left(f^{-1}(Y \backslash V)\right) = f\left(X \backslash f^{-1}(V)\right)$ 是一个闭集)

   □

3. 若 $f : X \to Y$ 是具有截面的连续映射，那么 $f$ 是一个等化。

   **Proof** 只需注意到有截面的连续映射一定是满的。

   □

**定理 1.1**

设 $f : X \to Y$ 是一个连续的满射。那么 $f$ 是一个等化，当且仅当对于任意的空间 $Z$，以

及映射 $g:Y\to Z$，有 $g$ 是连续的当且仅当 $gf$ 是连续的。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "gf"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

♡

**Idea** $gf$ 是否连续标志着“商空间”$Y$ 中一类特定形式的集合（$g^{-1}(V)$）是否是开的。目标通过条件给出 $f$ 是一个等化时，若想要充分地利用条件，需要找出使得条件成立的最苛刻的空间（使得 $gf$ 连续推出 $g$ 连续变得非常困难），而往往越精细的空间里，映射越难连续，并且空间的选取应该无关于 $g$，同时使得 $f$ 连续以避免对 $g$ 的性质产生影响，综合种种考量我们取 $Z$ 为使得 $f$ 连续的最精细的空间，即商空间。

$g$ 几乎扮演了同胚映射的作用，因此我们希望 $Z$ 取到与 $Y$ 同胚的空间。从结果上而言，$Z$ 应该是商空间 $X/\ker\varphi$。

**Proof** 若 $f$ 是一个等化，任取 $Z$ 中的开集 $V$，那么由 $fg$ 的连续性可知 $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)=(fg)^{-1}(V)$ 是开集。$f$ 是一个等化给出了 $g^{-1}(V)$ 是开集，这就表明 $g$ 是一个连续映射。反之，若 $g$ 是连续映射，那么 $gf$ 作为连续映射的复合当然是连续的。

现在设条件成立，取 $Z=X/\ker f$，$v:X\to X/\ker f$ 是自然映射，由商的泛性质知，存在唯一的单射 $\varphi:Y\to X/\ker f$ 使得 $\varphi\circ v=f$，由 $f$ 是满射知 $\varphi$ 也是满的，进而是双射。考虑图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "f"'] & & X/\ker f \\ & Y \arrow[ur, "\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

由条件，$v=\varphi^{-1}f$ 的连续性推出 $\varphi^{-1}$ 的连续性。由证明过的定理的方向，$v$ 是等化表明 $f=\varphi\circ v$ 的连续性可以给出 $\varphi$ 的连续性。综上 $\varphi$ 是一个同胚映射。最后只需再注意到等化是同胚不变地即可。 □

**引理 1.1**

设 $f:X\to Y$ 是一个等化，$g:Y\to Z$ 是一个连续的满射，那么 $g$ 是一个等化当且仅当 $gf$ 是一个等化。

♡

**Proof** 由上面的定理 $g$ 是连续的当且仅当 $gf$ 是连续的。

设 $gf$ 是一个等化，那么任取 $Z$ 的子集 $U$，若 $g^{-1}(U)$ 是一个开集，那么由 $f$ 连续，$(gf)^{-1}(U)=f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ 是一个开集，再由 $gf$ 是一个等化知 $U$ 是一个开集。这表明 $g$ 是一个等化。

再设 $g$ 是一个等化，那么任取 $Z$ 中的子集 $U$，若 $(gf)^{-1}(U)=f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ 是一个开集，

由 $f$ 是等化知 $g^{-1}(U)$ 是一个开集，再由 $g$ 是等化只 $U$ 是一个开集。这表明 $gf$ 是一个等化。

□

### 1.3.2 纤维

**定义 1.5**

令 $f : X \to Y$ 是函数，$y \in Y$。称 $f^{-1}(y)$ 为 $f$ 在 $y$ 上的纤维。

**Remark** 若 $f$ 是群同态，那么 $f^{-1}(1)$ 就是 $f$ 的 kernel，$f^{-1}(y)$ 就是 kernel 的陪集。更一般地，纤维是 $X$ 上的等价关系 $\ker f$ 的等价类。

**定理 1.2**

设 $f : X \to Y$ 是一个等化，$Z$ 是拓扑空间，$h : X \to Z$ 是在 $f$ 的纤维上取常值的连续映射。那么 $hf^{-1} : Y \to Z$ 是连续的。此外，$hf^{-1}$ 是一个开映射（或闭映射）当且仅当 $U$ 是 $X$ 中的开集使得 $U = f^{-1}f(U)$ 蕴含 $h(U)$ 是开集。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "hf^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

**Remark** 与 $f$ 的纤维相容的连续映射诱导出商空间上的连续映射。$hf^{-1}$ 的开闭与否决定了关于 $f$ 的饱和集在 $h$ 下的像是否是开的。

**Proof** $h$ 在 $f$ 的纤维上取常值蕴含了 $hf^{-1} : Y \to Z$ 是良定义的。$hf^{-1} \circ f = h$ 是连续映射，上面的定理知 $hf^{-1}$ 也是连续的。任取 $Y$ 中的开集 $V$，那么 $f$ 的连续性给出 $f^{-1}(V)$ 是 $X$ 中的开集。若 $hf^{-1}$ 是一个开映射，那么对于任意 $X$ 中的开集 $U$ 使得 $U = f^{-1}f(U)$，$h(U) = \left(hf^{-1}\right) f(U)$。而根据 $f$ 是一个等化，由 $f^{-1}(f(U)) = U$ 是开的可知 $f(U)$ 是开的。反之，若条件成立，任取 $Y$ 中的开集 $V$，$f^{-1}(V)$ 是开集，并且 $f^{-1}(V) = f^{-1}f\left(f^{-1}(V)\right)$，从而 $hf^{-1}(V) = h\left(f^{-1}(V)\right)$ 是开集，这就说明了 $hf^{-1}$ 是一个开映射。

□

**定理 1.3**

设 $X, Z$ 是拓扑空间，$h : X \to Z$ 是一个等化，那么映射 $\varphi : X/\ker h \to Z$，$\varphi([x]) := h(x)$ 是一个同胚映射。

**Proof** 注意到 $\varphi([x_1]) = \varphi([x_2]) \iff x_1 \sim x_2 \iff [x_1] = [x_2]$ 这同时说明了 $\varphi$ 是良定义和单的。$\varphi$ 满是因为 $h$ 是满的，从而 $h(X) = \varphi([X]) = \varphi(X/\ker h) = Z$。这就说明了 $\varphi$ 是一个双射。令 $v : X \to X/\ker h$ 是自然映射，那么 $h = \varphi \circ v$，根据 2.3，由 $h$ 连续和 $v$ 是一个等化可得 $\varphi$ 连续。为了说明 $\varphi$ 是一个开映射，任取 $X/\ker h$ 中的开集 $U$，那么由 $\varphi$ 连续知 $h^{-1}\varphi(U) = v^{-1}(U)$

是一个开集，由 $h$ 是一个等化，故 $\varphi(U)$ 是一个开集。

$\square$

**定理 1.4**

设 $X,Y$ 分别是带有等价关系 $\sim,\square$ 的拓扑空间。设 $f:X\to Y$ 是保持等价关系的连续映射 $(x\sim x' \implies f(x)\square f(x'))$。那么诱导映射 $\bar{f}:X/\sim\to Y/\square$ 是连续的；此外，若 $f$ 还是一个等化，那么 $\bar{f}$ 亦然。

♡

**Proof** 设 $v:X\to X/\sim$ 和 $\omega:Y\to Y/\square$ 是自然映射，$\omega f:X\to Y/\square$ 在 $v$ 的纤维上取常值。为了说明 $\omega f$ 是连续的，任取 $Y/\square$ 中的开集 $V'$，那么 $V=\omega^{-1}(V')$ 是开集，$f^{-1}(V)$ 也是开集，故 $(\omega f)^{-1}(V')=f^{-1}(V)$ 是开集，这就说明了 $\omega f$ 是连续映射。由 3.2.，$\bar{f}=\omega f v^{-1}$ 是连续映射。此外，若 $f$ 是一个等化，由 2.4.，因为 $\omega$ 是一个等化，故 $\omega f$ 也是一个等化。这表明 $\bar{f}v=\omega f v^{-1}v$ 也是一个等化，故再一次由 2.4. 知，$\bar{f}$ 是一个等化。

$\square$

**定理 1.5**

设 $X,Z$ 是紧的 Hausdorff 空间，$h:X\to Z$ 是一个连续的满射。那么 $\varphi:X/\ker h\to Z$，$\varphi([x]):=h(x)$ 是一个同胚映射。

♡