目录

第 5 章 Laurent

5.1 Laurent 级数

定理 5.1

若 Laurent 级数的收敛域为圆环 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$, 则

1. Laurent 级数在 D 中绝对收敛且紧一致收敛.
2. Laurent 级数的和函数在 D 中全纯.

♡

定理 5.2

设 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$, 若 $f\in\mathcal{H}(D)$, 则 f 在 D 上展开为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n,z\in D$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\}(rr<\rho<R)$$

并且展开是唯一的.

♡

Proof 考虑

$$r<r_1<|z-z_0|<r_2<R$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 按照 $\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}$ 的幂次展开得到 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 写成关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的幂级数, 研究收敛性, 逐项积分, 处理负幂级数的部分.

再将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 按照 $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ 的幂次展开, 将 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 写成关于 $(z-z_0)$ 的幂级数, 研究收敛性, 逐项积分, 处理正幂级数的部分.

□

5.2 孤立奇点

定义 5.1 (奇点)

如果一个函数 $f(z)$ 在点 z_0 的任何邻域内 (包括 z_0 本身) 都有点使其不解析，则称 z_0 就是 $f(z)$ 的一个奇点。

♣

定义 5.2 (孤立奇点)

若 z_0 是一个奇点, 且存在以 z_0 为中心的去心圆盘 D, 使得 f 在 D 上全纯, 则称 z_0 是 f 的孤立奇点. 此时,

1. 若 $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ 有限, 则称 z_0 是 f 的可去奇点.
2. 若 $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, 则称 z_0 是 f 的极点.
3. 若 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在, 则称 z_0 是 f 的本性起点.

♣

Remark 等价地说, 孤立奇点是奇点集中的孤立点.

定理 5.3 (Riemann)

设 z_0 是 f 的一个孤立奇点. 则 z_0 是 f 的可去奇点, 当且仅当 f 在 z_0 附近有界.

♡

Proof 可去奇点附近显然有界. 若有界, 借由 Cauchy 不等式, 复幂次的系数 a_{-n} 由半径的正幂次控制, 可趋于零. 洛朗级数化为幂级数.

□

命题 5.1

z_0 是 f 的极点当且仅当 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的零点.

♠

Proof 不难证明

□

定义 5.3

若 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 则称 z_0 是 f 的 m 阶极点.

♣

定理 5.4

z_0 为 f 的 m 阶极点, 当且仅当 f 在 z_0 的某个去心邻域内表为

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$$

其中 g 在 z_0 处全纯, 且 $g(z_0) \neq 0$

♡

Proof z_0 为 f 的 m 阶极点, 当且仅当 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 当且仅当存在全纯函数 h, 且 $h(z_0) \neq 0$, 使得

$$\frac{1}{f} = (z-z_0)^m h$$

在 z_0 的一个使得 h 恒非零的邻域内, 令 $g = \frac{1}{h}$, 则 g 在 z_0 出全纯, 且 $g(z_0) \neq 0$, 并且

$$\frac{1}{f} = (z-z_0)^m \frac{1}{g}$$

即

$$f = \frac{1}{(z-z_0)^m} g$$

□

推论 5.1

设函数 $f(z)$ 在 z_0 处有一个阶数为 m 的极点. 设函数 $g(z)$ 在 z_0 处全纯且 $g(z_0) \neq 0$. 则函数 $F(z) = f(z)g(z)$ 在 z_0 处仍有一个阶数为 m 的极点.

Proof 存在 z_0 处全纯且非零的 h, 使得

$$f = \frac{1}{(z-z_0)^m} h$$

于是

$$F = \frac{1}{(z-z_0)^m} (gh)$$

其中 gh 是在 z_0 处全纯切非零的函数. 故 F 在 z_0 处有一个 m 阶极点.

□

定理 5.5

若 z_0 是 f 的 m 阶极点, 当且仅当 f 在 z_0 附近的洛朗展开中, 有非零系数的最低次幂为 $-m$ 次.

Proof 借由 m 阶零点的分解 $\frac{1}{f} = (z-z_0)^m g$. 将 $\frac{1}{g}$ 泰勒展开, 研究系数的关系即可.

□

定理 5.6

若 z_0 是 f 的本性奇点, 则 f 的值域在 $\mathbb{C}_\infty$ 中稠密.

Proof 只讨论 $A \neq \infty$ 的情况, 利用可去奇点和附近有界的等价性, 将问题化简为讨论

$$\frac{1}{f(z) - A}$$

是否无界.

□

定理 5.7 (Picard)

全纯函数在本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有限复值, 至多只有一个例外点.

Remark 难证.

定义 5.4

作变换 $z = \frac{1}{\zeta}$, 讨论无穷原点的奇点和极点.

5.3 整函数和亚纯函数

定义 5.5

若 f 在整个复平面上除去极点外没有其他奇点，就称 f 是一个亚纯函数.

定理 5.8

如果无穷远点是整函数 f 的一个极点，那么 f 是一个 m 次多项式. 特别地，无穷远点出全纯的整函数一定是常数.

Proof

f 在 $\mathbb{C}$ 上展开为

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$$

进而在 $\mathbb{C}$ 上，

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n\geq 0}a_nz^{-n}$$

若无穷远点是 f 的一个 m 阶极点，则 0 是 $\sum_{n\geq 0}a_nz^{-n}$ 的 m 阶极点，我们有 $a_k=0,k>m,a_m\neq 0$. 于是

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$$

□

命题 5.2 (零点孤立)

亚纯函数的零点是孤立的.

Proof 亚纯函数在除去一个孤立奇点集外全纯. 零点附近存在一个邻域，没有孤立奇点（否则孤立奇点有聚点，由连续性，该聚点无界，从而也是奇点，进而是一个非孤立奇点，矛盾）. 由全纯函数零点的孤立性，该零点也是孤立的.

□

定理 5.9

若 $z=\infty$ 是亚纯函数 f 的可去奇点或极点，则 f 一定是有理函数.

Proof 因 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点或极点，故必存在 $R>0$，使得 f 在 $R<|z|<\infty$ 中全纯. 断言在 $|z|\leq R$ 中，f 最多只能有有限个极点：这是因为若极点集合为无限集 Z，则其在紧集 $\{|z|\leq R\}$ 上必然存在一个聚点 a ，而 a 是一个非孤立奇点，与函数的亚纯性质矛盾. 现在设 $Z=\{z_1,\cdots,z_n\}$ ，它们的阶分别为 $m_1,\ldots,m_n$. f 在 $z_j(j=1,\ldots,n)$ 附近的 Laurent 展开的主

要部分为

$$h_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \frac{c_{-2}^{(j)}}{(z-z_j)^2} + \cdots + \frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}.$$

设 f 在 ∞ 的邻域内的 Laurent 展开的主要部分为 g, 当 $z=\infty$ 是 f 的极点时, g 是一个多项式; 当 $z=\infty$ 是 f 的可去奇点时, $g\equiv 0$. 令

$$F(z) = f(z) - h_1(z) - \cdots - h_n(z) - g(z).$$

显然, F 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中除 Z 和 ∞ 外是全纯的, 而在 Z 和 ∞ 上, f 的主要部分都已经消去, 因而也是全纯的. 所以, F 是 $\mathbb{C}_\infty$ 上的全纯函数, 进而由定理 5.5, F 是一个常数 c. 于是

$$f(z) = c + g(z) + \sum_{j=1}^{n} h_j(z).$$

□

所以 f 是有理函数.

5.4 留数定理

定义 5.6

设 a 是 f 的一个孤立奇点, f 在 a 的邻域 $B(a,r)$ 中的 Laurent 展开为 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$, 则称 c_{-1} 为 f 在 a 点的留数, 记作

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = c_{-1}$$

♣

定理 5.10

设 a 是 f 的一个孤立奇点, f 在 a 的邻域 $B(a,r)$ 中的 Laurent 展开为 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$, 设 γ 是 $B(a,r)$ 中环绕 a 的一个 Jordan 闭合曲线, 则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,a)$$

♡

Proof Laurent 展开的系数表示为

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \neq\in \mathbb{Z}$$

特别地, 当 $n=-1$ 时,

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

□

定义 5.7

若 $z=\infty$ 是 f 的孤立奇点，定义

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z$$

其中 γ 是 ∞ 的解析邻域内绕 ∞ 的 Jordan 闭合曲线.

Idea 从黎曼球面上看，如果将 0 留数看成是函数绕南极点积一圈的效应，那么从 ∞ 的留数恰好是道路绕北极点，也就是逆向积一圈的效应.

定理 5.11

若 a 是 f 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)$$

Proof 若 a 是 f 的 m 阶极点，则在 a 的邻域内

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z)$$

其中 g 在 a 点全纯且非零. 故

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z)}{n!}(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z)}{n!}(z-a)^{n-m}$$

是一个 Laurent 展开，$(z-a)^{-1}$ 的系数为 $\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$ 于是

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)$$

□

推论 5.2

若 a 是 f 的 1 阶极点，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

定理 5.12 (留数定理)

设 D 是复平面上的一个有界区域，它的边界 γ 由一条或若干条简单闭曲线组成。如果 f 在 D 中除去孤立奇点 $z_1,\ldots,z_n$ 外是全纯的，在闭域 $\bar{D}$ 上除去 $z_1,\ldots,z_n$ 外是连续的，那么

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k).\quad(5.4.5)$$

5.5 实积分的留数方法

引理 5.1 (大圆弧)

若设 f 是一个在某个包含了圆弧 C_R 的区域内连续的函数. 其中

$$C_R = \{z : |z| = R, \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}, \quad (0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi)$$

若

$$\lim_{R\to\infty}\left(R \cdot \max_{z\in C_R} |f(z)|\right) = 0$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

♡

Remark 特别地, 以下几种情况满足引理条件:

1. $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$
2. $f = \frac{P}{Q}$, 其中 P, Q 是既约多项式, 且 $\deg Q - \deg P \geq 2$.

Proof 由不等式

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \leq L(C_R)\max_{z\in C_R}|f(z)| = (\theta_2-\theta_1)R\max_{z\in C_R}|f(z)| \to 0, \quad (R\to\infty)$$

□

引理 5.2 (Jordan)

设 f 在 $\{z : R_0 \leq |z| < \infty, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$ 上连续, 且 $\lim_{z\to\infty, \mathrm{Im}\ z\geq 0} f(z) = 0$, 则对于任意的 $\alpha > 0$, 都有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

其中 $\gamma_R = \left\{z : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi, R \geq R_0\right\}$

♡

Proof 记 $M(R) = \max_{z\in\gamma_R}|f(z)|$, 则 $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$.

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi e^{i\alpha R\cos\theta}e^{-\alpha R\sin\theta} f\left(Re^{i\theta}\right) Rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

其中

$$\left|e^{i\alpha R\cos\theta}e^{-\alpha R\sin\theta} f\left(Re^{i\theta}\right) Rie^{i\theta}\right| \leq Re^{-\alpha R\sin\theta}M(R)$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\right| &\le RM(R)\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &\le 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2RM(R)\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha R}\left(1-e^{-\alpha R}\right)\\ &\le \frac{\pi M(R)}{\alpha}\to 0,\quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

□

引理 5.3 (小圆弧 I)

若设 f 是一个在某个包含了圆弧 C_ε 的区域内连续的函数. 其中

$$C_\varepsilon = \{z : |z| = \varepsilon, \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}, \quad (0 \le \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi)$$

若

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon\cdot\max_{z\in C_\varepsilon}|f(z)|\right) = 0$$

则

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Proof 由不等式

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \le L(C_\varepsilon)\max_{z\in C_\varepsilon}|f(z)| = (\theta_2-\theta_1)\,\varepsilon\max_{z\in C_\varepsilon}|f(z)| \to 0\,(\varepsilon\to 0)$$

□

引理 5.4 (小圆弧 II)

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 处有一个单极点，并且在 z_0 的某个去心邻域内解析。设 C_ϵ 是以 z_0 为圆心、半径为 ϵ 的圆弧，其角度范围为 $\theta_1 \le \arg(z-z_0) \le \theta_2$。那么，沿着圆弧 C_ϵ 的积分在 $\epsilon \to 0$ 时的极限为：

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{Res}\,(f, z_0)$$

Idea 用于处理边界上出现奇点的情况. 可以看成是将留数定理推广到直线边界上. 其上奇点的贡献权重为 $\frac{1}{2}$.

Proof 由于 z_0 是 $f(z)$ 的一个简单极点，我们可以将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内进行洛朗级数展开：

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + g(z)$$

其中 $b_1=\mathrm{Res}\,(f,z_0)$，且 $g(z)$ 在 z_0 处解析（因此在 z_0 附近有界）。我们将积分分解为两部分：

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz=\int_{C_\epsilon}\frac{b_1}{z-z_0}dz+\int_{C_\epsilon} g(z)dz$$

1. 由于 $g(z)$ 在 z_0 处解析，它在 z_0 附近有界，即存在 $M>0$ 使得 $|g(z)|\leq M$ 对于所有 $z\in C_\epsilon$。根据 ML-不等式：

$$\left|\int_{C_\epsilon} g(z)dz\right|\leq L_\epsilon\cdot\max_{z\in C_\epsilon}|g(z)|\leq(\theta_2-\theta_1)\epsilon\cdot M$$

当 $\epsilon\to 0$ 时，$(\theta_2-\theta_1)\epsilon\cdot M\to 0$。因此，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} g(z)dz=0$$

2. 令 $z-z_0=\epsilon e^{i\theta}$，则 $dz=i\epsilon e^{i\theta}d\theta$。

$$\int_{C_\epsilon}\frac{b_1}{z-z_0}dz=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{b_1}{\epsilon e^{i\theta}}(i\epsilon e^{i\theta}d\theta)=\int_{\theta_1}^{\theta_2} ib_1d\theta=ib_1(\theta_2-\theta_1)$$

将 $b_1=\mathrm{Res}(f,z_0)$ 代入，得到 $i(\theta_2-\theta_1)\mathrm{Res}(f,z_0)$。

□

方法 5.1

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(ax\right)f\left(x\right)\,\mathrm{d}x,\quad(a>0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(ax\right)f\left(x\right)\,\mathrm{d}x,\quad(a>0)$$

其中 $\lim_{z\to\infty,\mathrm{Im}\;z\geq 0} f\left(z\right)=0$

Proof

考虑 $e^{i\alpha z}f\left(z\right)$ 在 ∂D_R^+ 上的积分，并令 $R\to\infty$. 圆弧上的积分区域零，剩下的部分为 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$. 对结果取实部或虚部即可.

对于 f 在边界上有极点的，通过小圆弧引理挖去即可. 最终结果相当于对计算结果加上 $\pi i\,\mathrm{Res}\,\left(e^{iaz}f,\cdot\right)$.

□

方法 5.2

$$\int_0^{\infty}f\left(x\right)x^{p-1}\,\mathrm{d}x,\quad(0<p<1)$$

Proof 借助对数函数

$$z^{p-1}=e^{(p-1)\,\mathrm{Log}\;z}$$

以及锁孔形环路

$$[\varepsilon,R]_{\text{上沿}}+C_R-[\varepsilon,R]_{\text{下沿}}-C_\varepsilon$$

取主值分支. 上沿上,

$$e^{(p-1)\log z}=x^{p-1}$$

下沿上,

$$e^{(p-1)\log z}=x^{p-1}e^{2p\pi i}$$

利用这个结果防止函数在一个回路上积分时, 正实轴上下沿部分的贡献抵消.

□

方法 5.3

计算

$$\int_0^{\infty} f(x)\ln x\,\mathrm{d}x$$

Solution 考虑

$$g(z)=f(z)(\ln z)^2$$

设 C_ε,C_R 分别是以 0 为中心, ε, R 为半径的圆周. 考虑以下积分区域

$$[\varepsilon,R]_{\text{上沿}}+C_R-[\varepsilon,R]_{\text{下沿}}-C_\varepsilon$$

g 在 $[\varepsilon,R]$ 上沿与下沿的积分差为

$$\int_\varepsilon^R f(z)(\ln z)^2\,\mathrm{d}z-\int_\varepsilon^R f(z)(\ln z+2\pi i)^2\,\mathrm{d}z=-4\pi i\int_\varepsilon^R f(z)\ln z\,\mathrm{d}z-4\pi i\int_\varepsilon^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算出 g 在 C_R,C_ε 上积分的极限 (通常由大小圆弧引理有比较简单的形式). 并计算出 $\int_0^\infty f\,\mathrm{d}x$, 全部带入即可算出 $\int_0^\infty f(x)\ln x\,\mathrm{d}x$

方法 5.4

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Proof 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$, 则

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

, 则

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)=2\int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

另一种方法上化为复数,

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z$$

□

定理 5.13

设 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $a_1, \ldots, a_n$ 外是全纯的, $a_1, \ldots, a_n$ 都不在区间 $[a, b]$ 上; 设 $-1 < r, s < 1, s \neq 0$, 且 $r+s$ 是整数. 如果

$$\lim_{z \to \infty} z^{r+s+1} f(z) = A \neq \infty,$$

那么

$$\int_a^b (x-a)^r (b-x)^s f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin s\pi} \left(-A + e^{s\pi i} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(F, a_k\right) \right)$$

这里, $F(z) = (z-a)^r (b-z)^s f(z)$.

Remark 正 x 相关的次数 r 的贡献仅体现在 A 上.

命题 5.3

计算

$$\int_0^\infty \cos x^2\, \mathrm{d}x, \quad \int_0^\infty \sin x^2\, \mathrm{d}x$$

Proof 令 $f(z) e^{iz^2}$. 考虑它在 $\frac{\pi}{4}$ 的扇形上的积分. 大弧线上的积分趋于零. 下面那条直边上的积分为

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

上面那条直边上的积分为

$$\int_0^\infty e^{-i\left(re^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \int_0^\infty e^{-r^2}\, \mathrm{d}\left(re^{\frac{\pi i}{4}}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

带入计算出

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

分别取实部和虚部, 两个积分均等于 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ □

命题 5.4

Poisson 积分

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, \mathrm{d}x$$

考虑以 $-R, R, R+\frac{b}{2a}i, -R+\frac{b}{2a}i$ 为顶点的举行上, e^{-ax^2} 的积分. 当 $R \to \infty$ 时, 两个短边上的积分值为趋于零. 位于实轴的边的积分根据概率积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

得到. 上面的长边的积分就是 $e^{-ax^2}\cos bx$ 的积分配上一个系数. 最终计算得到

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

5.6 辐角原理和 Rouche 定理

引理 5.5

设 f 是域 D 上不恒为零的亚纯函数, γ 是 D 上一可求长的简单闭曲线, 则 f 在 γ 内部只能有有限个零点/极点.

Proof 只证明零点的表述, 极点的情况完全类似.

令 Ω 是 γ 围成的有界开集, 令 $K=\bar{\Omega}=\Omega\cup\gamma$. 则 K 是一个有界闭集, 进而是一个紧集. 若有无穷多个零点, 设零点集为 $Z\subseteq\Omega$. 则 Z 至少有一个聚点, 记作 z_0, 由于 K 是闭的,$z_0\in K$. 由 f 的连续性, z_0 也是一个零点. 这表明 z_0 是 f 在 K 上的一个非孤立奇点,

□

定理 5.14

设 $D\subseteq\mathbb{C}$ 是有界区域 $\gamma=\partial D$ 由有限条分段光滑 Jordan 闭合曲线组成. $f\in\mathcal{M}(D)$, f 在 γ 上每一点解析, 且在 γ 上无零点. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 f 在 D 上的所有零点, $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 f 在 D 上所有极点, 阶数分别为 $k_1,\cdots,k_m$,$l_1,\cdots,l_n$,$\varphi\in\mathcal{H}\left(\bar{D}\right)$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi\left(z\right)\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\mathrm{d}z=\sum_{t=1}^{m}k_t\varphi\left(\alpha_t\right)-\sum_{j=1}^{n}l_j\varphi\left(\beta_j\right)$$

Idea

1. f'/f 会把极点和零点降成 1 阶, 讲阶的相对系数就是原极点或零点的阶数,

Proof 零 $F\left(z\right)=\varphi\left(z\right)\frac{f'(z)}{f(z)}$, 则 F 在 $\bar{D}\setminus\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 解析, 由留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi\left(z\right)\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\mathrm{d}z=\sum_{t=1}^{m}\mathrm{Res}\left(F,\alpha_t\right)+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\left(F,\beta_j\right)$$

对 α_t, 取 $\delta_t>0$, 使得 $U\left(\alpha_t,2\delta_t\right)\subseteq D$, 且

$$f\left(z\right)=\left(z-\alpha_t\right)^{k_t}g\left(z\right),\quad g\left(\alpha_t\right)\neq 0$$

不妨设在 $\bar{U}\left(\alpha_t,\delta_t\right)$ 上, $g\left(z\right)\neq 0$,

$$f'\left(z\right)=k_t\left(z-\alpha_t\right)^{k_t-1}g\left(t\right)+\left(z-\alpha_t\right)^{k_t}g'\left(z\right)$$

在 $\bar{U}\left(\alpha_t,\delta_t\right)\setminus\{\alpha_t\}$ 上, 有

$$\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}=\frac{k_t}{z-\alpha_t}+\frac{g'\left(z\right)}{g\left(z\right)}$$

故 $\frac{f'}{f}$ 在 α_t 处有单极点, 留数为 k_t .

在 $\bar{U}(\alpha_t,\delta_t)$ 上,

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi(\alpha_t)+\varphi'(\alpha_t)(z-\alpha_t)+\frac{1}{2!}\varphi''(t)(z-\alpha_t)^2+\cdots\\&=\varphi(\alpha_t)+(z-\alpha_t)\varphi_1(z)\end{aligned}$$

$\varphi_1\in\mathcal{H}\left(\bar{U}(\alpha_t,\delta_t)\right)$ 于是

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{k_t\varphi(\alpha_t)}{z-\alpha_t}+\varphi(\alpha_t)\frac{g'(z)}{g(z)}+(z-\alpha_t)\varphi_1(z)\frac{k_t}{z-\alpha_t}+(z-\alpha_1)\varphi_1(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\\&=\frac{k_t\varphi(\alpha_t)}{z-\alpha_t}+\varphi_1(z)k_t+\varphi(\alpha_t)\frac{g'(z)}{g(z)}+(z-\alpha_1)\varphi_1(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Res}(F,\alpha_t)=k_t\varphi(\alpha_t)$$

$\forall j$, 取 $\delta_j>0$, 使得 $U(\beta_j,2\delta_j)\subseteq D$, 且

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-\beta_j)^{l_j}}$$

其中

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-\beta_j)^{l_j}}$$

其中

$$h\in\mathcal{H}(U(\beta_j,2\delta j)),h(\beta_j)\neq 0$$

不妨设 $h(z)\neq 0$ 在 $\bar{U}(\beta_j,\delta_j)$ 上成立. 则

$$f'(z)=\frac{-h_jh(z)}{(z-\beta_j)^{l_j+1}}+\frac{h'(z)}{(z-\beta_j)^{l_j}}$$

从而在 $\bar{U}(\beta_j,l_j)\setminus\{\beta_j\}$ 上,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{l_j}{z-\beta_j}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

故 f'/f 在 β_j 处有单极点, 并且

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},\beta_j\right)=-l_j$$

在 $\bar{U}(\beta j,l_j)$ 上, 类似地

$$\varphi(z)=\varphi(\beta_j)+(z-\beta_j)\varphi_2(z),\quad\varphi_2\in\mathcal{H}\left(\bar{U}(\beta_j,\delta_j)\right)$$

故

$$F(z)=-\frac{l_j}{z-\beta_j}\varphi(\beta_j)+\mu(z),\quad\mu\in\mathcal{H}\left(\bar{U}(\beta_j,\delta_j)\right)$$

□

定理 5.15 (Rouche 定理)

设 $f,g \in \mathcal{H}(D)$,γ 是 D 中可求长的简单闭曲线, γ 的内部落在 D 中. 若

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

则 f,g 在 γ 的内部零点个数相同.

Idea 若对函数的扰动在边界上小于初始函数或结果函数, 都会导致初始函数和结果函数有相同的零点个数.

Proof 由辐角原理, f,g 在 γ 的内部的零点个数等于 $f\circ\gamma$ 和 $g\circ\gamma$ 对 0 的环绕数, 是同伦不变的. 考虑映射

$$F(z,t)=f(z)+t(g(z)-f(z)), \quad z \in D, t \in [0,1]$$

不等式

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

给出

$$F(z,t) \neq 0, \quad z \in \gamma, t \in [0,1]$$

故 f 和 g 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上同伦, 进而 $f\circ\gamma$ 和 $g\circ\gamma$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上同伦, $f\circ\gamma$ 和 $g\circ\gamma$ 绕 0 有相同的环绕数.

□