第 1 章　微分形式

1.1 交错张量代数

引理 1.1

设 α 是有限维线性空间 V 上的共变 k-张量，那么以下几条等价：

1. α 是交错的；
2. 若 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 线性相关，则 $\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_k) = 0$;
3. 若 k-向量组中存在相同的项，则 α 在其上取值为 0

$$\alpha(v_1, \cdots, w, \cdots, w, \cdots, v_k) = 0$$

♡

Proof 1. $\Longrightarrow$ 2., 1. $\Longrightarrow$ 3. 都显然，接下来说明 3. $\Longrightarrow$ 1. 和 3. $\Longrightarrow$ 2.

设 3. 成立，那么任取 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$，

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) + \alpha(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) \end{aligned}$$

这就说明了交错性。

此外，任取线性相关的 $v_1, v_2, \cdots, v_k$, 不妨设 $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i$, 则

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \cdots, v_k) &= \alpha\left(v_1, \cdots, \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a^i \alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_{k-1}, v_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

定义 1.1 (交错子)

定义交错子为映射 $\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$

$$\mathrm{Alt}\,\alpha := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)(\sigma\alpha)$$

♣

Example 1.1 若 α 是 1-张量，那么 $\mathrm{Alt}\alpha = \alpha$。若 β 是 2-张量，那么

$$(\mathrm{Alt}\beta)(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v))$$

若 γ 是 3-张量，则

$$\begin{aligned} (\mathrm{Alt}\,\gamma)(v, w, x) =& \frac{1}{6}(\gamma(v, w, x) + \gamma(w, x, v) + \gamma(x, v, w)) \\ &- \frac{1}{6}(\gamma(w, v, x) - \gamma(v, x, w) - \gamma(x, w, v)) \end{aligned}$$

命题 1.1

设 α 是有限维线性空间上的交错张量，那么

1. $\mathrm{Alt}\,\alpha$ 是交错的；
2. $\mathrm{Alt}\,\alpha=\alpha$ 当且仅当 α 是交错的；

1.1.1 初等交错张量

定义 1.2 (多重指标)

对于给定的正整数 k, 称有序的 k-元组 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 为一个长度为 k 的多重指标。若 I 是这样一个多重指标，$\sigma\in S_k$, 令 I_σ 为

$$I_\sigma=\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k)}\right)$$

定义 1.3 (初等交错张量)

是 V 是 n-维线性空间，$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V^* 的一组基。对于每个 $I=(i_1,\cdots,i_k)$, 使得 $1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n$, 定义一个共变 k-张量 $\varepsilon^I:=\varepsilon^{i_1\cdots i_k}$

$$\varepsilon^I\left(v_1,\cdots,v_k\right)=\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_1}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_1}\left(v_k\right)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varepsilon^{i_k}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_k}\left(v_k\right)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}v_1^{i_1} & \ldots & v_k^{i_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1^{i_k} & \ldots & v_k^{i_k}\end{pmatrix}.$$

称为初等交错张量或初等 k-余向量。

定义 1.4

设 I,J 是长度为 k 的多重指标，定义 δ_J^I

$$\delta_J^I=\det\begin{pmatrix}\delta_{j_1}^{i_1} & \ldots & \delta_{j_k}^{i_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta_{j_1}^{i_k} & \ldots & \delta_{j_k}^{i_k}\end{pmatrix}$$

Remark

- $$\delta_J^I=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sigma & \text{若}I\text{和}J\text{均无重复指标, 并且}J=I_\sigma\text{对某个}\sigma\in S_k\text{成立}\\ 0 & \text{若}I\text{或}J\text{有重复指标，或}J\text{不是}I\text{的一个置换}\end{cases}$$

Proof 当无重复指标，且 J 是 I 的置换时

$$\begin{aligned}
\delta_J^I = \det\begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}\left(E_{j_1}\right) & \cdots & \varepsilon^{i_1}\left(E_{j_k}\right) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}\left(E_{j_1}\right) & \cdots & \varepsilon^{i_k}\left(E_{j_k}\right) \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon^I\left(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k}\right) \\
&= (\operatorname{sgn}\sigma)\left(\sigma\varepsilon^I\right)\left(E_{i_1}, \cdots, E_{i_k}\right) \\
&= \operatorname{sgn}\sigma
\end{aligned}$$

当有重复指标时显然 $\delta_J^I = 0$ 当 J 不是 I 的置换时，不妨设 j_k 不在 I 中，那么 δ_J^I 的行列式的第 k 列为 0。

引理 1.2 (初等 k-余向量的性质)

设 (E_i) 是 V 的一组基，$\left(\varepsilon^i\right)$ 是 V^* 的对偶基，则

- 若 I 有重复指标，则 $\varepsilon^I = 0$;
- 若 $J = I_\sigma$ 对某个 $\sigma \in S_k$ 成立，则 $\varepsilon^I = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\varepsilon^J$;
- $\varepsilon^I\left(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k}\right) = \delta_J^I$

♡

Proof 只证明第二条，

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{I_\sigma}\left(v_1, \cdots, v_k\right) &= \det\begin{pmatrix} \varepsilon^{i_{\sigma(1)}}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_{\sigma(1)}}\left(v_k\right) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varepsilon^{i_{\sigma(k)}}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_{\sigma(k)}}\left(v_k\right) \end{pmatrix} \\
&= \left(\operatorname{sgn}\sigma^{-1}\right)\det\begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_1}\left(v_k\right) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_k}\left(v_k\right) \end{pmatrix} \\
&= (\operatorname{sng}\sigma)\,\varepsilon^I\left(v_1, \cdots, v_k\right)
\end{aligned}$$

定义 1.5 (递增指标)

称多重指标 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是递增的，若 $i_1 < \cdots < i_k$

♣

Remark 常用 $\sum'$ 表示对递增指标的求和，例如

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I := \sum_{\{I: i_1 < \cdots < i_k\}} \alpha_I \varepsilon^I$$

命题 1.2 (交错张量空间的基)

设 V 是 n-维线性空间,(ε^i) 是 V^* 的一组基，则对于每个正整数 $k \le n$，集合

$$\mathscr{E} = \left\{\varepsilon^I : I\text{是长度为 k 的递增指标}\right\}$$

构成 $\Lambda^k(V^*)$ 的一组基。因此

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

若 $k > n$，则 $\Lambda^k(V^*) = 0$

Proof 当 $k > n$ 时，任意 k 个 V 中的向量都是线性相关的，故由引理6.1,V 上的任意交错 k-张量都是零映射。

当 $k \le n$ 时，为了说明 $\mathscr{E}$ 张成了 $\Lambda^k(V^*)$，令 $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$。对于每个多重指标 $I = (i_1, \cdots, i_k)$，定义

$$\alpha_I := \alpha(E_{i_1}, \cdots, E_{i_k})$$

α 的交错性给出：若 I 有重复指标，则 $\alpha_I = 0$，并且 $\alpha_J = (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha_I$，若 $J = I\sigma$，因此任取多重指标 J，我们有

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k}) = \sum_I{}' \alpha_I \delta_J^I = \alpha_J = \alpha(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k})$$

这表明 $\sum_I' \alpha_I \varepsilon^I = \alpha$，因此 $\mathscr{E}$ 张成了 $\Lambda^k(V^*)$。

为了说明 $\mathscr{E}$ 中元素线性无关，设

$$\sum_I{}' k_I \varepsilon^I = 0$$

对每个 $J = (j_1, \cdots, j_k)$，上式两端作用在 $(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k})$ 上，即可得到 $k_J = 0$，这就说明了线性无关性。

推论 1.1

对于 n 维线性空间 V, $\Lambda^n(V^*)$ 是由 $\varepsilon^{1\cdots n}$ 张成的 1-维线性空间，并且该初等 k-余向量在 $(v_1, \cdots, v_n)$ 上作用的取值为系数矩阵的行列式。

命题 1.3

设 V 是 n-维线性空间，$\omega \in \Lambda^n(V^*)$。若 $T : V \to V$ 是线性映射，$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 V 上的向量，那么

$$\omega(Tv_1, \cdots, Tv_n) = (\det T)\,\omega(v_1, \cdots, v_n)$$

Proof 设 (E_i) 是 V 的一组基 (ε_i) 是对偶基，设 T 的表示矩阵为 $\left(T_i^j\right)$，令 $T_i := TE_i = T_i^j E_j$。由引理6.1，$\omega = c\varepsilon^{1\cdots n}$ 对于某个实数 c 成立。

由所证式子两端的交错性，不妨只考虑 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关的情况，又由多线性不只考虑 $(v_1, \cdots, v_n) = (E_1, \cdots, E_n)$。事实上，

$$\begin{aligned} \omega\left(TE_1, \cdots, TE_n\right) &= c\varepsilon^{1\cdots n}\left(T_1, \cdots, T_n\right) \\ &= c\det\left(\varepsilon^j\left(T_j\right)\right) \\ &= c\det\left(T_i^j\right) = c\det T \end{aligned}$$

另一方面

$$(\det T)\,\omega\left(E_1, \cdots, E_n\right) = (\det T)\,c\varepsilon^{1\cdots n}\left(E_1, \cdots, E_n\right) = c\det T$$

这就说明了命题。

1.1.2 楔积

定义 1.6 (楔积)

设 V 是有限维实线性空间。给定 $\omega \in \Lambda^k\left(V^*\right)$ 和 $\eta \in \Lambda^l\left(V^*\right)$, 定义它们的楔积或外积，为 $(k+l)$-余向量

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}\left(\omega \otimes \eta\right)$$

♣

上面这坨诡异的系数其实是为了方便下面的引理

引理 1.3

设 V 是 n 维线性空间，$\left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\right)$ 是 V^* 的一组基。对于任意多重指标 $I = (i_1, \cdots, i_k)$ 和 $J = (j_1, \cdots, j_l)$,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$$

其中 $IJ := (i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)$。

♡

Proof 由多线性，只需要说明

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) = \varepsilon^{IJ}\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right)$$

对每一列基向量 $(E_1, \cdots, E_{k+l})$ 成立，接下来分 4 种情况讨论。

1. 当 $P = (p_1, \cdots, p_{k+l})$ 中有重复指标时，两边根据定义均为 0。
2. 当 P 中含有均不在 I, J 中出现的指标时，右侧由引理6.2可知为零，此外左侧求和式的每一项，要么包含 ε^I 作用的不是指标为 I 的基向量的置换，要么 ε^J 不是，故每一项均为零，因此左侧式也为零。

3. 当 $P=IJ$，且 P 中无重复项时，右侧由引理6.2取 1。左侧

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) \\
=&\frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}\left(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J\right)\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) \\
=&\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_k}(\operatorname{sgn} \sigma) \varepsilon^I\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_k}\right) \varepsilon^J\left(E_{p_{k+1}}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right)
\end{aligned}
$$

当存在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的置换 $\tau \in S_k$，和 $\{k+1,\cdots,k+l\}$ 的置换 $\eta \in S_l$，使得 $\sigma=\tau\eta$ 时，最下方和式的一项才会非零，因此

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) \\
&=\frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in S_k, \eta \in S_l}(\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn} \eta) \varepsilon^I\left(E_{p_{\tau(1)}}, \cdots, E_{p_{\tau(k)}}\right) \varepsilon^J\left(E_{p_{\tau(k+1)}}, \cdots, E_{p_{\tau(k+l)}}\right) \\
&=\left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k}(\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^I\left(E_{p_{\tau(1)}}, \cdots, E_{p_{\tau(k)}}\right)\right)\left(\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l}(\operatorname{sgn} \eta) \varepsilon^J\left(E_{p_{\tau(k+1), \cdots, E_{p_{\tau(k+l)}}}}\right)\right) \\
&=\left(\operatorname{Alt} \varepsilon^I\right)\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_k}\right)\left(\operatorname{Alt} \varepsilon^J\right)\left(E_{p_{k+1}}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) \\
&=\varepsilon^I\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_k}\right) \varepsilon^J\left(E_{p_{k+1}}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) \\
&=1
\end{aligned}
$$

4. 当 P 是 IJ 的置换，且 P 无重复指标时，通过一个置换化为第三种情况。

命题 1.4

设 $\omega, \omega', \eta, \eta'$ 和 ξ 是有限维线性空间 V 上的多重余向量，则

1. 双线性：对于 $a, a' \in \mathbb{R}$,
$$\left(a\omega+a'\omega'\right) \wedge \eta=a(\omega \wedge \eta)+a'\left(\omega' \wedge \eta\right)$$
$$\eta \wedge\left(a\omega+a'\omega'\right)=a(\eta \wedge \omega)+a'\left(\eta \wedge \omega'\right)$$
2. 结合律：
$$\omega \wedge(\eta \wedge \xi)=(\omega \wedge \eta) \wedge \xi$$
3. 反交换律：对于 $\omega \in \Lambda^k\left(V^*\right)$,$\eta \in \Lambda^l\left(V^*\right)$
$$\omega \wedge \eta=(-1)^{kl} \eta \wedge \omega .$$
4. 设 $\left(\varepsilon^i\right)$ 是 V^* 的任意一组基，$I=\left(i_1, \cdots, i_k\right)$, 则
$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}=\varepsilon^I .$$
5. 对于任意余向量 $\omega^1, \cdots, \omega^k$ 和向量 $v_1, \cdots, v_k$,
$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\left(v_1, \cdots, v_k\right)=\det\left(\omega^j\left(v_i\right)\right)$$

♠

Proof 双线性由张量积的双线性及 Alt 的线性立即得到。

对于结合律，只需注意到

$$\left(\varepsilon^{I}\wedge\varepsilon^{J}\right)\wedge\varepsilon^{K}=\varepsilon^{IJ}\wedge\varepsilon^{K}=\varepsilon^{IJK}=\varepsilon^{I}\wedge\varepsilon^{JK}=\varepsilon^{I}\wedge\left(\varepsilon^{J}\wedge\varepsilon^{K}\right)$$

再由双线性得到一般的情况。

对于反交换律，设 τ 是 IJ 到 JI 的置换，则

$$\varepsilon^{I}\wedge\varepsilon^{J}=\varepsilon^{IJ}=(\operatorname{sgn}\tau)\,\varepsilon^{JI}=(\operatorname{sgn}\tau)\,\varepsilon^{J}\wedge\varepsilon^{I}$$

再由双线性得到。

性质 4. 由引理6.3归纳得到。

对于性质 5., 考虑 $\omega^1,\ldots,\omega^k$ 是基 $\left(\varepsilon^i\right)$ 的一部分的情况，该情况由 4. 和初等余向量的定义立即得到。对于一般的情况，只需注意到所需等式两端的多线性，两边分别拆成若干 $\varepsilon^K\left(v_1,\ldots,v_k\right)$ 和 $\det\left(\varepsilon^{k_j}\left(v_i\right)\right)$ 的和，每一项两两相等。

定义 1.7 (可分解性)

称 k-余向量是可分解的，若存在余向量 $\omega^1,\cdots,\omega^k$，使得 $\eta=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k$ ♣

Remark

- 对于 $k>1$，存在不可分解的 k-余向量。
- 任意 k-余向量写作可分解余向量的线性组合。

命题 1.5 (楔积的泛性质)

楔积是唯一的具有结合律、双线性、反交换律且满足

$$\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}=\varepsilon^{I}$$

的 $\Lambda^k\left(V^*\right)\times\Lambda^l\left(V^*\right)\to\Lambda^{k+l}\left(V^*\right)$ 的映射。 ♠

Proof 任取 k-余向量和 l-余向量 ω,η，则 ω,η 均写作 ε^I 的线性组合。将每个 ε^I 写作 $\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}$ 的形式，利用结合律、双线性、反交换律，易见 $\omega\wedge\eta$ 的唯一性。

定义 1.8 (外代数)

设 V 是 n-维线性空间，定义线性空间 $\Lambda\left(V^*\right)$

$$\Lambda\left(V^*\right)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^k\left(V^*\right)$$

在楔积下，$\Lambda\left(V^*\right)$ 构成反交换的分次代数，称为 V 的外代数（或 Grassman 代数）。 ♣

Remark

- $\dim\Lambda\left(V^*\right)=2^n$

1.1.3 内部乘法

定义 1.9

设 V 是有限维线性空间，对每个 $v \in V$，定义线性映射

$$i_v : \Lambda^k (V^*) \to \Lambda^{k-1} (V^*)$$

称为通过 v 的内部乘法，

$$i_v\omega (w_1, \cdots, w_{k-1}) := \omega (v, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1})$$

♣

Remark

- 约定当 ω 为零向量时，$i_v\omega := 0$

引理 1.4

设 V 是有限维线性空间，$v \in V$，则

1. $i_v \circ i_v = 0$
2. 若 $\omega \in \Lambda^k (V^*)$,$\eta \in \Lambda^l (V^*)$, 则

$$i_v (\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v\eta)$$

♡

Proof 只证明第二条。

由于每个正 rank 的余向量都可以写作可分解余向量的线性组合，因此只需考虑 ω 和 η 均可分解的情况即可。该特殊情况的公式是下面的公式的直接结果: 对于 $\omega^1, \cdots, \omega^k$，以下成立

$$i_v \left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i (v) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k$$

为此，取 $v_1 = v$，并任取 $v_2, \cdots, v_k$，接下来证明

$$\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right) (v_1, \cdots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i (v_1) \left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k\right) (v_2, \cdots, v_k)$$

左侧取值为 $\det\left(\omega^i (v_j)\right)$，右侧取值为 $\left(\omega^i (v_j)\right)$ 按第一行的展开式, 故二者相等。

1.2 流形上的微分形式

定义 1.10

设 M 是 n-维光滑流形, 回忆 T^kT^*M 是 M 上的共变 k-张量丛, 由全体交错张量的子集记作 Λ^kT^*M

$$\Lambda^kT^*M := \coprod_{p\in M} \Lambda^k (T_p^*M)$$

♣

Remark

1. $\Lambda^k T^*M$ 是 $T^k T^*M$ 的光滑子丛，进而是 M 上的 rank-$\binom{n}{k}$ 的光滑向量丛。

Proof 在每个坐标上取 $T^k T^*M$ 的坐标标架中交错的项，它构成 $\lambda^k T^*M$ 的一个局部光滑标架，从而由子丛光滑性的局部标架判据，$\Lambda^k T^*M$ 是光滑子丛。

定义 1.11 (微分形式)

$\Lambda^k T^*M$ 的一个截面被称为是一个微分 k-形式，或简称 k-形式。即一个（连续）的张量场，它在每一点处的取值均为一个交错张量。k-被称为是形式的次数。即全体光滑 k-形式构成的向量空间为

$$\Omega^k(M) := \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$$

♣

Remark

- 可以逐点的定义两个微分形式的楔积: $(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$
- 定义 $\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$，则 $\Omega^*(M)$ 构成一个反交换的分次代数。

命题 1.6 (基表示)

在每个光滑坐标卡上，k-形式 ω 写作

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}x^I$$

♠

Remark

- 视 ω_I 为 0-形式，数乘无非是 0-形式的楔积。
- 每个 ω_I 都是连续函数，且 ω 光滑当且仅当每个 ω_I 均光滑。
- 引理6.2翻译为
$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta^I_J$$
- 分量 ω_I 由
$$\omega_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)$$
给出

定义 1.12 (微分形式的拉回)

是 $F: M \to N$ 是光滑映射，ω 是 N 上的微分形式，拉回 $F^*\omega$ 被定义为 ω 作为张量场通过 F 的拉回，它是 M 上的一个微分形式：

$$(F^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v_1), \cdots, \mathrm{d}F_p(v_k))$$

♣

引理 1.5 (拉回的性质)

设 $F:M\to N$ 是光滑映射，则

1. $F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性映射。
2. $F^*(\omega\wedge\eta)=(F^*\omega)\wedge(F^*\eta)$;
3. 在任意光滑坐标卡上

$$F^*\left(\sum_I{}'\omega_I\,\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}\right)=\sum_I{}'(\omega_I\circ F)\,\mathrm{d}\left(y^{i_1}\circ F\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(y^{i_k}\circ F\right)$$

♡

Proof

1. 由逐点拉回的线性立即得到；
2.
$$\begin{aligned}
&(F^*(\omega\wedge\eta))_p(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+l})\\
&=(\omega\wedge\eta)_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v_1),\cdots,\mathrm{d}F_p(v_k),\mathrm{d}F_p(v_{k+1}),\cdots,\mathrm{d}F_p(v_{k+l}))\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_k}\omega_{F(p)}\left(\mathrm{d}F_p\left(v_{\sigma(1)}\right),\cdots,\mathrm{d}F_p\left(v_{\sigma(k)}\right)\right)\eta_{F(p)}\left(\mathrm{d}F_p\left(v_{\sigma(k+1)}\right),\cdots,\mathrm{d}F_p\left(v_{\sigma(k+l)}\right)\right)\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_k}(F^*\omega)_p\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)(F^*\eta)_p\left(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)}\right)\\
&=(F^*\omega\wedge F^*\eta)_p(v_1,\cdots,v_{k+l})
\end{aligned}$$
3. 由结合律，

$$\sum_I{}'\omega_I\,\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}=\sum_I{}'\left(\omega_I\,\mathrm{d}y^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}$$

由性质 1.2. 和结合律归纳地得到

$$F^*\left(\sum_I{}'\omega_I\,\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}\right)=\sum_I{}'\left(F^*\omega_I\,\mathrm{d}y^{i_1}\right)\wedge\left(F^*\,\mathrm{d}y^{i_2}\right)\wedge\cdots\wedge\left(F^*\,\mathrm{d}y^{i_k}\right)$$

由 1-形式拉回的性质，我们得到上式等于

$$\begin{aligned}
&\sum_I{}'\left((\omega_I\circ F)\,\mathrm{d}\left(y^{i_1}\circ F\right)\right)\wedge\mathrm{d}\left(y^{i_1}\circ F\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(y^{i_k}\circ F\right)\\
&=\sum_I{}'(\omega_I\circ F)\,\mathrm{d}\left(y^{i_1}\circ F\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(y^{i_k}\circ F\right)
\end{aligned}$$

Example 1.2 设 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(u,v)=\left(u,v,u^2-v^2\right)$,$\omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2-形式 $y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。

拉回映射 $F^*\omega$ 按以下方式计算

$$\begin{aligned}
F^*\left(y\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z\right)&=(y\circ f)\,\mathrm{d}\,(x\circ F)\wedge\,\mathrm{d}\,(z\circ F)+(x\circ F)\,\mathrm{d}\,(y\circ F)\wedge\,\mathrm{d}\,(z\circ F)\\
&=v\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}\left(u^2-v^2\right)+u\,\mathrm{d}v\wedge\,\mathrm{d}\left(u^2-v^2\right)\\
&=v\,\mathrm{d}u\wedge(2u\,\mathrm{d}u-2v\,\mathrm{d}v)+u\,\mathrm{d}v\wedge(2u\,\mathrm{d}u-2v\,\mathrm{d}v)\\
&=2uv\left(\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}u-\,\mathrm{d}v\wedge\,\mathrm{d}v\right)-2v^2\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v+2u^2\,\mathrm{d}v\wedge\,\mathrm{d}u\\
&=-2\left(v^2+u^2\right)\,\mathrm{d}u\wedge\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Example 1.3 令 $\omega=\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 2-形式，视极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 为单位映射关于不同坐标的坐标表示，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y&=\mathrm{Id}^*\left(\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y\right)\\
&=\,\mathrm{d}\,(r\cos\theta)\wedge\,\mathrm{d}\,(r\sin\theta)\\
&=(\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)\wedge(\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&=-r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r+r\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&=r\,\mathrm{d}r\wedge\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

命题 1.7 (顶形式的拉回)

设 $F:M\to N$ 是 n-维 (带边) 流形之间的光滑映射。设 $\left(x^i\right)$ 和 $\left(y^j\right)$ 分别是开子集 $U\subseteq M$ 和 $V\subseteq N$ 上的光滑坐标，且 u 是 V 上的连续实值函数，那么在 $U\cap F^{-1}(V)$ 上有以下成立

$$F^*\left(u\,\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}y^n\right)=(u\circ F)\,(\det DF)\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x^n$$

其中 DF 表示 F 在这些坐标上的 Jacobi 矩阵。

Proof 由于 Λ^nT^*M 在每一点处的纤维由 $\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x^n$ 张成，因此只需要说明等式两端在 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ 上的取值相同。一方面

$$F^*\left(u\,\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}y^n\right)=(u\circ F)\,\mathrm{d}F^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}F^n$$

命题**??**给出

$$\mathrm{d}F^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}F^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=\det\left(\mathrm{d}F^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)=\det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right)$$

另一方面

$$\left(\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x^n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=1$$

分别带入即可。

推论 1.2

设 $(U,(x^i))$ 和 $\left(\tilde{U},(\tilde{x}^j)\right)$ 是 M 上相交的光滑坐标卡，则以下恒等式在 $U\cap\tilde{U}$ 上成立：

$$\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n=\det\left(\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

♡

Proof 上面的命题中将 F 取成单位映射，它关于这两个坐标的 Jacobi 就是 $\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}$

定义 1.13 (内部乘法)

内部乘法自然地推广到向量场和微分形式上，取逐点的作用：对于 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 和 $\omega\in\Omega^k(M)$，定义一个 $(k-1)$-形式 $i_X\omega$

$$(i_X\omega)_p:=i_{X_p}\omega_p$$

♣

命题 1.8

设 X 是 M 上的光滑向量场，则

1. 若 ω 是光滑的微分形式，则 $i_X\omega$ 是光滑的；
2. $i_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的，因此对应与光滑的丛同态 $i_X:\lambda^kT^*M\to\Lambda^{k-1}T^*M$

♠

Proof

1. 设 $\omega=\sum_I'\omega_I\,\mathrm{d}x^I$, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 设 $i_x\omega=\sum_J'\omega_J'\,\mathrm{d}x^J$, 则
$$\omega_J=(i_X\omega)\left(\mathrm{d}x^J\right)=X^i\omega^{(i,J)}=X^i\omega_{(i,J)}$$
其中 X^i 和 $\omega_{(i,J)}$ 均为光滑函数，因此 $i_X\omega$ 是光滑的。
2. i_X 的 $C^\infty(M)$-线性由逐点内部乘法的线性，以及 1. 得到。

1.3 外微分

定义 1.14 (欧氏空间上的外微分)

设 $\omega=\sum_J'\omega_J\,\mathrm{d}x^J$ 是开集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{H}^n$) 上的光滑 k-形式。定义 $\mathrm{d}\omega$ 为以下 $(k+1)$-形式

$$\mathrm{d}\left(\sum_J{}'\omega_J\,\mathrm{d}x^J\right):=\sum_J{}'\mathrm{d}\omega_J\wedge\mathrm{d}x^J$$

具体地

$$\mathrm{d}\left(\sum_J{}'\omega_J\,\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge x^{j_k}\right):=\sum_J{}'\sum_i\frac{\partial\omega_J}{\partial x^i}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}$$

♣

Remark

1. 当 ω 是 1-形式时，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\omega_j \,\mathrm{d}x^j\right) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i\right) \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

此时 ω 是闭的，当且仅当 $d\omega = 0$.

2. 当 f 是零形式时

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \,\mathrm{d}x^i$$

命题 1.9 ($\mathbb{R}^n$ 上外微分的性质)

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上是线性的；
2. 若 ω 是光滑 k-形式，η 是光滑 l-形式，它们定义在开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{H}^n$) 上，则

$$\mathrm{d}\left(\omega \wedge \eta\right) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \,\omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

3. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$;
4. d 与拉回交换：若 U 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$ 上的开集，V 是 $\mathbb{R}^m$ 或 $\mathbb{H}^m$ 上的开集，$F : U \to V$ 是光滑映射，$\omega \in \Omega^k\left(V\right)$，则

$$F^*\left(\mathrm{d}\omega\right) = d\left(F^* \omega\right)$$

Proof

1. 线性由定义和切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的线性显然；
2. 由 d 和 $\wedge$ 的线性，只需考虑 $\omega = u \,\mathrm{d}x^I$ 和 $\eta = v \,\mathrm{d}x^J$ 的情况。需要先说明对于一般的多重指标 I (不要求递增)，有 $\mathrm{d}\left(u \,\mathrm{d}x^I\right) = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^I$ 成立：事实上，设 J 是递增指标，$\sigma \in S_k$，使得 $J = I_\sigma$，则

$$\mathrm{d}\left(u \,\mathrm{d}x^I\right) = (\operatorname{sgn}\,\sigma)\,\mathrm{d}\left(u \,\mathrm{d}x^J\right) = (\operatorname{sgn}\,\sigma)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^J = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^I$$

接下来，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\omega \wedge \eta\right) &= \mathrm{d}\left(u \,\mathrm{d}x^I \wedge v \,\mathrm{d}x^J\right) \\ &= \mathrm{d}\left(uv\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J\right) \\ &= \left(v \,\mathrm{d}u + u \,\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J\right) \\ &= \left(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^I\right) \wedge \left(v \,\mathrm{d}x^J\right) + (-1)^k \; u\mathrm{d}x^I \wedge \left(\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}x^J\right) \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \,\omega \wedge \mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

3. 对于 $k=0$ 的情况，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\mathrm{d}u\right) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j\right) \\ &= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0 \end{aligned}$$

利用上面的结果和 2.，考虑一般的情况

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right) &= \mathrm{d}\left(\sum_J{}' \,\mathrm{d}\omega_J \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}\right) \\ &= \sum_J{}' \,\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega_J\right) \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \\ &+ \sum_J{}' \sum_{i=1}^{k} (-1)^k \,\mathrm{d}\omega_J \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = 0 \end{aligned}$$

4. 由线性，只需要检查 $\omega = u\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ 的情况，此时，左侧为

$$\begin{aligned} F^*\left(\mathrm{d}\omega\right) &= F^*\left(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right) \\ &= \mathrm{d}\left(u \circ F\right) \wedge \mathrm{d}\left(x^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(x^{i_k} \circ F\right) \end{aligned}$$

□

利用这些性质将微分形式的定义移植到流形上去

定理 1.1 (流形上外微分的存在唯一性)

设 M 是光滑带边流形。则对所有的 k 存在唯一的算子 $d:\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, 使得以下性质成立：

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上线性；
2. 若 $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$, 则

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

3. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$;
4. 对于 $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分，由 $\mathrm{d}f(X) = Xf$ 给出。

♡

Proof 对于 M 上的任意一个光滑坐标卡 (U,φ)，在其上定义

$$\mathrm{d}\omega := \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)$$

右侧式为上面定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的外微分在 φ 下的拉回。需要说明此定义是良定义的，为此，考虑两个重叠的光滑坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) , 则 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是它们之间的过渡函数，为 $\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{H}^n$ ）上的开子集的微分同胚。由命题6.9,

$$\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right) = \mathrm{d}\left(\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)^* \varphi^{-1*}\omega\right)$$

又 $\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)^* = \psi^{-1*}\varphi^*$ 因此

$$\psi^{-1*}\varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right) = \mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)$$

从而

$$\varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right) = \psi^* \mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)$$

这就说明了良定义性。再来说明这样定义的外微分满足性质 1.-4. 首先线性由 $\mathbb{R}^n$ 上 d 的线性和拉回的线性是显然的。再来考虑 2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}(\omega \wedge \eta)\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega \wedge \varphi^{-1*}\eta\right) \\
&= \varphi^* \left(\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right) \wedge \varphi^{-1*}\eta + (-1)^k \varphi^{-1*}\omega \wedge \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\eta\right)\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right) \wedge \varphi^*\varphi^{-1*}\eta + (-1)^k \varphi^*\varphi^{-1*}\omega \wedge \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\eta\right) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

对于 3,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d} \circ (\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}\left(\varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\varphi^{-1*}\omega\right) \equiv 0
\end{aligned}$$

对于 4.

$$\mathrm{d}f(X) = \varphi^* \mathrm{d}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(X) = \mathrm{d}\left(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi\right)(X) = Xf$$

其中第二个等号后的 d 既可以表示外微分，又可以表示函数微分，从而可以通过 φ^* 拉回为函数的微分 $\mathrm{d}f$。

为了说明唯一性，设 d 是任意满足上面四条性质的算子。首先需要说明 $\mathrm{d}\omega$ 是被局部决定的：若 ω_1 和 ω_2 是在开集 $U \subseteq M$ 上相等的微分形式，任取 $p \in U$，设 ψ 是 p 点的支撑在 U 的光滑 bump 函数，令 $\eta = \omega_1 - \omega_2$，则 $\psi\eta$ 通过补充 U 以外的定义为 0，是恒为 0 的微分形式，从而 $0 = \mathrm{d}\psi\eta = \psi\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\psi \wedge \eta$，在 p 的附近，我们有 $\psi \equiv 1$，且 $d\psi \equiv 0$，因此 $\mathrm{d}\omega_1|_p - \mathrm{d}\omega_2|_p = 0$.

现在任取 $\omega \in \Omega^k(M)$，设 (U, φ) 是任意光滑坐标卡，则 ω 在 U 上可以写作 $\sum_I' \omega_I \,\mathrm{d}x^I$，任取 $p \in U$，通过延拓 ω_I 和 x^I 得到新的微分形式 $\sum_I' \tilde{\omega}_I \,\mathrm{d}\tilde{x}^I$，它在 p 的附近与 ω 相等。上面的四条性质和前文的讨论表明，$\mathrm{d}\left(\sum_I' \tilde{\omega}_I \,\mathrm{d}\tilde{x}^I\right)$ 在 p 的附近由 ω_I 和 $\mathrm{d}x^I$ 唯一确定，因此 ω 是被唯一决定了的。 □

定义 1.15

若 $A = \bigoplus_k A^k$ 是分次代数，线性映射 $T: A \to A$ 被称为是一个 m 次的映射，若 $T\left(A^k\right) \subseteq A^{k+m}$。它被称为是一个反导子，若它满足

$$T(x, y) = (Tx)\,y + (-1)^k x\,(Ty), \quad x \in A^k, y \in A^l$$

♣

Remark 上面的定理由此可以表述为：函数的微分可以唯一地延拓到 $\Omega^*(M)$ 上次数为 +1 且平方为 0 的反导子。

命题 1.10 (内部乘法的反导子性)

设 M 是光滑流形，$X \in \mathfrak{X}(M)$。内部乘法 $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ 是次数为 -1 且平方为 0 的反导子。

Proof 次数为 -1 和平方为 0 是显然的，接下来考虑反导子性。由引理6.4得到反导子性。 □

命题 1.11 (外微分与拉回的交换性)

设 $F : M \to N$ 是光滑映射，对于每个 k，拉回映射 $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 与 d 交换：

$$F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(F^*\omega), \quad \omega \in \Omega^k(N)$$

Proof 分别任取 M 和 N 的光滑坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 在 $U \cap F^{-1}(V)$ 上

$$\begin{aligned}
F^*(\mathrm{d}\omega) &= F^*\psi^*\,\mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)\\
&= \varphi^* \circ \left(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)^* \mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)\\
&= \varphi^*\,\mathrm{d}\left(\omega \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\\
&= \varphi^*\,\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}F^*\omega\right)\\
&= \mathrm{d}(F^*\omega)
\end{aligned}$$

□

定义 1.16

称光滑微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 是闭的，若 $\mathrm{d}\omega = 0$。称它是恰当的，若存在 $(k-1)$ 形式 η，使得 $\omega = \mathrm{d}\eta$。