第 1 章 胞腔复形

1.1 胞腔复形的构造

定义 1.1

设 $k \geq 1$ 是整数, 对于每个指标 $\alpha \in \Lambda$, 令 D_α^k 表示 $\mathbb{R}^k$ 上的单位闭球 $\mathbb{D}^k$ 的一个复制. 给定两个空间 X 和 (Y), 我们称 X 是 Y 通过黏着 k -胞腔得到的, 若存在一族连续映射 $f_\alpha : \mathbb{S}^{k-1} \to Y, \alpha \in \Lambda$, 使得 X 是无交并空间

$$Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha^k$$

在等价关系 $x \sim f_\alpha(x), x \in \partial D_\alpha^k, \alpha \in \Lambda$ 的下的商空间. ♣

Remark

1. 映射 $\{f_\alpha\}$ 被称为是胞腔的黏着映射;
2. 用 ϕ_α 表示商映射在胞腔 D_α^k 上的限制, 则 $\phi_\alpha|\partial D_\alpha^k = f_\alpha$, 并且 ϕ_α 在 D_α^k 的内部上是单射. 因此 ϕ_α 定义出 D_α^k 到其像集的同胚. 称 $\phi_\alpha\left(\operatorname{int}\left(D_\alpha^k\right)\right)$ 为 X 上的开胞腔.
3. 称 ϕ_α 为胞腔的特征映射.
4. D_α^k 的连续像是 X 的紧子空间. 称它们为 (X, Y) 上的闭 k-胞腔, 记作 e_α^k.

引理 1.1

设 X 是 Y 通过黏合 k-胞腔得到的空间, 则

1. X 的一个子集 A 是闭的, 当且仅当 $A \cap Y$ 在 Y 中是闭的, 并且 $A \cap e_\alpha^k$ 在 e_α^k 中是闭的, $\alpha \in \Lambda$;
2. Y 是 X 的一个闭子集. ♡

Remark

1. e_α^k 不需要是闭集, 但若 Y 是 Hausdorff 的, 则 $f_\alpha\left(\mathbb{S}^{k-1}\right)$ 是 Y 的闭子集, 进而 e_α^k 在 X 中是闭的.
2. e_α^k 不必同胚于 $\mathbb{D}^k$, 但 e_α^k 的内部同胚于 $\operatorname{int}\left(\mathbb{D}^k\right)$.

Proof 设 q 是商映射, 则

$$q^{-1}(A) = q^{-1}(A) \cap \left(Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha^k\right) = q^{-1}(A) \cap Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} q|_{D_\alpha^k}^{-1}(A) = q^{-1}(A) \cap Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha^{-1}(A)$$

$A \cap e_\alpha^k$ 在 e_α^k 中是闭的, 当且仅当 $\phi_\alpha^{-1}(A)$ 是闭的, $A \cap Y$ 在 Y 中是闭的, 当且仅当 $q|_Y^{-1}(A \cap Y) = q^{-1}(A) \cap Y$ 是闭的. 由此可见 1. 成立.

对于 2., 由于 $Y \cap Y = Y$ 在 Y 中是闭的, 且 $\phi_\alpha^{-1}(Y) = f_\alpha^{-1}(Y) = \partial D_\alpha^k$ 是闭集, 由 1. 可知 Y 是闭的. □

定义 1.2 (胞腔复形)

一个胞腔复形包含以下信息:

1. 一个离散集 X^0 , 其中的点称为是 0-胞腔.
2. 有限或无限个集合 $\{X^k\}$, $k = 1, \cdots, n$ 或 $k = 1, 2, \cdots$. 其中称 X^k 为 k-骨架.
3. 对于上面这些 k, X^k 通过 X^{k-1} 黏着 k-胞腔得到.

♣

Remark

1. 若 $X = X^n$ 对于某个 n 成立, 则称 X 是有限维的, 最小的这样的 n 称为是 X 的维数, 它也是 X 的胞腔的最大维数.

Example 1.1 一个一维胞腔复形 $X = X^1$ 在代数拓扑中被称为是一个图. 它由一些顶点 (0-胞腔) 和一些附着的边 (1-胞腔) 组成.

Example 1.2 球面 S^n 有由两个胞腔 e^0, e^n 组成的胞腔复形结构, n 胞腔通过常值映射 $S^{n-1} \to e^0$ 黏着. 等价地说, S^n 是 $D^n \setminus \partial D^n$ 的商空间.

Example 1.3 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 被定义为由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上全体过原点的直线构成的空间. $\mathbb{RP}^n$ 可以被拓扑地描述为 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \quad \lambda \neq 0$ 下的商空间. $\mathbb{RP}^n$ 也可以视为 n-球面 S^n 粘贴对径点得到的空间 $S^n / (v \sim -v)$. 又或者描述为半球面 D^n 通过粘贴 ∂D^n 上的对径点得到的商空间. 在最后一种描述下, 注意到 ∂D^n 粘贴对径点恰好得到 $\mathbb{RP}^{n-1}$, 于是 $\mathbb{RP}^n$ 可以通过 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 黏着一个 n-胞腔得到, 黏着映射为商投影 $S^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$.

通过对 $\mathbb{RP}^n$ 的 n 归纳, 可以得到 $\mathbb{RP}^n$ 拥有一个胞腔复形结构 $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$. 它在每个维数 $i \leq n$ 上恰有一个 i-胞腔.

Example 1.4 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 被定义为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上全体过原点的直线构成的空间, 即 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的复-1 维的子空间的全体. $\mathbb{CP}^n$ 被拓扑地刻画为 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ 下的商空间. 也可以刻画为单位球面 $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ 下的商空间. 由于对于最后一个复分量非零的 $v \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, 存在唯一的 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, 使得 $(\lambda v)^n = \lambda v^n \in \mathbb{R}_{>0}$, 且等价关系保持最后一个分量的非零性, 故可以定义等价类在最后一个分量上是否非零. 故 S^{2n+1} 上最后一个复分量非零

的全体向量, 唯一地对应到 S^{2n+1} 上最后一个分量非零的等价类. 此外, S^{2n+1} 上最后一个复分量非零的向量形如 $\left(w, \sqrt{1-|w|^2}\right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, |w| \leq 1$, 这些向量的全体由函数 $w \mapsto \sqrt{1-|w|^2}, |w| \leq 1$ 的图像给出, 它恰是边界为 $S^{2n-1} \subseteq S^{2n+1}$ 的上半球面 D_+^{2n} .

综上, S^{2n+1} 在等价关系 $v \sim \lambda v$ 下, 最后一个复分量非零的等价类与 D_+^{2n} 一一对应, 最后一个复分量等于零的等价类全体恰是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$. 于是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 可以通过 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 黏着 $2n$ -胞腔 D_+^{2n} 得到. 黏着映射为商映射 $\partial D_+^{2n} = S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$.

通过对 n 归纳, 可以得到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 由胞腔复形结构 $e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$, 它在每个不大于 $2n$ 的偶维数上恰有一个胞腔.

定义 1.3 (子复形)

设 X 是胞腔复形. 若闭子空间 $A \subseteq X$ 写作 X 的一些胞腔的并, 则称 A 是 X 的一个子复形. ♣

Remark

1. 由于 A 是闭的, A 中每个胞腔的特征映射的像都含于 A. 特别地, 黏着映射的像含于 A. 故 A 本身也是一个胞腔复形.
2. 一个由胞腔复形 X 和子复形 A 组成的对 (X, A) 被称为是一个 CW 对.

Example 1.5 存在自然的包含关系 $S^0 \subseteq S^1 \subseteq \cdots \subseteq S^n$, 但这些子球面不是 S^n 的子复形. 不过可以选择 S^n 的另一种胞腔复形结构, 使得这鞋子球面称为 S^n 的子复形. 具体地, 对于每个 S^k, 令 S^k 是通过 S^{k-1} 黏着两个 k-胞腔得到的, 这两个胞腔分别为 $S^k - S^{k-1}$ 的上半部分和下半部分.

此时, 无穷维球面 $S^\infty = \bigcup_n S^n$ 也是一个胞腔复形. 连接对径点的 2-1 商映射 $S^\infty \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ 将 S^∞ 的两个 n-胞腔与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ 的唯一的 n-胞腔所等同.

Example 1.6 胞腔的闭包不一定是子复形. 例如我们可以通过一个像为 S^1 的非平凡弧的映射 $S^1 \to S^1$ 将一个 2-胞腔黏着到 S^1 上, 此时由于 2-胞腔的闭包只包含了 1-胞腔的一个部分, 故无法成为一个胞腔复形.

1.2 空间上的算子

命题 1.1

若 X 和 Y 是胞腔复形，则 $X \times Y$ 有由全体积胞腔 $e^m_\alpha \times e^n_\beta$ 为胞腔的胞腔复形结构. 其中 e^m_α 跑遍 X 的胞腔，e^n_β 跑遍 Y 的胞腔.

Example 1.7

例如由 $S^1_1 = \{a\} \cup e^1_1$ 和 $S^1_2 = \{b\} \cup e^1_2$ 构成的环面 $S^1 \times S^1$，它的 0-胞腔是 $\{(a,b)\}$，两个 1-胞腔是 $\{a\} \times e^1_2$ 和 $e^1_1 \times \{b\}$，一个 2-胞腔是 $e^1_1 \times e^2_2$.

命题 1.2

设 (X, A) 是一个 CW 对，则商空间 X/A 有继承自 X 的自然的胞腔复形结构[a]. X/A 的胞腔为全体 $X - A$ 上的胞腔，和一个新的 0-胞腔 [b]，为 A 在 X/A 中的像. 对于 $X - A$ 的一个胞腔 e^n_α，若它通过 $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ 黏着，则它在 X/A 上相应的黏着映射为复合映射 $S^{n-1} \to X^{n-1} \to X^{n-1}/A^{n-1}$.

[a]就是把 A 粘成一个点

[b]因为 X 上的胞腔要么完全落在 A 上，要么最多只有边界粘在 A 上.

Example 1.8 给定任意胞腔结构的 S^{n-1}，通过 S^{n-1} 黏着一个 n-胞腔构造 D^n，则 D^n/S^{n-1} 在自然胞腔结构下变成 S^n.[1]

定义 1.4 (楔和)

- 给定拓扑空间 X, Y，以及各一点 $x_0 \in X, y_0 \in Y$. 定义楔和 $X \vee Y$，为通过将无交并 $X \coprod Y$ 上的 x_0, y_0 等同于一点，得到的商空间.
- 更一般地，可以对一族拓扑空间 X_α，定义楔和 $\bigvee_\alpha V_\alpha$ 通过将 $x_\alpha \in X_\alpha$ 等同于一点.

Example 1.9 任给胞腔复形 X，商空间 X^n/X^{n-1} 就是 n-球面的楔和 $\bigvee_\alpha S^n_\alpha$，其中每个 X 的 n-胞腔对应于一个 n-球面. [2]

[1]S^n 通过点 $[S^{n-1}]_{/A}$ 黏着 n-胞腔得到.

[2]由于每个 n-胞腔都将边界粘在 $(n-1)$-骨架上，并且内部两两无交，因此商去 X^{n-1} 后,n-胞腔的边界都粘在同一个点上.