

第 1 章 拓扑空间

1.1 和空间与积空间

定义 1.1 (和空间)

设 $(X_j | j \in J)$ 是一族非空且两两无交的拓扑空间, 则集合

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq \coprod X_j : \text{对于任意的 } j \in J, U \cap X_j \text{ 是开集} \right\}$$

构成无交并集 $\coprod X_j$ 上的一个拓扑。称 $(\coprod X_j, \mathcal{O})$ 为 X_j 的拓扑和。



1.2 连续映射

定义 1.2 (嵌入)

设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射。若 $X \simeq f(X)$, 则称 f 是一个拓扑嵌入。



Example 1.1 设 X, Y 是拓扑空间, $X \times Y$ 是积空间。对于任意的 $y \in Y$, 定义映射

$$\begin{aligned} i_y: X &\rightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

则 i_y 是嵌入映射。

Proof

$i_y(X) = X \times \{y\}$, X 到 $X \times \{y\}$ 之间存在连续的双射 $f: x \mapsto (x, y)$ 。这是因为 $X \times \{y\}$ 上的开集形如 $U \cap (X \times \{y\})$, 其中 U 是 $X \times Y$ 上的开集, $U \cap (X \times \{y\})$ 写作 $V \times \{y\}$, 其中 V 是 X 上开集的并, 进而也是开集。则 $f^{-1}(V \times \{y\}) = V$ 是开集, 从而 f 是连续映射。又显然 f 是开映射, 故 f 是拓扑空间之间的同构, 这表明 i_y 是嵌入。



1.3 商空间

定义 1.3

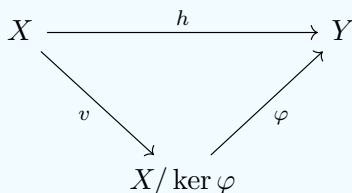
令 X 是拓扑空间, $X' = \{X_j : j \in J\}$ 是 X 的一个分划。自然映射 $v: X \rightarrow X'$ 被定义为 $v(x) = X_j$, 其中 X_j 是 (唯一的) 包含了 x 的分划中的子集。那么 X' 上的商拓扑是指全体 U' 组成的集族, 其中 U' 是 X' 的子集, 它使得 $v^{-1}(U')$ 是 X 中的开集。



Remark X 上的一个等价关系确定了 X 上的一个分划, 我们记相应的商空间为 X/\sim , 其中 \sim 表示所说的等价关系。

命题 1.1 (泛性质)

设 $h: X \rightarrow Y$ 是映射, $\ker h$ 是 X 上的一个等价关系, 使得 $x \sim x'$ 当且仅当 $h(x) = h(x')$ 。相应的商空间记作 $X/\ker \varphi$ 。那么存在唯一的映射 $\varphi: X/\ker \varphi \rightarrow Y$ 使得下图交换。



Proof 唯一的取法是 $\varphi([x]) = h(x)$, 显然该映射良定义, 且是单的。

□

1.3.1 等化**定义 1.4 (等化)**

称一个连续的满射 $f: X \rightarrow Y$ 是一个等化, 若 U 是 Y 中的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集。

**Example 1.2**

1. 给定 X 上的等价关系 \sim , X/\sim 给出一个商拓扑。自然映射 $v: X \rightarrow X/\sim$ 是一个等化。
2. 若 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续的满射, 且 f 是开 (闭) 的, 那么 f 是一个等化。

Proof 若 f 满足条件, 任取 Y 中的开集 U , f 的连续性给出 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集; 任取 Y 中的集合 V , 使得 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 那么 f 是满射给出 $V = f(f^{-1}(V))$, 再由 f 是开映射可知, V 是一个开集。(若 f 是闭映射, $Y \setminus V = f(f^{-1}(Y \setminus V)) = f(X \setminus f^{-1}(V))$ 是一个闭集)

□

3. 若 $f: X \rightarrow Y$ 是具有截面的连续映射, 那么 f 是一个等化。

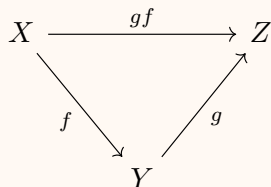
Proof 只需注意到有截面的连续映射一定是满的。

□

定理 1.1

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续的满射。那么 f 是一个等化, 当且仅当对于任意的空间 Z , 以

及映射 $g: Y \rightarrow Z$, 有 g 是连续的当且仅当 gf 是连续的。

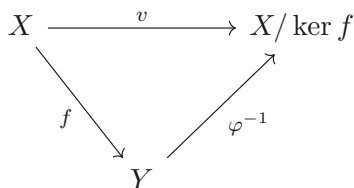


Idea gf 是否连续标志着“商空间” Y 中一类特定形式的集合 ($g^{-1}(V)$) 是否是开的。目标通过条件给出 f 是一个等化时, 若想要充分地利用条件, 需要找出使得条件成立的最苛刻的空间 (使得 gf 连续推出 g 连续变得非常困难), 而往往越精细的空间里, 映射越难连续, 并且空间的选取应该无关于 g , 同时使得 f 连续以避免对 g 的性质产生影响, 综合种种考量我们取 Z 为使得 f 连续的最精细的空间, 即商空间。

g 几乎扮演了同胚映射的作用, 因此我们希望 Z 取到与 Y 同胚的空间。从结果上而言, Z 应该是商空间 $X/\ker \varphi$ 。

Proof 若 f 是一个等化, 任取 Z 中的开集 V , 那么由 fg 的连续性可知 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (fg)^{-1}(V)$ 是开集。 f 是一个等化给出了 $g^{-1}(V)$ 是开集, 这就表明 g 是一个连续映射。反之, 若 g 是连续映射, 那么 gf 作为连续映射的复合当然是连续的。

现在设条件成立, 取 $Z = X/\ker f$, $v: X \rightarrow X/\ker f$ 是自然映射, 由商的泛性质知, 存在唯一的单射 $\varphi: Y \rightarrow X/\ker f$ 使得 $\varphi \circ v = f$, 由 f 是满射知 φ 也是满的, 进而是双射。考虑图表



由条件, $v = \varphi^{-1}f$ 的连续性推出 φ^{-1} 的连续性。由证明过的定理的方向, v 是等化表明 $f = \varphi \circ v$ 的连续性可以给出 φ 的连续性。综上 φ 是一个同胚映射。最后只需再注意到等化是同胚不变地即可。 \square

引理 1.1

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个等化, $g: Y \rightarrow Z$ 是一个连续的满射, 那么 g 是一个等化当且仅当 gf 是一个等化。



Proof 由上面的定理 g 是连续的当且仅当 gf 是连续的。

设 gf 是一个等化, 那么任取 Z 的子集 U , 若 $g^{-1}(U)$ 是一个开集, 那么由 f 连续, $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是一个开集, 再由 gf 是一个等化知 U 是一个开集。这表明 g 是一个等化。

再设 g 是一个等化, 那么任取 Z 中的子集 U , 若 $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是一个开集,

由 f 是等化知 $g^{-1}(U)$ 是一个开集, 再由 g 是等化只 U 是一个开集。这表明 gf 是一个等化。□

1.3.2 纤维

定义 1.5

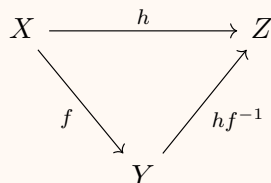
令 $f: X \rightarrow Y$ 是函数, $y \in Y$ 。称 $f^{-1}(y)$ 为 f 在 y 上的纤维。



Remark 若 f 是群同态, 那么 $f^{-1}(1)$ 就是 f 的 kernel, $f^{-1}(y)$ 就是 kernel 的陪集。更一般地, 纤维是 X 上的等价关系 $\ker f$ 的等价类。

定理 1.2

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个等化, Z 是拓扑空间, $h: X \rightarrow Z$ 是在 f 的纤维上取常值的连续映射。那么 $hf^{-1}: Y \rightarrow Z$ 是连续的。此外, hf^{-1} 是一个开映射 (或闭映射) 当且仅当 U 是 X 中的开集使得 $U = f^{-1}f(U)$ 蕴含 $h(U)$ 是开集。



Remark 与 f 的纤维相容的连续映射诱导出商空间上的连续映射。 hf^{-1} 的开闭与否决定了关于 f 的饱和集在 h 下的像是否是开的。

Proof h 在 f 的纤维上取常值蕴含了 $hf^{-1}: Y \rightarrow Z$ 是良定义的。 $hf^{-1} \circ f = h$ 是连续映射, 上面的定理知 hf^{-1} 也是连续的。任取 Y 中的开集 V , 那么 f 的连续性给出 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。若 hf^{-1} 是一个开映射, 那么对于任意 X 中的开集 U 使得 $U = f^{-1}f(U)$, $h(U) = (hf^{-1})f(U)$ 。而根据 f 是一个等化, 由 $f^{-1}(f(U)) = U$ 是开的可知 $f(U)$ 是开的。反之, 若条件成立, 任取 Y 中的开集 V , $f^{-1}(V)$ 是开集, 并且 $f^{-1}(V) = f^{-1}f(f^{-1}(V))$, 从而 $hf^{-1}(V) = h(f^{-1}(V))$ 是开集, 这就说明了 hf^{-1} 是一个开映射。



定理 1.3

设 X, Z 是拓扑空间, $h: X \rightarrow Z$ 是一个等化, 那么映射 $\varphi: X/\ker h \rightarrow Z$, $\varphi([x]) := h(x)$ 是一个同胚映射。



Proof 注意到 $\varphi([x_1]) = \varphi([x_2]) \iff x_1 \sim x_2 \iff [x_1] = [x_2]$ 这同时说明了 φ 是良定义和单的。 φ 满是因为 h 是满的, 从而 $h(X) = \varphi([X]) = \varphi(X/\ker h) = Z$ 。这就说明了 φ 是一个双射。令 $v: X \rightarrow X/\ker h$ 是自然映射, 那么 $h = \varphi \circ v$, 根据 2.3, 由 h 连续和 v 是一个等化可得 φ 连续。为了说明 φ 是一个开映射, 任取 $X/\ker h$ 中的开集 U , 那么由 φ 连续知 $h^{-1}\varphi(U) = v^{-1}(U)$

是一个开集，由 h 是一个等化，故 $\varphi(U)$ 是一个开集。

□

定理 1.4

设 X, Y 分别是带有等价关系 \sim, \square 的拓扑空间。设 $f: X \rightarrow Y$ 是保持等价关系的连续映射 ($x \sim x' \implies f(x) \square f(x')$)。那么诱导映射 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y/\square$ 是连续的；此外，若 f 还是一个等化，那么 \bar{f} 亦然。

♡

Proof 设 $v: X \rightarrow X/\sim$ 和 $\omega: Y \rightarrow Y/\square$ 是自然映射， $\omega f: X \rightarrow Y/\square$ 在 v 的纤维上取常值。为了说明 ωf 是连续的，任取 Y/\square 中的开集 V' ，那么 $V = \omega^{-1}(V')$ 是开集， $f^{-1}(V)$ 也是开集，故 $(\omega f)^{-1}(V') = f^{-1}(V)$ 是开集，这就说明了 ωf 是连续映射。由 3.2.， $\bar{f} = \omega f v^{-1}$ 是连续映射。此外，若 f 是一个等化，由 2.4.，因为 ω 是一个等化，故 ωf 也是一个等化。这表明 $\bar{f} v = \omega f v^{-1} v$ 也是一个等化，故再一次由 2.4. 知， \bar{f} 是一个等化。

□

定理 1.5

设 X, Z 是紧的 Hausdorff 空间， $h: X \rightarrow Z$ 是一个连续的满射。那么 $\varphi: X/\ker h \rightarrow Z$ ， $\varphi([x]) := h(x)$ 是一个同胚映射。

♡