第 1 章　空间曲线

Example 1.1 空间曲线

1. 圆柱螺线：
$$c\left(t\right)=\left(a\cos t,a\sin t,bt\right)$$
速度向量场为
$$c'\left(t\right)=\left(-a\sin t,a\cos t,b\right)$$
$\left|c'\left(t\right)\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，于是 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{a^2+b^2}$ ，$s=\sqrt{a^2+b^2}t$，可以通过
$$c\left(s\right)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
来弧长参数化

Remark 与平面曲线不同，由于空间曲线是余 2 维的流形，法空间是 2 维的，我们需要两个“描述弯曲的”函数。

定义 1.1

设 $c\left(s\right)$ 是空间曲线，$\left|c'\left(s\right)\right|\equiv 1$，定义单位切向量 $T\left(s\right)=c'\left(s\right)$ 。

1. 定义曲率为
$$\kappa\left(s\right)=\left|T'\left(s\right)\right|$$
2. 定义 $N\left(s\right)=\frac{T'(s)}{|T'(s)|}$ ，称为主法向量。
3. 定义 $B\left(s\right):=T\left(s\right)\times N\left(s\right)$ ，称为从法向量。此时 $\{T,N,B\}$ 构成一个 $\mathbb{R}^3$ 的右手系，称为 $\mathbb{R}^3$ 的规正基。

♣

Remark

1. 当 $\kappa\left(s\right)\neq 0$ 时，$N\left(s\right)$ 才有定义。
2. 认为当 $\kappa\left(s\right)=0$ 时，$N\left(s\right)$ 的选取不唯一。
3. 由于 $B\cdot N=0$，求导得到 $B'\cdot N+B\cdot N'=0$。

定义 1.2

定义 $\{c\left(t\right);T\left(t\right),N\left(t\right),B\left(t\right)\}$ ，其中 $T\left(t\right)=\frac{c(t)}{|c'(t)|}$，$N\left(t\right)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$，$B\left(t\right)=T\left(t\right)\times N\left(t\right)$ ，为曲线的 **Frenet** 标架。

♣

定义 1.3

定义 $\tau\left(s\right)=-B'\left(s\right)\cdot N\left(s\right)$，称为曲线的挠率。

♣

Remark

1. $\tau(s) = -(T(s) \times N(s))' \cdot N(s)$;
2. $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s)$

命题 1.1

我们有线性 ODE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

称为 Frenet 标架的运动方程。

Proof 首先 $T'(s) = \kappa(s) N(s)$，$B'(s) = -\tau(s) N(s)$。由于 $\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$ 是正交矩阵，对 $\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}^\top$ 求导，得到

$$A\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}\left(A\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}\right)^\top = A + A^\top = 0$$

故 A 是反对称的。

$\square$

Example 1.2 考虑

$$c(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

我们有

$$T(s) = c'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$T'(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

不妨设 $a, b > 0$，于是

$$\kappa(s) = \left|T'(s)\right| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|\kappa(s)|} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right) \cdot B(s) \\ &= \frac{b}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

命题 1.2 (计算公式)

设 $c(t)$ 是正则空间曲线，$T(t)=\frac{c'(t)}{|c'(t)|}$。

1. $$T'(t)=\frac{\langle c''(t),c'(t)\rangle c'(t)}{|c'(t)|^3}$$

2. $$N(t)=\frac{c''(t)-\left\langle c'(t),\frac{c'(t)}{|c'(t)|}\right\rangle\frac{c'(t)}{|c'(t)|}}{\text{模长}}$$

   相当于对 $c'(t),c''(t)$ 规正化。

3. $$B(t)=T(t)\times N(t)=\frac{c'(t)\times c''(t)}{|c'(t)\times c''(t)|}$$

4. $$\kappa(t)=\frac{|c'(t)\times c''(t)|}{|c'(t)|^3}$$

5. $$\tau(t)=\frac{(c',c'',c''')(t)}{|c'\times c''|^2(t)}$$

Proof

- $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{|c'(t)|}\cdot T'(t)$$

- $$T'(t)=\frac{c''(t)}{|c'(t)|}+\left(\frac{1}{|c'(t)|}\right)'c'(t)$$

- $$N(t)=\frac{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}}{\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right|}=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

- $$|c'(t)|'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle c'(t),c'(t)\rangle^{\frac{1}{2}}=\frac{\langle c'(t),c''(t)\rangle}{|c'(t)|}$$

- $$T'(t)=\frac{\langle c''(t),c'(t)\rangle c'(t)}{|c'(t)|^3}$$

- $$N(t)=\frac{c''(t)-\left\langle c'(t),\frac{c'(t)}{|c'(t)|}\right\rangle\frac{c'(t)}{|c'(t)|}}{\text{模长}}$$

- $$\kappa(t)=\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}T'(t)\right|=\frac{|T'(t)|}{c'(t)}=\frac{c''(t)-\left\langle c''(t),\frac{c'(t)}{|c'(t)|}\right\rangle\frac{c'(t)}{|c'(t)|}}{|c'(t)|^2}$$

- $$\begin{aligned}\kappa(t)&=\frac{c''(t)-\left\langle c''(t),\frac{c'(t)}{|c'(t)|}\right\rangle\frac{c'(t)}{|c'(t)|}}{|c'(t)|^2}\\&=\frac{\left|c''(t)\times\frac{c'(t)}{|c'(t)|}\right|}{|c'(t)|^2}=\frac{|c'(t)\times c''(t)|}{|c'(t)|^3}\end{aligned}$$

- $$\tau(s)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}B(s)\cdot N(s)$$

$$\begin{aligned}\tau(t)&=-\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot N\\&=-\frac{1}{|c'(t)|}\left(\frac{c'\times c'''}{|c'\times c''|}+\left(\frac{1}{|c'\times c''|}\right)'c'\times c''\right)\cdot\frac{c''-\langle c'',T\rangle T}{|c''-\langle c'',T\rangle T|}\\&=-\frac{1}{|c'|}\cdot\frac{1}{|c'\times c''|}\cdot\left(\frac{c'\times c'''\cdot c''}{\left|\frac{c'}{|c'|}\times c''\right|}\right)\\&=\frac{(c',c'',c''')}{|c'\times c''|^2}\end{aligned}$$

□

1.1 几何意义

- Taylor 展开见教材
- 曲率 $\kappa(s)$ 是偏离切线的程度
- 挠率 $\tau(s)=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}\cdot N$ 是偏离平面的程度

引理 1.1 (曲率和挠率的刚体运动不变性)

设 $c(s)$ 是 E^3 上的曲线，曲率和挠率分别为 κ,τ。设 $F:E^3\to E^3$ 是合同变换，使得 $F(X)=XA+P_0$ 。$\tilde{c}(s)$ 被定义为 $F(c(s))$，它的曲率和挠率分别为 $\tilde{\kappa}$ 和 $\tilde{\tau}$。

1. 若 $\det A=1$，即 $A\in SO(3)$，则 $\tilde{\tau}=\tau,\tilde{\kappa}=\kappa$；
2. 若 $\det A=-1$，则 $\tilde{\tau}=\tau,\tilde{\kappa}=-\kappa$

♡

Proof 先考虑 $\det A=1$ 的情况：

- $|\tilde{c}'(s)|=|c'(s)A|\equiv 1$，故 $\tilde{c}'(s)$ 仍为弧长参数化。

- $\tilde{\tau}'(s) = \tilde{c}'(s) = T(s)A$，$\tilde{N}(s) = \frac{\tilde{T}'(s)}{|\tilde{T}'(s)|} = N(s)A$[1]，$\tilde{B}(s) = B(s)$[2]
- $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{N}\\ \tilde{B}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{N}\\ \tilde{B}\end{bmatrix}$$

  这表明 $\tilde{\kappa} = \kappa, \tilde{\tau} = \tau$

对于 $\det A = -1$ 的情况，除 $\tilde{B}(s) = -B(s)$ 外，其余与 $\det A = 1$ 的情况相等，此时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{N}\\ \tilde{B}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\begin{bmatrix}T\\ N\\ -B\end{bmatrix}A\right) = \begin{bmatrix}\kappa N\\ -\kappa T + \tau B\\ \tau N\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ B\\ -B\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{N}\\ \tilde{B}\end{bmatrix}$$

这表明 $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)$，$\tilde{\tau}(s) = -\tau(s)$ □

定理 1.1

设正则曲线 $c(t), t \in (a,b)$ 满足 $\kappa(t) \neq 0$。那么 $\tau(t) \equiv 0$ 当且仅当 $c(t)$ 是平面曲线。♡

Remark

1. 若 $k(t) \equiv 0$ 在 $t \in (a,b)$ 上成立，则 $c(t)$ 是直线，$t \in (a,b)$。
2. 若 $k(t_0) = 0$，当 $t \neq t_0$ 时，$k(t) \neq 0$，曲线先在一个平面上，一段时间后在两平面

[1]此处假设 $\kappa(s) \neq 0$

[2]由于 A 是保定向的

的交线上曲率为 0，跑到另一个平面上。

Proof 设弧长参数化的曲线 $c(s)$ 是平面曲线，我们先承认挠率是刚体运动下的不变量，则可以不妨设 $c(s) = (x(s), y(s), 0)$；此时 $B(s) = \pm(0,0,1)$，$\tau(s) = -B'(s)\cdot N = 0$。反过来，若 $\tau \equiv 0$，由 Frenet 方程，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\cdot N(s) = 0$，从而 $B(s) \equiv B(0)$。求导解方程，可得 $\langle c(s) - c(0), B(s)\rangle \equiv 0$，一定有 $c(s) \subseteq B(s)^{\perp} + c(0)$。 □

1.2 曲率和挠率的基本定理

命题 1.3

若曲线 $c_1(t) = c_2(l(t))$，其中 $l'(t) \neq 0$，则 $\tau_1(t) = \tau_2(l(t))$，$\kappa_1(t) = \kappa_2(l(t))$ ♠

Proof 我们有

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{c_1'(t)}{|c_1'(t)|} = \frac{\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} c_2'(l)}{\left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} c_2'(t)\right|} \\ &= \begin{cases} T_2(l), & \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} > 0 \\ -T_2(l), & \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} > 0$，则称参数变换保定向，反之则称其改变定向。

1. 若 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} > 0$，则

$$\begin{cases} T_1(t) = T_2(l) \\ N_1(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} T_2'(l)}{\left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} T_2'(l)\right|} = N_2(l) \\ B_1(t) = B_2(t) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T_1(t) \\ N_1(t) \\ B_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} T_1(t) \\ N_1(t) \\ B_1(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|c_1'(t)|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T_2(l(t)) \\ N_2(l(t)) \\ B_2(l(t)) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|c_1'(t)|}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\begin{bmatrix} T_2(l) \\ N_2(l) \\ B_2(l) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|c_1'(t)|}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|c_1'(t)|}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}|c_2'(l)|\begin{bmatrix} 0 & \kappa_2(l) & 0 \\ -\kappa_2(l) & 0 & \tau_2(l) \\ 0 & -\tau_2(l) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2(l) & 0 \\ -\kappa_2(l) & 0 & \tau_2(l) \\ 0 & -\tau_2(l) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ B_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

这表明 $\kappa_1(t) = \kappa_2(l(t))$，$\tau_1(t) = \tau_2(l(t))$

□

定义 1.4

设 c_1, c_2 是有相同曲率和挠率的空间曲线，则存在刚体运动 F，使得 $c_2 = F(c_1)$ ♣

Proof 设 c_1, c_2 的 Frenet 标架为 $\{T_1, N_1, B_1\}$，$\{T_2, N_2, B_2\}$。不妨设 0 在参数的定义域中，令

$$
A = \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ B_1 \end{bmatrix}^{-1}(0)\begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix}(0)
$$

则 $A \in SO(3)$ 。令

$$
P_0 = C_2(0) - c_1(0)A
$$

令 F 是合同变换

$$
F := XA + P_0
$$

希望证明 $F(c_1(s)) = c_2(s)$ 。设 $\tilde{c}_2(s) = F(c_1(s))$ ，则由曲率和挠率的刚体运动不变性，它的

曲率和挠率也分别为 κ 和 τ。考虑两个曲线的 Frenet 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T_2(s) \\ N_2(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(s) \\ N_2(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} \tilde{T}_2(s) \\ \tilde{N}_2(s) \\ \tilde{B}_2(s) \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_2(s) \\ \tilde{N}_2(s) \\ \tilde{B}_2(s) \end{bmatrix}$$

它们满足同一个线性 ODE，并且有相同的初值，由解的唯一性，我们有

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_2 \\ \tilde{N}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}(s) = \begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix}(s)$$

从而

$$\tilde{c}_2(s) = \int_0^s \tilde{T}_2(l)\,\mathrm{d}l + \tilde{c}_2(0) = \int_0^s T_2(l)\,\mathrm{d}l + c_2(0) = c_2(s)$$

□

定理 1.2

设 $\kappa(s), \tau(s)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\kappa(s) > 0$。那么存在曲线 $c(s)$，使得它的曲率和挠率分别为 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$。

Proof 考虑线性方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}(s)$$

任取 $T(a), N(a), B(a)$ 为规正基，使得 $B(a) = T(a) \times N(a)$。由线性 ODE 解的存在唯一性，存在上述方程的一组解 $\{T(s), N(s), B(s)\}$。令 $c(s) = \int_a^s T(l)\,\mathrm{d}l$。令

$$L(s) = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}(s) \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}^\top (s)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(s) &= \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \left(A \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \right)^\top \\ &= A(s)L(s) + L(s)A^\top(s) \end{aligned}$$

由解的唯一性，$L(s) \equiv I$。故 $T(s), N(s), B(s)$ 是规正基。并且 $|c'(s)| \equiv |T(s)| \equiv 1$，$\kappa(s)$，

$\tau(s)$ 是 $c(s)$ 的曲率和挠率。 □

命题 1.4

考虑 E^3 中 κ 和 τ 均为常数的曲线

1. 若 $\kappa \equiv 0$，则曲线为直线
2. 若 $\kappa > 0$，$\tau \equiv 0$，则曲线为平面上的圆

✍ **练习 1.1** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(c(s)+\frac{1}{\kappa}N(s)\right)=0 \implies c(s)+\frac{1}{k}N(s)\equiv P_0$，是以 P_0 为心的圆；

3. 若 $\kappa > 0$，$\tau \neq 0$，则曲线为圆柱螺旋线

$$c(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\kappa(s)\equiv\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau(s)\equiv\frac{b}{a^2+b^2}$$

解出 a,b，得到

$$a=\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2},b=\frac{\tau}{\tau^2+\kappa^2}$$

♠