目录

第 1 章 Riemann 度量

1.1 Riemann 流形

定义 1.1 (Riemann 度量和 Riemann 流形)

设 M 是一个光滑（带边）流形,M 上的一个 Riemann 度量是指，在每一点处正定的 M 上的一个光滑对称共变 2-张量.

一个（带边）Riemann 流形是指一对 (M, g)，其中 M 是光滑（带边）流形,g 是 M 上的一个 Riemann 度量.

♣

Remark

1. Riemann 度量不是度量. 后续的“度量”都指 Riemann 度量，作为代替，我们用“距离函数”来称一个真正的度量.
2. 设 g 是 M 上的一个 Riemann 度量，则 g_p 是 T_pM 上的一个内积. 因此经常用 $\langle v, w\rangle_p$ 表示 $\mathrm{g}_p(v, w)$，其中 $v, w \in T_pM$.
3. 在每个光滑坐标 (x^i) 上,Riemann 度量有基表示

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

由对称性，也可写作对称积的形式

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j$$

Example 1.1 (欧式度量). Riemann 度量最常见的一个例子是 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式度量 $\bar{\mathrm{g}}$,

$$\bar{g} := \delta_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 积. 通常将张量 α 与自身的对称积写作 α^2，那么欧式度量也可以写作

$$\bar{g} = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^n\right)^2$$

将它作用到向量 $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$ 上，得到

$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = v \cdot w$$

换言之，欧式度量在每一点处的值就是欧式内积.

Example 1.2 (乘积度量). 若 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是 Riemann 流形，可以定义积流形 $M \times \tilde{M}$

上的度量 $\hat{g} := g \oplus \tilde{g}$, 称为是乘积度量:

$$\hat{g}\left(\left(v, \tilde{v}\right), \left(w, \tilde{w}\right)\right) := g\left(v, w\right) + \tilde{g}\left(\tilde{v}, \tilde{w}\right)$$

其中 $(v, \tilde{v})$,$(w, \tilde{w}) \in T_pM \oplus T_q\tilde{M} \simeq T_{(p,q)}\left(M \times \tilde{M}\right)$. 给定任意 M 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 和 $\tilde{M}$ 的局部坐标 $(y^1, \cdots, y^m)$, 得到 $M \times \tilde{M}$ 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m)$, 乘积度量的（作为二次型）局部表示可以写成对角矩阵

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}$$

命题 1.1 (Riemann 度量的存在性)

每个光滑（带边）流形都容许一个 Riemann 度量.

Idea 对流形按坐标单位分解, 取每个局部上欧式度量通过坐标映射的拉回度量, 它们共同拼成了流形上的一个整体的度量.

Proof 设 M 是光滑（带边）流形, 取 M 的一个坐标开覆盖 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. 在每个坐标开集上, 存在 Reimann 度量 $g_\alpha := \varphi_\alpha^* \overline{g}$, 它有坐标表示 $\delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$, 其中 $\overline{g}$ 是 $\varphi_\alpha\left(U_\alpha\right)$ 上的欧式度量,. 取从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 M 的一个单位分解 $\{\psi_\alpha\}$, 定义

$$g := \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha$$

则 g 是 M 上的光滑 2-张量场, 又显然 g 是对称的, 故只需要说明正定性. 任取非零的 $v \in T_pM$, 则

$$g_p\left(v, v\right) = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha|_p\left(v, v\right)$$

是一个有限和, 又每个有定义的 $g_\alpha|_p\left(v, v\right)$ 均为正, 因此 $g\left(v, v\right) > 0$, 又显然 g_p 非负, 故而正定.

定义 1.2 (Riemann 流形上的几何)

- 切向量 $v \in T_pM$ 的长度或模长被定义为

$$|v|_g := \langle v, w\rangle_g^{\frac{1}{2}} = g_p\left(v, v\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 两个切向量 $v, w \in T_pM$ 之间的角度被定义为唯一的 $\theta \in [0, \pi]$, 满足

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle_g}{|v|_g\,|w|_g}$$

- 称切向量 $v, w \in T_pM$ 是正交的, 若 $\langle v, w\rangle_g = 0$.

1.1.1 度量的局部表示

命题 1.2 (坐标表示)

设 (M,g) 是（带边）-Riemann 流形. 若 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是一个开集 $U\subseteq M$ 上的任意光滑坐标卡, 则 g 可以在 U 上被局部地写作

$$g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

其中 $g_{ij},i,j=1,\cdots,n$ 是 n^2 个光滑函数, 由 $g_{ij}(p)=\left\langle \partial_i|_p\,,\partial_j|_p\right\rangle$ 给出.
以上张量场的分量函数构成一个非奇异的对称矩阵函数 (g_{ij}) .

Proof

1. 由于坐标张量场 $\{\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j\}_{i,j}$ 构成 2-反变张量空间 $T^2(U)$ 的一组基, 因此存在光滑函数 $g_{ij},i,j=1,\cdots,n$, 使得 $g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j$ 对 $g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j$ 两边作用在 $\langle\partial_i,\partial_j\rangle$ 上, 得到

$$\langle\partial_i,\partial_j\rangle=g_{ij}$$

由 g 的对称性,

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle=\langle\partial_j,\partial_i\rangle=g_{ji}$$

于是 g 可以写成对称积的形式

$$\begin{aligned}g&=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j\\&=\frac{1}{2}\left(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j+g_{ji}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j\right)\\&=\frac{1}{2}\left(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\,\mathrm{d}x^j+g_{ij}\,\mathrm{d}x^j\otimes\,\mathrm{d}x^i\right)\\&=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

2. 上面 $g_{ij}=g_{ji}$ 已经表明了 (g_{ij}) 是一个对称矩阵函数. 为了看出非奇异性, 考虑 $v=v^i\partial_i|_p$ 是 T_pM 上的一个向量, 使得 $g_{ij}(p)\,v^j=0$, 则 $\langle v,v\rangle=g_{ij}(p)\,v^iv^j=0$, 表明 $v=0$. 因此

$$(g_{ij})\,(v_1,\cdots,v_n)^{\mathsf{T}}=0\iff(v_1,\cdots,v_n)=0$$

(g_{ij}) 是非奇异的.

□

命题 1.3 (标架表示)

设 (M, g) 是（带边）Riemann 流形, $E_1, \cdots, E_n$ 是开集 $U \subseteq M$ 上的 TM 的一个局部光滑标架, $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ 是相应的对偶余标架, 则 g 在 U 上可以局部表示为

$$g = g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j$$

其中 $g_{ij}(p) = \left\langle E_i|_p, E_j|_p \right\rangle$, 且矩阵值函数 (g_{ij}) 是对称且光滑的.

Proof 类似上一个命题的证明, 不加赘述.

□

命题 1.4

设 g 是 M 上的一个 Riemann 度量,$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 是光滑向量场. 则 g 在 X, Y 上的作用给出一个光滑函数 $\langle X, Y\rangle$,

$$\langle X, Y\rangle(p) = \langle X_p, Y_p\rangle_g$$

设在某个局部标架和对偶余标架下, $g = g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j$, $X = X^iE_i, Y = Y^jE_j$, 则函数 $\langle X, Y\rangle$ 局部表示为

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij}X^iY^j$$

从而是光滑的.

特别地, 我们有一个非负实值函数

$$|X| := \langle X, X\rangle^{\frac{1}{2}}$$

它是处处连续, 且在 $X \neq 0$ 的开集上是光滑的.

Proof 我们有

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &= g_{kl}\varepsilon^k\varepsilon^l\left(X^iE_i, Y^jE_j\right)\\
&= g_{kl}X^iY^j\varepsilon^k(E_i)\,\varepsilon^l(E_j)\\
&= g_{ij}X^iY^j
\end{aligned}$$

$$\left(\langle X, X\rangle^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{g_{ij}'X^iX^j + g_{ij}(X^i)'X^j + g_{ij}X^i(X^j)'}{2\sqrt{\langle X, X\rangle}}$$

当 $X \neq 0$ 时, $\langle X, X\rangle > 0$, 此时可以继续求导, 任意阶的分子分母均光滑, 且当 $\langle X, X\rangle \neq 0$ 时, 分母也非零.

□

定义 1.3 (正交标价)

设 (M,g) 是 n-维（带边）Riemann 流形. 称 M 的定义在开子集 $U\subseteq M$ 上的一个局部标价 $(E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 是一个正交标价, 若对于每个 $p\in U$,$(E_1|_p,\cdots,E_n|_p)$ 构成 T_pM 的一个正交基, 或等价地说 $\langle E_i,E_j\rangle_g=\delta_{ij}$.

Remark

1. 此时度量 g 有局部坐标表示

$$g=\left(\varepsilon^1\right)^2+\cdots+\left(\varepsilon^n\right)^2$$

其中 $\left(\varepsilon^i\right)^2$ 表示对称积 $\varepsilon^i\varepsilon^i=\varepsilon^i\otimes\varepsilon^i$

命题 1.5 (正交化)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形,(X_j) 是 M 的定义在开子集 $U\subseteq M$ 上的一个光滑局部标价. 那么存在 U 上的光滑正交标价 (E_j), 使得

$$\operatorname{span}\left(E_1|_p,\cdots,E_j|_p\right)=\operatorname{span}\left(X_1|_p,\cdots,X_j|_p\right),\quad j=1,2,\cdots,n,\quad p\in U$$

Proof 对于每一点 $p\in U$, 对 $(X_j|_p)$ 应用 Gram-Schimidt 正交化, 可以通过

$$E_j:=\frac{X_j-\sum_{i=1}^{j-1}\langle X_j,E_i\rangle_g E_i}{\left|X_j-\sum_{i=1}^{j-1}\langle X_j,E_i\rangle_g E_i\right|_g}$$

归纳地得到粗张量场的 n 元组 $(E_1,\cdots,E_n)$. 对于每个 $j=1,\cdots,n$ 和 $p\in U$, 由于 $X_j|_p\notin\operatorname{span}\left(E_1|_p,\cdots,E_{j-1}|_p\right)$, 故分母在 U 上无处退化, 因此 (E_j) 是光滑的正交标架.

推论 1.1 (局部正交标价的存在性)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, 则对于每个 $p\in M$, 存在 p 附近的光滑局部正交标架.

定义 1.4 (单位切丛)

对于（带边）Riemann 流形 (M,g), 定义它的**单位切丛**, 为由以下单位向量组成的子集 $UTM\subseteq TM$:

$$UTM:=\left\{(p,v)\in TM:|v|_g=1\right\}$$

命题 1.6

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形, 则它的单位切丛 UTM 是一个光滑的, 真嵌入到 TM 的余维数为 1 的带边子流形, 使得 $\partial(UTM)=\pi^{-1}(\partial M)$（其中 $\pi:UTM\to M$ 是典范投影）. 单位是连通的, 当且仅当 M 是连通的（当 $n>1$）; 并且单位切

丛是紧的, 当且仅当 M 是紧的.

1.1.2 拉回度量

定义 1.5

设 M, N 是光滑（带边）流形,g 是 N 上的一个 Riemann 度量,$F: M \to N$ 是光滑映射. 则拉回 F^*g 是 M 上的一个光滑 2-张量场. 此外若它是正定的, 则为 M 上的一个度量, 称为是由 F 决定的拉回度量.

命题 1.7 (拉回度量判据)

设 $F: M \to N$ 是一个光滑映射, g 是 N 上的一个 Riemann 度量. 那么 F^*g 是 M 上的一个 Riemann 度量当且仅当 F 是一个光滑浸入.

Proof 只需要考察正定性. 任取 $v \in T_pM$, $(F^*g)_p(v,v) = 0$ 当且仅当 $g_{F(p)}(F_{*,p}v, F_{*,p}v) = 0$, 当且仅当 $F_{*,p}v = 0$, 因此 F^*g 正定当且仅当 $F_{*,p}$ 是单射对于每一点 $p \in M$ 成立, 即 F 是 M 上的光滑浸入.

Example 1.3 考虑光滑映射 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

是一个常态、单的光滑浸入, 因此是一个嵌入. 它的像被称为是螺旋面. 拉回度量为

$$\begin{aligned}F^*\overline{g} &= d(u\cos v)^2 + d(u\sin v)^2 + d(v)^2\\&= (\cos v du - u\sin v dv)^2 + (\sin v du + u\cos v dv)^2 + dv^2\\&= \cos^2 v du^2 - 2u\sin v\cos v du dv + u^2\sin^2 v dv^2\\&+ \sin^2 v du^2 + 2u\sin v\cos v du dv + u^2\cos^2 v dv^2 + dv^2\\&= du^2 + (u^2+1)dv^2.\end{aligned}$$

Remark 当 u 为是实值函数时, 约定记号 $\mathrm{d}u^2$ 表示对称积 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u$.

定义 1.6 (等距浸入、嵌入)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M}, > ld\right)$ 是两个（带边）Riemann 流形. 一个满足 $F^*\tilde{g} = g$ 的光滑浸入或嵌入 $F: M \to \tilde{M}$, 分别被称为是一个 等距浸入或 等距嵌入.

定义 1.7 (等距同构)

- 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 Riemann 流形. 称光滑映射 $F:M\to N$ 是一个等距同构, 若它是一个微分同胚, 并且满足 $F^*\tilde{g}=g$.
- 更一般地, 称 F 是一个局部等距同构, 若对于每个 $p\in M$, 都存在 p 的邻域 U, 使得 $F|_U$ 是 U 到 $\tilde{M}$ 上一个开集的等距同构; 等价地说,F 是满足 $F^*\tilde{g}=g$ 的局部微分同胚.
- 称 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是等距同构的, 若存在 Riemann 流形之间的等距同构.
- 称 (M,g) 局部等距同构于 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$, 若 M 的每一点上都有等距同构于 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 上一个开集的邻域.

♣

定义 1.8 (平坦性)

称 Riemann n-流形 (M,g) 是平坦的, 且 g 是平坦度量, 若 (M,g) 局部等距同构于 $(\mathbb{R}^n,\bar{g})$

♣

Remark

1. 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是等距同构的 Riemann 流形, 那么 g 是平坦的当且仅当 $\tilde{g}$ 亦然.

   Proof 由对称性, 只需证明一边. 任取 $q\in\tilde{M}$, 设 F 是 (M,g) 到 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的等距同构, 那么存在 $p\in M$ 使得 $F(p)=q$. 若 (M,g) 是平坦的, 那么存在 p 的邻域 U, 和等距同构 φ, 使得 $\varphi:(U,g|_U)\simeq(\mathbb{R}^n,\bar{g})$. 又注意到 $F^{-1}|_{F(U)}:\left(F(U),\tilde{g}|_{F(U)}\right)\simeq(U,g|_U)$, 因此 $\varphi\circ F^{-1}|_{F(U)}:\left(F(U),\tilde{g}|_{F(U)}\right)\simeq(\mathbb{R}^n,\bar{g})$. 其中 $F(U)$ 是 p 的开邻域, 因此 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是平坦的.

定义 1.9

对于 Riemann 流形 (M,g), 以下等价

1. g 是平坦的;
2. M 上的每一点都含于某个坐标开集上, 在其上 g 有坐标表示 $g=\delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$;
3. M 上的每一点都含于某个坐标开集上, 使得其上的坐标标架是正交的;

♣

1.1.3 法丛

定义 1.10

设 (M,g) 是 n -维（带边）Riemann 流形,$S\subseteq M$ 是 k-维 Riemann 子流形.

- 对于每个 $p\in S$, 称 $v\in T_pM$ 是 S 的一个法向, 若 v 通过内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ 与 T_pS 中的每个向量垂直.
- S 在 p 处的法空间, 是指由全体 p 的法向向量组成的子空间 $N_pS\subseteq T_pM$.
- S 的法丛是指 S 在所有点的法空间的无交并 $NS\subseteq TM$.
- 投影映射 $\pi_{NS}:NS\hookrightarrow S$ 被定义为 $\pi:TM\to M$ 在 NS 上的限制.

♣

命题 1.8 (子流形的法丛)

令 (M,g) 是（带边）Riemann n-流形. 对于任意 k-维浸入子流形 $S\subseteq M$, 法丛 NS 是 $TM|_S$ 的光滑 rank-$(n-k)$ 子流形. 对于每个 $p\in S$, 存在 p 的邻域上的 NS 的关于 g 的正交标架.

♠

1.2 Riemann 距离函数

定义 1.11 (曲线长度)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形. 若 $\gamma:[a,b]\to M$ 是逐段光滑曲线, 则 γ 的长度为

$$L_g(\gamma)=\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|_g\mathrm{d}t$$

♣

命题 1.9 (等距同构不变性)

曲线的长度在 Riemann 流形的等距同构下不变. 更确切地说, 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是两个 Riemann(带边) 流形,$F:M\to\tilde{M}$ 是局部等距同构. 则 $L_{\tilde{g}}(F\circ\gamma)=L_g(\gamma)$ 对每个 M 上的逐段光滑曲线 γ 成立.

♠

Proof 由 $[a,b]$ 的紧性, 它可以分为有限个充分小的区间, 使得曲线的在区间上的像包

含在某个等距同构的开邻域上，于是

$$\begin{aligned}
L_{\tilde{g}}\left(F\circ\gamma\right) &= \int_a^b \left(\left\langle F_*\gamma'\left(t\right), F_*\gamma'\left(t\right)\right\rangle_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\left\langle \gamma'\left(t\right), \gamma'\left(t\right)\right\rangle_{F^*\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\left\langle \gamma'\left(t\right), \gamma'\left(t\right)\right\rangle_{g}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= L_g\left(\gamma\right)
\end{aligned}$$

命题 1.10 (长度的参数无关性)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形，$\gamma:[a,b]\to M$ 是逐段光滑曲线. 若 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的重参数化，那么 $L_g\left(\tilde{\gamma}\right)=L_g\left(\gamma\right)$.

Proof

1. 首先设 γ 光滑，$\varphi:[c,d]\to[a,b]$ 是微分同胚使得 $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$，并且 $\varphi'>0$. 我们有

$$\begin{aligned}
L_g\left(\tilde{\gamma}\right) &= \int_c^d \left|\tilde{\gamma}'\left(t\right)\right|_g \mathrm{d}t = \int_c^d \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\circ\varphi\right)\left(t\right)\right|_g \mathrm{d}t \\
&= \int_c^d \left|\varphi'\left(t\right)\gamma'\left(\varphi\left(t\right)\right)\right|_g \mathrm{d}t = \int_c^d \left|\gamma'\left(\varphi\left(t\right)\right)\right|_t \varphi'\left(t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left|\gamma'\left(s\right)\right|_g \mathrm{d}s \\
&= L_g\left(\gamma\right)
\end{aligned}$$

2. 当 $\varphi'<0$ 时，积分方向调换的符号改变和 $\varphi'\left(t\right)$ 移出绝对值的符号改变相抵消，结果不变.
3. 若 γ 逐段光滑，只需在每一段上重复上述过程后相加即可.

以下设 $\partial M=\varnothing$

定义 1.12 (Riemann 距离)

设 (M,g) 是连通的 Riemann 流形. 对于每个 $p,q\in M$，定义 p 到 q 的（Riemann）距离为全体 $L_g\left(\gamma\right)$ 的下确界，其中 γ 是 p 到 q 的逐段光滑曲线. 记 p 到 q 的距离为 $d_g\left(p,q\right)$.

命题 1.11 (等距同构不变)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是两个连通的 Riemann 流形，$F:M\to\tilde{M}$ 是 Riemann 等距同构. 则对于所有的 $p,q\in M$，$d_{\tilde{g}}\left(F\left(p\right),F\left(q\right)\right)=d_g\left(p,q\right)$

Proof 注意到每个连接 p, q 的逐段光滑曲线都给出长度相同的连接 $F(p)$ 与 $F(q)$ 的逐段光滑曲线，因此由定义

$$d_{\tilde{g}}(F(p), F(q)) \leq d_g(p, q)$$

相同的讨论应用与 $F^{-1}: \tilde{M} \to M$，得到另一个方向的不等式.

引理 1.1

设 g 是开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的一个 Riemann 度量. 给定紧子集 $K \subseteq U$，存在正常数 c, C，使得对于所有的 $x \in K$ 和 $v \in T_x\mathbb{R}^n$，

$$c\,|v|_{\bar{g}} \leq |v|_g \leq C\,|v|_{\bar{g}}$$

Idea 范数的齐次性保证了，范数可以被一个包含原点的简单闭合曲面所决定. 据此，考察 $|v|_{\bar{g}} = 1$ 的点构成的闭合曲面，它在里面可以装下一个以原点为中心的小球，从外面被一个以原点为中心的大球包住.

Proof 令 $L \subseteq T\mathbb{R}^n$ 为

$$L := \left\{(x, v) \in TR^n : x \in K, |v|_{\bar{g}} = 1\right\}$$

将 $T\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 等同,L 无非是 $K \times \mathbb{S}^{n-1}$，从而是紧集. 因为模长 $|v|_g$ 是 L 上正定的连续函数，因此存在 c, C，使得 $c \leq |v|_g \leq C$ 对于任意 $(x, v) \in L$ 成立. 若 $x \in K$，且 v 是非零向量，那么令 $\lambda = |v|_{\bar{g}}$，则 $(x, \lambda^{-1}v) \in L$，由范数的齐次性

$$|v|_g = \lambda\left|\lambda^{-1}v\right|_g \leq \lambda C = C\,|v|_{\bar{g}}$$

类似地有 $|v|_g \geq c\,|v|_{\bar{g}}$. 当 $v = 0$ 时不等式显然成立. 综上命题得证.

定理 1.1 (Riemann 流形作为度量空间)

设 (M, g) 是连通的 Riemann 流形. 在 Riemann 距离函数下,M 是一个度量空间，且它的度量拓扑与原本的拓扑相同.

Remark 由此，可以在连通 Riemann 流形上谈论一切度量空间的性质.

Idea

- 非负性和三角不等式不难说明，对于正定性，利用引理1.1在正则坐标球上将连接 p, q 的曲线的 Riemann 距离与坐标欧氏距离相比较，给出下界，由此说明：p, q 因为隔了一段欧氏距离，所以隔了一段 Riemann 距离，从而说明正定性.
- 说明度量拓扑开集的每一点都含于某个坐标球里：在 p 附近的坐标球里，利用度量开集的性质取度量半径充分小的度量球，利用1.1，取欧式直线段（长度是 Riemann 距离的上界）说明它包在坐标球里.

- 坐标开球中的点都含于某个 Riemann 距离球：坐标球的中心点与坐标球外的点隔了一段固定的 Riemann 距离，因此 Riemann 意义下与中心点近的点，一定在坐标开球里.

推论 1.2 (可度量性)

每个光滑（带边）流形都是可度量的. ♡

Idea

- 连通的流形可度量1.1. 对于不连通的流形，在两两连通分支之间建立长度为 1 的"桥"，这样就得到了整体的度量.
- 若要考察拓扑，只需要在每一点附近取（充分小的）连通的（度量或坐标）开球.

1.3 切-余切同构

定义 1.13 (度量诱导的丛同构)

设 (M, g) 是（带边）Riemann 流形. 按以下方式定义 $\hat{g} : TM \to T^*M$：对于每个 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$，令 $\hat{g}(v) \in T_p^*M$

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w), \quad w \in T_pM^{a}$$

则 $\hat{g}$ 是一个丛同构.

[a]通过度量配对的方式，将向量视为余向量 ♣

Idea 由于我们拿到手的就是一个逐点的定义，因此利用 $C^\infty(M)$-线性的刻画引理来说明是最方便的.

Proof 考虑 $\hat{g}$ 在向量场上的作用:

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

因为对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，关于 Y 的函数 $\hat{g}(X)(\cdot)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的，由张量场的刻画引理（??），$\hat{g}(X)$ 是光滑的余向量场. 又 $\hat{g}(X)$ 视为 X 的函数是 $C^\infty(M)$-线性的，故由丛同态的刻画引理,$\hat{g}$ 定义出光滑的丛同态.

若 $\hat{g}(v) = 0$ 对某个 $v \in T_pM$ 成立，则

$$0 = \hat{g}(v, v) = \langle v, v \rangle_g$$

正定性立即给出 $v = 0$，这表明 g 在每一点出都给出线性空间的单射，维数关系又表明这是一个双射，进而给出丛同构.

命题 1.12 (矩阵表示)

在任意光滑坐标 (x^i) 上, 设 $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$. 若 X, Y 是光滑向量场, 我们有

$$\hat{g}(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$$

这表明余向量场 $\hat{g}(X)$ 有坐标表示

$$\hat{g}(X) = g_{ij}X^i\,\mathrm{d}x^j$$

换言之, $\hat{g}$ 作为丛同态的关于 TM 和 T^*M 坐标标架的矩阵表示, 与 g 本身的矩阵相同[a].

[a] 将 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 写成行向量 $(X^1, \cdots, X^n)$, 则右指标列标固定, $\hat{g}(X) = (X^1, \cdots, X^n)(g_{ij})$ 的第 j 列就是 $g_{ij}X^i$

Proof 利用

$$Y^j = \mathrm{d}x^j(Y)$$

□

定义 1.14

通常记向量场 $\hat{g}(X)$ 的分量, 按

$$\hat{g}(X) = X_j\,\mathrm{d}x^j, \quad X_j = g_{ij}X^i \text{[a]}$$

可以说 $\hat{g}(X)$ 是通过 X 降低指标得到的. 经常记 $\hat{g}(X)$ 为 $X^\flat$.

[a] 对于欧式度量, $X_j = X^j$, 相应的降低指标无非就是把列向量写成行向量

Remark $\flat$ 在音乐中表示降调.

定义 1.15

$\hat{g}^{-1}: T_p^*M \to T_pM$ 的矩阵是矩阵 (g_{ij}) 的逆, 记作 (g^{ij}), 也是对称矩阵.
对于余向量场 $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, 向量场 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 有坐标表示

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \omega^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega^i = g^{ij}\omega_j \text{[a]}$$

可以说 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 是通过 ω 提升指标得到的, 经常记 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 为 $\omega^\sharp$

[a] 把 ω 写成列向量 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 则左指标行标固定, $\hat{g}^{-1}(\omega) = (g^{ij})(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 的第 i 行就是 $\omega^i = g^{ij}\omega_j$

Remark 符号 $\flat$ 和 $\sharp$ 是一对互逆同构, 称为是音乐同构.

定义 1.16 (梯度)

对于 Reimann 流形 (M, g) 上的光滑函数 f，定义 f 的梯度为一个向量场

$$\operatorname{grad} f := (\mathrm{d}f)^{\sharp} = \hat{g}^{-1}(\mathrm{d}f)$$

♣

Remark

- 对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle_g = \hat{g}(\operatorname{grad} f)(X) = \mathrm{d}f(X) = Xf$$

  即

$$\langle \operatorname{grad} f, \cdot\rangle_g = \mathrm{d}f$$

- $\operatorname{grad} f$ 有坐标表示

$$\operatorname{grad} f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

  特别地，在欧式度量下

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

1.4 张量的内积

定义 1.17 (余向量的内积)

设 g 是 M 上的 Riemann 度量，$x \in M$，定义 $T^*_X M$ 上的内积为

$$\langle \omega, \eta\rangle_g := \langle \omega^{\sharp}, \eta^{\sharp}\rangle_g$$

♣

Remark

1. 利用 $g_{kl}g^{ki} = g_{lk}g^{ki} = \delta^i_l$，得到

$$\begin{aligned}\langle \omega, \eta\rangle &= g_{kl}\left(g^{ki}\omega_i\right)\left(g^{lj}n\eta_j\right)\\ &= \delta^i_l g^{lj}\omega_i\eta_j\\ &= g^{ij}\omega_i\eta_j\end{aligned}$$ [1]

2. 利用升降指标的记号，可以写成

$$\langle \omega, \eta\rangle = \omega_i\eta^i = \omega^j\eta_j$$

命题 1.13

设 (M,g) 是 (带边)(伪)Riemann 流形, 令 (E_i) 是 M 的一个局部标架, (ε^i) 是对偶的余标架, 则以下等价

1. (E_i) 正交.
2. (ε^i) 正交.
3. $(\varepsilon^i)^\sharp = E_i, \forall i.$

Proof

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j\rangle &= \left\langle (\varepsilon^i)^\sharp, (\varepsilon^j)^\sharp \right\rangle \\ &= g^{ij}\end{aligned}$$

而 (E_i) 正交, 当且仅当 $g_{ij} = \delta_i^j$, 当且仅当 $g^{ij} = \delta_j^i$, 当且仅当 (ε^i) 正交.

$$(\varepsilon^i)^\sharp = g^{kj}\omega_j E_k = g^{ki}E_i$$

故

$$(\varepsilon^i)^\sharp = E_i, \forall i \iff g^{ki} = \delta_k^i, \forall k, i \iff (E_i) \text{ 正交}$$

□

定义 1.18 (光滑纤维度量)

设 $E \to M$ 是一个光滑向量丛. E 上的一个光滑纤维度量, 是指在每个纤维 E_p 上的内积, 且是光滑变化地, 即使得对于任意的 E 的 (局部) 光滑向量场 σ, τ,$\langle \sigma, \tau\rangle$ 是光滑函数.

命题 1.14 (张量的内积)

设 (M,g) 是 n 维 (带边)Riemann 流形. 则存在唯一的定义在每个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 的光滑纤维度量, 使得若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+l}$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_{k+l}$ 是合适的向量场或余向量场, 都有

$$\langle \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k+l}, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_{k+l}\rangle = \langle \alpha_1, \beta_1\rangle \cdot \cdots \cdot \langle \alpha_{k+l}, \beta_{k+l}\rangle$$

在此内积下, 若 $(E_1, \cdots, E_n)$ 是 TM 的一个局部正交标架, $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ 是对应的对偶余标架, 则形如 $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l}$ 构成 $T^{(k,l)}(T_pM)$ 的一个正交标架. 并且在任意一组标架 (不必正交) 下, 纤维度量满足

$$\langle F, G\rangle = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} F^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_l} G^{r_1, \cdots, r_k}_{s_1, \cdots, s_l}$$

若 F, G 均为协变张量, 则写作

$$\langle F, G\rangle = F_{j_1,\cdots,j_l} G^{j_1,\cdots,j_l}$$

$G^{j^1,\cdots,j^l}$ 表为提升指标:

$$G^{j_1,\cdots,j_l} = g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_l s_l} G_{s_1,\cdots,s_l}$$

1.5 构造 Riemann 流形的方法

1.5.1 Riemann 子流形

定义 1.19 (诱导度量)

设 (M, g) 是一个 Riemann 流形, 每个子流形 $S \subseteq M$(带边、浸入、嵌入) 上都继承了自然的拉回度量 $\iota^* g$, 其中 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是含入映射. 此拉回度量也称为是 S 上的诱导度量. 具体地, 对于 $v, w \in T_p S$

$$(\iota^* g)(v, w) = g\left(\mathrm{d}\iota_p(v), d\iota_p(w)\right) = g(v, w)$$

Remark

1. 将 $T_p S$ 与它在 $\mathrm{d}\iota_p$, 位于 $T_p M$ 中的像等同, 则 $(\iota^* g)(v, w) = g(v, w), v, w \in T_p S$, 因此 $(\iota^* g)$ 无非就是 g 与 S 相切的向量上的限制.

定义 1.20 (Riemann 子流形)

$(M, g), S$ 同前. 称 $(S, \iota^* g)$ 为 M 的 Riemann(带边) 子流形.

Example 1.4 $\mathbb{S}^n$ 上的诱导度量 $\mathring{g} := \iota^* \overline{g}$ 被称为是球上的圆度量, 其中 $\iota : \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Example 1.5 (图像坐标系上的诱导度量).

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集,$S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 的图像. 映射 $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$,$X(u^1, \cdots, u^n) = (u^1, \cdots, u^n, f(u))$ 是 S 的光滑全局参数表示. X 上的诱导度量由以下给出

$$X^* \overline{g} = X^*\left(\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^{n+1}\right)^2\right) = \left(\mathrm{d}u^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}u^n\right)^2 + \mathrm{d}f^2$$

Example 1.6 (旋转曲面上的诱导度量).

设 C 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$ 的 1-维嵌入子流形,S_C 是由 C 生成的旋转曲面. 为了计算 S_C 上的诱导度量, 选择 C 的光滑局部参数表示 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$. 映射 $X(t, \theta) := (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t))$ 给出 S_C 的光滑局部参数表示, 设 (t, θ) 限制在平

面的充分小的开集上. 可以计算

$$\begin{aligned} X^{*}\overline{g} &= \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\cos\theta\right)^{2} + \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\sin\theta\right)^{2} + \mathrm{d}\left(b\left(t\right)\right)^{2} \\ &= \left(a'\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t\right)^{2} \\ &\quad + \left(a'\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t\right)^{2} + \left(b'\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)^{2} \\ &= \left(a'\left(t\right)^{2} + b'\left(t\right)^{2}\right)\,\mathrm{d}t^{2} + a\left(t\right)^{2}\,\mathrm{d}\theta^{2} \end{aligned}$$

特别地, 若 γ 是单位速度曲线（以时间为参数的速度为 1 的曲线的）, 即 $\left|\gamma'\left(t\right)\right|^{2} = a'\left(t\right)^{2} + b'\left(t\right)^{2} = 1$, 则有最简单的形式 $\mathrm{d}t^{2} + a\left(t\right)^{2}\,\mathrm{d}\theta^{2}$

定义 1.21

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 m-维光滑 Riemann（带边）流形, $M\subseteq\tilde{M}$ 是 n-为光滑（带边）子流形, $\tilde{M}$ 的在一个开子集 $\tilde{U}\subseteq\tilde{M}$ 上的一个局部标架 $(E_1,\cdots,E_n)$ 被称为是与 M 适配的, 若前 n 个向量场 $(E_1,\cdots,E_n)$ 与 M 相切.

命题 1.15

令 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是一个 Riemann 流形（无边）, $M\subseteq\tilde{M}$ 是（带边）嵌入子流形[a]. 给定 $p\in M$, 存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的邻域 $\tilde{U}$, 和一个 $\tilde{M}$ 在 $\tilde{U}$ 上的光滑正交标架, 与 M 适配.

[a]这里要求嵌入子流形, 主要是为了利用切片判据, 将切空间做“光滑的分离”, 以确保正交化的施行不会让向量跑到空间外面去. 由于标架的适配性是标架在局部上的行为, 对于 M 的开子集 U, U 上与 M 适配和与 U 适配是一回事. 因此利用浸入子流形的局部嵌入性, 可以将条件放宽为浸入子流形.

Proof 由 M 是嵌入子流形, 任给 $p\in M$, 存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的坐标卡 $(U,(x^1,\cdots,x^n))$, 使得 $U\cap M$ 是 U 的一个 k-切片, 通过坐标的平移, 可以设 $U\cap M$ 上点的坐标为

$$\left(x^{1},\cdots,x^{k},0,\cdots,0\right)$$

U 上的前 k 个坐标向量场 $x^1,\cdots,x^k$ 与 M 相切, 对 $x^1,\cdots,x^n$ 施行 Schmidt 正交化, 得到 $(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)$, 则 $\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^k$ 仍与 M 相切, 因此 $(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)$ 构成一个 $\tilde{M}$ 在 U 上的与 M 适配的光滑正交标架.

□

定义 1.22 (法空间)

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是一个黎曼流形, $M\subseteq\tilde{M}$ 是 $\tilde{M}$ 的光滑（带边）子流形. 给定 $p\in M$ 和向量 $v\in T_p\tilde{M}$.

1. 称 v 与 M 是正交的, 若 $\langle v,w\rangle=0$ 对于所有的 $w\in T_pM$ 成立.
2. 全体在 p 处与 M 正交的向量构成 $T_p\tilde{M}$ 的一个子空间, 被称为是 p 处的法

空间，记作 $N_pM = (T_pM)^\perp$.

3. 正有交分解 $T_p\tilde{M} = T_pM \oplus N_pM$；
4. 称 $T\tilde{M}|_M$ 的一个截面为沿 M 的法向量场，若 $N_p \in N_pM$ 对于任意的 $p \in M$ 成立；
5. 称集合

$$NM := \coprod_{\pi \in M} N_pM$$

为 M 的法丛. ♣

命题 1.16

设 $\tilde{M}$ 是 Riemann m-流形，$M \subseteq \tilde{M}$ 是 n-维浸入或嵌入（带边）子流形，则 NM 是 $T\tilde{M}|_M$ 的光滑 rank- $(m-n)$ 子丛. 存在光滑丛同态

$$\pi^\top : T\tilde{M}|_m \to TM, \quad \pi^\perp : T\tilde{M}|_M \to NM$$

称为是切投影和法投影，对于每一点 $p \in M$，它们在 $T_p\tilde{M}$ 的限制分别表现为到 T_pM 和 N_pM 的正交投影. ♠

Proof 任给 $p \in M$，由浸入子流形的局部嵌入性，存在 p 在 M 中的邻域 U，使得 U 可以被嵌入到 $\tilde{M}$ 中. 由命题1.15，存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的邻域 $\tilde{U}$，使得 $\tilde{U}$ 上存在适配于 M（实际上是适配于 U，只不过这两者是一样的）的正交标架 $(E^1, \cdots, E^m)$. 对于每个 $q \in \tilde{U}$，$E_q^1, \cdots, E_q^n$ 构成 T_qM 的一个基，$E_q^{n+1}, \cdots, E_q^m$ 构成 N_qM 的一组基. 由子丛的局部标架判据，NM 构成 $T\tilde{M}|_M$ 的一个光滑 rank-$(m-n)$ 的子丛.

按要求逐点地定义 $\pi^\top$ 和 $\pi^\perp$ 为局部的正交投影，那么它们可以分别表示为

$$\pi^\top \left(X^1E_1 + \cdots + X^mE_m\right) := X^1E_1 + \cdots + X^nE_n$$
$$\pi^\perp \left(X^1E_1 + \cdots + X^mE_m\right) := X^{n+1}E_{n+1} + \cdots + X^mE_m$$

这表明 $\pi^\top$ 和 $\pi^\perp$ 是光滑的. □

子流形 $M \subseteq \tilde{M}$ 上的计算通常由 **光滑局部参数化的形式给出**：即一个光滑映射 $X : U \to \tilde{M}$，其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集（当 M 有边时，或为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的），使得 $X(U)$ 是 M 上的一个开集，且 X 视作 U 到 M 上的映射时，成为映到像集的微分同胚. 用 X 同时表示它视为映到 M 和映到 $\tilde{M}$ 的映射.

若令 $V = X(U) \subseteq M$，$\varphi = X^{-1} : V \to U$，则 (V, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡.

设 (M, g) 是 $\left(\tilde{M}\right), \tilde{g}$ 的 Riemann 子流形，$X : U \to \tilde{M}$ 是 M 的一个光滑局部参数化.

则 g 的坐标表示由以下 U 上的 2-张量场给出:

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* g = X^* g = X^* \iota^* \tilde{g} = (\iota \circ X)^* \tilde{g}$$

由于 $\iota \circ X$ 无非就是 X 子集 (视作到 $\tilde{M}$ 的映射), 于是上面的拉回度量就是 $X^*\tilde{g}$.

一旦 $\tilde{g}$ 的坐标表示给出, 可以轻松地计算得到拉回张量场. 例如, 若 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的 n-Riemann 浸入子流形, $X : U \to \mathbb{R}^m$ 是 M 的一个光滑局部参数化, U 上的诱导度量就是

$$g = X^*\bar{g} = \sum_{i=1}^{m} \left(\mathrm{d}X^i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X^j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^j\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \frac{\partial X^i}{\partial u^k} \mathrm{d}u^j \, \mathrm{d}u^k$$

Example 1.7 图像坐标系上的诱导度量 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $f : U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 则 f **的图像** 是子集 $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 n 维嵌入子流形. 他有全局参数化 $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, 称为是**图像参数化**, 由 $X(u) = (u, f(u))$ 给出. 相应的 M 上的坐标 $u^1, \cdots, u^n$ 称为是**图像坐标**. 在图像坐标下, $\Gamma(f)$ 的诱导度量是

$$X^*\bar{g} = X^*\left(\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^{n+1}\right)^2\right) = \left(\mathrm{d}u^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}u^n\right)^2 + \left(\mathrm{d}f\right)^2$$

应用到 $\mathbb{S}^2$ 的上半平面上, 在参数化 $X : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

下, 可以看到 $\mathbb{S}^2$ 上的圆度量可以局部地写作

$$\begin{aligned}\mathring{g} = X^*\bar{g} &= \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2 + \left(\frac{u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 \\ &= \frac{\left(1 - v^2\right)\mathrm{d}u^2 + \left(1 - u^2\right)\mathrm{d}v^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1 - u^2 - v^2}\end{aligned}$$

Example 1.8 旋转曲面 设 H 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$, $C \subseteq H$ 是 1-维嵌入子流形. 由 C 决定的 **旋转曲面**, 是指子集 $S_C \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$S_C = \left\{(x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in C\right\}$$

称 C 为它的**生成曲线**. 每个 C 的光滑局部参数化 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$, 都给出 S_C 的一个光滑局部参数化

$$X(t, \theta) = (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t))$$

设 (t, θ) 限制在坐标平面上充分小的坐标开集上. 则 t-坐标曲线 $t \mapsto X(t, \theta_0)$ 被称为是 **子午线**. θ-坐标曲线 $\theta \mapsto X(t_0, \theta)$ 被称为是**纬圆**.

S_C 上的诱导度量是

$$
\begin{aligned}
X^*\bar{g} = & \ \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\cos\theta\right)^2 + \ \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\sin\theta\right)^2 + \ \mathrm{d}\left(b\left(t\right)\right)^2 \\
& = \left(a'\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 \\
& + \left(a'\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 \\
& + \left(b'\left(t\right)\ \mathrm{d}t\right)^2 \\
& = \left(a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2\right)\ \mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2
\end{aligned}
$$

特别地，若 γ 是单位速度曲线，($\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2 = a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2 \equiv 1$)，则上述化为 $\mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2$

1.5.2 乘积

定义 1.23 (warped 积)

设 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 是两个 Riemann 流形，$f: M_1 \to \mathbb{R}^+$ 是严格正的光滑函数，定义 warped 积 $M_1 \times_f M_2$ 为配备了度量 $g = g_1 \oplus f^2 g_2$ 的积流形 $M_1 \times M_2$，其中 g 被定义为

$$
g_{(p_1,p_2)}\left(\left(v_1, v_2\right), \left(w_1, w_2\right)\right) = g_1|_{p_1}\left(v_1, w_1\right) + f\left(p_1\right)^2\ g_2|_{p_2}\left(v_2, w_2\right)
$$

♣

Example 1.9

1. 设 H 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$,$C \subseteq H$ 是 1-嵌入子流形，令 $S_C \subseteq \mathbb{R}^3$ 是对应的旋转曲面. 令 C 配备在 H 上诱导的度量，$\mathbb{S}^1$ 配备标准度量 $f : C \to \mathbb{R}$ 是到 z-轴的距离函数: $f\left(r, z\right) = r$，则 S_c 等距同构于 warped 积 $C \times_f \mathbb{S}^1$
2. 令 ρ 表示 $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ 上的标准坐标函数，则映射 $\Phi\left(\rho, \omega\right) = \rho\omega$ 给出 warped 积 $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1}$ 到 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的等距同构，其中后者配备了欧式度量.

Proof

1. 设 C 有一个单位速度参数化 $\gamma : I \to H, \gamma\left(t\right) = \left(a\left(t\right), b\left(t\right)\right)$. 则旋转的一个参数化为

$$
\left(\theta, t\right) \mapsto \left(a\left(t\right)\cos\theta, a\left(t\right)\sin\theta, b\left(t\right)\right)
$$

因此在 $\left(a\left(t\right)\cos\theta, a\left(t\right)\sin\theta, b\left(t\right)\right)$ 处，有

$$
\tilde{g} = a^2\left(t\right)\ \mathrm{d}\theta^2 + \ \mathrm{d}t^2
$$

另一方面，考虑 $\mathbb{S}^1$ 的参数化

$$
\theta \mapsto \left(\cos\theta, \sin\theta\right)
$$

以及 C 的参数化 γ, $C \times \mathbb{S}^1$ 有参数化

$$(t,\theta) \mapsto ((a(t), b(t)), (\cos\theta, \sin\theta))$$

在 $((a(t), b(t)), (\cos\theta, \sin\theta))$ 处,

$$g_1 = (\mathrm{d}a(t))^2 + (\mathrm{d}b(t))^2 = \mathrm{d}t^2$$

$$g_2 = (\mathrm{d}\cos\theta)^2 + (\mathrm{d}\sin\theta)^2 = \mathrm{d}\theta^2$$

于是此处

$$g = \mathrm{d}t^2 + f((a(t), b(t)))\,\mathrm{d}\theta^2 = \mathrm{d}t^2 + a(t)\,\mathrm{d}\theta^2$$

则考虑映射

$$\varphi : (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t)) \mapsto ((a(t), b(t)), (\cos\theta, \sin\theta))$$

则

$$\varphi^* g = \tilde{g}$$

这表明 φ 是等距同构.

2. 设 $V_\rho = \partial_\rho$ 是 $\mathbb{R}^+$ 的坐标向量场, $V_\omega \in T_p\mathbb{S}^{n-1}$. 则

$$(\Phi^*\bar{g})(V_p, V_\omega) = \bar{g}((\mathrm{d}\Phi)V_\rho, (\mathrm{d}\Phi)V_\omega)$$

通过将嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上, 可以计算得到

$$\mathrm{d}\Phi(\partial_\rho) = \omega \in T_{\rho\omega}\mathbb{R}^n$$

$$\mathrm{d}\Phi(V_\omega) = \rho V_\omega \in T_{\rho\omega}\mathbb{R}^n$$

于是

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\rho, V_\rho) = \bar{g}(\omega, \omega) = |\omega|^2 = 1$$

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\omega, V_\omega) = \bar{g}(\rho V_\omega, \rho V_\omega) = \rho^2\bar{g}(V_\omega, V_\omega)$$

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\rho, V_\omega) = \bar{g}(\omega, \rho V_\omega) = \rho\bar{g}(\omega, V_\omega) = 0$$

另一方面

$$g(V_\rho, V_\omega) = 0$$

$$g(V_\rho, V_\rho) = \bar{g}(V_\rho, V_\rho)$$

$$g(V_\omega, V_\omega) = \rho^2\bar{g}(V_\omega, V_\omega)$$

这结合对称正定 2-张量由对角元所决定, 足以说明 $g = (\Phi^*\bar{g})$

□