目录

第 1 章 de Rham 上同调

1.1 de Rham 上同调群

定义 1.1

$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ 是线性的，核和像都是线性子空间，定义

$$\mathcal{Z}^p(M) = \ker\left(d : \Delta O^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)\right) = \{\text{closed p-forms on M}\}$$

$$\mathcal{B}^p(M) = \operatorname{Im}\left(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)\right) = \{\text{exact p-forms on M}\}$$

约定 $\Omega^p(M)$ 当 $p < 0$ 或 $p > \neq \dim M$ 时为零.

定义 1.2

定义 p 阶 de Rham 上同调群为商空间

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

Example 1.1 Poincare 引理相当于说

$$H^1_{\mathrm{dR}}(U) = 0$$

对于任意的星型开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 成立.

命题 1.1

任意光滑映射 $F : M \to N$ 的拉回映射 $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ 将 $\mathcal{Z}^p(N)$ 送到 $\mathcal{Z}^p(M)$，将 $\mathcal{B}^p(N)$ 送到 $\mathcal{B}^p(M)$，给出 $H^p_{\mathrm{dR}}(N)$ 到 $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 的线性映射，成为诱导上同调映射.

Proof 由拉回和外微分的交换性易得.

□

推论 1.1

$M \mapsto H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 连同 $F \mapsto F^*$ 给出一个反变函子.

推论 1.2

de Rham 上同调是微分同胚不变的.

1.1.1 基本计算

命题 1.2

令 $\{M_j\}$ 是可数个 (带边) 光滑 n-流形, $M = \coprod_j M_j$. 则对于每个 p, 含入映射 $\iota_j : M_j \hookrightarrow$ 共同诱导出 $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 到 $\prod_j H^p_{\mathrm{dR}}(M_j)$ 的同构.

命题 1.3

若 M 是连通的 (带边) 流形, 则 $H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ 等于常值函数空间, 从而使 1 维的.

Proof $\mathcal{B}^0(M) = 0$, $\mathcal{Z}^0(M) = \{f : \mathrm{d}f = 0\} = \{f \text{ is constant}\}$

□

推论 1.3

0 维流形 M 的 $H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ 是一些 1-向量空间的直积, 每份对应一个点.

引理 1.1

任取光滑 (带边) 流形 M, 存在两个映射 $i_0^*, i_1^* : \Omega^*(M \times I) \to \Omega^*(M)$ 之间的同伦算子. 其中

$$i_t : M \to M \times I, \quad i_t(x) = (x, t)$$

命题 1.4

设 M,N 是带边流形, $F, G : M \to N$ 同伦的光滑映射. 则对于每个 p, 诱导映射 $F^*, G^* : H^p_{\mathrm{dR}}(M) \to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 相同.

Proof

$$H : M \times I \to N$$

是 F 到 G 的同伦, 则

$$F^* = (H \circ i_0)^* = i_0^* \circ H^* = i_1^* \circ H^* = (H \circ i_1)^* = G^*$$

□

定义 1.3 (同伦不变性)

设 M 和 N 是同伦等价的光滑 (带边) 流形, 则

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M) \simeq H^p_{\mathrm{dR}}(N)$$

对于每个 p 成立.

定义 1.4

定义 $\Phi : H_{\mathrm{dR}}^{1}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,q),\mathbb{R})$，给定上同调类 $[\omega] \in H_{\mathrm{dR}}^{1}(M)$，定义

$$\Phi[\omega] : \pi_1(M,q) \to \mathbb{R}, \quad \Phi[\omega][\gamma] = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是代表 $[\gamma]$ 的一个分段光滑曲线. ♣

定义 1.5

设 M 是连通的光滑流形，对于每个 $q \in M$，$\Phi : H_{\mathrm{dR}}^{1}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi(M,q),\mathbb{R})$ 是良定义的单射. ♣

Remark 事实上是同构.

Proof 单射的部分相当于说若 ω 在任意基于 q 的回路上为零，则它是恰当的. 而恰当当且仅当任意回路上的积分为 0(不一定基于 q).

只需要对于基于 q' 任意的回路，将回路插入进 q' 到 q 的往返路径中，得到 q 的回路即可.

□

推论 1.4

若 M 单连通，且有有限基本群，则 $H_{\mathrm{dR}}^{1}(M) = 0$. ♡

Proof 不存在非平凡的有限群到 $\mathbb{R}$ 的群同态.

□

引理 1.2 (紧支的 Poincare 引理)

令 $n \geq p \geq 1$,ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上紧支的 p-形式. $p = n$ 另外假设 $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上紧支的 $(p-1)$-形式 η，使得 $\mathrm{d}\eta = \omega$ ♡

定义 1.6

记 $\Omega_c^p(M)$ 是 M 上紧支的光滑 p-形式空间. 则可以定义相应的紧支 de Rham 上同调群 $H_c^p(M)$. ♣

定理 1.1

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} 0 & 0 \leq p < n \\ \mathbb{R}, & p = n \end{cases}$$

♡

Proof 对于 $0<p<n$ 的同调群，根据紧支的 Poincare 引理，闭紧支形式都是恰当紧支的.

对于 $p=0$ 的同调群，由于闭链只有常函数，而紧支的常函数只有0，故可得 $H_c^p\left(\mathbb{R}^n\right) \simeq 0$

对于 $p=n$ 的情况，定义映射

$$\Phi: H_c^n\left(\mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

Stokes 定理给出了 I 的良定义性，紧支 Poincare 引理给出了 Φ 是单的.

为了说明 I 是满射，任取 $C \in \mathbb{R}$，我们证明存在光滑紧致的 n-形式，使得其在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分等于 C. 具体地，取支撑在 $\overline{B}(0,1)$ 的光滑 bump 函数 Φ，设

$$A=\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, \mathrm{d} x^1 \wedge \mathrm{d} x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^n=\int_{\overline{B}(0,1)} \Phi \, \mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^n$$

则

$$\frac{\Phi}{A} \mathrm{d} x^1 \wedge \mathrm{d} x^n$$

是所需的光滑紧支 n-形式.

$\square$

1.1.2 顶上同调

性质组合	$H^n(M;\mathbb{Z})$	$H^n(M;R)$ (R 是域，$R \neq \mathbb{Z}_2$)	$H^n(M;\mathbb{Z}_2)$
紧致且可定向	$\mathbb{Z}$	R	$\mathbb{Z}_2$
紧致且不可定向	0	0	$\mathbb{Z}_2$
非紧致且可定向	0	0	0
非紧致且不可定向	0	0	0

1.2 度理论