

第 1 章 Gauss-Bonnet 定理

1.1 平面简单闭合曲线与旋转指标定理

1.1.1 光滑曲线的旋转指标

定义 1.1 (简单闭合曲线)

设 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是平面上的一个容许曲线. 称 γ 是简单闭合曲线, 若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 且 γ 在 $[a, b)$ 上是单射.



定义 1.2

定义平面容许曲线 γ 的单位切向量场 T , 为以下给出的沿每个 γ 的光滑线段的向量场

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$



Remark 由于 \mathbb{R}^2 上的每个切空间都与 \mathbb{R}^2 自然地等同, 可以认为 T 是映到 \mathbb{R}^2 的映射, 由于 T 是单位长度的, 他可以视为 S^1 上的映射.

定义 1.3 (切角)

若 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑 (或至少连续可微) 的正则曲线. 若连续函数 $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

则称 θ 为 γ 的一个切角函数.



Remark

1. 令 $q : \mathbb{R} \rightarrow S^1, q(s) = (\cos s, \sin s)$, 若给定某一点处的取值, 则 S^1 上的连续函数 T 在 \mathbb{R} 上存在唯一的同伦提升 $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $q \circ \theta = T$.
2. 上面这条表明切角函数是存在的, 且在相差一个 2π 的意义下唯一 (因为符合条件的初值为 $2k\pi$)

定义 1.4 (光滑曲线的旋转指标)

若 γ 是连续可微的简单闭曲线, 使得 $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, 定义 γ 的旋转此步骤为

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a))$$

**Remark**

1. 由于 $(\cos \theta(a), \sin \theta(a)) = (\cos \theta(b), \sin \theta(b))$, $\theta(b) - \theta(a)$ 是 2π 的整数倍, 故 $\rho(\gamma)$ 是整数.
2. 其他的切角函数总是通过改变 $\theta(b)$ 和 $\theta(a)$ 相同的量得到, 因此 $\rho(\gamma)$ 是良定义的.

1.1.2 分段光滑正则闭曲线的旋转指标**定义 1.5**

令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是容许简单闭曲线. 令 (a_0, \dots, a_k) 是 $[a, b]$ 的一个容许分划.

1. 称 $\gamma(a_i)$ 为 γ 的顶点.
2. $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ 为边.

**定义 1.6 (顶点的分类)**

在每个顶点 $\gamma'(a_i)$ 上, 记 γ 的左, 右侧速度向量分别为 $\gamma'(a_i^-), \gamma'(a_i^+)$; 令 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 为对应的单位速度向量. 将这些顶点分为以下三类

1. 若 $T(a_i^-) \neq \pm T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个普通顶点.
2. 若 $T(a_i^-) = T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个平坦顶点.
3. 若 $T(a_i^-) = -T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个尖点.

**定义 1.7**

1. 在每个普通顶点上, 定义 $\gamma(a_i)$ 处的外角 ε_i 为 $T(a_i^-)$ 到 $T(a_i^+)$ 取值在 $(-\pi, \pi)$ 的夹角. 若 $(T(a_i^-), T(a_i^+))$ 是 \mathbb{R}^2 的一个定向基^a, 则取其中的正直, 反之亦然.
2. 平坦顶点的外角定义为 0.
3. 尖点的外角无法确定方向, 认为尖点处的外角没有定义.
4. 若 $\gamma(a_i)$ 是普通顶点或平坦顶点, 定义 $\gamma(a_i)$ 的内角为 $\theta_i = \pi - \varepsilon_i$.
5. 对于顶点 $\gamma(a) = \gamma(b)$, $T(b)$ 和 $T(a)$ 分别扮演了 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 的角色.

^a表现为向外扎一个尖



定义 1.8

称分段光滑的正则曲线 γ 为一个曲边多面体, 若它无尖点, 切实某个预紧开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 的边界. 此外

1. 称 Ω 为 γ 的内部.
2. 若 γ 有 Ω 的边界诱导定向, 则称 γ 是正定向的.

**定义 1.9 (曲边多面体的切角函数)**

定义曲边多面体的切角函数, 为分段光滑的连续函数 $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ 在使得 γ 光滑的任一点处成立. 在规定的

$$\theta(a_i) = \lim_{t \rightarrow a_i^-} \theta(t) + \varepsilon_i$$

以及

$$\theta(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \theta(t) + \varepsilon_k$$

下, θ 是自右连续的. 其中 ε_k 是 $\gamma(b)$ 处的外角.

**Remark**

1. 存在性: 在 $[a, a_1)$ 上, 存在 T 的在 \mathbb{R} 上的提升 $\theta(t)$, 它取定了 a_1 处的函数值, 从而可以在 $[a_1, a_2)$ 上将 T 唯一地提升到 \mathbb{R} , 以此类推. 由于曲线是闭合的, 一旦我们指定一点处合适的取值 (以 2π 为间隔), 都可以将 T 唯一地提升到 \mathbb{R} 上.

定义 1.10 (旋转指标)

设 γ 是曲边多面体, 定义它的旋转指标为

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a))$$

其中 θ 是 γ 的任一切角函数.

**定理 1.1 (旋转指标定理)**

正定向的曲边多面体的旋转指标为 $+1$.



1.1.3 平面简单闭合曲线的其它性质

定理 1.2 (等周不等式)

设平面简单闭曲线 γ 的长度为 L , 则 γ 内部区域的面积为 A , 则

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

等号成立当且仅当 γ 是一个圆.



1.1.4 平面凸曲线

定义 1.11

若平面简单闭曲线的曲率 $\kappa_N > 0$, 则称为凸曲线.



定理 1.3

平面凸曲线的切角函数 (Gauss 映射) 是一一对应的.



Proof 设 $\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是平面凸曲线. θ 是 γ 的任一切角函数, 则

$$T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

则

$$\kappa_N(t) = |T'(t)| = |\theta'(t)| > 0$$

这表明 $\theta'(t)$ 处处非退化, 从而 θ 是局部的双射. 又由旋转指标定理

$$\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \kappa(s) ds = 2\pi$$

因此 Gauss 映射是整体的双射.



定理 1.4 (四顶点定理)

定义使得 $\frac{d\kappa}{ds}$ 的点为顶点, 则任何凸曲线至少有四个顶点.



1.2 闭曲面与 Gauss-Bonnet 公式

定义 1.12

设 (M, g) 是 2-Riemann 流形. 称容许简单闭曲线 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 是 M 上的一个曲边多面体, 若 γ 的像是一个预紧开集 $\Omega \subseteq M$ 的边界, 并且存在包含了 $\bar{\Omega}$ 的定向坐标圆盘, 使得 γ 的坐标像在坐标平面上称为曲边多面体.



Remark

1. 测地多面体: 若 M 上的曲边多面体 γ 的边界都刚好是测地线段, 则称 γ 为一个测地多面体.
2. 可以按照度量角类似地定义内外角.

定义 1.13 (切角函数)

设 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 是曲边多面体, Ω 是它的内部, (U, φ) 是包含了 $\bar{\Omega}$ 的定向光滑坐标卡. 通过坐标映射 φ 可以将 γ, Ω, g 分别与他们在坐标平面上开集 $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的表示等同. 令 (E_1, E_2) 是 g 的通过对 (∂_x, ∂_y) Gram-Schmidt 正交化得到的规正基, 使得 E_1 在 \hat{U} 处处与 ∂_x 相差正标量倍.

定义 γ 的切角函数为一个分段连续函数 $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 满足

$$T(t) = \cos(t) E_1|_{\gamma(t)} + \sin(t) E_2|_{\gamma(t)}$$

在使得 γ' 连续的点上成立. 并且在分点处自右连续的值.



Remark

1. 存在性: 由于 T 是单位长度的, 故 $T(t) = u_1 E_1 + u_2 E_2$ 中的 (u_1, u_2) 落在 \mathbb{S}^1 上, 可以将他提升到 \mathbb{R} 上.
2. 通过定义无法直接看出旋转指标的坐标无关性, 这个事实在下面的引理中得到说明.

引理 1.1 (旋转指标)

设 M 是定向的 2-Riemann 流形, 则对于 M 上每个正定向的曲边多面体, 它依赖于任意规正基的旋转指标都为 $+1$.



Idea 可以将度量线性同伦到欧式度量, 说明旋转指标连续地变化, 由于旋转指标的取值是“跳跃”的, 从而说明旋转指标的不变性.

Proof 设 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 是 M 上的曲边多面体, Ω 是它的内部, (U, φ) 是包含了 $\bar{\Omega}$ 的

正定向的光滑坐标卡. 则我们既可以用 g 给出的内积来计算旋转指标, 也可以用欧式内积 \bar{g} 来计算, 接下来说明计算结果一致.

定义

$$g_s = (1-s)g + s\bar{g}, s \in [0, 1]$$

容易看出对于每个 s, g_s 是一个度量. $(E_1^{(s)}, E_2^{(s)})$ 为关于 g_s 对 (∂_x, ∂_y) 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的关于 g_s 的规正基, θ_{g_s} 和 ρ_{g_s} 分别为对应单位速度向量, 切角函数和旋转指标.

由于

1. 正交化的公式给出 $E_1^{(s)}, E_2^{(s)}$ 关于 s 的连续性.

2. 在任意使得 γ 光滑的区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上, 式

$$T_s(t) = u_1(t; s) E_1^{(s)} \Big|_{\gamma(t)} + u_2(t; s) E_2^{(s)} \Big|_{\gamma(t)}$$

中的 u_1, u_2 可以表示为

$$u_1(t; s) = \left\langle T_s(t), E_1^{(s)} \right\rangle_{g_s}, \quad u_2(t; s) = \left\langle T_s(t), E_2^{(s)} \right\rangle_{g_s}$$

均关于 (t, s) 连续, 其中

$$T_s(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|_{g_s}}$$

. 从而 $u_1, u_2 : [a_{i-1}, a_i] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ 在给定初值下存在唯一提升.

3. 外角的定义式

$$\varepsilon_i = \frac{dV_g(T(a_i^-), T(a_i^+))}{|dV_g(T(a_i^-), T(a_i^+))|_{g_s}} \arccos \langle T(a_i^-), T(a_i^+) \rangle_{g_s}$$

表面 ε_i 关于 s 连续.

故旋转指标函数 ρ_{g_s} 关于 s 连续, 从而是不变的, 恒等于欧式内积下的旋转指标.

□

定义 1.14

设 γ 是单位速度参数化的曲边多面体, 则单位切向量场 $T(t) = \gamma'(t)$. 存在沿 γ 的唯一的单位法向量场 N , 使得 $(\gamma'(t), N(t))$ 构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的定向基^a. 在使得 γ 光滑的点处定义 γ 的符号曲率为

$$\kappa_N(t) = \langle D_t \gamma'(t), N(t) \rangle_g$$

^a若 γ 正定向, 则这相当于 N 是正交与 $\partial\Omega$ 内指向的



定理 1.5 (Gauss-Bonnet 公式)

令 (M, g) 是定向的 2-Riemann 流形, 设 γ 是 M 上正定向的曲边多面体, Ω 是 γ 的内部, 则

$$\int_{\Omega} K \, dA + \int_{\gamma} \kappa_N \, ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, dA 是它的 Riemann 体积形式 ε_i 是 γ 的外角, 且第二个积分是对弧长的积分.



Proof 设 a_1, \dots, a_n 是 γ 的一个容许分划, (U, φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的正定向的图册, (E_1, E_2) 是 U 上的一个正定向的规正标架, $\theta(t)$ 是 γ 的一个切角函数, 则由 Newton-Lebniz 公式和旋转指标定理

$$2\pi = \theta(b) - \theta(a) = \sum_i \varepsilon_i + \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \theta'(t) \, dt$$

接下来考虑 θ' 和 K, κ_N 的关系, 考虑

$$\gamma'(t) = \cos \theta(t) E_1|_{\gamma(t)} + \sin \theta(t) E_2|_{\gamma(t)}$$

以及

$$N(t) = -\sin \theta(t) E_1|_{\gamma(t)} + \cos \theta(t) E_2|_{\gamma(t)}$$

对 $\gamma'(t)$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} D_t \gamma'(t) &= -\sin \theta(t) \theta' E_1|_{\gamma(t)} + \cos \theta(t) \nabla_{\gamma'} E_1 \\ &\quad + \cos \theta(t) \theta' E_2|_{\gamma(t)} + \sin \theta(t) \nabla_{\gamma'} E_2 \end{aligned}$$

为了计算 $\nabla_{\gamma'} E_1, \nabla_{\gamma'} E_2$, 注意到

$$\begin{aligned} 0 &= D_v \langle E_1, E_1 \rangle = 2 \langle \nabla_v E_1, E_1 \rangle \\ 0 &= D_v \langle E_2, E_2 \rangle = 2 \langle \nabla_v E_2, E_2 \rangle \\ 0 &= D_v \langle E_1, E_2 \rangle = \langle \nabla_v E_1, E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_v E_2 \rangle \end{aligned}$$

由于 E_1, E_2 正交, $\nabla_v E_1$ 是 E_2 的倍数, $\nabla_v E_2$ 是 E_1 的倍数, 上述第三式, 启发我们令

$$\omega(v) = -\langle \nabla_v E_1, E_2 \rangle = \langle E_1, \nabla_v E_2 \rangle$$

是一个 1-形式, 则

$$\nabla_v E_1 = -\omega(v) E_2, \quad \nabla_v E_2 = +\omega(v) E_1$$

现在可以计算得到

$$\begin{aligned} \kappa_N &= \langle D_t \gamma'(t), N \rangle \\ &= \theta' - \omega(\gamma') \end{aligned}$$

于是

$$2\pi = \sum_i \varepsilon_i + \int_{\gamma} \kappa_N ds + \int_{\gamma} \omega$$

由于 Ω 是带角流形, 由带角流形的 Stokes 定理, 我们要

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

因此只需要证明 $K dA = d\omega$. 我们有

$$\begin{aligned} K dA(E_1, E_2) &= K = Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) \\ &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_1 \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_1} \omega(E_2) E_1 - \nabla_{E_2} \omega(E_1) E_1 - \omega([E_1, E_2]) E_1, E_1 \rangle \\ &= \langle E_1 \omega(E_2) E_1 + \omega(E_2) \nabla_{E_1} E_1, E_1 \rangle \\ &\quad - \langle E_2 \omega(E_1) E_1 + \omega(E_1) \nabla_{E_2} E_1, E_1 \rangle - \omega([E_1, E_2]) \\ &= E_1 \omega(E_2) - E_2 \omega(E_1) - \omega([E_1, E_2]) \\ &= d\omega(E_1, E_2) \end{aligned}$$

由于体积形式由其系数决定, 故 $K dA = d\omega$ 这就完成了证明. □

推论 1.1 (全曲率定理)

令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑的单位速度简单闭曲线, 使得 $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, N 是内指向的法向量, 则

$$\int_a^b \kappa_N(t) dt = 2\pi$$



1.3 Gauss-Bonnet 定理

定义 1.15

设 M 是一个紧的 2 维流形.

1. M 上的一个曲边三角形, 是指有三个顶点和三个变的曲边多边形.
2. M 的一个光滑三角剖分, 是指有限多个曲边三角形, 它们的内部两两无交, 任意两个不同曲边三角形的交若非空, 则要么为一个顶点, 要么为一条边, 并且这些三角形及其内部的交并成 M .



定理 1.6 (Tibor Rado)

每个紧的 2-流形, 容许一个三角剖分, 使得每条边都属于两个三角形.



定义 1.16 (欧拉示性数)

设 M 是被三角剖分了的 2-流形, 定义 M (关于这个三角剖分) 的欧拉示性数为

$$\chi(M) = V - E + F$$

其中 V, E, F 分别为三角剖分的顶点数, 边数, 面数.



Remark 事实上欧拉示性数是拓扑不变的, 且无关于三角剖分的选取, 这是代数拓扑中的重要事实.

定理 1.7 (Gauss-Bonnet 定理)

若 (M, g) 是一个被光滑三角剖分了的 2 维紧带边 Riemann 流形, 则

$$\int_M K \, dA + \int_{\partial M} \kappa_N \, ds = 2\pi\chi(M)$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, dA 是它的 Riemann 密度.

**定理 1.8 (分类定理)**

1. 每个紧的, 连通的, 可定向的 2 维流形 M 都同胚于一个球面, 或 n 个环面的连通和.
2. 每个不可定向的 2 维流形同胚于 n 份实射影平面 \mathbb{RP}^2 的连通和.
3. 数 n 称为 M 的亏格.

**命题 1.1**

对于一个紧致、连通、可定向的无边界曲面 S , 亏格 $g(S)$ 和欧拉示性数 $\chi(S)$ 之间的关系由以下公式给出: $\chi(S) = 2 - 2g(S)$

**推论 1.2**

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率, 则

1. 若 M 同胚于球面或射影平面, 则 $K > 0$ 在某处成立.
2. 若 M 同胚于环面或 Klein bottle, 则要么 $K \equiv 0$, 要么 K 同时有正负的取值.
3. 若 M 是任意其他紧的面, 则 $K < 0$ 在某处成立.



Proof 应用三角剖分, 亏格 n 的可定向 2-流形的欧拉示性数为 $2 - 2n$, 不可定向的为 $2 - n$.



推论 1.3

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率

1. 若 $K > 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 \mathbb{S}^2 , 且 $\pi_1(M)$ 要么是平凡的, 要么同构于二元群 $\mathbb{Z}/2$
2. 若 $K \leq 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 \mathbb{R}^2 , 且 $\pi_1(M)$ 有限.



1.4 闭曲面的其它性质

定理 1.9

设 Σ 是 \mathbb{R}^3 中的闭曲面, 则 Σ 上必有一点 P_0 , 它的 Gauss 曲率 $K(P_0) > 0$.



Proof 令 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是曲面的位置向量, 考虑

$$f(p) = \langle \mathbf{r}(p), \mathbf{r}(p) \rangle$$

由于 Σ 是紧的, f 在某一点 P_0 处达到最大值. 设 $X = X(u, v)$ 是 Σ 在 p_0 附近的一个参数化, 则

$$df(P_0) = \nabla f(P_0) = 2 \langle \nabla X, X \rangle(P_0)$$

