目录

第 1 章 曲率

定义 1.1 (平坦性)

称 Riemann 流形 (M,g) 是平坦的，若它局部等距同构于欧式空间[a]。

[a]任一点有等距同构于 $\mathbb{R}^n$ 上一开集的邻域

命题 1.1

设 (M,g) 是平坦的 Riemann 流形，∇ 是其上的 Levi-Civita 联络，则对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，

$$\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z=\nabla_{[X,Y]}Z$$

Proof 由联络的局部性，等式由向量场在局部上的限制决定，又 (M,g) 是平坦的，从而是保度量的，又 Levi-Civita 联络由度量唯一决定，从而只需要在 $\mathbb{R}^n$ 上一开集 U 的关于 $\overline{\nabla}$ 的上述等式。

任取 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(U)$，则

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z=\overline{\nabla}_X\left(Y\left(Z^k\right)\partial_k\right)=XY\left(Z^k\right)\partial_k$$

类似地

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z=YX\left(Z^k\right)\partial_k$$

故

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z=(XY-YX)\left(Z^k\right)\partial_k=\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

故命题成立。

□

定义 1.2 (平坦性条件)

称光滑流形 M 上的联络满足 **平坦性条件**，若对于 M 上任意开集 U，定义在 U 上的光滑向量场 X,Y,Z 都满足

$$\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z=\nabla_{[X,Y]}Z$$

推论 1.1

若 (M,g) 上一个平坦的（伪）Riemann 流形，则它的 Levi-Civita 联络满足平坦性条件。

1.1 曲率张量

定义 1.3

设 (M, g) 是（伪）Riemann 流形，定义映射 $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$R(X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

其中 ∇ 为 (M, g) 的 Levi-Civita 联络。

命题 1.2

上面定义的映射 R 是多 $C^\infty(M)$-线性的，从而定义出 M 上的一个 $(1,3)$-张量场。

Proof 显然映射 R 上 $\mathbb{R}$-线性的。任取 $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} R(X, fY, Z) &= \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY} \nabla_X Z - \nabla_{[X,fY]} Z \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z) - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]+(Xf)Y} Z \\ &= (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= f R(X, Y, Z) \end{aligned}$$

这表明 R 关于 Y 上 $C^\infty(M)$-线性的，又 $R(X, Y) Z = -R(Y, X) Z$，故 R 关于 X 也是 $C^\infty(M)$-线性的。计算

$$\begin{aligned} R(X, Y, fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]} (fZ) \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f) Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f) Z) \\ &\quad - f \nabla_{[X,Y]} Z - [X, Y](f) Z \end{aligned}$$

其中

$$\nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f) Z) = f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + Y(f) \nabla_X Z + XY(f) Z$$
$$\nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f) Z) = f \nabla_Y \nabla_X Z + (Yf) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + YX(f) Z$$

二者相减，得到

$$\begin{aligned} &\nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf) Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf) Z) \\ &= f (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) - ([X, Y] f) Z \end{aligned}$$

结合以上，得到

$$R(X, Y, fZ) = f R(X, Y, Z)$$

□

定义 1.4

对于一对光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，由 $Z \mapsto R(X,Y)Z$ 给出的映射 $R(X,Y): \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 可以视作 TM 上的光滑丛自同态[a]，称为由 X 和 Y 决定的曲率自同态。

称张量 R 为 (Riemann) 曲率自同态或 $(1,3)$-曲率张量。

[a] $C^\infty(M)$-线性给出 $R(X,Y)$ 在每个纤维的限制不依赖于邻域的选取。

命题 1.3

曲率自同态 R 在 (x^i) 上写作

$$R = R^l_{ijk}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_l$$

其中 R^l_{ijk} 满足

$$R(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$$

Proof 由张量场的坐标表示，$\{\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_l\}$ 是 $(1,3)$-张量场空间的一组基，故 R 可以写作以上坐标表示。通过两边作用 $(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k$，可以计算得到 $R^l_{ijk}\partial_l$。

□

命题 1.4

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形，则在任意光滑局部坐标下，$(1,3)$-曲率张量场的分量函数由以下给出:

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{im}$$

Idea 记忆: 展开 $\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k$ 关于两个求导分量的对称差.

Proof

$$R(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k$$

其中

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\left(\Gamma^l_{jk}\partial_l\right) = \left(\partial_i\Gamma^l_{jk}\right)\partial_l + \Gamma^l_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_l \\
&= \left(\partial_i\Gamma^l_{jk}\right)\partial_l + \left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\right)\partial_l \\
&= \left(\partial_i\Gamma^l_{jk} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\right)\partial_l
\end{aligned}$$

类似地

$$\nabla_{\partial_j}\nabla\partial_i\partial_k = \left(\partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\partial_l$$

最后，由于 $[\partial_i, \partial_j] = 0$，故 $\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k = 0$，上两式相减即可得命题成立。

□

命题 1.5

设 (M,g) 是光滑（伪）Riemann 流形，$\Gamma:J\times I\to M$ 是 M 上的一个光滑单参数曲线族，则对于任意沿 Γ 的光滑向量场 V，都有

$$D_sD_tV-D_tD_sV=R\left(\partial_s\Gamma,\partial_t\Gamma\right)V$$

Proof 命题是局部的，对于每个 $(s,t)\in J\times I$，我们选取附近的一个局部坐标 (x^i)，并记

$$\Gamma\left(s,t\right)=\left(\gamma^1\left(s,t\right),\cdots,\gamma^n\left(s,t\right)\right),\quad V\left(s,t\right)=V^j\left(s,t\right)\partial_j|_{\Gamma(s,t)}$$

我们有

$$D_tV=\frac{\partial V^i}{\partial t}\partial_i+V^iD_t\partial_i$$

再作用 D_s，得到

$$D_sD_tV=\frac{\partial^2V^i}{\partial s\partial t}\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial t}D_s\partial_i+\frac{\partial V^i}{\partial s}D_t\partial_i+V^iD_sD_t\partial_i$$

由对称性对 D_tD_sV 也有类似的结论，两式相减，得到

$$D_sD_tV-D_tD_sV=V^i\left(D_sD_t\partial_i-D_tD_s\partial_i\right)$$

记 $S=\partial_s\Gamma,T=\partial_t\Gamma$，则

$$S=\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}\partial_k,\quad T=\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\partial_j$$

由于 ∂_i 是可扩张的，

$$\begin{aligned}D_sD_t\partial_i&=D_s\left(\nabla_{\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\partial_j}\partial_i\right)\\&=D_s\left(\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i\right)\\&=\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}D_s\nabla_{\partial_j}\partial_i\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}D_s\nabla_{\partial_j}\partial_i&=\nabla_{\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i\\&=\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i\end{aligned}$$

故

$$D_sD_t\partial_i=\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

类似地

$$D_tD_s\partial_i=\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial t\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i+\frac{\partial\gamma^j}{\partial s}\frac{\partial\gamma^k}{\partial t}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

$$\begin{aligned}D_sD_t\partial_i-D_tD_s\partial_i&=\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}\left(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i\right)\\&=\frac{\partial\gamma^j}{\partial t}\frac{\partial\gamma^k}{\partial s}R\left(\partial_k,\partial_j\right)\partial_i=R\left(S,T\right)\partial_i\end{aligned}$$

于是

$$D_sD_tV-D_tD_sV=V^iR\left(S,T\right)\partial_i=R\left(S,T\right)V$$

□

定义 1.5

定义（Riemann）曲率张量为 $(0,4)$-张量场 $Rm=R^\flat$，即

$$Rm\left(X,Y,Z,W\right)=\left\langle R\left(X,Y\right)Z,W\right\rangle_g$$

♣

命题 1.6 (坐标表示)

在任意一组光滑坐标卡下，

$$Rm=R_{ijkl}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^k\otimes\mathrm{d}x^l$$

其中 $R_{ijkl}=g_{lm}R_{ijk}^m$，进而

$$R_{ijkl}=g_{lm}\left(\partial_i\Gamma_{jk}^m-\partial_j\Gamma_{ik}^m+\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^m-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^m\right)$$

♠

Idea 记忆: 对 R_{ijk}^l 降低指标 $g_{lm}R_{ijk}^m$, 计算 $\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k$ 关于求导分量的对称差.

Proof 将 Rm 按张量场空间的坐标基展开，计算

$$\begin{aligned}Rm\left(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l\right)&=\left\langle R\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k,\partial_l\right\rangle_g\\&=\left\langle R_{ijk}^m\partial_m,\partial_l\right\rangle_g\\&=g_{ml}R_{ijk}^m\end{aligned}$$

并带入 R_{ijk}^m 的计算公式

$$R_{ijk}^m=\left(\partial_i\Gamma_{jk}^m-\partial_j\Gamma_{ik}^m+\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^m-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^m\right)$$

即可

□

命题 1.7

Levi-Civita 联络的曲率张量是局部等距同构不变的：若 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是（伪）Riemann 流形，$\varphi: M\to\tilde{M}$ 是一个局部等距同构，则 $\varphi^*\widetilde{Rm}=Rm$，其中 $\widetilde{Rm}$ 和 Rm 均由 Levi-Civita 联络定义

Proof 由于局部等距同构保持 Levi-Civita 联络，故曲率自同态张量 $\varphi^*\tilde{R}=R$，进而 $\varphi^*\tilde{R}_{ijk}^m=R_{ijk}$，又 $\varphi^*\tilde{g}_{lm}=g_{lm}$，故 $\varphi^*\tilde{R}_{ijkl}=R_{ijkl}$，从而 $\varphi^*\widetilde{Rm}=Rm$

□

1.2 平坦流形

引理 1.1

设 M 是光滑流形，∇ 是 M 上满足平坦性条件的任意联络。给定 $p\in M$ 以及 $v\in T_pM$，则存在一个在 p 的某个邻域上平行的向量场 V，使得 $V_p=v$。

Proof *

令 $p\in M$，$v\in T_pM$，设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是以 p 为中心的一个光滑坐标。通过缩小坐标的像，不妨设坐标映射的像是一个开立方体 $C_\varepsilon=\{x:|x^i|<\varepsilon,i=1,\cdots,n\}$，利用坐标映射将坐标的定义域与 C_ε 等同。

按以下方式构造一个向量场 V，先将 v 沿着 x^1-坐标轴做平行移动，则我们在 x^1-轴上的每一个点确定了一个切向量；在令 x^1-轴上的每一个点沿着 x^2-曲线做平行移动，则我们在 (x^1,x^2)-平面上的每一个点确定了切向量，以此类推，知道我们再 $(x^1,\cdots,x^n)$-平面上的每一个点都确定了切向量。我们再 C_ε 上定义了一个向量场 V，通过流的一些知识，可以证明 V 是一个光滑向量场[1]。

接下来证明 $\nabla_XV=0,\forall X\in\mathfrak{X}(C_\varepsilon)$。由于 ∇_XV 是关于 X 具有 $C^\infty(M)$-线性的，只需要证明 $\nabla_{\partial_i}V=0$ 对于所有的 $i=1,\cdots,n$ 成立。根据构造，$\nabla_{\partial_1}V$ 在 x^1-轴上成立，$\nabla_{\partial_2}V$ 在 (x^1,x^2)-平面上成立，一般地，$\nabla_{\partial_k}V=0$ 在 $M_k\subseteq C_\varepsilon$ 成立，其中 $M_k=\{x^{k+1}=\cdots=x^n=0\}$。接下来，我们对 k 归纳地证明

$$\nabla_{\partial_1}V=\cdots=\nabla_{\partial_k}V=0,\quad \text{在}M_k\text{上成立}$$

当 $k=1$ 由 V 的构造已经成立，当 $k=n$ 时就是我们所需要的。假设上式对于某个 k 成立，则 $\nabla_{\partial_{k+1}}V$ 在整个 M_{k+1} 上成立；而对于 $i\le k$，$\nabla_{\partial_i}V$ 在 $M_k\subseteq C_\varepsilon$ 上成立。

[1]现在还不会证

由于 $[\partial_{k+1}, \partial_i]$ 成立，由平坦性条件，我们有

$$\nabla_{\partial_{k+1}}(\nabla_{\partial_i}V) = \nabla_{\partial_i}\left(\nabla_{\partial_{k+1}}V\right) = 0$$

在 M_{k+1} 上成立。这表明 $\nabla_{\partial_i}V$ 在 M_k 上的任意一点都沿着 x^{k+1}-曲线平行。而 $\nabla_{\partial_i}V$ 在 M_k 上任一点都为零，向量场在该点沿 x^{k+1} -曲线的平行移动唯一，就是零向量场。而 M_{k+1} 的每一个点都落在这样一个 x^{k+1}-曲线上，故 $\nabla_{\partial_i}V$ 在 M_{k+1} 上为零。

□

定理 1.1

一个（伪）-Riemann 流形是平坦的，当且仅当它（关于 Levi-Civita 联络）的曲率张量恒为零。

♡

定理 1.2

令 (M,g) 是（伪）-Riemann 流形；I 是包含了 0 的开区间；令 $\Gamma : I\times I\to M$ 是光滑的单参数曲线族；令 $p=\Gamma(0,0), x=\partial_s\Gamma(0,0)$，$y=\partial_t\Gamma(0,0)$。对于任意的 $s_1,s_2,t_1,t_2\in I$，令 $P^{s_1,t_2}_{s_1,t_1} : T_{\Gamma(s_1,t_1)}M\to T_{\Gamma(s_1,t_2)}M$ 是沿曲线 $t\mapsto\Gamma(s_1,t)$ 从时间 t_1 到 t_2 的平行移动，令 $P^{s_2,t_2}_{s_1,t_1} : T_{\Gamma(s_1,t_1)}M\to T_{\Gamma(s_2,t_1)}M$ 表示沿曲线 $s\mapsto\Gamma(s,t_1)$ 的从时间 s_1 到 s_2 的平行移动。则对于所有的 $z\in T_pM$，

$$R(x,y)z = \lim_{\delta,\varepsilon\to 0}\frac{P^{0,0}_{\delta,0}\circ P^{\delta,0}_{\delta,\varepsilon}\circ P^{\delta,\varepsilon}_{0,\varepsilon}\circ P^{0,\varepsilon}_{0,0}(z)-z}{\delta\varepsilon}$$

♡

1.3 曲率张量的对称性

命题 1.8 (曲率张量的对称性)

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形。则 g 的 $(0,4)$-曲率张量对于所有的向量场 W,X,Y,Z 有一下成立

1. $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(X,W,Y,Z)$ [a]
2. $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(W,X,Z,Y)$ [b]
3. $Rm(W,X,Y,Z) = Rm(Y,Z,W,X)$ [c]
4. 代数 Biachi 恒等式：

$$Rm(W,X,Y,Z)+Rm(X,Y,W,Z)+Rm(Y,W,X,Z) = 0$$ [d]

在任意一组坐标下，有对应分量表示的形式

1′. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.

2′. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

3′. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

4′. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

---

[a]交换求导次序的反称

[b]交换回路差呈现方式的反称

[c]交换回路差的产生和呈现的对称

[d]前三个的轮换对称，来自联络的对称性

Proof

1. 由定义显然;
2. 只需要证明 $Rm\left(W, X, Y, Y\right)$ 对于所有的 Y 成立，然后就可以通过展开 $Rm\left(W, X, Y+Z, Y\right.$ 得到. 因此我们需要证明

$$\left\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y\right\rangle + \left\langle \nabla_X \nabla_W, Y\right\rangle - \left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y\right\rangle$$

证明的秘诀是利用度量性，把外面的导数求到里面去，考虑

$$\begin{aligned} WX\left\langle Y, Y\right\rangle &= 2W\left\langle \nabla_X Y, Y\right\rangle = 2\left\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y\right\rangle + 2\left\langle \nabla_X Y, \nabla_W Y\right\rangle \\ XW\left\langle Y, Y\right\rangle &= 2X\left\langle \nabla_W Y, Y\right\rangle = 2\left\langle \nabla_X \nabla_W Y, Y\right\rangle + 2\left\langle \nabla_W Y, \nabla_X Y\right\rangle \\ [W, X]\left\langle Y, Y\right\rangle &= 2\left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y\right\rangle \end{aligned}$$

前两式相加减去后一个，得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y\right\rangle + 2\left\langle \nabla_X \nabla_W Y, Y\right\rangle - 2\left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y\right\rangle \\ &= 2Rm\left(W, X, Y, Y\right) \end{aligned}$$

3. 先证明第四个，由 Rm 的定义，只需要证明

$$R\left(W, X\right) Y + R\left(X, Y\right) W + R\left(Y, W\right) X = 0$$

按定义直接展开，利用对称性，得到

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_W\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_W Y-\nabla_{[W,X]}Y\right)\\
&+\left(\nabla_X\nabla_Y W-\nabla_Y\nabla_X W-\nabla_{[X,Y]}W\right)\\
&+\left(\nabla_Y\nabla_W X-\nabla_W\nabla_Y X-\nabla_{[Y,W]}X\right)\\
&=\nabla_W\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X\right)+\nabla_X\left(\nabla_Y W-\nabla_W Y\right)+\nabla_Y\left(\nabla_W X-\nabla_X W\right)\\
&-\nabla_{[W,X]}Y-\nabla_{[X,Y]}W-\nabla_{[Y,W]}X\\
&=\nabla_W[X,Y]+\nabla_X[Y,W]+\nabla_Y[W,X]\\
&-\nabla_{[W,X]}Y-\nabla_{[X,Y]}W-\nabla_{[Y,W]}X\\
&=[W,[X,Y]]+[X,[Y,W]]+[Y,[W,X]]
\end{aligned}$$

由 Jacobi 恒等式得证.

□

命题 1.9 (微分 Bianchi 恒等式)

曲率张量的全协变导数满足一下恒等式

$$\nabla Rm(X,Y,Z,V,W)+\nabla Rm(X,Y,V,W,Z)+Rm(X,Y,W,Z,V)=0^{a} \tag{1.1}$$

它的分量形式为

$$R_{ijkl;m}+R_{ijlm;k}+R_{ijmk;l}$$

[a] 后三个轮换

1.4 Ricci 恒等式

定义 1.6 (曲率同态的对偶)

令 $R(X,Y)^*: T^*M\to T^*M$ 为 $R(X,Y)$ 的对偶映射，按以下方式定义

$$\left(R(X,Y)^*\eta\right)(Z)=\eta\left(R(X,Y)Z\right)$$

定理 1.3 (Ricci 恒等式)

在 (伪)Riemann 流形 M 上，二阶全协变导数对于向量场和张量场满足一下恒等式. 若 Z 是一个光滑向量场，则

$$\nabla^2_{X,Y}Z-\nabla^2_{Y,X}Z=R(X,Y)Z \tag{1.2}$$

若 β 是一个光滑 1-形式，则

$$\nabla^2_{X,Y}\beta - \nabla^2_{Y,X}\beta = -R(X,Y)^*\beta \tag{1.3}$$

设 B 是任意 (k,l) -张量，则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}B - \nabla^2_{Y,X}B\right)\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&= B\left(R(X,Y)^*\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right) + B\left(\omega^1,\cdots,R(X,Y)^*\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&- B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,R(X,Y)W_1,\cdots,W_l\right) - B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,R(X,Y)W_l\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$

在光滑局部标价下，这些结论有分量形式

$$\begin{aligned}Z^i_{;pq} - Z^i_{;qp} &= -R^i_{pqm}Z^m\\ \beta^i_{;pq} - \beta^i_{;pq} &= R^m_{pqi}\beta_m\\ B^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_l;pq} &= -R^{i_1}_{pqm}B^{mi_2\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} - \cdots - R^{i_k}_{pqm}B^{i_1\cdots i_{k-1}m}_{j_1,\cdots,j_l}\\ &\quad + R^m_{pqj_1}B^{i_1,\cdots,i_k}_{mj_2\cdots j_l} + \cdots + R^m_{pqj_l}B^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1\cdots j_{l-1}m}\end{aligned}$$

♡

Proof

对于任意的张量场 B，我们有

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}B - \nabla^2_{Y,X}B &= \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_{\nabla_X Y}B - \nabla_Y\nabla_X B + \nabla_{\nabla_Y X}F\\ &= \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_Y\nabla_X B - \nabla_{[X,Y]}B\end{aligned}$$

首先考虑向量场的结论，我们

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= R(X,Y)Z\end{aligned}$$

对于 1-形式的情况，我们反复利用 ∇ 与自然配对的相容性

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X\omega)Y + \omega(\nabla_X Y),$$

计算

$$\begin{aligned}(\nabla_X(\nabla_Y\beta))(Z) &= \nabla_X((\nabla_Y\beta)Z) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\ &= \nabla_X(\nabla_Y(\beta(Z) - \beta(\nabla_Y Z))) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\ &= \nabla_X(\nabla_Y(\beta(Z))) - \nabla_X(\beta(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\ &= XY(\beta(Z)) - X(\beta(\nabla_Y Z)) - Y(\beta(\nabla_X Z)) + \beta(\nabla_Y\nabla_X Z)\end{aligned}$$

类似的

$$(\nabla_Y(\nabla_X\beta))(Z) = YX(\beta(Z)) - Y(\beta(\nabla_X Z)) - X(\beta(\nabla_Y Z)) + \beta(\nabla_X\nabla_Y Z)$$

以及

$$\nabla_{[X,Y]}\beta(Z)=[X,Y]\beta(Z)-\beta\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}\beta(Z)-\nabla^2_{Y,X}\beta(Z)&=\nabla_X\nabla_Y\beta(Z)-\nabla_Y\nabla_X\beta(Z)-\nabla_{[X,Y]}\beta(Z)\\&=\beta(\nabla_Y\nabla_X Z)-\beta(\nabla_X\nabla_Y Z)+\beta\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)\\&=-\beta(R(X,Y)Z)\\&=-R(X,Y)^*\beta(Z)\end{aligned}$$

故 1-形式的情况得证. 现在考虑任意张量场 F,G, 则

$$\begin{aligned}&\nabla^2_{X,Y}(F\otimes G)-\nabla^2_{Y,X}(F\otimes G)\\&=\nabla_X\nabla_Y(F\otimes G)-\nabla_Y\nabla_X(F\otimes G)-\nabla_{[X,Y]}(F\otimes G)\\&=(\nabla_X\nabla_Y F)\otimes G+(\nabla_X F)\otimes(\nabla_Y G)+(\nabla_Y F)\otimes(\nabla_X G)+F\otimes(\nabla_X\nabla_Y G)\\&-(\nabla_Y\nabla_X F)\otimes G+(\nabla_Y F)\otimes(\nabla_X G)-(\nabla_X F)\otimes(\nabla_Y G)+F\otimes(\nabla_Y\nabla_X G)\\&-\left(\nabla_{[X,Y]}F\right)\otimes G-F\otimes\left(\nabla_{[X,Y]}G\right)\\&=\left(\nabla^2_{X,Y}F\right)\otimes G+F\otimes\left(\nabla^2_{X,Y}G\right)\end{aligned}$$

考虑 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l$, 则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X}\right)\left(V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l\right)\\&=(R(X,Y)V_1)\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l+V_1\otimes\cdots\otimes(R(X,Y)V_k)\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l\\&-V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\left(R(X,Y)^*\eta^1\right)\otimes\cdots\otimes\eta^l-V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\left(R(X,Y)^*\eta^l\right)\end{aligned}$$

记 $B=V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l$, 则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X}\right)B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&=B\left(R(X,Y)^*\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)+\cdots+B\left(\omega^1,\cdots,R(X,Y)^*\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&-B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,R(X,Y)W_1,\cdots,W_l\right)-B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,R(X,Y)W_l\right)\end{aligned}$$

最后, 对于分量形式的刻画, 我们利用

$$R(E_q,E_p)E_j=R^m_{qpj}E_m=-R^m_{pqj}E_m$$

和

$$R(E_q,E_p)^*\varepsilon^i=-R^i_{qpm}\varepsilon^m=R^i_{pqm}\varepsilon^m$$

□

1.5 Ricci 曲率和标量曲率

定义 1.7

设 (M,g) 是 n-维 (伪)Riemann 流形

1. 定义 Ricci 曲率为一个 2-张量场，记作 Rc，通过缩并曲率自同态的第一个指标和最后一个指标，即

$$Rc(X,Y) := \operatorname{tr}\left(Z \mapsto R(Z,X)Y\right)^{a}$$

则在一组光滑标架下，

$$Rc = R_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$$

其中 $R_{ij} = Rc(E_i,E_j)$

2. 定义标量曲率为函数 S，通过取 Ricci 张量的迹

$$S = \operatorname{tr}_g Rc^{b}$$

[a] 由于曲率自同态本身是 $(1,3)$ -张量，斜变指标只有一个选择，体现在映射的结果 $R(Z,X)Y$ 上；固定了 X,Y，选择构造以 Z 为自变量嵌入到张量的映射，体现了我们选择缩并的逆变指标是第一个,X,Y 对应的指标不缩并.

[b] 对 Rc 取内积 g 下的迹需要将 Rc 转换成 $TM \to TM$ 的映射，这里将 Rc 自然同构于 $(1-1)$ 张量 $TM \to TM^*$，再将作用的结果通过 $\tilde{g}^{-1}$ 提升指标.

♣

命题 1.10

1.

$$R_{ij} = R^k_{kij} = g^{km}R_{kijm}$$

2.

$$S = \operatorname{tr}_g Rc = R^i_i = g^{ij}R_{ij}$$

♠

Proof

1. $R_{ij} = Rc(E_i,E_j) = \operatorname{tr}(Z \mapsto R(Z,E_i)E_j) = R^k_{kij}$ 又

$$R_{kijm} = \left\langle R^l_{kij}E_l, E_m\right\rangle = g_{lm}R^l_{kij}$$

故

$$g^{lm}R_{kijm} = R^l_{kij}$$

从而

$$R^k_{kij} = g^{km}R_{kijm}$$

2. $\tilde{Rc}: TM \to TM^*$, $\tilde{Rc}(X)(Y) := Rc(X,Y)$.$\tilde{g}^{-1}: T^*M \to TM$ 降低指标.

$$\tilde{Rc}(E_i)(E_j) = Rc(E_i, E_j) = R_{ij} \implies \tilde{Rc}(E_i) = R_{ij}\varepsilon^j$$

$$Rc' := \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{Rc}: TM \to TM$$

$$Rc'(E_i)\left(\varepsilon^j\right) = \tilde{g}^{-1}\left(\tilde{Rc}(E_i)\right)\left(\varepsilon^j\right) = \tilde{g}^{-1}\left(R_{im}\varepsilon^m\right)\left(\varepsilon^j\right)$$

$$\tilde{g}^{-1}\left(\varepsilon^m\right) = g^{ml}E_l$$

因此

$$Rc'(E_i)\left(\varepsilon^j\right) = R_{im}g^{ml}E_l\varepsilon^j = R_{im}g^{mj}$$

这表明

$$R_i^j = g^{jm}R_{im}$$

故

$$\operatorname{tr}_g Rc = \operatorname{tr} Rc' = R_i^i = g^{ij}R_{ij}$$

□

定义 1.8 (无迹 Ricci 张量)

定义 g **的无迹 Ricci 张量** 为以下对称 2-张量:

$$\overset{\circ}{Rc} = Rc - \frac{1}{n}Sg$$

♣

命题 1.11

设 (M,g) 是 n- (伪)Riemann 流形, 则 $\operatorname{tr}_g \overset{\circ}{Rc} \equiv 0$, 则 Ricci 张量正交分解为

$$Rc = \overset{\circ}{Rc} + \frac{1}{n}Sg$$

因此, 当 g 是 Riemann 度量时,

$$|Rc|_g^2 = \left|\overset{\circ}{Rc}\right|_g^2 + \frac{1}{n}S^2$$

♠

Proof

$$\operatorname{tr}_g g = g^{ij}g_{ji} = \delta_i^i = n$$

于是

$$\operatorname{tr}_g\left(\overset{\circ}{Rc}\right) = \operatorname{tr}_g(Rc) - \frac{1}{n}S\operatorname{tr}_g(g) = S - \frac{1}{n}Sn = 0$$

任取 2-张量 h, 则

$$\langle h, g\rangle_g = h^{kl}g_{kl} = g^{ki}g^{lj}h_{ij}g_{kl} = g^{ki}\delta_k^j h_{ij} = g^{ij}h_{ij} = \operatorname{tr}_g(h)$$

$$\left\langle \mathring{Rc}, g\right\rangle_g = \operatorname{tr}_g\left(\mathring{Rc}\right) = 0$$

故两者正交. 最后, 范数的等式依据 g 的双线性展开, 由正交性, 以及

$$\langle g, g\rangle_g = n$$

得到. □

定义 1.9 (外协变导数)

若 T 是 (伪)Riemann 流形上的光滑 2-张量, 定义T **的外协变导数** 为一个 3-张量 DT

$$(DT)(X, Y, Z) = -(\nabla T)(X, Y, Z) + (\nabla T)(X, Z, Y)$$

它的分量表示为

$$(DT)_{ijk} = -T_{ij;k} + T_{ik;j}$$

♣

Remark 这是 1-形式的外微分的一个推广,

$$(\mathrm{d}\eta)(Y, Z) = (-\nabla\eta)(Y, Z) + (\nabla\eta)(Z, Y)$$

1.6 Weyl 张量

定义 1.10 (代数曲率张量)

设 V 是 n 维实线性空间. 令 $\mathcal{R}(V^*) \subseteq T^4(V^*)$ 表示 V 上全体具有以下 $(0,4)$-Riemann 曲率张量对称性的协变 4-张量 T 构成的线性空间:

1. $T(w, x, y, z) = -T(x, w, y, z)$
2. $T(w, x, y, z) = -T(w, x, z, y)$
3. $T(w, x, y, z) = T(y, z, w, x)$
4. $T(w, x, y, z) + T(x, y, w, z) + T(y, w, x, z) = 0$

$\mathcal{R}(V^*)$ 上的一个元素称为一个**代数曲率张量**.

♣

Remark 与 Riemann 曲率张量的情况一样, 事实上第 3 条可以其它对称性推出, 这里方便起见仍把它写进定义.

命题 1.12

设 V 是 n 维实线性空间, 则

$$\dim \mathcal{R}\left(V^*\right) = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$$

Proof 用 $\mathcal{B}\left(V^*\right)$ 表示满足对称性 1.-3. 的全体 4-张量. 定义映射 $\Phi : \Sigma^2\left(\bigwedge^2 (V)^*\right) \to \mathcal{B}\left(V^*\right)$

$$\Phi(B)(w,x,y,z) = B(w\wedge x, y\wedge z)$$

其中 $\Sigma^2\left(\bigwedge^2 (V)^*\right)$ 表示全体定义在逆变交错 2-张量空间上的双线性映射. 易见 $\Phi(B)$ 满足对称性 1.-3. 事实上, Φ 是线性同构: 取 V 的一组基 $b_1,\cdots,b_n$, 则 $\{b_i\wedge b_j : i<j\}$ 构成 $\bigwedge^2 V$ 的一组基. 对以下做线性扩张

$$\Psi(T)(b_i\wedge b_j, b_k\wedge b_l) = T(b_i,b_j,b_k,b_l)$$

简单计算发现 Ψ 是 Φ 的逆. 于是我们得到

$$\dim \mathcal{B}\left(V^*\right) = \frac{\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}+1\right)}{2} = \frac{n(n-1)\left(n^2-n+2\right)}{8}$$

这里用到了 $\dim \bigwedge^2 V = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 以及 m 维线性空间上的双线性映射空间的维数为 $\frac{m(m+1)}{2}$ 的事实.

接下来, 定义映射 $\pi : \mathcal{B}\left(V^*\right) \to T^4\left(V^*\right)$

$$\pi(T)(w,x,y,z) = \frac{1}{3}\left(T(w,x,y,z)+T(x,y,w,z)+T(y,w,x,z)\right)$$

事实上, π 是交错算子 Alt 在 $\mathcal{B}\left(V^*\right)$ 上的限制映射, 因此 $\mathrm{Alt}(T)$ 的 24 项, 由于 T 满足的 1.-3. 对称性, 每八项相同, 合为一项. 故 $\operatorname{Im}\pi \subseteq \bigwedge^4\left(V^*\right)$. 事实上, $\operatorname{Im}\pi = \bigwedge^4\left(V^*\right)$, 这是因为每个交错 4-张量满足对称性 1.-3. 从而本身就在 $\mathcal{B}\left(V^*\right)$ 中, 并且它在 π 下的像就是它自己. 最终, 由维数公式

$$\dim \mathcal{R}\left(V^*\right) = \dim \mathcal{B}\left(V^*\right) - \dim \bigwedge^4\left(V^*\right) = \frac{n(n-1)\left(n^2-n+2\right)}{8} - \binom{n}{4}$$

化简得到 $\mathcal{R}\left(V^*\right)$ 的维数. $\square$

定义 1.11 (Kulkarni-Nomizu 积)

设 V 是 n 维线性空间, 给定 $h,k \in \Sigma^2\left(V^*\right)$, 按以下方式定义一个协变 4-张量 $h \owedge k$, 称为 h 和 k 的 Kulkarni-Nomizu 积,

$$\begin{aligned} h \owedge k(w,x,y,z) = {} & h(w,z)k(x,y) + h(x,y)k(w,z) \\ & - h(w,y)k(x,z) - h(x,z)k(w,y) \end{aligned}$$

在任意一组基下，分量形式为

$$(h \owedge k)_{ijlm} = h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il}$$

♣

Remark 当定义的曲率张量跟我们取反号时，对应的 Kulkarni-Nomizu 积也得定义成符号相反的.

引理 1.2 (Kulkarni-Nomizu 积的性质)

令 V 是配备了标量乘法 g 的 n 维向量空间. h,k 是 V 上的对称 2-张量，T 是 V 上的代数曲率张量，tr_g 表示对第一个和最后一个指标的缩并.

1. $h \owedge k$ 是一个代数曲率张量.
2. $h \owedge k = k \owedge h$.
3. $\mathrm{tr}_g\left(h \owedge g\right) = \left(n-2\right)h + \left(\mathrm{tr}_g h\right)g$.
4. $\mathrm{tr}_g\left(g \owedge g\right) = 2\left(n-1\right)g$.
5. $\left\langle T, h \owedge g\right\rangle_g = 4\left\langle \mathrm{tr}_g T, h\right\rangle_g$.
6. 若 g 正定，则 $\left|g \owedge h\right|_g^2 = 4\left(n-2\right)\left|h\right|_g^2 + 4\left(\mathrm{tr}_g h\right)^2$

♡

Proof [*]

1. 只需要证明代数 Bianchi 恒等式. 任取 $w,x,y,z \in V$，

$$\begin{aligned}
&h \owedge k\left(w,x,y,z\right) + h \owedge k\left(x,y,w,z\right) + h \owedge k\left(y,w,x,z\right)\\
&= h\left(w,z\right)k\left(x,y\right) + h\left(x,y\right)k\left(w,z\right) - h\left(w,y\right)k\left(x,z\right) - h\left(x,z\right)k\left(w,y\right)\\
&+ h\left(x,z\right)k\left(w,y\right) + h\left(w,y\right)k\left(x,z\right) - h\left(w,x\right)k\left(y,z\right) - h\left(y,z\right)k\left(w,x\right)\\
&+ h\left(y,z\right)k\left(w,x\right) + h\left(w,x\right)k\left(y,z\right) - h\left(x,y\right)k\left(w,z\right) - h\left(w,z\right)h\left(x,y\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

2. 由定义立即得到. 是

3. 在一组基下计算，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_g\left(h \owedge g\right)_{jl} &= \left(h \owedge g\right)^i_{ijl}\\
&= g^{im}\left(h \owedge g\right)_{ijlm}\\
&= g^{im}\left(h_{im}g_{jl} + h_{jl}g_{im} - h_{il}g_{jm} - h_{jm}g_{il}\right)\\
&= h^i_i g_{jl} + nh_{jl} - h_{jl} - h_{jl}\\
&= \left(n-2\right)h_{jl} + \left(\mathrm{tr}_g h\right)g_{jl}
\end{aligned}$$

由于 3. 的证明不需要 h 的对称性，故 4. 由 $\mathrm{tr}_g g = n$ 立即得到. □