# 第 1 章　Final

## 1.1 2024

**Problem 1.1** 1. 下列有关全纯函数唯一性定理的叙述，哪一项是正确的？( )

1. 设 $f, g$ 是两个整函数，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均是 $f$ 和 $g$ 的零点，则 $f(z) = g(z), \forall z \in \mathbb{C}$.
2. 设 $f$ 在区域 $D$ 内全纯，$z_0 \in D$. 若 $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$，则 $f(z) \equiv 0, \forall z \in D$.
3. 设 $f, g$ 是两个整函数，$\varepsilon > 0$ 是一个正数，若 $f(x) = g(x), \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，则 $f(z) \not\equiv g(z), \forall z \in \mathbb{C}$.
4. 设 $f, g$ 均在区域 $D$ 内全纯，且 $z_0 \in D, \varepsilon > 0$ 是一个充分小的正数. 若 $f(z) = g(z), \forall z \in B_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$，则 $f(z) \not\equiv g(z), \forall z \in D$.

**Proof**

1. 错误，需要 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个聚点才能保证.
2. 正确，$f$ 至少在一个圆盘内恒为零，全纯函数的唯一性 (在有聚点的列上相等的意义下) 保证了 $f$ 恒为零.
3. 错误，恰恰相反，正确的结论是 $f \equiv g$.
4. 错误，同样恰恰相反.

□

**Problem 1.2** 2. 下列有关全纯函数的奇点叙述，哪一项是正确的？( )

1. 全纯函数的奇点均是孤立的.
2. $z = 0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 的简单极点.
3. 设 $f(z)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个 $n(n \geq 1)$ 次多项式，则 $f(z)$ 必以无穷远点 $\infty$ 为它的 $n$ 阶极点.
4. 设 $f(z)$ 是一个整函数，若无穷远点 $\infty$ 是它的可去奇点，则 $f(z)$ 不可能是一个常数.

**Proof**

1. 错误，考虑
   $$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$
   $0$ 是非孤立的起点，它是奇点集的一个聚点.
2. 错误，沿着实轴趋于 $\infty$，沿着虚轴模长为 $1$，没有极限.
3. 正确，$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 z$，$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_n z^{-n} + \cdots + a_0 \frac{1}{z}$，$z = 0$ 是 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的 $n$ 阶极点.
4. 错误，恰恰相反，一定是一个常数.

□

**Problem 1.3** 3. 下列有关亚纯函数的叙述，哪一项是正确的？( )

1. 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内是一个亚纯函数，则 $f(z)$ 在 $D$ 内没有本性奇点.

2. 一个亚纯函数若有极点的话, 它的极点一定是孤立的.
3. 设 $f(z)$ 是定义在有界区域 $D$ 内的亚纯函数, 若 $f(z)$ 在边界 $\partial D$ 上全纯且没有零点, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内可能有无限多个零点和极点.
4. 如果无穷远点 $\infty$ 是一个亚纯函数 $f(z)$ 的可去奇点或极点, 则 $f(z)$ 是一个超越整函数.

**Proof**

1. 正确, 定义就是奇点只有极点.
2. 很奇怪, 似乎是一句正确的冗余废话, 我们再孤立奇点的框架下定义的极点, 自然不用谈极点是否孤立.
3. 错误, 有界区域内无限多个零点会导致一个非孤立零点, 这在亚纯函数中不存在.
4. 错误, 恰恰相反, 是一个有理函数.

□

**Problem 1.4** 4. 下列叙述, 哪一项是正确的? ( )

1. 设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内是一个单叶全纯函数, 则 $f'(z)$ 在 $D$ 内可能有零点.
2. 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内全纯, 且 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$, 则 $f(z)$ 是定义在 $D$ 内的一个单叶全纯函数.
3. 设 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-3)}$, 则 $f(z)$ 在原点的去心邻域 $\{z : 0 < |z-1| < 2\}$ 内可以作洛朗展开.
4. 设 $f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)}$, 则 $f(z)$ 在 $z_0 = 1$ 的邻域 $\{z : |z-1| < 1\}$ 内可作泰勒展开.

**Proof**

1. 错误.
2. 错误, 只能保证局部的单叶全纯. 一个反例是 $f = z^2$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上导数非零, 但是 $f(1) = f(-1)$.
3. 错误, 奇点 $0$ 在这个区域中.
4. 正确, $f$ 在这个圆盘上解析.

□

**Problem 1.5** 5. 下列关于全纯函数的有关性质, 哪一项是正确的? ( )

1. 一个全纯函数的零点总是孤立的.
2. 一个不恒为零的全纯函数的零点一定只有有限多个.
3. 设 $f(z)$ 在有界区域 $D$ 内全纯, 且不恒为零, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内的零点最多只有有限多个.
4. 设 $f(z)$ 在有界区域 $D$ 内全纯, 且不恒为零, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内可能有无穷多个零点.

**Proof**

1. 错误, 需要排除常值函数.
2. 错误, 这个表述在区域有界的情况下是正确的. 整函数 $e^z$ 在虚轴上有无穷多个零点.
3. 错误, 没有考虑到零点集的聚点只落在边界上的情况. 一个反例是: 考虑单位开圆盘上的函数 $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ ,$1 - \frac{1}{n\pi}$ 都是 $f$ 的零点.
4. 正确, 原因见上一个选项.

□

**Problem 1.6** 6. 下列叙述, 哪一项是正确的? ( )

1. 设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内全纯, 若 $z_0 \in D$ 满足 $f'(z_0) \neq 0$, 则 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的充分小邻域内是保角的, 但在点 $z_0$ 的充分小邻域内不一定是保形的.
2. 任何一个分式线性函数 $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ 均是保形映射.
3. 任何一个分式线性函数 $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ 均把一个有限圆周映为一个有限圆周.
4. 对复平面上的任何两条直线, 不一定存在共形映射 $w = f(z)$ 把其中一条映为另一条.

**Proof**

1. 错误, $f$ 是局部单叶解析的, 进而是保形的.
2. 正确, $L'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, 从而 $L$ 单叶全纯.
3. 错误, $z \mapsto (z, z_2, z_3, z_4)$ 把 $z_2, z_3, z_4$ 所在的圆周映到实轴.
4. 错误, 事实上, 分别取两条直线上的三个点 $z_2, z_3, z_4$,$w_2, w_3, w_4$, 就能通过 $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_2, z_3, z_4)$ 解出 $w$, 构造出一个这样的分式线性变换.

□

**Problem 1.7** 7. 填空题.

1. 将函数 $\sin(3z^4)$ 展为 $z$ 的幂级数.
2. 函数 $f(z) = \frac{(z-2024)\sin z}{(z-1)^2 z^2 (z+1)^3}$ 的极点及其阶数为.
3. 设 $f(z) = (z-1)(z-2)^2(z-4)^3$ 以及 $C : |z| = 3$. 当 $z$ 沿正方向绕 $C$ 一周后, $\arg f(z)$ 的改变量为.
4. 计算积分: $\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$ , 其中 $C : |z-2| = \frac{1}{3}$, 取逆时针方向.
5. 设分式线性函数 $w = f(z)$ 把点 $0, 1, \infty$ 映为 $-1, -i, 1$, 则 $w =$.

**Proof**

1. 
$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
令 $w = 3z^4$, 得到
$$\sin\left(3z^4\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{8n+4}$$
为函数的幂级数展开.
2. 函数的奇点出现在 $1, 0, -1$.
$$\frac{(z-2024)\sin z}{z^2 (z+1)^3}$$
在 $z = 1$ 处全纯且非零, 故 $z = 1$ 是二阶极点. 函数
$$\frac{(z-2024)}{(z-1)^2 (z+1)^3}$$
在 $z = 0$ 附近处纯且非零. 故 $f$ 在 $z = 0$ 处极点的存在性与阶数和 $\frac{\sin z}{z^2}$ 相同. 后者的

Laurent 为

$$\frac{\sin z}{z^2} = z^{-1} + \frac{1}{6}z + \cdots$$

主要部分的最低次非零系数项为 $-1$ 次, 故极点存在且阶数为 $1$ 阶. 最后, 函数

$$\frac{(z-2024)\sin z}{(z-1)^2 z^2}$$

在 $z=-1$ 处全纯且非零, 故极点阶数为 $3$.

3. 由辐角原理, $f$ 沿着 $C$ 绕 $0$ 的环绕数 $N$ 为 $C$ 内部零点的阶数和减去极点的阶数和, $N = 1+2=3$ , 故辐角变化量为 $2\pi N = 6\pi$.

4.

$$\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,2)$$

利用

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-a)^m f\right), \quad a \text{ 是 } m \text{ 阶极点}$$

$$\operatorname{Res}(f,2) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -1$$

于是

$$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi i$$

或者利用柯西积分公式, 令 $g = \frac{z}{z-1}$

$$g^{(1)}(z) = \frac{(2-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-2)^2}\,\mathrm{d}z\zeta$$

5. 若 $w$ 是这样的函数, 则

$$(z,1,0,\infty) = (w(z), w(1), w(0), w(\infty)) = (w(z), -i, -1, 1)$$

得到

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Big/ \frac{-i+1}{-i-1} = -i\frac{w+1}{w-1}$$

得到

$$1 + \frac{2}{w-1} = iz$$

$$w = \frac{2}{iz-1} + 1 = \frac{iz+1}{iz-1} = \frac{z-i}{z+i}$$

□

**Problem 1.8** 8. 试将 $f(z) = \sin\frac{z}{z-1}$ 在奇点 $z=1$ 的最大去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内展成洛朗级数, 并求 $f(z)$ 在 $z=1$ 的留数 Res$(f,1)$.

**Proof** 令 $z-1=w$, 则

$$\frac{z}{z-1} = \frac{w+1}{w} = 1 + \frac{1}{w}$$

$$\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{w}\right)=\sin 1\cos\left(\frac{1}{w}\right)+\cos 1\sin\left(\frac{1}{w}\right)$$

其中

$$\cos\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{-2n}}{(2n)!}$$

$$\sin\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

于是

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^{-n}$$

其中

$$a_n=\begin{cases}(-1)^k\frac{\sin 1}{(2k)!}, & n=2k\\ (-1)^k\frac{\cos 1}{(2k+1)!}, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\operatorname{Res}(f,1)=a_1=\cos 1$$

□

**Problem 1.9** 9. 试确定方程 $z^4-8z+10=0$ 分别在圆 $|z|<1$ 与在圆环 $1<|z|<3$ 内根的个数.

**Proof** 在 $|z|=1$ 上,

$$\left|z^4-8z\right|\le\left|z^4\right|+8|z|\le 9<10$$

于是由 Rouche 定理, 常函数 10 与 $z^4-8z+10$ 在 $|z|<1$ 内由相同的零点个数, 为 $0$. 在 $|z|=3$ 上,

$$|10|=10<57=|z|^4-8|z|\le\left|z^4-8z\right|$$

由 Rouche 定理, $z^4-8z$ 在 $|z|<4$ 内与 $z^4-8z+10$ 有相同的零点个数. 而

$$z^4-8z=z\left(z^3-8\right)$$

在圆 $|z|<4$ 内有 4 个零点 (记重数), 故 $z^4-8z+10$ 在圆 $|z|<4$ 内有 4 个零点. 又 $z^4-8z+10$ 在 $|z|\le 1$ 上无零点, 故它在圆环内有 $4$ 个零点. □

**Problem 1.10** 10. 利用留数定理计算定积分

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

其中 $a>1$ 是一个常数.

**Proof** 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ , $\mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta$ 令 $C$ 表示单位圆周, 利用

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

积分化为

$$\frac{1}{2}\int_C \frac{1}{iz}\frac{1}{\left(a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}z=\int_C \frac{1}{i}\frac{2z}{\left(2az+z^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

其中

$$2az+z^2+1=(z+a)^2-\left(a^2-1\right)=\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)$$

注意到

$$\left|-a-\sqrt{a^2-1}\right|>a>1,\quad \left|-a+\sqrt{a^2-1}\right|<1$$

于是

$$\int_C \frac{1}{i}\frac{2z}{2az+z^2+1}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{2}{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{2az+z^2+1},-a+\sqrt{a^2-1}\right)$$

记 $\beta_1=-a+\sqrt{a^2-1},\beta_2=-a-\sqrt{a^2-1}$ 则留数为

$$\lim_{z\to\beta_1}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{\left(\beta_1-\beta_2\right)^2}=\frac{\left(\beta_1-\beta_2\right)^2-2\beta_1\left(\beta_1-\beta_2\right)}{\left(\beta_1-\beta_2\right)^4}=\frac{-\left(\beta_1+\beta_2\right)}{\left(\beta_1-\beta_2\right)^3}=\frac{a}{4\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

于是积分为

$$\frac{\pi a}{\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

□

**Problem 1.11** 11. 以下两题只需任选一题做.

1. 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

2. 试求一保形映射, 把圆周 $|z|=2$ 和圆周 $|z+1|=1$ 所夹的区域映射成单位圆盘 $|w|<1$.

**Proof**

1. 令 $g(z)=\frac{(\ln z)^2}{(1+z^2)^2}$ ，考虑 $g$ 在以下区域上的积分

$$\gamma_{\varepsilon,R}=[\varepsilon,R]_{\text{上沿}}+C_R-[\varepsilon,R]_{\text{下沿}}-C_\varepsilon$$

   $\ln z$ 在 $[\varepsilon,R]$ 的上沿和下沿上分别取 $\ln x$ 和 $\ln x+2\pi i,\ x\in[\varepsilon,R]$ . 则 $g$ 在上下沿的积分差值为

$$\int_\varepsilon^R\frac{(\ln x)^2}{(1+x^2)^2}-\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=-4\pi i\int_\varepsilon^R\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x+4\pi\int_\varepsilon^R\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

   接下来, 由于

$$\lim_{R\to\infty}R\max_{z\in\{|z|=R\}}\frac{|\ln z|^2}{(1+z^2)^2}=0$$

   通过 L-M 不等式, 可以得到

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)\,\mathrm{d}z=0$$

此外, 注意到

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\max_{z\in C_\varepsilon}\left|\frac{(\ln z)^2}{(1+z^2)^2}\right|=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\frac{(\ln\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon^2)^2}=0$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}g(z)\,\mathrm{d}z=0$$

$g$ 在 $\gamma$ 内部有二阶极点 $z=i$ 和 $z=-i$ . 于是

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}}g(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}\,(g,i)+2\pi i\,\mathrm{Res}\,(g,-i)$$

其中

$$\mathrm{Res}\,(g,i)=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(\ln z)^2}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{2\ln z\frac{1}{z}(z+i)^2-(\ln z)^2\,2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$=\frac{2\frac{\pi i}{2}\frac{1}{i}(2i)+\frac{\pi^2}{4}2}{(2i)^3}=\frac{2\pi i+\frac{\pi^2}{2}}{-8i}=\frac{-4\pi+\pi^2 i}{16}$$

$$\mathrm{Res}\,(g,-i)=\lim_{z\to-i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(\ln z)^2}{(z-i)^2}\right)=\lim_{z\to-i}\frac{2\ln z\frac{1}{z}(z-i)^2-(\ln z)^2\,2(z-i)}{(z-i)^4}$$

$$=\frac{2\frac{3\pi i}{2}\frac{1}{-i}(-2i)+\frac{9\pi^2}{4}2}{(-2i)^3}=\frac{-6\pi i+\frac{9\pi^2}{2}}{8i}=\frac{12\pi-9\pi^2 i}{16}$$

于是

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}}g(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2 i}{2}\right)=\pi^2 i+\pi^3$$

令 $\varepsilon\to0, R\to\infty$, 得到

$$-4\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x+4\pi\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\pi^2 i+\pi^3$$

两边取虚部, 得到

$$\int_0^\infty\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{4\pi}\left(\pi^2\right)=-\frac{\pi}{4}$$

2. 令

$$T_1(z)=\frac{2z}{z+2}$$

则 $T$ 将 $-2,-1+i,0$ 依次映到 $\infty,2i,0$. 将 $-2,2i,2$ 依次映到 $\infty,1+i,1$. 于是 $T$ 将所给区域映到带状区域 $\{z:0\le\mathrm{Re}\ z\le1\}$ 映射

$$T_2(z):=\pi e^{\frac{\pi i}{2}}z$$

将带状区域 $\{z:0\le\mathrm{Re}\ x\le1\}$ 映到带状区域 $\{z:0\le\mathrm{Im}\ z\le\pi\}$

$$T_3(z)=e^z$$

将带状区域 $\{z : 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi\}$ 映到上半平面. 令

$$T_4(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

则 $T_4$ 将上半平面映到单位圆盘. 综合以上, 令

$$T(z) = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

即为所需单叶函数.

□

**Problem 1.12** 12. 以下两题, 只需任选一题做.

1. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通区域, 且 $D \ne \mathbb{C}, z_0 \in D$, 则存在一个在 $D$ 内单叶全纯的函数 $w = f(z)$, 满足 $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$, 且 $f(z)$ 把 $D$ 保形双射成 $|w| < 1$. 试用 Schwarz 引理证明这样的 $w = f(z)$ 是唯一的.
2. 设 $D = \{|z| < 1\}$ 是单位圆盘. 试求一个全纯函数 $f : D \to D$, 使得 $f\left(\frac{i}{4}\right) = -\frac{i}{8}$. 是否存在一个全纯函数 $f : D \to D$, 满足 $f\left(\frac{i}{4}\right) = -\frac{i}{8}$, 且 $f'\left(\frac{i}{4}\right) = \frac{3}{2}$? 说明理由.

**Proof**

1. 若存在两个这样的函数 $f_1, f_2$. 令 $g = f_2 \circ f_1^{-1}$. $g$ 是 $B(0,1)$ 的全纯自同构.
   $g(0) = f_2(a) = 0$. 故 $g$ 符合 Schwartz 引理的条件. 从而

$$1 \ge |g'(0)| = \left|f_2'\left(f^{-1}(0)\right)\left(f^{-1}\right)'(0)\right| = \frac{|f_2'(a)|}{|f_1'(a)|}$$

这表明

$$|f_2'(a)| \le |f_1'(a)|$$

令 $h = f_1 \circ f_2^{-1}$, 可以类似地得到

$$|f_1'(a)| \le |f_2'(a)|$$

因此

$$|f_2'(a)| = |f_1'(a)|$$

进而

$$|g'(0)| = 1$$

再由 Schwartz 引理, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, 使得

$$g(z) = \lambda z$$

由于

$$g'(0) = \frac{f_2'(0)}{f_1'(0)} > 0$$

,

$$\lambda = g'(0) > 0, \implies \lambda = 1$$

于是

$$f_2\left(f_1^{-1}(z)\right)=z$$

得到 $f_1(z)=f_2(z)$.

2. 对于第一问, 令 $f(z)=-\frac{1}{2}z$ 即可.

$\square$