第 1 章　调和函数的极值原理

1.1 预备知识

定义 1.1 (调和函数)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集. 设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上成立, 则称 u 是 Ω 上的调和函数.

定理 1.1 (平均值性质)

若 u 是 Ω 上的调和函数,$B_r(x_0) \subseteq \Omega$. 则

1. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x$$
2. $$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{area}(\partial B_r(x_0))} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}S$$

1.2 调和函数的极值原理

定理 1.2 (弱极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 则

1. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$
2. u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值在边界 $\partial\Omega$ 上取得:
$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

定理 1.3 (强极值原理)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个连通开集. 若 u 是 Ω 上的调和函数. 若以下成立其一:

1. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最大值
2. u 在 Ω 的内部某点 x_0 取得局部最小值.

，则 u 在整个 Ω 上是常函数.