第 1 章　Green 函数

Green 函数是在线性系统 L 的作用下表现为“瞬时脉冲”的函数.

定义 1.1

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的区域, L 是一个线性微分算子, 定义关于以下非齐次方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的格林函数 $G(x, x')$ 为以下分布意义下方程的解

$$LG(x, x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \Omega$$

其中 $u(x)$ 是未知函数, δ 是 Dirac 分布.

♣

定理 1.1

Ω, L 同前, G 是方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

的 Green 函数, 则

$$u(x) = \int_\Omega G(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'$$

是该方程的一个解.

♡

Proof 设 $u(x)$ 有题述表示, 由线性叠加原理,

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= L\left(\int_\Omega G(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'\right) \\
&= \int_\Omega (LG(x, x') f(x')) \, \mathrm{d}x' \\
&= \int_\Omega (\delta(x - x')) f(x') \, \mathrm{d}x' \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

□

1.1 Dirichlet 问题的 Green 函数法

本节希望通过 Green 函数法, 给出 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u\left(x\right)+f\left(x\right)=0, & \forall x\in\Omega \\ u\left(x\right)=g\left(x\right), & \forall x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的解的表示形式.

定义 1.2 (Green of Dirichlet)

定义区域 Ω 上 Dirichelet 问题对应的 Green 函数, 为以下问题的解

$$\begin{cases} \Delta_x G\left(x,x'\right)=\delta\left(x-x'\right), & \forall x\in\Omega \\ G\left(x,x'\right)=0, & \forall x\in\partial\Omega \end{cases}$$

♣

1.1.1 非齐次方程, 齐次边界

定理 1.2

$\Omega, G\left(x,x'\right)$ 同前. 令

$$u\left(x\right)=-\int_{\Omega}G\left(x,x'\right)f\left(x'\right)\mathrm{d}x'$$

则 $u\left(x\right)$ 是以下有齐次边界条件的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u\left(x\right)+f\left(x\right)=0, & x\in\Omega \\ u\left(x\right)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

♡

Proof 结合定理1.1, 这是显然的

□

1.1.2 齐次方程, 非齐次边界

定理 1.3

Ω, G 同前, 令

$$u\left(x\right)=\int_{\Omega}g\left(x'\right)\frac{\partial G\left(x',x\right)}{\partial x'}\mathrm{d}S_{x'}$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

♡

Proof 由 Green 第二恒等式, 我们有

$$\int_\Omega G(x, x_0) \Delta u(x) - u(x) \Delta_x G(x, x_0) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(G(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} \right) \mathrm{d}S_x$$

其中

1.
$$\int_\Omega \Delta u(x) G(x, x_0) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega 0 \cdot G(x, x_0) \, \mathrm{d}x = 0$$

2.
$$\int_\Omega u(x) \Delta_x G(x, x_0) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u(x) \delta(x - x_0) \, \mathrm{d}x = u(x_0)$$

3.
$$\int_\Omega G(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial n_x} \mathrm{d}S_x = \int_\Omega 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial n_x} \mathrm{d}S_x = 0$$

4.
$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} \mathrm{d}S_x = \int_\Omega g(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} \mathrm{d}S_x$$

全部带入, 得到

$$u(x_0) = \int_\Omega g(x) \frac{\partial G}{\partial n_x} \mathrm{d}S_x$$

以 x 代 x_0, 以 x' 代 x, 得到

$$u(x) = -\int_\Omega g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial n_{x'}} \mathrm{d}S_{x'}$$

□

1.1.3 最终表示

定理 1.4

Ω, G 同前, 令

$$u(x) = \int_\Omega g(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial x'} \mathrm{d}S_{x'} - \int_\Omega g(x, x') f(x') \, \mathrm{d}x'$$

则 $u(x)$ 是以下带有非齐次边界的非齐次方程的解

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

♡

Proof 由线性叠加原理立即得到.

□

1.2 波动方程的 Green 函数

我们考虑以下在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的非齐次波动方程初始-边界值问题 (IBVP):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x) & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) & \text{on } \Omega \\ u(x,t) = \phi(x,t) & \text{on } \partial\Omega \times (0,T] \quad \text{(Dirichlet Boundary Condition)} \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 是波速，$f(x,t)$ 是源项，$g(x)$ 是初始位移，$h(x)$ 是初始速度，$\phi(x,t)$ 是边界上的位移。

定义 1.3 (波动方程的 Green 函数)

波动方程的 Green 函数 $G(x,t;x_0,t_0)$ 是满足以下条件的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \Delta G = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) & \text{in } \Omega \times (0,T] \\ G(x,t;x_0,t_0) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T] \\ G(x,t;x_0,t_0) = 0 & \text{for } t < t_0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(x,t;x_0,t_0) = 0 & \text{for } t < t_0 \end{cases}$$

其中:

- $x \in \Omega$, $t \in (0,T]$ 是观测点和时间。
- $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in (0,T]$ 是点源的位置和发生时间。
- 最后两个条件 $G(x,t;x_0,t_0) = 0$ for $t < t_0$ 和 $\frac{\partial G}{\partial t}(x,t;x_0,t_0) = 0$ for $t < t_0$ 确保了因果性，即波只在源出现之后才传播，并且在源出现之前，系统处于静止状态。

♣

1.2.1 只有源项的贡献

定理 1.5

我们考虑以下齐次初始条件和齐次边界条件下的非齐次波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_f = f(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,T] \\ u_f(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_f}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_f(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T] \end{cases}$$

设 $G(x,t;x',t')$ 是波动方程的 Green 函数, 则

$$u_f(x,t) = \int_0^t \int_\Omega G(x,t;x',t') f(x',t') \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t'$$

是问题的解.

♡

Proof 只验证源项, 由算子的线性,

$$\begin{aligned} \left(\partial_{tt} - c^2 \Delta\right) u_f(x,t) &= \int_0^t \int_\Omega \left(\left(\partial_{tt} - c^2\Delta\right) G\right) f \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t' \\ &= \int_0^t \int_\Omega \delta(x-x')\,\delta(t-t')\, f(x',t') \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}t' \\ &= \int_0^t \delta(t-t') f(x,t') \, \mathrm{d}t' \\ &= f(x,t) \end{aligned}$$

□

1.2.2 只有初始位移的贡献

定理 1.6

我们考虑以下齐次源项、齐次初始速度和齐次 Dirichlet 边界条件下的波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_g = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T] \\ u_g(x,0) = g(x) & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_g}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_g(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T] \end{cases}$$

设 $G(x,t;x',t')$ 是波动方程的 Green 函数，则

$$u_g(x,t) = -\int_\Omega g(x')\frac{\partial G}{\partial t'}(x,t;x',0)\,\mathrm{d}x'$$

是上述问题的解。

Proof 只验证初始位移项, 延迟 Green 函数在 $t=t'$ 处具有跳跃条件

$$\lim_{t\to t'}\frac{\partial G}{\partial t}(x,t;x',t') = \delta(x-x')$$

将极限过程反向, 由对称性

$$\lim_{t'\to t}\frac{\partial G}{\partial t'}(x,t;x',t') = -\delta(x-x')$$

于是

$$\begin{aligned} u_g(x,0) &= -\int_\Omega g(x')\frac{\partial G}{\partial t'}(x,0;x',0)\,\mathrm{d}x' \\ &= -\int_\Omega g(x')\,\delta(x-x')\,\mathrm{d}x' \\ &= g(x) \end{aligned}$$

□

1.2.3 只有初速度的贡献

定理 1.7

我们考虑以下齐次源项、齐次初始位移和齐次 Dirichlet 边界条件下的波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2\Delta u_h = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T] \\ u_h(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,0) = h(x) & \text{on } \Omega \\ u_h(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T] \end{cases}$$

设 $G(x,t;x',t')$ 是波动方程的 Green 函数，则

$$u_h(x,t) = \int_\Omega h(x')G(x,t;x',0)\,\mathrm{d}x'$$

是上述问题的解。

Proof 只验证初始速度项, 延迟 Green 函数在 $t=t'$ 处具有跳跃条件

$$\lim_{t\to t'}\frac{\partial G}{\partial t}(x,t;x',t') = \delta(x-x')$$

$$
\partial_t u_h(x,0)=\int_\Omega h(x')\,\delta(x-x')\,\delta'\mathrm{d}x'=h(x)
$$

□

1.2.4 只有边界条件的贡献

定理 1.8

我们考虑以下齐次源项和齐次初始条件下的非齐次 Dirichlet 边界条件波动方程:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2}-c^2\Delta u_\phi=0 & \text{in } \Omega\times(0,T] \\
u_\phi(x,0)=0 & \text{on } \Omega \\
\frac{\partial u_\phi}{\partial t}(x,0)=0 & \text{on } \Omega \\
u_\phi(x,t)=\phi(x,t) & \text{on } \partial\Omega\times(0,T]
\end{cases}
$$

设 $G(x,t;x',t')$ 是波动方程的 Green 函数，则

$$
u_\phi(x,t)=-c^2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\phi(x',t')\frac{\partial G}{\partial\nu'}(x,t;x',t')\,\mathrm{d}S(x')\,\mathrm{d}t'
$$

是上述问题的解。

♡

1.2.5 最终表示

定理 1.9

我们考虑以下在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的非齐次波动方程初始-边界值问题 (IBVP):

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=f(x,t) & \text{in } \Omega\times(0,T] \\
u(x,0)=g(x) & \text{on } \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=h(x) & \text{on } \Omega \\
u(x,t)=\phi(x,t) & \text{on } \partial\Omega\times(0,T] \quad \text{(Dirichlet Boundary Condition)}
\end{cases}
$$

设 $G(x,t;x',t')$ 是波动方程的 Green 函数，则上述 IBVP 的解 $u(x,t)$ 可以表示为:

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&\int_0^t\int_\Omega G(x,t;x',t')f(x',t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t' \\
&-\int_\Omega g(x')\frac{\partial G}{\partial t'}(x,t;x',0)\,\mathrm{d}x' \\
&+\int_\Omega h(x')G(x,t;x',0)\,\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

$$-c^2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\phi(x',t')\frac{\partial G}{\partial\nu'}(x,t;x',t')\,\mathrm{d}S(x')\,\mathrm{d}t'$$

其中 $\frac{\partial G}{\partial\nu'}$ 表示 Green 函数对源空间变量 x' 在边界 $\partial\Omega$ 上的外法向导数。

1.2.6 波动方程的 Green 函数

定理 1.10

以下给出几个空间上波动方程的 Green 函数

1. 三维

$$G\left(x,t;x_0,t_0\right)=\frac{1}{4\pi rc^2}\delta\left(t-t_0-\frac{r}{c}\right)$$

或者使用相对坐标表示

$$G\left(r,\tau\right)=\frac{1}{4\pi rc^2}\delta\left(\tau-\frac{r}{c}\right)$$

2. 二维

$$G\left(x,t;x_0,t_0\right)=\frac{1}{2\pi c\sqrt{c^2\left(t-t_0\right)^2-r^2}}H\left(t-t_0-\frac{r}{c}\right)$$

或者使用相对坐标表示

$$G\left(r,\tau\right)=\frac{H\left(r-\frac{r}{c}\right)}{2\pi c\sqrt{c^2\tau^2-r^2}}$$

3. 一维

$$G\left(x,t;x_0,t_0\right)=\frac{1}{2c}H\left(c\left(t-t_0\right)-\left|x-x_0\right|\right)$$

或者使用相对坐标表示

$$G\left(r,\tau\right)=\frac{1}{2c}H\left(c\tau-r\right)$$

1.3 热方程

1.3.1 热方程的 Green 函数

定理 1.11

1. 三维热方程的 Green 函数为
$$G\left(x, t ; x_{0}, t_{0}\right)=\frac{1}{\left[4 \pi k\left(t-t_{0}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\left|x-x_{0}\right|^{2}}{4 k\left(t-t_{0}\right)}} H\left(t-t_{0}\right)$$
或者写成相对坐标形式
$$G(f, \tau)=\frac{1}{(4 \pi k \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|r|^{2}}{4 k \tau}} H(\tau)$$
2. 一维热方程的 Green 函数为
$$G(r, \tau)=\frac{1}{\sqrt{4 \pi k \tau}} e^{-\frac{r^{2}}{4 k \tau}} H(\tau)$$

1.4 几种空间 Green 函数

定理 1.12

$\Omega=\mathbb{R}^{3}$ 上的拉普拉斯算子的 Green 函数为
$$G\left(x, x^{\prime}\right)=-\frac{1}{4 \pi\left|x-x^{\prime}\right|}$$
即上面的表达式在分布意义下满足
$$\begin{cases}\Delta_{x} G\left(x, x^{\prime}\right)=\delta\left(x-x^{\prime}\right), & x, x^{\prime} \in \mathbb{R}^{3} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} G\left(x, x^{\prime}\right)=0, & x^{\prime} \in \mathbb{R}^{3}\end{cases}$$

Proof 我们希望找到 $G\left(x, x^{\prime}\right)$, 使得
$$\Delta_{x} G\left(x, x^{\prime}\right)=\delta\left(x-x^{\prime}\right)$$
方便起见, 固定 $x^{\prime}$, 令 $y=x-x^{\prime}$, 则 $\Delta_{x}=\Delta_{y}$, 记 $G(y)=G\left(x, x^{\prime}\right)$, 只需要找到 $G(y)$, 使得
$$\Delta_{y} G(y)=\delta(y)$$
希望寻找径向的 G, 利用
$$\Delta f=\frac{1}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2} \frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^{2} f}{\partial r^{2}}$$

在 $y \neq 0$ 处, 解方程

$$\frac{\partial G}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r}\right) = 0$$

解得

$$G(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

接下来确定 C_1, C_2, 任取测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, 我们需要

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

根据分布的导数的定义, 以及 Dirac 函数的筛选性, 上面写作

$$\langle G, \Delta\varphi \rangle = \varphi(0)$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(-\frac{C_1}{|x|} + C_2\right) \Delta\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

由散度定理

$$\int_{\mathbb{R}^3} C_2 \Delta\varphi(x)\, \mathrm{d}x = C_2 \int_{\partial\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}x = 0$$

其中最后的等号是因为 φ 的紧支性导致的无穷远处的消失性. 我们发现 C_2 不影响 ΔG 与 δ 的关系, 通常取 $C_2 = 0$. 对于

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi\, \mathrm{d}x$$

在 $V_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$ 上, 使用第二格林公式, 得到

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi\, \mathrm{d}x = \int_{V_\varepsilon} \varphi \Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) \mathrm{d}x - \int_{\partial V_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|}\nabla\varphi - \varphi\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot e_r\, \mathrm{d}S$$

由于 φ 是测试函数, φ 和 $\nabla\varphi$ 在无穷远处消失, 并且 $\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$ 在 V_ε 上成立, 于是右侧积分化为

$$\begin{aligned}
&-\int_{\partial_\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|}\nabla\varphi + \varphi\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot e_r\, \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\varphi\right) \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 + O(r)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\varphi(0) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 r + O\left(r^2\right)\right)\right) \mathrm{d}S \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2}\varphi(0) + \frac{2}{r}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_0 + O(1)\right) \mathrm{d}S \to -4\pi\varphi(0), (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

于是

$$C_1 (4\pi\varphi(0)) = \varphi(0)$$

得到

$$C_1 = \frac{1}{4\pi}$$

进而

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r}$$

即

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi |x - x'|}$$

$\square$

第 1 章 练习

Problem 1.1

1. 定义 $\Psi(x) := \frac{1}{|x|}\exp(-|x|)$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$. 证明 $\Psi(x)$ 满足如下方程:
$$-\Delta\Psi(x) + \Psi(x) = 0, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3.$$
2. 并以此 (仿照调和方程的 Green 函数法) 求解如下定解问题:
$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & x \in \mathbb{R}^3_+ \\ u|_{\partial\mathbb{R}^3_+} = g. \end{cases}$$

Proof

1. 令 $r = |x|$, 设 $G(r) = \Psi(x) = \frac{1}{r}\exp(-r)$, 则对于径向函数 $G(r)$, 其关于 x 的 Laplace 算子满足
$$\Delta G(r) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)$$
计算即可.
2. 根据无限域上 Dirichlet 上的基本解, 我们已经知道在分布的意义下,
$$\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi |x|}\right) = \delta(x)$$
利用 Laplace 算子的乘积法则
$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u\nabla v$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)\\
&=\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\Delta_x\exp(-x)+2\nabla\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)\cdot\nabla(\exp(-|x|))\\
&=\delta(x)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\left(1-\frac{2}{|x|}\right)\exp(-|x|)+2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3}\right)\exp(-|x|)\left(-\frac{x}{|x|}\right)\\
&=\delta(x)\exp(-|x|)-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)
\end{aligned}
$$

于是在分布的意义下

$$
\Delta_x\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)-\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\exp(-|x|)\right)=\delta(x)\exp(-|x|)=\delta(x)
$$

令 $G_0(x,x_0)=\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\exp(-|x-x_0|)$，则下述方程在分布的意义下成立

$$
(-\Delta_x+I)G_0(x,x_0)=\delta(x-x_0)
$$

接下来，设 x' 是 x 关于 $\partial\mathbb{R}^3_+$ 的镜像对称点，定义

$$
G(x,x_0)=G_0(x,x_0)-G_0(x',x_0)
$$

则由线性叠加原理，下述方程在分布意义下成立

$$
\begin{cases}
(-\Delta_x+I)G(x,x_0)=\delta(x-x_0), & x\in\mathbb{R}^3_+\\
G(x,x_0)=0, & x\in\partial\mathbb{R}^3_+
\end{cases}
$$

记 $L_x=(-\Delta_x+I)$ 是一个线性微分算子，根据 Green 第二恒等式

$$
\int_{\mathbb{R}^3_+}u(x)\Delta_xG(x,x_0)-G(x,x_0)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}u\frac{\partial G}{\partial n_x}-G\frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S
$$

得到

$$
\int_{\mathbb{R}^3_+}G(x,x_0)L_xu(x)-u(x)L_xG(x,x_0)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}u\frac{\partial G}{\partial n_x}-G\frac{\partial u}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S
$$

若上面的 u 满足

$$
\begin{cases}
L_xu=0, & x\in\mathbb{R}^3_+\\
u|_{\partial\mathbb{R}^3_+}=g
\end{cases}
$$

则上述积分式化为

$$
-\int_{\mathbb{R}^3_+}u(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}g(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S
$$

其中左侧为 $u(x_0)$. 依据此，取

$$
u(x_0)=-\int_{\partial\mathbb{R}^3_+}g(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_x}\,\mathrm{d}S
$$

即

$$u\left(x\right)=-\int_{\partial\mathbb{R}_{+}^{3}}g\left(x_0\right)\frac{\partial G\left(x_0,x\right)}{\partial n_{x_0}}\,\mathrm{d}S_{x_0}$$

带入回上述过程, 可知 $u\left(x\right)$ 满足边界条件

$$u|_{\partial\mathbb{R}_{+}^{3}}=g$$

此外, 由微分算子 L 的线性

$$L_x u=-\int_{\partial\mathbb{R}_{+}^{3}}g\left(x\right)\frac{\partial L_x G\left(x_0,x\right)}{\partial n_{x_0}}\,\mathrm{d}S_{x_0}=-\int_{\partial\mathbb{R}_{+}^{3}}g\left(x\right)\cdot 0=0$$

这上述构造的 u 确实是方程的解.

最后, 计算 $\frac{\partial G(x_0,x)}{\partial n_{x_0}}$, 无非是 x_0 关于第三个分量的偏导数的相反数, 计算过程略去.

$\square$