几何与拓扑

作者：Autin

目录

第一部分

点集拓扑

第 1 章 拓扑空间

1.1 和空间与积空间

定义 1.1 (和空间)

设 $(X_j|j \in J)$ 是一族非空且两两无交的拓扑空间, 则集合

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq \coprod X_j : \text{对于任意的} j \in J, U \cap X_j \subseteq X_j \text{是开集} \right\}$$

构成无交并集 $\coprod X_j$ 上的一个拓扑. 称 $(\coprod X_j, \mathcal{O})$ 为 X_j 的拓扑和. ♣

1.2 连续映射

定义 1.2 (嵌入)

设 X, Y 是拓扑空间, $f : X \to Y$ 是连续映射. 若 $X \simeq f(X)$, 则称 f 是一个拓扑嵌入. ♣

Example 1.1 设 X, Y 是拓扑空间, $X \times Y$ 是积空间. 对于任意的 $y \in Y$, 定义映射

$$i_y : X \to X \times Y$$
$$x \mapsto (x, y)$$

则 i_y 是嵌入映射.

Proof

$i_y(X) = X \times \{y\}$, X 到 $X \times \{y\}$ 之间存在连续的双射 $f : x \mapsto (x, y)$. 这是因为 $X \times \{y\}$ 上的开集形如 $U \cap (X \times \{y\})$, 其中 U 是 $X \times Y$ 上的开集, $U \cap (X \times \{y\})$ 写作 $V \times \{y\}$, 其中 V 是 X 上开集的并, 进而也是开集. 则 $f^{-1}(V \times \{y\}) = V$ 是开集, 从而 f 是连续映射. 又显然 f 是开映射, 故 f 是拓扑空间之间的同构, 这表明 i_y 是嵌入. □

1.3 商空间

定义 1.3

令 X 是拓扑空间,$X' = \{X_j : j \in J\}$ 是 X 的一个分划. 自然映射 $v : X \to X'$ 被定义为 $v(x) = X_j$, 其中 X_j 是(唯一的)包含了 x 的分划中的子集. 那么 X' 上的商拓扑是指全体 U' 组成的集族, 其中 U' 是 X' 的子集, 它使得 $v^{-1}(U')$ 是 X 中的开集.

Remark X 上的一个等价关系确定了 X 上的一个分划, 我们记相应的商空间为 $X/\sim$, 其中 $\sim$ 表示所说的等价关系.

命题 1.1 (泛性质)

设 $h : X \to Y$ 是映射,$\ker h$ 是 X 上的一个等价关系, 使得 $x \sim x'$ 当且仅当 $h(x) = h(x')$. 相应的商空间记作 $X/\ker\varphi$. 那么存在唯一的映射 $\varphi : X/\ker\varphi \to Y$ 使得下图交换.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "v"'] & & Y \\
& X/\ker\varphi \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Proof 唯一的取法是 $\varphi([x]) = h(x)$, 显然该映射良定义, 且是单的.

□

1.3.1 等化

定义 1.4 (等化)

称一个连续的满射 $f : X \to Y$ 是一个等化, 若 U 是 Y 中的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

Example 1.2

1. 给定 X 上的等价关系 $\sim$,$X/\sim$ 给出一个商拓扑. 自然映射 $v : X \to X/\sim$ 是一个等化.
2. 若 $f : X \to Y$ 是一个连续的满射, 且 f 是开(闭)的, 那么 f 是一个等化.

Proof 若 f 满足条件，任取 Y 中的开集 U,f 的连续性给出 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集；任取 Y 中的集合 V，使得 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集，那么 f 是满射给出 $V = f(f^{-1}(V))$，再由 f 是开映射可知,V 是一个开集.（若 f 是闭映射,$Y\backslash V = f(f^{-1}(Y\backslash V)) = f(X\backslash f^{-1}(V))$ 是一个闭集）

□

3. 若 $f : X \to Y$ 是具有截面的连续映射，那么 f 是一个等化.

   Proof 只需注意到有截面的连续映射一定是满的.

□

定理 1.1

设 $f : X \to Y$ 是一个连续的满射. 那么 f 是一个等化，当且仅当对于任意的空间 Z，以及映射 $g : Y \to Z$，有 g 是连续的当且仅当 gf 是连续的.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "gf"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

♡

Idea gf 是否连续标志着"商空间"Y 中一类特定形式的集合（$g^{-1}(V)$）是否是开的. 目标通过条件给出 f 是一个等化时，若想要充分地利用条件，需要找出使得条件成立的最苛刻的空间（使得 gf 连续推出 g 连续变得非常困难），而往往越精细的空间里，映射越难连续，并且空间的选取应该无关于 g，同时使得 f 连续以避免对 g 的性质产生影响，综合种种考量我们取 Z 为使得 f 连续的最精细的空间，即商空间.

g 几乎扮演了同胚映射的作用，因此我们希望 Z 取到与 Y 同胚的空间. 从结果上而言,Z 应该是商空间 $X/\ker\varphi$.

Proof 若 f 是一个等化，任取 Z 中的开集 V，那么由 fg 的连续性可知 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (fg)^{-1}(V)$ 是开集.f 是一个等化给出了 $g^{-1}(V)$ 是开集，这就表明 g 是一个连续映射. 反之，若 g 是连续映射，那么 gf 作为连续映射的复合当然是连续的.

现在设条件成立，取 $Z = X/\ker f$,$v : X \to X/\ker f$ 是自然映射，由商的泛性质知，存在唯一的单射 $\varphi : Y \to X/\ker f$ 使得 $\varphi \circ v = f$，由 f 是满射知 φ 也是满的，进而是双

射. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "f"'] & & X/\ker f \\ & Y \arrow[ur, "\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

由条件,$v = \varphi^{-1} f$ 的连续性推出 φ^{-1} 的连续性. 由证明过的定理的方向,v 是等化表明 $f = \varphi \circ v$ 的连续性可以给出 φ 的连续性. 综上 φ 是一个同胚映射. 最后只需再注意到等化是同胚不变地即可. □

引理 1.1 设 $f : X \to Y$ 是一个等化,$g : Y \to Z$ 是一个连续的满射, 那么 g 是一个等化当且仅当 gf 是一个等化. ♡

Proof 由上面的定理 g 是连续的当且仅当 gf 是连续的.

设 gf 是一个等化, 那么任取 Z 的子集 U, 若 $g^{-1}(U)$ 是一个开集, 那么由 f 连续,$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是一个开集, 再由 gf 是一个等化知 U 是一个开集. 这表明 g 是一个等化.

再设 g 是一个等化, 那么任取 Z 中的子集 U, 若 $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是一个开集, 由 f 是等化知 $g^{-1}(U)$ 是一个开集, 再由 g 是等化只 U 是一个开集. 这表明 gf 是一个等化.

□

1.3.2 纤维

定义 1.5 令 $f : X \to Y$ 是函数,$y \in Y$. 称 $f^{-1}(y)$ 为 f 在 y 上的纤维. ♣

Remark 若 f 是群同态, 那么 $f^{-1}(1)$ 就是 f 的 kernel,$f^{-1}(y)$ 就是 kernel 的陪集. 更一般地, 纤维是 X 上的等价关系 $\ker f$ 的等价类.

定理 1.2 设 $f : X \to Y$ 是一个等化,Z 是拓扑空间,$h : X \to Z$ 是在 f 的纤维上取常值的连续映射. 那么 $hf^{-1} : Y \to Z$ 是连续的. 此外,hf^{-1} 是一个开映射（或闭映射）当且

仅当 U 是 X 中的开集使得 $U = f^{-1}f(U)$ 蕴含 $h(U)$ 是开集.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "hf^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

♡

Remark 与 f 的纤维相容的连续映射诱导出商空间上的连续映射.hf^{-1} 的开闭与否决定了关于 f 的饱和集在 h 下的像是否是开的.

Proof h 在 f 的纤维上取常值蕴含了 $hf^{-1}: Y \to Z$ 是良定义的.$hf^{-1} \circ f = h$ 是连续映射, 上面的定理知 hf^{-1} 也是连续的. 任取 Y 中的开集 V, 那么 f 的连续性给出 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 若 hf^{-1} 是一个开映射, 那么对于任意 X 中的开集 U 使得 $U = f^{-1}f(U)$,$h(U) = (hf^{-1})f(U)$. 而根据 f 是一个等化, 由 $f^{-1}(f(U)) = U$ 是开的可知 $f(U)$ 是开的. 反之, 若条件成立, 任取 Y 中的开集 V,$f^{-1}(V)$ 是开集, 并且 $f^{-1}(V) = f^{-1}f(f^{-1}(V))$, 从而 $hf^{-1}(V) = h(f^{-1}(V))$ 是开集, 这就说明了 hf^{-1} 是一个开映射.

□

定理 1.3

设 X, Z 是拓扑空间,$h: X \to Z$ 是一个等化, 那么映射 $\varphi: X/\ker h \to Z$,$\varphi([x]) := h(x)$ 是一个同胚映射.

♡

Proof 注意到 $\varphi([x_1]) = \varphi([x_2]) \iff x_1 \sim x_2 \iff [x_1] = [x_2]$ 这同时说明了 φ 是良定义和单的.φ 满是因为 h 是满的, 从而 $h(X) = \varphi([X]) = \varphi(X/\ker h) = Z$. 这就说明了 φ 是一个双射. 令 $v: X \to X/\ker h$ 是自然映射, 那么 $h = \varphi \circ v$, 根据 2.3, 由 h 连续和 v 是一个等化可得 φ 连续. 为了说明 φ 是一个开映射, 任取 $X/\ker h$ 中的开集 U, 那么由 φ 连续知 $h^{-1}\varphi(U) = v^{-1}(U)$ 是一个开集, 由 h 是一个等化, 故 $\varphi(U)$ 是一个开集.

□

定理 1.4

设 X, Y 分别是带有等价关系 $\sim, \square$ 的拓扑空间. 设 $f: X \to Y$ 是保持等价关系的连续映射 ($x \sim x' \implies f(x) \square f(x')$). 那么诱导映射 $\bar{f}: X/\sim \to Y/\square$ 是连续的; 此外, 若 f 还是一个等化, 那么 $\bar{f}$ 亦然.

♡

Proof 设 $v: X \to X/\sim$ 和 $\omega: Y \to Y/\square$ 是自然映射, $\omega f: X \to Y/\square$ 在 v 的纤

维上取常值. 为了说明 ωf 是连续的, 任取 $Y/\square$ 中的开集 V', 那么 $V = \omega^{-1}(V')$ 是开集,$f^{-1}(V)$ 也是开集, 故 $(\omega f)^{-1}(V') = f^{-1}(V)$ 是开集, 这就说明了 ωf 是连续映射. 由 3.2.,$\bar{f} = \omega f v^{-1}$ 是连续映射. 此外, 若 f 是一个等化, 由 2.4., 因为 ω 是一个等化, 故 ωf 也是一个等化. 这表明 $\bar{f} v = \omega f v^{-1} v$ 也是一个等化, 故再一次由 2.4. 知,$\bar{f}$ 是一个等化.

$\square$

定理 1.5

设 X, Z 是紧的 Hausdorff 空间,$h : X \to Z$ 是一个连续的满射. 那么 $\varphi : X/\ker h \to Z$,$\varphi([x]) := h(x)$ 是一个同胚映射.

♡

第二部分

微分流形

第 2 章 光滑流形

2.1 一些例子

Example 2.1 矩阵空间 令 $M(m\times n,\mathbb{R})$ 表示全体 $m\times n$ 的实矩阵, 则 $M(m\times n,\mathbb{R})$ 可以等同于 $\mathbb{R}^{mn}$ 构作一个 $\mathbb{R}$ 上的 mn 维光滑流形. 类似地, 复矩阵空间 $M(mm\times n,\mathbb{C})$ 可以构作 $\mathbb{R}$ 上的 $2mn$ 维光滑流形.

Example 2.2 开子流形 令 U 表示 $\mathbb{R}^n$ 的任意开子集. U 构成一个拓扑 n-流形, 单个图 (U,Id_U) 可以定义出 U 上的一个光滑结构.

更一般地, 若 M 是光滑 n-流形, 令 $U\subseteq M$ 是任意开子集. 可以定义 U 上的图册

$$\mathcal{A}_U:=\left\{M\text{的光滑图}\,(V,\varphi):V\subseteq U\right\}$$

对于每个 $p\in U$, p 都含与 M 的某个光滑坐标卡 (W,φ); 若令 $V=W\cap U$, 则 $(V,\varphi|_V)$ 是 $\mathcal{A}_U$ 中包含了 p 的一个图. 因此 U 被 $\mathcal{A}_U$ 中的一些图覆盖, 容易证明这构成 U 的一个光滑图册. 因此 M 的任意开子集上都可以定义出自然的光滑 n-流形结构. 配备了此结构下的开子集被称为是 M 的一个 **开子流形**.

Example 2.3 一般线性群 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是指全体 $n\times n$ 可逆实矩阵构成的集合. 由于它是 $M(,n_R)$ 的一个开子集, 因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 可以构作一个光滑流形.

第 3 章 子流形

3.1 嵌入子流形

定义 3.1 (嵌入子流形)

设 M 是光滑（带边）流形. 称 M 的子集 $S \subseteq M$ 是一个嵌入子流形, 若 S 在配备了子空间拓扑, 和使得含入映射 $S \hookrightarrow M$ 成为光滑嵌入的光滑结构下, 成为一个光滑（带边）流形.

Remark

1. 嵌入子流形也被称为是正则子流形.

命题 3.1

设 M 是一个光滑流形, 则 M 的余维数为 0 的嵌入子流形与 M 的开子流形等价.

命题 3.2 (嵌入像作为子流形)

设 M 是一个光滑（带边）流形, N 是一个光滑流形, 令 $F: N \to M$ 是光滑嵌入. $S = F(N)$. 那么在子空间拓扑下, S 是一个拓扑流形, 并且其上存在唯一的光滑结构, 使得 S 成为 M 的嵌入子流形, 且 F 是从 N 到 $F(N)$ 的微分同胚.

Idea 之所以要求 N 是不带边的, 是因为我们需要找到非边界的中间坐标卡 (U, φ), 避免 $F^{-1}(p)$ 落在边界上.

Proof

1. 唯一性：若有两个光滑结构 $(S, \mathcal{A}_1), (S, \mathcal{A}_2)$ 满足条件, 分别取一坐标卡 (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2), 需要说明 $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ 在 $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ 上光滑, 只需要说明在其上每一点 $\psi_1(p) \in \psi_1(V_1 \cap V_2)$ 附近光滑. $F^{-1}(V_1 \cap V_2) = F^{-1}(V_1) \cap F^{-1}(V_2)$ 是开集, 点 $F^{-1}(p)$ 附近存在 N 的光滑坐标卡 (U, φ), F 的光滑性要求 $\psi_1 \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑, F 是微分同胚, 故 $\varphi \circ F^{-1} \circ \psi_1^{-1}$ 也是光滑映射, 对于 ψ_2 有类似地结论.
   于是在 $\psi_1(p)$ 附近, 有
   $$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \psi_2 \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ F^{-1} \circ \psi_1^{-1}$$
   是光滑的.
2. 存在性：F 要是微分同胚, 那么 $F(U)$ 就得是开集, $\varphi \circ F^{-1}$ 亦然是双射, 可以直截

了当的取 $\{(F(U), \varphi \circ F^{-1})\}$ 作为图册, 其中 (U, φ) 是 N 的任意光滑图册. 相容性是容易得到的.

$\square$

3.1.1 嵌入子流形的切片图

注意本小节的概念和结论都是对开集和光滑流形谈的, 先不考虑带边的流形.

定义 3.2 (欧式开集的切片)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $k \in \{0, \cdots, n\}$, U 的一个 k-维切片 [1]是指一个形如下的子集

$$S = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n\}$$

其中 $c^{k+1}, \cdots, c^n$ 是常数. ♣

定义 3.3 (坐标开集[2]的 k-切片)

设 M 是光滑 n-流形, (U, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡. 若 S 是 U 的一个子集, 使得 $\varphi(S)$ 称为 $\varphi(U)$ 的一个 k-切片, 则称 S 是 U 的一个 k-切片. ♣

定义 3.4 (k-切片条件)

设 M 是光滑 n-流形. 给定子集 $S \subseteq M$ 和非整数 k. 我们说 S 是满足局部 k-切片条件 [a]的, 若 S 上的每一点都含于 M 的某个光滑坐标卡 (U, φ), 使得 $S \cap U$ 是 U 上的一个 k-切片. 每个这样的坐标卡都被称为是 S 在 M 中的一个切片图, 相应的坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 被称为切片坐标[b].

[a]满足切片条件的子流形, 就是局部上, 在某组坐标下, 能被看成是父流形的截面的东西.

[b]切片坐标就是使得 S 能被看成是截面的那些坐标. ♣

定理 3.1 (嵌入子流形的局部切片判据)

设 M 是一个光滑 n-流形. 若 $S \subseteq M$ 是一个嵌入 k-维子流形, 则 S 满足局部 k-切条件. 反之, 若 $S \subseteq M$ 是满足局部 k-切片条件的子集, 则在 S 的子空间拓扑下, S 是 k-拓扑流形, 并且存在使得它成为 M 的 k-维嵌入子流形的光滑结构. ♡

[1]固定后面的分量, 看成是开集 U 的"截面"

[2]在流形上谈论切片时, 只对坐标开集考虑

第 4 章 李群

4.1 基本概念

定义 4.1 (李群)

一个李群是指, 一个带有群结构的光滑 (带边) 流形 G, 配有一个光滑的乘法映射 $m : G \times G \to G$ 和一个光滑的取逆映射 $i : G \to G$,

$$m(g,h) = gh, \quad i(g) = g^{-1}$$

♣

定义 4.2

设 G 是一个李群, 对于任意的 $g \in G$, 定义映射 $L_g, R_g : G \to G$, 分别称为左平移和右平移, 按

$$L_g(h) := gh, \quad R_g(h) := hg$$

♣

Remark

1. 由于 L_g 可以表示为复合映射
$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G$$
其中 $\iota_g(h) = (g,h)$, m 是乘法, 因此 L_g 是光滑的.
2. L_g 有光滑的逆映射 $L_{g^{-1}}$, 因此是微分同胚.

Example 4.1 李群的例子

1. 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (Example2.3) 的矩阵乘法表为 A, B 分量的多项式, 进而是光滑的. 取逆映射由 Cramer 法则可知也是光滑的. 因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 构成一个李群.
2. 令 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 表示由正行列式矩阵构成的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子集. 因为 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, 且 $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, 所以 $\mathrm{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个子群; 并且 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是行列式函数这样一个连续函数在 $(0,\infty)$ 下的原像, 故而是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个开子集. 群作用是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的限制, 从而是光滑映射. 因此 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是一个李群.
3. 令 G 是一个李群. 若 $H \subseteq G$ 同时是 G 的子群和开子集, 则 H 构成一个李群, 被称为是 G 的一个 **开子群**.
4. **复一般线性群** $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为全体 $n \times n$ 的可逆复矩阵. 它是 $2n^2$-维光滑流形 $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ 的一个开子流形, 并且通过分解实虚部可知矩阵乘法和逆映射均为光滑映射, 因此

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 也构成一个李群.

5. 若 V 是任意实或复的线性空间, 令 $\mathrm{GL}(V)$ 表示全体 V 到自身的可逆线性映射. 则 $\mathrm{Gl}(V)$ 在线性映射的复合下构成群. 若 V 的维数为 $n < \infty$, 则 V 的任意一组基给出 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $GL(n, \mathbb{R})$ 或 $GL(n, \mathbb{C})$ 的一个同构, 因此 $\mathrm{GL}(V)$ 构成一个李群.
6. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ 和 $\mathbb{C}^n, n \geq 1$ 分别在各自加法下构成李群.
7. 非零实数集 $\mathbb{R}^* \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$ 构成 1-维李群, $\mathbb{R}^+ \simeq \mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^*$ 的开子群, 故而也是 1-维李群.
8. 非零复数集 $\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ 构成 2-维李群.
9. 圆 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ 是一个光滑流形, 且在复数乘法下构成群. 在选取合适的角函数作为局部坐标下, 乘法和逆运算的坐标表示为 $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2, \theta \mapsto -\theta$ 均是光滑的, 因此 $\mathbb{S}^1$ 构成一个李群, 被称为是 **圆群**.
10. 给定李群 $G_1, \cdots, G_k$, 定义它们的乘积, 为积流形 $G_1 \times \cdots \times G_k$ 配备以下分量乘法

$$(g_1, \cdots, g_k)(g_1', \cdots, g_k') := (g_1 g_1', \cdots, g_k g_k')$$

不难验证这是一个李群.

11. n-圆环 $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ 是一个 n-为阿贝尔李群.

第 5 章　向量场

5.1 流形上的向量场

定义 5.1 (向量场)

设 M 是一个（带边）光滑流形,M 上的一个向量场是指, 映射 $\pi : TM \to M$ 的一个截面. 具体地, 一个向量场是指一个连续映射 $X : M \to TM$, 记作 $p \mapsto X_p$, 具有以下性质

$$\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$$

或者等价地说,$X_p \in T_pM$ 对每个 $p \in M$ 成立.

Remark

1. 光滑向量场: 称向量场是 X 是光滑的, 若它视为 M 到 TM 的映射是光滑的, 其中 TM 被赋予了光滑结构.
2. 粗向量场: 称 X 是 M 上的一个粗向量场, 若 $X : M \to TM$ 是（不必连续）映射, 满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$.
3. 支撑集: 向量场 $X : M \to TM$ 的支撑集被定义为
$$\overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}$$
4. 紧支撑: 若 X 的支撑集是紧的, 则称 X 是紧支撑的.
5. 局部基表示: 设 $X : M \to TM$ 是粗向量场,$(U, (x^i))$ 是 M 的任意光滑坐标卡, 可以将 X 在任一点 $p \in U$ 处的取值用坐标基向量表示:
$$X_p = X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$
6. 分量函数: 5. 中的每个 $X^i : U \to \mathbb{R}$ 称为 X 在给定坐标卡中的一个分量函数.

命题 5.1 (分量刻画)

设 M 是（带边）光滑流形,$X : M \to TM$ 是粗向量场. 若 $(U, (x^i))$ 是 M 上的任一光滑坐标卡, 那么 X 在 U 上的限制是光滑的, 当且仅当 X 在该坐标卡中的所有分量函数都是光滑的.

Proof 令 (x^i, v^i) 是 $\pi^{-1}(U) \subset TM$ 与图 $(U, (x^i))$ 对应的自然坐标.$X : M \to TM$ 关于

$(U, (x^i))$ 和 $(\pi^{-1}(U), (x^i, v^i))$ 的坐标表示为

$$\hat{X}(x) = \left(x^1, \cdots, x^n, X^1(x), \cdots, X^n(x)\right)$$

因此 X 在 U 上光滑, 当且仅当 $\hat{X}$ 光滑, 当且仅当 $X^1, \cdots, X^n$ 均光滑.

□

定义 5.2 (沿子集的向量场)

设 M 是光滑（带边）流形,$A \subset M$ 是任意子集. 称连续映射 $X : A \to TM$ 是沿 A 的一个向量场, 若它满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_A$, 即对于任意的 $p \in A$,$X_p \in T_pM$.

♣

Remark

1. 开子流形: 若 A 是 M 的开子集 U. 由于 $T_pU \simeq T_pM, p \in U$, 进而可以将 TU 等同于 $\pi^{-1}(U) \subset TM$, 因此对于向量场 $X : U \to TU$, 可以视为 $U \to TM$ 的向量场. 若 X 是 M 上的光滑向量场, 那么 $X|U$ 亦然.
2. 光滑性: 称沿 A 的向量场 X 是光滑的, 若对于任意的 $p \in A$, 存在 p 在 M 中的邻域 V, 和 V 上的光滑向量场 $\tilde{X}$, 使得 $X|(V \cap A) = \tilde{X}|(V \cap A)$.

引理 5.1 (延拓引理（闭集上)

设 M 是光滑（带边）流形,$A \subset M$ 是闭子集. 设 X 是沿 A 的光滑向量场, 对于给定的包含了 A 的开集 U, 存在 M 上的光滑向量场 $\tilde{X}$, 使得 $\tilde{X}|A = X$,$\operatorname{supp}\tilde{X} \subset U$.

♡

Remark

1. 切向量的光滑延拓: 特别地, 任意切向量可视为沿单点集的向量场, 它是光滑的, 因为可以在坐标邻域上做常系数的延拓. 此外光滑流形是 Hausdorff 空间, 单点集在其上是闭的, 因此切向量可以延拓为光滑向量场.

Proof 任取 $p \in A$, 设 W_p 是 p 在 M 中的邻域,$\tilde{X}_p : W_p \to TM$ 是光滑向量场, 使得 $\tilde{X}_p|A \cap W_p = X|A \cap W_p$, 不妨设 $W_p \subset U$.$\{W_p : p \in A\} \cup \{M \backslash A\}$ 构成 M 的开覆盖, 设 $\{\psi_p\} \cup \{\psi_0\}$ 是从属于此开覆盖的 M 的光滑单位分解, 使得 $\operatorname{supp}(\psi_p) \subset W_p, \operatorname{supp}(\psi_0) \subset M \backslash A$. 那么 $\psi_p\tilde{X}_p : W_p \to TM$ 是光滑的向量场, 通过令它们在 $M \backslash \operatorname{supp}\psi_p$ 上取零, 可以光滑地延拓到 M 上. 现在, 定义

$$\tilde{X} := \sum_p \psi_p \tilde{X}_p$$

是光滑的向量场. 任取 $q \in A$, 我们有 $\psi_0(q) = 0$, 且对于每个 ψ_p, 若 $\psi_p(q) > 0$, 则 $\tilde{X}_p(q) = X(q)$ 于是

$$\tilde{X}(q) = \sum_p \psi_p \tilde{X}_p(q) + \psi_0 \tilde{X}_p(q) = \left(\sum_p \psi_p + \psi_0\right) X(q) = X(q)$$

因此 $\tilde{X}|A = X$. 最后

$$\operatorname{supp}\tilde{X} \subset \overline{\bigcup_p \operatorname{supp}\psi_p} = \bigcup_p \operatorname{supp}\psi_p \subset U$$

□

定义 5.3 (光滑向量场空间)

设 M 是光滑（带边）流形, 用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上的全体光滑向量场. ♣

Remark

1. 线性空间: $\mathfrak{X}(M)$ 在逐点加法和标量乘法下构成线性空间:

$$(aX+bY)_p := aX_p + bY_p.$$

2. 模结构: $\mathfrak{X}(M)$ 是环 $C^\infty(M)$ 上的模: 对于 M 上的光滑向量场 X, Y, 和 $f, g \in C^\infty(M), fX + gY$ 通过分量函数可以验证是光滑向量场.
3. 基表示: 向量场的基表示除了逐点的表示法之外, 也可以写成整体的表示

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

   其中 X^i 是第 i 个分量向量场.

5.1.1 标架

以下设 M 是 n-维光滑（带边）流形,$X_1, \cdots, X_k$ 是定义在某个子集 $A \subset M$ 的向量场.

定义 5.4

称有序 k-元组 $(X_1, \cdots, X_k)$ 是线性独立的, 若对于任意的 $p \in A$,$(X_1|_p, \cdots, X_k|_p)$ 是 T_pM 中线性独立的 k 个切向量. ♣

定义 5.5

称 $(X_1, \cdots, X_k)$ 张成了切丛, 若对于每个 $p \in A$,k-元组 $(X_1|_p, \cdots, X_k|_p)$ 张成了 T_pM. ♣

定义 5.6 (局部标架)

称定义在开集 $U \subset M$ 的向量场的有序 n-元组 $(E_1, \cdots, E_n)$ 为 M 的一个局部标架, 若它们线性独立且张成了切丛. ♣

Remark

1. 基：若 $(E_1,\cdots,E_n)$ 是 M 的一个局部标架，那么对于任意的 $p\in U$,$(E_1|_p,\cdots,E_n|_p)$ 构成 T_pM 的一组基.
2. 全局标架：若在此之上 $U=M$，则称 $(E_1,\cdots,E_n)$ 是 M 的一个全局标架.
3. 光滑标架：在此之上每个向量场 E_i 都光滑，则称它为一个光滑标架.
4. 若 $\dim M=n$，验证 $(E_1,\cdots,E_n)$ 线性独立或张成切丛其一即可.

命题 5.2 (标架的补全)

令 M 是光滑 n-维（带边）流形，那么

1. 若 $(X_1,\cdots,X_k)$ 是定义在开子集 $U\subset M$ 的线性独立的 k-个光滑向量场,$1\leqslant k<n$. 那么对于每个 $p\in U$，存在定义在 p 的邻域 V 上的光滑向量场 $X_{k+1},\cdots,X_n$，使得 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 M 在 $U\cap V$ 上的光滑局部标架.
2. 设 $p\in M$,$(v_1,\cdots,v_k)$ 是 T_pM 上的线性无关的 k 个切向量. 对于 $1\leqslant k\leqslant n$，存在定义在 p 的某个邻域上的光滑局部标架 (X_i)，使得 $X_i|_p=v_i,i=1,\cdots,k$.
3. 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是闭集 $A\subset M$ 上 n 个线性独立的光滑向量场，那么存在定义在 A 的某个邻域上的光滑局部标架 $\left(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n\right)$，使得 $\tilde{X}_i|A=X_i,i=1,\cdots,n$.

♠

定义 5.7 (正交标架)

对于定义在 $A\subset\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $(E_1,\cdots,E_k)$，称它们是正交的，若对于每个 $p\in A$,$(E_1|_p,\cdots,E_k|_p)$ 关于欧式内积是正交的（通过 $T_p\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的标准同构定义 $T_p\mathbb{R}^n$ 上的内积）. 一个由正交的向量场组成的（局部或全局的）标架，称为一个正交标架.

♣

引理 5.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设 (X_j) 是 $T\mathbb{R}^n$ 的在开子集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑局部标架. 那么存在 U 上的光滑正交标架 (E_j)，使得 $\operatorname{span}(E_1|_p,\cdots,E_j|_p)=\operatorname{span}(X_1|_p,\cdots,X_j|_p)$.

♡

Proof 对于每一点 $p\in U$，对 $(X_j|_p)$ 应用 Gram-Schimidt 正交化，可以通过

$$E_j:=\frac{X_j-\sum_{i=1}^{j-1}(X_j\cdot E_i)E_i}{\left|X_j-\sum_{i=1}^{j-1}(X_j\cdot E_i)E_i\right|}$$

归纳地得到粗向量场的 n 元组 $(E_1,\cdots,E_n)$. 对于每个 $j=1,\cdots,n$ 和 $p\in U$，由于 $X_j|_p\notin\operatorname{span}(E_1|_p,\cdots,E_{j-1}|_p)$，故分母在 U 上无处退化，因此 (E_j) 是光滑的正交标架.

□

定义 5.8 (可平行化)
称一个光滑（带边）流形是 ** 可平行化 ** 的, 若它容许一个光滑的全局标架. ♣

Remark

1. 例如 $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^1, \mathbb{T}^n$ 是可平行化的.

5.1.2 向量场作为导子

定义 5.9 (向量场在光滑函数上的作用)
设 $X \in \mathfrak{X}(M)$,f 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的光滑函数, 我们可以得到新的函数 $Xf : U \to \mathbb{R}$, 按以下方式定义

$$(Xf)(p) = X_p f$$

♣

Remark

1. 局部性: 由于某点处切向量对函数的作用被函数在任意邻域上的取值决定, 从而 Xf 也是被局部确定的. 特别地, 对于任意开子集 $V \subset U$, 我们有

$$(Xf)|_V = X(f|_V)$$

即对于每个 $p \in V$,$X_p(f) = X_p(f|_V)$.

命题 5.3 (向量场光滑性的刻画)
设 M 是光滑（带边）流形,$X : M \to TM$ 是粗向量场, 以下几条等价:

1. X 是光滑的;
2. 对于每个 $f \in C^\infty(M)$,Xf 是 M 上的光滑函数;
3. 对于每个开子集 $U \subset M$, 和每个 $f \in C^\infty(U)$,Xf 是 U 上的光滑函数. ♠

Proof (a) $\implies$ (b): 任取 $p \in M$, 设 $(U, (x^i))$ 是包含了 p 的光滑坐标卡, 设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $X^i \in C^\infty(M)$, 于是

$$Xf = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

是 U 上的光滑函数, 这表明 Xf 在 M 上光滑.

(b) $\implies$ (c): 设 $U \subset M$ 是开集, 任取 $f \in C^\infty(U)$, 和 $p \in U$, 设 ψ 是 p 的支撑在 U 的 bump 函数, 定义 $\tilde{f} = \psi f$, 并在 $M \setminus \operatorname{supp} \psi$ 上对 $\tilde{f}$ 做零延拓. 得到 $\tilde{f}$ 是在 p 的某个邻域与 f 相等的光滑函数, 因此 $Xf = X\left(\tilde{f}|U\right)$ 是光滑函数.

(c) $\implies$ (a): 任取 $p \in M$, 设 $(U, (x^i))$ 是包含了 p 的光滑坐标卡, 设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 注

意到坐标函数 x^i 是 U 上的光滑函数, 故

$$X^i = Xx^i$$

是光滑函数, 进而 X 是光滑的.

□

命题 5.4

光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 定义出从 $C^\infty(M)$ 到自身的映射 $f \mapsto Xf$.

Remark

1. $C^\infty(M)$-线性: X 是 $C^\infty(M)$ 上的 $\mathbb{R}$-线性映射.
2. 导子性: X 具有导子性, 即对于 $f, g \in C^\infty(M)$, 我们有

$$X(fg) = fXg + gXf$$

命题 5.5 (导子 $\iff$ 光滑向量场)

设 M 是光滑 (带边) 流形. 映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是一个导子, 当且仅当存在某个 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 使得 $Df = Xf$ 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 成立.

Proof $\Longleftarrow$ 前面已经说明了.

$\Longrightarrow$ 对于给定的导子 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, 定义

$$X_p f := (Df)(p)$$

那么 D 的导子性给出 $(D(\cdot))(p)$ 是 p 处的一个点导子, 进而 $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 是切向量, 因此 X 定义出一个粗向量场. 又对于任意的 $f \in C^\infty(M)$,$Xf = Df$ 是光滑函数, 因此由 1.2. 知 X 是光滑的向量场.

□

5.2 向量场和光滑映射

5.2.1 F-相关性

定义 5.10 (F-相关)

设 $F : M \to N$ 是光滑的,X 是 M 上的向量场,Y 是 N 上的向量场. 若对于每个 $p \in M$, 都有 $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$, 则称 X 和 Y 是 F-相关的.

Idea

对于任意的 $p \in M$, 都有 $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$. 一般而言, 这种方式无法定义出 N 上的向量场: 若 F 非满, 则对于 $q \in N \backslash F(M)$ 上无法通过这种方式给出切向量; 若 F 非单, 则切向量可能不止有一种选择.

命题 5.6 (光滑函数的刻画)

设 $F: M \to N$ 是 (带边) 光滑流形之间的光滑函数,$X \in \mathfrak{X}(M)$,$Y \in \mathfrak{X}(N)$.X 和 Y 是 F-相关的向量场, 当且仅当对于任意定义在 N 的开子集的光滑实函数 f, 都有

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F$$

♠

Proof 任取 $p \in M$, 和定义在 $F(p)$ 的某个邻域上的光滑实值函数 f, 我们有

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p) f$$

以及

$$(Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)} f$$

因此 $X(f \circ F) = (Yf) \circ F, p \in M$ 当且仅当 $dF_p(X_p) f = Y_{F(p)} f, p \in M$, 当且仅当 $dF_p(X_p) = Y_{F(p)} f, p \in M$, 即 X 和 Y 是 F-相关的.

□

命题 5.7

是 M, N 是光滑 (带边) 流形,$F: M \to N$ 是微分同胚. 对于每个 $X \in \mathfrak{X}$, 存在唯一 $Y \in \mathfrak{X}(N)$, 使得 X 与 Y 是 F-相关的.

♠

Proof 对每个 $q \in N = F(M)$, 定义

$$Y_q := dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right)$$

显然 Y 是唯一的 F-相关于 X 的 (粗) 向量场. 此外,Y 的光滑性来自于 Y 是光滑映射的复合

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{dF} TN$$

□

定义 5.11 (推出)

设 $F: M \to N$ 是光滑 (带边) 流形之间的微分同胚. 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 由 1.4., 存在唯一的 F-相关于 X 的向量场, 记作 $F_* X$, 称为 X 通过 F 的推出. 具体地

$$(F_* X)_q := dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right), \quad q \in N$$

♣

推论 5.1

设 $F: M \to N$ 是微分同胚,$X \in \mathfrak{X}(M)$, 那对于任意的 $f \in C^{\infty}(N)$, 我们有

$$((F_*X) f) \circ F = X(f \circ F)$$

5.2.2 向量场和子流形

定义 5.12 (相切)

设 $S \subset M$ 是 M 的浸入或嵌入（带边）子流形. 对于给定的 $p \in S$, 称 M 上的向量场 X 在点 p 与 S 相切, 若 $X_p \in T_pS \subset T_pM$. 称 X 与 S 相切, 若它在 S 的每一点上与 S 相切.

Idea

向量场 X 未必能限制在 S 上, 因为可能存在 $X_p \notin T_pS$, 所以我们要引入相切的概念.

命题 5.8 (相切条件)

设 M 是光滑流形,$S \subset M$ 是（带边）嵌入子流形,X 是 M 上的光滑向量场. 那么 X 与 S 相切, 当且仅当 $(Xf)|_S = 0$ 对于每个满足 $f|_S \equiv 0$ 的 $f \in C^{\infty}(M)$ 成立.

Proof 利用事实

$$T_pS = \{v \in T_pM : vf = 0 \text{ whenever } f \in C^{\infty}(M) \text{ and } f|_S = 0\}$$

立即得到.

□

命题 5.9 (含入)

设 $S \subset M$ 是（带边）浸入子流形,Y 是 M 上的光滑向量场. 若存在 ι-相关于 Y 的向量场 $X \in \mathfrak{X}(S)$, 其中 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是含入映射, 则 Y 与 S 相切.

Proof $Y_p = d\iota_p(X_p) \in T_pS$

□

命题 5.10 (限制)

设 M 是光滑流形,$S \subset M$ 是（带边）浸入子流形, 令 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是含入映射. 若 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ 与 S 相切, 则存在唯一的 S 上的光滑向量场, 记作 $Y|_S$, 它与 Y 是 ι-相关的.

Idea

为了说明光滑性, 利用浸入是局部嵌入, 给出 X 继承自 Y 的光滑的分量函数.

Proof 由 Y 于 S 相切, 任取 $p \in S$, 存在 $X_p \in T_pS$, 使得 $Y_p = d\iota_p(X_p)$. 由于 $d\iota_p$ 是单射,X_p 是唯一的, 因此 X 定义出 S 上唯一的粗向量场. 此外若 X 是光滑的, 那么 X 与 Y 是 ι-相关的, 因此只需要说明 X 在每个局部上都光滑即可. 由于浸入是局部的嵌入, 任取 $p \in S$, 存在 p 在 S 中的邻域 V, 使得 V 可以嵌入到 M 中. 令 $(U,(x^i))$ 是 V 在 M 中以 p 为中心的切片图, 使得 $V \cap U$ 是使得 $x^{k+1} = \cdots = x^n = 0$ 的子集（并且对于 $p \in \partial S, x^k \geqslant 0$）, 且 $(x^1,\cdots,x^k)$ 是 S 在 $V \cap U$ 中的局部坐标. 设 $Y = Y^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + Y^n\frac{\partial}{\partial x^n}$, 那么 X 有坐标表示 $Y^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ 是 $V \cap U$ 上的光滑向量场.

□

5.3 李括号

设 X,Y 是 M 上的光滑向量场, 它们可视为作用在光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 的导子. 我们希望通过 X,Y 给出新的导子. 但是最简单的依次作用的方式 $f \mapsto YXf := Y(Xf)$ 有时并不满足 Lebniz 律, 从而不能成为一个 YX 不能成为一个光滑向量场.

Example 5.1 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = x\frac{\partial}{\partial y}$, 令 $f(x,y) = x, g(x,y) = y$, 则直接计算, 可以得到 $XY(fg) = 2x$, 而 $fXYg + gXYf = x$, 所以 XY 不是 $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的导子.

我们需要观察的是 XY 距离成为一个导子多出了什么, 计算 $XY(fg) = XfYg + XgYf + fXYg + gXYf$, 注意到后两项就是导子性所需要的, 而前两项是多余的, 但是我们发现前两项对于 f,g 的位置具有对称性, 因此如果减去调换后的结果, 就可以消去多余项, 这就引出了李括号运算 $[X,Y]$.

内容提要

- 李括号的导子性
- 李括号的坐标表示

定义 5.13 (李括号) 设 X,Y 是光滑（带边）流形 M 上的两个光滑向量场. 定义 X 和 Y 的李括号算子 $[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 按照

$$[X,Y]f := XYf - YXf$$

♣

引理 5.3

任意一对光滑向量场的李括号，也是一个光滑向量场.

Proof 由命题5.5，只需要证明 $[X,Y]$ 是 $C^{\infty}(M)$ 上的一个导子. 任取 $f,g\in C^{\infty}(M)$,，计算

$$
\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg+gYf) - Y(fXg+gXf) \\
&= fXYg+YgXf+gXYf+YfXg-(fYXg+XgYf+gYXf+XfYg) \\
&= fXYg+gXYf-fYXg-gYXf \\
&= f[X,Y]g+g[X,Y]f
\end{aligned}
$$

故导子性成立.

□

命题 5.11

向量场 $[X,Y]$ 在点 $p\in M$ 处的取值由以下公式给出

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

命题 5.12

设 X,Y 是光滑流形（带边）流形 M 上的光滑向量场，令 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ 为 X,Y 在 M 的某个局部坐标 (x^i) 下的坐标表示. 那么 $[X,Y]$ 可以有由以下坐标表示得到

$$[X,Y]=\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

或者简单地写作

$$[X,Y]=\left(XY^j-YX^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Proof 由于 $[X,Y]$ 是一个向量场，它在函数上的作用是被局部决定的:$([X,Y]f)|_U =$

$[X,Y](f|_U)$. 因此只需要在单个坐标卡上计算即可, 我们有

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\\
&= X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j} + X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^jX^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
&= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\\
&= \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}f
\end{aligned}$$

因此

$$[X,Y] = \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

□

推论 5.2

对于任意的坐标向量场 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0, \quad \forall i,j$$

♡

Example 5.2 定义光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned}
X &= x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}\\
Y &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

利用 $[X,Y] = \left(XY^j - YX^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$ 计算, 得到

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= (X(1) - Y(x))\frac{\partial}{\partial x} + (X(0) - Y(1))\frac{\partial}{\partial y} + (X(y) - Y(x(y+1)))\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \frac{\partial}{\partial x} + (1 - (y+1))\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

命题 5.13 (李括号的性质)

对于所有的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 李括号满足以下性质

1. 双线性: 对于 $a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y]$$

2. 反对称性：
$$[X,Y]=-[Y,X]$$

3. Jacobi 恒等式：
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

4. 对于 $f,g\in C^{\infty}(M)$，
$$[fX,gY]=fg[X,Y]+(fXg)\,Y-(gYf)\,X$$

Proof 双线性和反对称性由定义容易得到. 为了得到 Jacobi 恒等式, 直接计算
$$\begin{aligned}
&[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
&=[X,YZ-ZY]+[Y,ZX-XZ]+[Z,XY-YX]\\
&=[X,YZ]-[X,ZY]+[Y,ZX]-[Y,XZ]+[Z,XY]-[Z,YX]\\
&=XYZ-YZX-XZY+ZYX+YZX-ZXY\\
&-YXZ+XZY+ZXY-XYZ-ZYX+YXZ\\
&=0
\end{aligned}$$
对于最后一条性质, 直接计算
$$\begin{aligned}
[fX,gY]\,h&=(fX)\,(gY)\,h-(gY)\,(fX)\,h\\
&=(fX)\,(g\,(Yh))-(gY)\,(f\,(Xh))\\
&=gfX\,(Yh)+(fXg)\,(Yh)-fgY\,(Xh)-(gYf)\,(Xh)\\
&=fg[X,Y]h+(fXg)\,Yh-(gYf)\,Xh
\end{aligned}$$
□

命题 5.14 (李括号的自然性)
设 $F:M\to N$ 是光滑（带边）流形之间的光滑映射, 令 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$, $Y_1,Y_2\in\mathfrak{X}(N)$ 是向量场, 使得 X_i 是 F-相关于 Y_i 的, $k=1,2$. 则 $[X_1,X_2]$ 是 F-相关于 $[Y_1,Y_2]$ 的.

Proof 利用命题5.6, 对于任意的 $f\in C^{\infty}(N)$, 考虑
$$\begin{aligned}
[X_1,X_2]\,(f\circ F)&=X_1X_2\,(f\circ F)-X_2X_1\,(f\circ F)\\
&=X_1[(Y_2f)\circ F]-X_2[(Y_1f)\circ F]\\
&=(Y_1Y_2f)\circ F-(Y_2Y_1f)\circ F\\
&=([Y_1,Y_2]f)\circ F
\end{aligned}$$

□

推论 5.3 (李括号的推出)

设 $F: M \to N$ 是微分同胚 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. 则 $F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$ ♡

Proof 微分同胚的 F-相关函数存在且唯一, 因此由上述命题立即得到

$$F_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$$

□

推论 5.4 (相切与子流形向量场的李括号)

设 M 是光滑流形, S 是 M 的 (带边) 浸入子流形. 若 Y_1, Y_2 是 M 上相切与 S 的光滑向量场, 则 $[Y_1, Y_2]$ 也相切与 S. ♡

Proof 由命题5.10, 存在 S 上的光滑向量场 X_1, X_2, 使得 X_i 是 ι-相关于 Y_i 的 $i = 1, 2$. 于是 $[X_1, X_2]$ 是 ι-相关于 $[Y_1, Y_2]$ 的, 从而与 S 相切.

□

第 6 章　张量

6.1 多线性代数

6.1.1 多线性映射

定义 6.1 (多线性映射)

设 $V_1,\cdots,V_k$,W 是线性空间. 映射 $F:V_1\times\cdots\times V_k\to W$ 被称为是多线性的, 若对于每个 i

$$F\left(v_1,\cdots,av_i+a'v_i',\cdots,v_k\right)=aF\left(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k\right)+a'F\left(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k\right)$$

记全体 $V_1\times\cdots\times V_k$ 到 W 的多线性映射为 $L\left(V_1,\cdots,V_k;W\right)$ ♣

Remark $L\left(V_1,\cdots,V_k;W\right)$ 在逐点加法和标量乘法下构成线性空间.

Example 6.1 一些多线性映射

1. $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积是双线性映射.
2. $\mathbb{R}^3$ 上的叉乘是双线性映射.
3. $\mathbb{R}^n$ 上 n 个向量的行列式.

Example 6.2 余向量场的张量积

设 V 是向量空间,$\omega,\eta\in V^*$. 定义函数 $\omega\otimes\eta:V\times V\to\mathbb{R}$

$$\omega\otimes\eta\left(v_1,v_2\right):=\omega\left(v_1\right)\eta\left(v_2\right)$$

Example 6.3 多线性映射的张量积

令 $V_1,\cdots,V_k$,$W_1,\cdots,W_l$ 是向量空间, 设 $F\in L\left(V_1,\cdots,V_k,\mathbb{R}\right)$,$G\in L\left(W_1,\cdots,W_l,\mathbb{R}\right)$, 定义函数

$$F\otimes G:V_1\times\cdots\times V_k\times W_1\times\cdots\times W_l\to\mathbb{R}$$

通过

$$F\otimes G\left(v_1,\cdots,v_k,w_1,\cdots,w_l\right):=F\left(v_1,\cdots,v_k\right)G\left(w_1,\cdots,w_l\right)$$

它是 $L\left(V_1,\cdots,V_k,W_1,\cdots,W_l;\mathbb{R}\right)$ 中的元素, 称为是 F 和 G 的张量积.

Remark

1. 张量积运算 $\otimes$ 是双线性的, 且满足结合律.
2. 由结合律, 可以无歧义地定义多个多线性映射的张量积.

命题 6.1 (多线映射空间的基) 设 $V_1,\cdots,V_k$ 是微分分别为 $n_1,\cdots,n_k$ 的实向量空间. 对于每个 $j\in\{1,\cdots,k\}$, 设 $\left(E_1^{(j)},\cdots,E_{n_j}^{(j)}\right)$ 是 V_j 的一组基, 令 $\left(\varepsilon_{(j)}^1,\cdots,\varepsilon_{(j)}^{n_j}\right)$ 是 V_j^* 上的对偶基. 那么集合

$$\mathscr{B}:=\{\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}:1\leqslant i_1\leqslant n_1,\cdots,1\leqslant i_k\leqslant n_k\}$$

是 $L\left(V_1,\cdots,V_k,\mathbb{R}\right)$ 的一组基, 进而空间的维数为 $n_1\cdots n_k$

Proof 任取 $F\in L\left(V_1,\cdots,V_k;\mathbb{R}\right)$, 对于每一组 $(i_1,\cdots,i_k)$, 定义一个实数

$$F_{i_1\cdots i_k}:=F\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)$$

接下来说明

$$F=F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

为此, 任取 $(v_1,\cdots,v_k)\in V_1\times\cdots\times V_k$, 设 $v_1=v_1^{i_1}E_{i_1}^{(1)},\cdots,v_k=v_k^{i_k}E_{i_k}^{(k)}$, 那么

$$\begin{aligned}F\left(v_1,\cdots,v_k\right)&=F\left(v_1^{i_1}E_{i_1}^{(1)},\cdots,v_k^{i_k}E_{i_k}^{(k)}\right)\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F_{i_1\cdots i_k},\quad i\text{ as a sum}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\left(F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)\\&=F_{i_1\cdots i_k}\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right),\quad i\text{ as a sum}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)\\&=\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1^{j_1}E_{j_1}^{(1)},\cdots,v_k^{j_k}E_{j_k}^{(k)}\right),\quad \text{j as a sum, i is not}\\&=v_1^{j_1}\cdots v_k^{j_k}\left(\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(E_{j_1}^{(1)},\cdots,E_{j_k}^{(k)}\right),\quad j\text{ as a sum, i is not}\\&=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}\end{aligned}$$

于是 $\left(F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}\right)\left(v_1,\cdots,v_k\right)=v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}F_{i_1\cdots i_k}$, i as a sum 这就说明了

$$F=F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

为了说明 $\mathscr{B}$ 是线性无关的, 设一个线性组合为零

$$F_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{(1)}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{(k)}^{i_k}=0$$

分别作用在每一组 $\left(E_{i_1}^{(1)},\cdots,E_{i_k}^{(k)}\right)$, 得到 $F_{i_1\cdots i_k}=0$, 这就说明了线性无关性.

6.1.2 线性空间的抽象张量积

定义 6.2 (形式线性组合)

S 中元素的一个形式线性组合，是指一个实值函数 $f \in \mathbb{R}^S$，使得 $f(s) = 0$ 对于有限个 $s \in S$ 以外成立.

Remark

1. 对于每个 $x \in S$，存在唯一的 $\delta_x \in \mathscr{F}(S)$，使得 $\delta_x(x) = 1$,$\delta_x^{-1}(0) = S \backslash \{x\}$. 通常将 δ_x 与 x 等同.

定义 6.3 (自由线性空间)

S 上的自由（实）线性空间，记作 $\mathscr{F}(S)$，是指 S 上全体形式线性组合构成的空间.

Remark

1. 线性结构：在逐点加法和标量乘法下,$\mathscr{F}(S)$ 构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间.
2. 基：$f \in \mathscr{F}(S)$ 唯一地写作 $f = \sum_{i=1}^m a_i x_i$. 其中 $\{x_1, \cdots, x_m\} = [f \neq 0]$,$a_i = f(x_i)$. 因此 S 是 $\mathscr{F}(S)$ 的一组基,$\mathscr{F}(S)$ 是有限维线性空间当且仅当 S 是有限集合.
3. 泛性质：对于每个集合 S 和任意向量空间 W，每个映射 $A : S \to W$ 有唯一的到线性映射 $\overline{A} : \mathscr{F}(S) \to W$ 的延拓.

   Proof 对于 $f = \sum_{i=1}^m a_i x_i$，$\overline{A}(f)$ 唯一的取法是

$$\overline{A}(f) = \sum_{i=1}^m a_i \overline{A}(x_i) = \sum_{i=1}^m a_i A(x_i)$$

定义 6.4 (抽象张量积)

设 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是使线性空间. 令 $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{F}(V_1 \times \cdots V_k)$ 中全体形如以下元素张成的空间：

$$(v_1, \cdots, av_i, \cdots, v_k) - a(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k),$$

$$(v_1, \cdots, v_i + v_i', \cdots, v_k) - (v_1, \cdots, v_i, v_k) - (v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$$

其中 $v_j, v_j' \in V_j$,$i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,$a \in \mathbb{R}$.

定义 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的张量积空间，记作 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$，为下面的商空间

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k := \mathscr{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \backslash \mathscr{R}$$

令 $\Pi : \mathscr{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 为自然投影. 元素 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 在

$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 的等价类记作

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k := \Pi\left(v_1, v_2, \cdots, v_k\right).$$

称为 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 的抽象张量积.

Remark

1. 线性：显然

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \cdots \otimes a v_i \otimes \cdots \otimes v_k &= a\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k\right) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes\left(v_i+v_i^{\prime}\right) \otimes \cdots \otimes v_k &= \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k\right) \\ &\quad +\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i^{\prime} \otimes \cdots \otimes v_k\right) \end{aligned}$$

2. 每个 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 中的元素写作 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的线性组合，但不一定能写作单个的 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$

命题 6.2 (张量积的泛性质)

令 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是有限维线性空间,$A: V_1 \times \cdots V_k \rightarrow X$ 是多线性映射，那么存在唯一的线性映射 $\tilde{A}: V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \rightarrow X$，使得下图交换

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[ur, dashed, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 π 是映射 $\pi\left(v_1, \cdots, v_k\right)=v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$

Proof 每个映射 $A: V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow X$ 唯一地延拓到线性映射 $\overline{A}: \mathscr{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k\right) \rightarrow X$. A 是多线性映射，无非是 $\mathscr{R} \subseteq \ker \overline{A}$. 因此 $\overline{A}$ 诱导出线性映射 $\tilde{A}: \mathscr{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k\right) \backslash \mathscr{R}=V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \rightarrow X$ ，使得 $\overline{A}=\tilde{A} \circ \Pi$ ，又 $\pi=\Pi \circ i$，其中 $i: V_1 \times \cdots \times V_k \hookrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 是含入映射，$\overline{A} \circ i=A$ 故 $A=\tilde{A} \circ \pi$.

接下来考虑唯一性，注意到形如 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的向量都有唯一的映法 $\tilde{A}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\right)=A\left(v_1, \cdots, v_k\right)$ ，而 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ 上的元素写作 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 的线性组合,$\tilde{A}$ 的线性保证了映法的唯一性.

可以用下图概括上述论证

$$
\begin{tikzcd}
V_1\times\cdots\times V_k \arrow[r, "A"] \arrow[d, "i"'] & X \\
\mathscr{F}\left(V_1\times\cdots\times V_k\right) \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{A}"'] \arrow[r, "\mathscr{R}\subset\ker\bar{A}", "\Pi"'] & V_1\otimes\cdots\otimes V_k \arrow[u, dashed, "\exists!\tilde{A}"']
\end{tikzcd}
$$

命题 6.3 (张量积空间的基)

设 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是维数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的实线性空间. 对于每个 $j=1,2,\cdots,k$, 设 $\left(E_1^{(j)},\cdots,E_{n_j}^{(j)}\right)$ 是 V_j 的一组基, 则集合

$$\mathscr{C}=\left\{E_{i_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}^{(k)}:1\leq i_1\leq n_1,\cdots,1\leq i_k\leq n_k\right\}$$

是 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ 的一组基, 它的维数等于 $n_1\cdots n_k$.

Proof

1. 根据定义, 全体 $v_1\otimes\cdots\otimes v_k$ 张成了空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$, 而每个 $v_1\times\cdots v_k$ 写作 $E_{i_1}^{(1)}\times\cdots\times E_{i_k}^{(k)}$ 的线性组合, 且投影映射 π 保持线性, 故 $\mathscr{C}$ 张成了 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$.
2. 为了说明线性无关系, 设以下线性组合为 0

$$a^{i_1,i_2,\cdots,i_k}E_{i_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}^{(k)}=0$$

对每个 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$, 定义

$$\tau^{m_1,m_2,\cdots,m_k}\left(v_1,\cdots,v_k\right):=\varepsilon_{(1)}^{m_1}\left(v_1\right)\cdots\varepsilon_{(k)}^{m_k}\left(v_k\right)$$

由泛性质6.2, 它延拓到线性映射 $\tilde{\tau}^{m_1,\cdots,m_k}:V_1\otimes\cdots\otimes V_k\to\mathbb{R}$, 作用在上述线性组合上的两边, 得到

$$a^{m_1,\cdots,m_k}=0$$

故线性无关性成立.

命题 6.4 (张量积空间的结合律)

设 V_1,V_2,V_3 是有限维实线性空间, 那么存在唯一的同构

$$V_1\otimes\left(V_2\otimes V_3\right)\simeq V_1\otimes V_2\otimes V_3\simeq\left(V_1\otimes V_2\right)\otimes V_3$$

使得 $v_1\otimes\left(v_2\otimes v_3\right)$,$v_1\otimes v_2\otimes v_3$ 和 $\left(v_1\otimes v_2\right)\otimes v_3$ 对应.

Proof 只说明第一个同构, 第二个同构完全类似. 定义映射

$$\alpha : V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$
$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

显然它是多线性的, 由泛性质6.2, 它唯一地延拓到线性映射 $\tilde{\alpha} : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (v_1 \otimes v_2) \otimes V_3$, 使得 $\tilde{\alpha}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = \alpha(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ 由形如 $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ 的元素张成, 故 α 是满射, 从而 $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \pi$ 亦然, 又由维数关系, 它是同构. 故 $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. 又任意满足性质的其他映射均在每个 $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ 上与 $\tilde{\alpha}$ 一致, 进而在 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 上一致, 即唯一性成立.

命题 6.5 (抽象张量积与具体张量积)

若 $V_1, \cdots, V_k$ 是有限维线性空间, 存在标准同构

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \simeq L(V_1, \cdots, V_k; \mathbb{R}),$$

Remark

1. 考虑 V_i 与第二对偶空间的同构 V_i^{**}, 我们有另外的同构

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \simeq V_1^{**} \otimes \cdots \otimes V_k^{**} \simeq L(V_1^*, \cdots, V_k^*; \mathbb{R})$$

Proof 定义

$$\Phi : V_1^* \times \cdots V_k^* \to L(V_1, V_2, \cdots, V_k; \mathbb{R})$$
$$\Phi(\omega_1, \cdots, \omega_k)(v_1, \cdots, v_k) := \omega_1(v_1) \cdots \omega_k(v_k)$$

那么显然 Φ 是多线性的, 由泛性质6.2 , 它诱导出映射 $\tilde{\Phi}$. 此外 Φ 映由6.3给出的 $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ 的基为 $L(V_1, \cdots, V_k; \mathbb{R})$ 的基, 因此 $\tilde{\Phi}$ 是同构.

6.1.3 线性空间上的共变和反变张量

定义 6.5 (共变张量)

设 V 是有限维线性空间,k 是正整数. V 上的一个共变 k-张量是指,k-折张量积空间 $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ 上的一个元素. 通过命题6.5, 通常视为一个 V 上的 k-线性映射

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{个}} \to \mathbb{R}.$$

数字 k 被称为是 α 的 rank.

Remark

1. 0-tensor: 约定 0-tensor 为一个实数.

2. 简记 k-折张量积空间空间为

$$T^k\left(V^*\right) := V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

Example 6.4 一些共变张量

1. 每个线性映射 $\omega : V \to \mathbb{R}$ 都是一个多线性映射，共变 1-向量就是余向量. 因此 $T^1\left(V^*\right)$ 就是 V^*.
2. 每个内积都是一个 2-tensor，也就是双线线型.
3. 行列式函数视为 n 个向量的函数，是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 k -tensor.

定义 6.6 (反变张量)

类似地，设 V 是有限维线性空间，反变张量是指

$$T^k\left(V\right) = V \otimes \cdots \otimes V$$

中的一个元素. ♣

Remark

1. 由 T 是有限维空间，

$$T^k\left(V\right) \simeq \left\{\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}\right\}$$

Proof 考虑 $\Phi : T^k\left(V\right) \to \left\{\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}\right\}$

$$\Phi\left(v_1, \cdots, v_k\right)\left(w_1, \cdots, w_k\right) := w_1\left(v_1\right) w_2\left(v_2\right) \cdots w_k\left(v_k\right)$$

其中 $\left(v_1, \cdots, v_k\right) \in V \otimes \cdots \otimes V$，$\left(w_1, \cdots, w_k\right) \in V^* \times \cdots \times V^*$ 易见 Φ 是良定义的.

□

定义 6.7 (混合张量积)

对于非负整数 k, l，定义 V 上的 (k, l) 型混合张量积空间为

$$T^{(k,l)}\left(V\right) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{个}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l\text{个}}$$

♣

Remark

$$\begin{aligned}
T^{(0,0)}(V) &= T^0(V^*) = T^0(V) = \mathbb{R}, \\
T^{(0,1)}(V) &= T^1(V^*) = V^*, \\
T^{(1,0)}(V) &= T^1(V) = V, \\
T^{(0,k)}(V) &= T^k(V^*), \\
T^{(k,0)}(V) &= T^k(V).
\end{aligned}$$

定义 6.8 (混合张量积空间的基)

设 V 是有限维实线性空间. 设 (E_i) 是 V 的一组基,(ε^j) 是相应的 V^* 的对偶基. 那么

$$\left\{\varepsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{i_k}:1\leq i_1,\cdots,i_k,\leq n\right\}\text{是}T^k\left(V^*\right)\text{的一组基}$$

$$\left\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_l}:1\leq i_1,i_2,\cdots,i_k\leq n\right\}\text{是}T^k\left(V\right)\text{的一组基}$$

$$\left\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_\ell}:1\leq i_1,\cdots,i_k\leq n,j_1,\cdots j_l\leq n\right\}\text{是}T^{(k,l)}\left(V\right)\text{的一组基}$$

Proof 这是命题6.3的一个特殊情况.

命题 6.6

令 V 是有限维线性空间. 存在自然的（与基无关的）$T^{(k+1,l)}\left(V\right)$ 和以下多线性映射空间的同构

$$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{k\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{l\text{个}}\to V$$

Proof 由命题6.5,

$$T^{(k+1,l)}\left(V\right)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k+1\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};\mathbb{R}\right)$$

定义 $\Phi:T^{(k+1,l)}\left(V\right)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};V\right)\to T^{(k+1,l)}\left(V\right)\simeq L\left(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{k+1\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{l\text{个}};\right.$

$$\Phi\left(A\right)\left(w_1,\cdots,w_{k+1},v_1,\cdots,v_l\right):=w_{k+1}\left(A\left(w_1,\cdots,w_k,v_1,\cdots,v_l\right)\right)$$

易见 Φ 是线性同构. □

定义 6.9 (缩并)

由上面的命题, $T^{(1,1)}\left(V\right)$ 可视为 V 的自同态空间, 可以在其上定义出自然的算子 $\mathrm{tr}:T^{(1,1)}\left(V\right)\to\mathbb{R}$ 为 V 的自同态的迹, 即任意一组基下的表示矩阵的对角和. 更一般地, 我们定义 $\mathrm{tr}:T^{(k+1,l+1)}\to T^{(k,l)}\left(V\right)$, 通过令 $\left(\mathrm{tr}\ F\right)\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,v_1,\cdots,v_l\right)$ 为以下 $(1,1)$-张量的迹

$$F\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,\cdot,v_1,\cdots,v_l,\cdot\right)\in T^{(1,1)}\left(V\right)$$

此算子称为迹或缩并.

命题 6.7

在一组基下, $\operatorname{tr}\ F$ 的分量为

$$(\operatorname{tr}\ F)^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_l}=\sum_m F^{i_1,\cdots,i_k,m}_{j_1,\cdots,j_l,m}$$

Idea 因此 tr 无非就是令最后一个上下指标相等并求和.

Remark 更一般地, 我们可以让张量在任意一对指标上做缩并, 只要这对指标一个是共变的, 一个是反变的. 这样的算子没有各自的记号, 我们需要时单独提及.

6.2 对称张量和交错张量

6.2.1 对称张量

定义 6.10

设 V 是有限维线性空间.V 上的一个共变 k-张量 α 被称为是对称的, 若对于每个 $1\leq i<j\leq k$,

$$\alpha\left(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_k\right)=\alpha\left(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_k\right)$$

显然对称张量空间是线性的, 记作 $\Sigma^k\left(V^*\right)$.

Remark

对于共变 k-张量 α, 以下三条等价

1. α 是对称的;
2. 对于每组 $v_1,\cdots,v_k\in V$, 和置换 $\tau\in S_k$,
$$\alpha\left(v_1,\cdots,v_k\right)=\alpha\left(v_{\tau(1)},\cdots,v_{\tau(k)}\right)$$
3. α 关于任意组基的函数 $\alpha_{i_1\cdots i_k}$ 是在指标置换下不变.

Proof 每个置换写作对换的积, 故前两条等价. 设 $\left(\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}\right)$ 是一组基, 那么

$$\alpha=\alpha_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{i_k}$$

任取 $\tau\in S_k$, 由对称性

$$a_{i_1\cdots i_k}=\alpha\left(E_{i_1},\cdots,E_{i_k}\right)=\alpha\left(E_{i_{\tau(1)}},\cdots,E_{i_{\tau(k)}}\right)=a_{i_{\tau(1)}}\cdots a_{i_{\tau(k)}}$$

故 1. $\Longrightarrow$ 3. 成立. 对于 3. $\Longrightarrow$ 1., 只需要取定一组基, 将每个 v_i 写作基表示, 并利用多线性将求和符号提出. 此时发现条件 3. 保证了调换 $v_1,\cdots,v_k$ 的顺序只是求和顺序的一个调换.

定义 6.11 (对称子)

$T^k(V^*)$ 到 $\Sigma^k(V^*)$ 存在自然的投影 Sym，按以下方式定义

$$\mathrm{Sym}\,\alpha := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\sigma\alpha$$

其中 $\sigma\alpha$ 按以下方式定义

$$\sigma\alpha\left(v_1,\cdots,v_k\right) := \alpha\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)$$

♣

命题 6.8 (对称子的性质)

设 α 是有限维线性空间上的共变张量，那么

1. $\mathrm{Sym}\,\alpha$ 是对称的；
2. $\mathrm{Sym}\,\alpha=\alpha$ 当且仅当 α 是对称的.

♠

即便 α 和 β 都是 V 上的对称张量，但是 $\alpha\otimes\beta$ 不一定对称. 不过利用对称子，可以定义出一种新的乘积运算，使得运算结果仍为对称张量.

定义 6.12 (对称积)

设 $\alpha\in\Sigma^k(V^*)$,$\beta\in\Sigma^l(V^*)$，定义对称积 $\alpha\beta$ 为下述的 $(k+\ell)$-张量

$$\alpha\beta := \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$$

具体地，

$$\alpha\beta\left(v_1,\cdots,v_{k+l}\right)=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\alpha\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)\beta\left(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)}\right)$$

♣

命题 6.9 (对称积的性质)

1. 对称积是对称的双线性映射：对于每个对称张量 α,β,γ 和所有的 $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

$$(a\alpha+b\beta)\gamma=a\alpha\gamma+b\beta\gamma=\gamma(a\alpha+b\beta)$$

2. 若 α,β 是余向量，那么

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha)$$

♠

6.2.2 交错张量

定义 6.13 (交错张量)

设 V 是有限维线性空间,α 是 V 上的共变 k-张量. 称 α 是交错的, 若任取 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$, 和一对不同的指标 i, j, 都有

$$\alpha\left(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k\right)=\alpha\left(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k\right)$$

交错 k-张量也被称为是外形式、多余向量、k-余向量.V 上全体交错 k-张量空间记作 $\Lambda^k\left(V^*\right)$, 它是 $T^k\left(V^*\right)$ 的线性子空间.

Remark 对于共变 k-张量 $l=\alpha$, 以下几条等价

1. α 交错;
2. 任取向量 $v_1, \cdots, v_k$, 和 $\sigma \in S_k$,
$$\alpha\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\right)=(\operatorname{sgn} \sigma) \alpha\left(v_1, \cdots, v_k\right)$$
3. 在任一组基下,α 对应的分量函数 $\alpha_{i_1 \cdots i_k}$ 在指标的对换下变号.

Remark 0-张量和 1-张量均同时是对称的和交错的. 2-交错张量是反称双线性型.

命题 6.10

设 β 是一个共变 2-张量, 那么 β 可以写作对称张量和交错张量的和, 具体地

$$\begin{aligned}\beta(v, w) &=\frac{1}{2}(\beta(v, w)+\beta(w, v))+\frac{1}{2}(\beta(v, w)-\beta(w, v)) \\ &=\alpha(v, w)+\sigma(v, w)\end{aligned}$$

其中 $\alpha(v, w):=\frac{1}{2}(\beta(v, w)+\beta(w, v))$ 是对称张量, $\sigma(v, w):=\frac{1}{2}(\beta(v, w)-\beta(w, v))$ 是交错张量.

6.3 流形上的张量和张量场

定义 6.14 (流形上的张量丛)

设 M 是光滑（带边）流形.

定义 M 上的共变 k -张量丛为

$$T^k T^* M=\coprod_{p \in M} T^k\left(T_p^* M\right).$$

定义 M 上的反变 k-张量丛为

$$T^kTM=\coprod_{p\in M}T^k\left(T_pM\right)$$

定义 M 上的 (k,l)-型混合张量丛为

$$T^{(k,l)}TM=\coprod_{p\in M}T^{(k,l)}\left(T_pM\right)$$

♣

Remark 有自然的等同

$$\begin{aligned}
&T^{(0,0)}TM=T^0T^*M=T^0TM=M\times\mathbb{R},\\
&T^{(0,1)}TM=T^1T^*M=T^*M,\\
&T^{(1,0)}TM=T^1TM=TM,\\
&T^{(0,k)}TM=T^kT^*M,\\
&T^{(k,0)}TM=T^kTM.
\end{aligned}$$

Remark $T^{(k,l)}TM$ 上有自然 rank-$(k+l)$ 的光滑向量丛结构.

定义 6.15 (张量场)

M 上张量丛的一个截面被称为是一个张量场. 由于其上定义了光滑结构, 可以谈论张量场的光滑性.

♣

Remark 在做自然的等同下, 共变 1-张量场等同于余向量场, 反变 1-张量场等同于向量场.

命题 6.11 (光滑张量场空间)

全体光滑张量场空间, 被分别记作 $\Gamma\left(T^kT^*M\right)$,$\Gamma\left(T^kTM\right)$,$\Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right)$. 它们是 $\mathbb{R}$ 上的无穷维线性空间, 且是环 $C^\infty(M)$ 上的模. 在任意光滑坐标 (x^i) 下, 光滑张量场有坐标表示

$$A=\begin{cases}A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_k}, & A\in\Gamma\left(T^kT^*M\right);\\ A^{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A\in\Gamma\left(T^kTM\right);\\ A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_l}, & A\in\Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right).\end{cases}$$

♠

Remark

1. $A_{i_1\cdots i_k}$,$A^{i_1\cdots i_k}$,$A^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}$ 被称为是分量函数;

2. 记光滑共变 k-余向量空间为

$$\mathscr{T}^k(M) := \Gamma\left(T^k T^* M\right)$$

命题 6.12 (张量场的光滑性判据)

设 M 是光滑（带边）流形,$A: M \to T^k T^* M$ 是粗截面, 那么以下几条等价

1. A 是光滑的;
2. 在每个光滑坐标卡下,A 的分量函数光滑;
3. M 上的每一个点都含于某个光滑坐标卡, 使得 A 在其上有光滑的分量函数.
4. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, 那么函数 $A(X_1, \cdots, X_k): M \to \mathbb{R}$,

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_k)(p) = A_p\left(X_1|_p, \cdots, X_k|_p\right)$$

光滑.

5. 任取定义在某个开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑向量场 $X_1, X_2, \cdots, X_k$,$A(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 在 U 上光滑.

Remark 对于混合张量场有类似的命题.

Proof A 光滑, 当且仅当在每个（任一点都有某个）光滑坐标卡下, A 的坐标表示光滑. 任取 M 的光滑坐标卡 $(U, (x^i))$, 它给出 $T^k T^* M$ 上的自然坐标. A 在其上的坐标表示为

$$p \mapsto \left(\left(A_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k}(p)\right), \left(x^i(p)\right)\right)$$

易见上面的函数光滑, 当且仅当 $A_{i_1 \cdots i_k}$ 光滑.
因此 1. 和 2. 等价,1. 和 3. 等价, 故 1.2.3. 等价.
设在某个坐标上

$$A = A_{i_1 \cdots i_k} \, \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}$$

$$X_j = X_j^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad j = 1, \cdots, k$$

那么

$$A(X_1, \cdots, X_k) = A_{i_1 \cdots i_k} X_1^{i_1} \cdots X_k^{i_k}$$

因此得 3. $\Longrightarrow$ 4.
对每一组 $i_1, \cdots, i_k$ 我们有

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = A_{i_1 \cdots i_k}$$

由此得 5. $\Longrightarrow$ 2.
对于开子集 $U \subseteq M$, 以及 $p \in U$, 设 ψ 是 p 的支撑在 U 的光滑 bump 函数, 定义 $\tilde{X}_j := \psi X$, 并在 $M \setminus U$ 上补充定义为 0, 得到 $\tilde{X}_j$ 是在 p 附近与 X_j 一致的光滑向量场.

4. 的条件给出 $A\left(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k\right)$ 在 p 处光滑. 故 4. $\Longrightarrow$ 5. 成立.
5. $\Longrightarrow$ 4. 只需要将全局向量场限制在任一点 p 的某个邻域上即可.

命题 6.13 (数乘与张量积的分量)

设 M 是光滑（带边）流形,$A\in\mathscr{T}^k(M)$, $B\in\mathscr{T}^l(M)$,$f\in C^\infty(M)$. 那么 fA 和 $A\otimes B$ 也是光滑张量场, 且在任意坐标上, 有分量函数的关系

$$(fA)_{i_1\cdots i_k}=fA_{i_1\cdots i_k}$$

$$(A\otimes B)_{i_1\cdots i_{k+l}}=A_{i_1\cdots i_k}B_{i_{k+1}\cdots B_{i_{k+l}}}$$

♠

Proof 若在某个坐标上

$$A=A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

$$B=B_{j_1\cdots j_l}\,\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}x^{j_l}$$

那么

$$fA=fA_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\cdots\,\mathrm{d}x^{i_k}$$

$$\begin{aligned}A\otimes B&=\left(A_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}x^{i_k}\right)\left(B_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}\,\mathrm{d}x^{i_{k+1}}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}x^{i_{k+l}}\right)\\&=A_{i_1\cdots i_k}B_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}x^{i_{k+l}}\end{aligned}$$

定义 6.16 (诱导)

设 A 是 M 上的光滑共变 k-张量, 它诱导出映射

$$\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

♣

Remark

1. 映射是 $C^\infty(M)$ 上的多线性映射, 即对于 $f,f'\in C^\infty(M)$, 和 $X_i,X_i'\in\mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}&A\left(X_1,\cdots,fX_i+f'X_i',\cdots,X_k\right)\\&=fA\left(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k\right)+f'A\left(X_1,\cdots,X_i',\cdots,X_k\right)\end{aligned}$$

Proof 固定其他分量, A 可视为 1-张量, 等同于光滑向量场, 而光滑余向量场具有 $C^\infty(M)$ 上的线性.

引理 6.1 (张量场的刻画引理)

一个映射

$$\mathscr{A}:\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$$

被某个光滑共变 k-张量诱导，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 $C^{\infty}(M)$ 上的多线性映射.

Proof 必要性在定义6.16的 Remark 中已经说明，接下来考虑充分性.

类似余向量场的刻画引理，依次说明局部性、逐点性，导出在每一点给出诱导的形式的良定义性，最后说明光滑性.

6.3.1 张量场的拉回

定义 6.17 (逐点拉回)

设 $F: M \to N$ 是光滑映射. 任取 $p \in M$ 和 k-张量 $\alpha \in T^k\left(T^*_{F(p)}N\right)$，定义 α 通过 F 在点 p 处的逐点拉回，为一个张量 $dF^*_p(\alpha) \in T^k\left(T^*_pM\right)$

$$dF^*_p(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha\left(dF_p(v_1), \cdots, dF_p(v_k)\right)$$

定义 6.18 (拉回)

若 A 是 N 上的共变 k-张量，定义 A 通过 F 的拉回，为 M 上的一个粗向量场 F^*A，按

$$(F^*A)_p := dF^*_p\left(A_{F(p)}\right)$$

它在 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in T_pM$ 上的作用为

$$(F^*A)_p(v_1, v_2, \cdots, v_k) = A_{F(p)}\left(dF_p(v_1), \cdots, dF_p(v_k)\right)$$

命题 6.14

设 $F: M \to N$ 和 $G: N \to P$ 是光滑映射,A, B 是 N 上的共变张量场，且 f 是定义在 N 上的实值函数，那么

1. $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$；
2. $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$；
3. $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$;
4. F^*B 是（连续的）张量场，并且若 B 光滑，则 F^*B 光滑;
5. $(G \circ F)^* B = F^*(G^*B)$;
6. $(\mathrm{Id}_N)^* B = B$.

Proof

1.
$$F^*(fB)_F(v_1,\cdots,v_k)=(fB)_{F(p)}(dF_p(v_1),\cdots,dF_p(v_k))$$
$$=(f\circ F)B_{F(p)}(dF_p(v_1),\cdots,dF_p(v_k))$$
$$=(f\circ F)F^*B(v_1,\cdots,v_k)$$

因此 $F^*(fB)=(f\circ F)F^*B$

2.
$$F^*(A\otimes B)(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+l})=F^*(A(v_1,\cdots,v_k)B(v_{k+1},\cdots,v_{k+l}))$$
$$=A(dF_p(v_1),\cdots dF_p(v_k)B(dF_p(v_{k+1}),\cdots,dF_p(v_{k+l}$$
$$=F^*A(v_1,\cdots,v_k)F^*B(v_{k+1},\cdots,v_{k+l})$$
$$=(F^*A\otimes F^*B)(v_1,\cdots,v_{k+l})$$

因此 $F^*(A\otimes B)=F^*A\otimes F^*B$.

3. 略
4. 选定 N 上的光滑坐标 (y^j), 设 $B=B_{j_1\cdots j_l}\,\mathrm{d}y^{j_1}\cdots\mathrm{d}y^{j_l}$ 那么
$$F^*B=F^*\left(B_{j_1\cdots j_l}\,\mathrm{d}y^{j_1}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}y^{j_l}\right)$$
$$=B_{j_1\cdots j_l}\circ F\,\mathrm{d}\left(y^{j_1}\circ F\right)\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}\left(y^{j_l}\circ F\right)$$
其中 $\mathrm{d}(y^{j_k}\circ F)$, $k=1,\cdots,l$ 是光滑的余向量场, 由6.13 F^*B 是光滑的.
5. 略
6. 略

推论 6.1 (拉回的坐标表示)

设 $F:M\to N$ 是光滑映射,B 是 N 上的共变 k-张量. 若 $p\in M$,(y^i) 是 N 的在 $F(p)$ 附近的光滑坐标, 那么 F^*B 有以下表示
$$F^*B\left(B_{i_1\cdots i_k}\,\mathrm{d}y^{i_1}\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}y^{i_k}\right)=(B_{i_1\cdots i_k}\circ F)\,\mathrm{d}\left(y^{i_1}\circ F\right)\otimes\cdots\otimes\,\mathrm{d}\left(y^{i_k}\circ F\right)$$
♡

Example 6.5 令 $M=\left\{(r,\theta):r>0,|\theta|<\frac{\pi}{2}\right\}$ 并且 $N=\{(x,y):x>0\}$, 令 $F:M\to\mathbb{R}^2$ 是光滑映射 $F(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 张量场 $A:=x^{-2}\,\mathrm{d}y\otimes\,\mathrm{d}y$ 通过 F 的拉回通过替换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 得到.
$$F^*A=(r\cos\theta)^{-2}d(r\sin\theta)\otimes d(r\sin\theta)$$
$$=(r\cos\theta)^{-2}(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)\otimes(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)$$
$$=r^{-2}\tan^2\theta dr\otimes dr+r^{-1}\tan\theta(d\theta\otimes dr+dr\otimes d\theta)+d\theta\otimes d\theta.$$

第 7 章　微分形式

7.1 交错张量代数

引理 7.1

设 α 是有限维线性空间 V 上的共变 k-张量，那么以下几条等价：

1. α 是交错的；
2. 若 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 线性相关，则 $\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_k) = 0$；
3. 若 k-向量组中存在相同的项，则 α 在其上取值为 0

$$\alpha(v_1, \cdots, w, \cdots, w, \cdots, v_k) = 0$$

Proof 1. $\Longrightarrow$ 2.，1. $\Longrightarrow$ 3. 都显然，接下来说明 3. $\Longrightarrow$ 1. 和 3. $\Longrightarrow$ 2.

设 3. 成立，那么任取 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$，

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) + \alpha(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) \end{aligned}$$

这就说明了交错性.

此外，任取线性相关的 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，不妨设 $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i$，则

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \cdots, v_k) &= \alpha\left(v_1, \cdots, \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a^i \alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_{k-1}, v_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

定义 7.1 (交错子)

定义交错子为映射 $\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$

$$\mathrm{Alt}\,\alpha := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)(\sigma\alpha)$$

Example 7.1 若 α 是 1-张量，那么 $\mathrm{Alt}\alpha = \alpha$. 若 β 是 2-张量，那么

$$(\mathrm{Alt}\beta)(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v))$$

若 γ 是 3-张量, 则

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Alt}\gamma)(v,w,x)=&\frac{1}{6}(\gamma(v,w,x)+\gamma(w,x,v)+\gamma(x,v,w))\\
&-\frac{1}{6}(\gamma(w,v,x)-\gamma(v,x,w)-\gamma(x,w,v))
\end{aligned}
$$

命题 7.1

设 α 是有限维线性空间上的交错张量, 那么

1. $\operatorname{Alt}\alpha$ 是交错的;
2. $\operatorname{Alt}\alpha=\alpha$ 当且仅当 α 是交错的;

7.1.1 初等交错张量

定义 7.2 (多重指标)

对于给定的正整数 k, 称有序的 k-元组 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 为一个长度为 k 的多重指标. 若 I 是这样一个多重指标,$\sigma\in S_k$, 令 I_σ 为

$$I_\sigma=\left(i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(k)}\right)$$

定义 7.3 (初等交错张量)

是 V 是 n-维线性空间,$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V^* 的一组基. 对于每个 $I=(i_1,\cdots,i_k)$, 使得 $1\leq i_1,i_2,\cdots,i_k\leq n$, 定义一个共变 k-张量 $\varepsilon^I:=\varepsilon^{i_1\cdots i_k}$

$$\varepsilon^I(v_1,\cdots,v_k)=\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}v_1^{i_1} & \ldots & v_k^{i_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1^{i_k} & \ldots & v_k^{i_k}\end{pmatrix}.$$

称为初等交错张量或初等 k-余向量.

定义 7.4

设 I,J 是长度为 k 的多重指标, 定义 δ^I_J

$$\delta^I_J=\det\begin{pmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_1}_{j_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_k}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_k}_{j_k}\end{pmatrix}$$

Remark

- $$\delta_J^I=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sigma & \text{若}I\text{和}J\text{均无重复指标, 并且}J=I_\sigma\text{对某个}\sigma\in S_k\text{成立}\\ 0 & \text{若}I\text{或}J\text{有重复指标, 或}J\text{不是}I\text{的一个置换}\end{cases}$$

Proof 当无重复指标, 且 J 是 I 的置换时

$$\begin{aligned}\delta_J^I&=\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_1}\left(E_{j_1}\right) & \cdots & \varepsilon^{i_1}\left(E_{j_k}\right)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varepsilon^{i_k}\left(E_{j_1}\right) & \cdots & \varepsilon^{i_k}\left(E_{j_k}\right)\end{pmatrix}\\ &=\varepsilon^I\left(E_{j_1},\cdots,E_{j_k}\right)\\ &=(\operatorname{sgn}\sigma)\left(\sigma\varepsilon^I\right)\left(E_{i_1},\cdots,E_{i_k}\right)\\ &=\operatorname{sgn}\sigma\end{aligned}$$

当有重复指标时显然 $\delta_J^I=0$ 当 J 不是 I 的置换时, 不妨设 j_k 不在 I 中, 那么 δ_J^I 的行列式的第 k 列为 0.

引理 7.2 (初等 k-余向量的性质)

设 (E_i) 是 V 的一组基,(ε^i) 是 V^* 的对偶基, 则

- 若 I 有重复指标, 则 $\varepsilon^I=0$;
- 若 $J=I_\sigma$ 对某个 $\sigma\in S_k$ 成立, 则 $\varepsilon^I=(\operatorname{sgn}\sigma)\,\varepsilon^J$;
- $\varepsilon^I\left(E_{j_1},\cdots,E_{j_k}\right)=\delta_J^I$

Proof 只证明第二条,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{I_\sigma}\left(v_1,\cdots,v_k\right)&=\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_{\sigma(1)}}\left(v_k\right)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varepsilon^{i_{\sigma(k)}}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_{\sigma(k)}}\left(v_k\right)\end{pmatrix}\\ &=\left(\operatorname{sgn}\sigma^{-1}\right)\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_1}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_1}\left(v_k\right)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ \varepsilon^{i_k}\left(v_1\right) & \cdots & \varepsilon^{i_k}\left(v_k\right)\end{pmatrix}\\ &=(\operatorname{sng}\sigma)\,\varepsilon^I\left(v_1,\cdots,v_k\right)\end{aligned}$$

定义 7.5 (递增指标)

称多重指标 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 是递增的, 若 $i_1<\cdots<i_k$

Remark 常用 $\sum'$ 表示对递增指标的求和, 例如

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I := \sum_{\{I: i_1 < \cdots < i_k\}} \alpha_I \varepsilon^I$$

命题 7.2 (交错张量空间的基)

设 V 是 n-维线性空间,(ε^i) 是 V^* 的一组基, 则对于每个正整数 $k \leq n$, 集合

$$\mathscr{E} = \left\{\varepsilon^I : I \text{是长度为 k 的递增指标}\right\}$$

构成 $\Lambda^k(V^*)$ 的一组基. 因此

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

若 $k > n$, 则 $\Lambda^k(V^*) = 0$

Proof 当 $k > n$ 时, 任意 k 个 V 中的向量都是线性相关的, 故由引理7.1,V 上的任意交错 k-张量都是零映射.

当 $k \leq n$ 时, 为了说明 $\mathscr{E}$ 张成了 $\Lambda^k(V^*)$, 令 $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$. 对于每个多重指标 $I = (i_1, \cdots, i_k)$, 定义

$$\alpha_I := \alpha\left(E_{i_1}, \cdots, E_{i_k}\right)$$

α 的交错性给出: 若 I 有重复指标, 则 $\alpha_I = 0$, 并且 $\alpha_J = (\operatorname{sgn} \sigma)\alpha_I$, 若 $J = I\sigma$, 因此任取多重指标 J, 我们有

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I\left(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k}\right) = \sum_I{}' \alpha_I \delta_J^I = \alpha_J = \alpha\left(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k}\right)$$

这表明 $\sum_I' \alpha_I \varepsilon^I = \alpha$, 因此 $\mathscr{E}$ 张成了 $\Lambda^k(V^*)$.

为了说明 $\mathscr{E}$ 中元素线性无关, 设

$$\sum_I{}' k_I \varepsilon^I = 0$$

对每个 $J = (j_1, \cdots, j_k)$, 上式两端作用在 $(E_{j_1}, \cdots, E_{j_k})$ 上, 即可得到 $k_J = 0$, 这就说明了线性无关性.

推论 7.1

对于 n 维线性空间 V, $\Lambda^n(V^*)$ 是由 $\varepsilon^{1\cdots n}$ 张成的 1-维线性空间, 并且该初等 k-余向量在 $(v_1, \cdots, v_n)$ 上作用的取值为系数矩阵的行列式.

命题 7.3

设 V 是 n-维线性空间, $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. 若 $T: V \to V$ 是线性映射,$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 V 上的向量, 那么

$$\omega(Tv_1, \cdots, Tv_n) = (\det T)\, \omega(v_1, \cdots, v_n)$$

Proof 设 (E_i) 是 V 的一组基 (ε_i) 是对偶基, 设 T 的表示矩阵为 (T_i^j), 令 $T_i := TE_i = T_i^j E_j$. 由引理7.1, $\omega = c\varepsilon^{1\cdots n}$ 对于某个实数 c 成立.

由所证式子两端的交错性, 不妨只考虑 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关的情况, 又由多线性不只考虑 $(v_1, \cdots, v_n) = (E_1, \cdots, E_n)$. 事实上,

$$\begin{aligned}
\omega(TE_1, \cdots, TE_n) &= c\varepsilon^{1\cdots n}(T_1, \cdots, T_n) \\
&= c \det\left(\varepsilon^j(T_j)\right) \\
&= c \det\left(T_i^j\right) = c \det T
\end{aligned}$$

另一方面

$$(\det T)\, \omega(E_1, \cdots, E_n) = (\det T)\, c\varepsilon^{1\cdots n}(E_1, \cdots, E_n) = c \det T$$

这就说明了命题.

7.1.2 楔积

定义 7.6 (楔积)

设 V 是有限维实线性空间. 给定 $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ 和 $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, 定义它们的楔积或外积, 为 $(k+l)$-余向量

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

上面这坨诡异的系数其实是为了方便下面的引理

引理 7.3

设 V 是 n 维线性空间, $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ 是 V^* 的一组基. 对于任意多重指标 $I = (i_1, \cdots, i_k)$ 和 $J = (j_1, \cdots, j_l)$,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$$

其中 $IJ := (i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)$.

Proof 由多线性, 只需要说明

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right) = \varepsilon^{IJ}\left(E_{p_1}, \cdots, E_{p_{k+l}}\right)$$

对每一列基向量 $(E_1,\cdots,E_{k+l})$ 成立, 接下来分 4 种情况讨论.

1. 当 $P=(p_1,\cdots,p_{k+l})$ 中有重复指标时, 两边根据定义均为 0.
2. 当 P 中含有均不在 I,J 中出现的指标时, 右侧由引理7.2可知为零, 此外左侧求和式的每一项, 要么包含 ε^I 作用的不是指标为 I 的基向量的置换, 要么 ε^J 不是, 故每一项均为零, 因此左侧式也为零.
3. 当 $P=IJ$, 且 P 中无重复项时, 右侧由引理7.2取 1. 左侧

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)\\
&=\frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}\left(\varepsilon^I\otimes\varepsilon^J\right)\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\ \sigma)\,\varepsilon^I\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_k}\right)\varepsilon^J\left(E_{p_{k+1}},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)
\end{aligned}$$

   当存在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的置换 $\tau\in S_k$, 和 $\{k+1,\cdots,k+l\}$ 的置换 $\eta\in S_l$, 使得 $\sigma=\tau\eta$ 时, 最下方和式的一项才会非零, 因此

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\tau\in S_k,\eta\in S_l}(\operatorname{sgn}\ \tau)(\operatorname{sgn}\ \eta)\,\varepsilon^I\left(E_{p_{\tau(1)}},\cdots,E_{p_{\tau(k)}}\right)\varepsilon^J\left(E_{p_{\tau(k+1)}},\cdots,E_{p_{\tau(k+l)}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k}(\operatorname{sgn}\ \tau)\,\varepsilon^I\left(E_{p_{\tau(1)}},\cdots,E_{p_{\tau(k)}}\right)\right)\left(\frac{1}{l!}\sum_{\eta\in S_l}(\operatorname{sgn}\ \eta)\,\varepsilon^J\left(E_{p_{\tau(k+1)},\cdots,E_{p_{\tau(k+l)}}}\right)\right)\\
&=\left(\operatorname{Alt}\ \varepsilon^I\right)\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_k}\right)\left(\operatorname{Alt}\ \varepsilon^J\right)\left(E_{p_{k+1}},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)\\
&=\varepsilon^I\left(E_{p_1},\cdots,E_{p_k}\right)\varepsilon^J\left(E_{p_{k+1}},\cdots,E_{p_{k+l}}\right)\\
&=1
\end{aligned}$$

4. 当 P 是 IJ 的置换, 且 P 无重复指标时, 通过一个置换化为第三种情况.

命题 7.4

设 $\omega,\omega',\eta,\eta'$ 和 ξ 是有限维线性空间 V 上的多重余向量, 则

1. **双线性**: 对于 $a,a'\in\mathbb{R}$,

$$(a\omega+a'\omega')\wedge\eta=a(\omega\wedge\eta)+a'(\omega'\wedge\eta)$$
$$\eta\wedge(a\omega+a'\omega')=a(\eta\wedge\omega)+a'(\eta\wedge\omega')$$

2. **结合律**:

$$\omega\wedge(\eta\wedge\xi)=(\omega\wedge\eta)\wedge\xi$$

3. **反交换律**: 对于 $\omega\in\Lambda^k(V^*)$,$\eta\in\Lambda^l(V^*)$

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\,\eta\wedge\omega.$$

4. 设 (ε^i) 是 V^* 的任意一组基,$I = (i_1, \cdots, i_k)$,则

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I.$$

5. 对于任意余向量 $\omega^1, \cdots, \omega^k$ 和向量 $v_1, \cdots, v_k$,

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k (v_1, \cdots, v_k) = \det \left(\omega^j (v_i)\right)$$

Proof 双线性由张量积的双线性及 Alt 的线性立即得到.

对于结合律,只需注意到

$$\left(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\right) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge \left(\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K\right)$$

再由双线性得到一般的情况.

对于反交换律,设 τ 是 IJ 到 JI 的置换,则

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I$$

再由双线性得到.

性质 4. 由引理7.3归纳得到.

对于性质 5., 考虑 $\omega^1, \ldots, \omega^k$ 是基 (ε^i) 的一部分的情况,该情况由 4. 和初等余向量的定义立即得到. 对于一般的情况,只需注意到所需等式两端的多线性,两边分别拆成若干 $\varepsilon^K (v_1, \ldots, v_k)$ 和 $\det \left(\varepsilon^{k_j} (v_i)\right)$ 的和,每一项两两相等.

定义 7.7 (可分解性)

称 k-余向量是可分解的,若存在余向量 $\omega^1, \cdots, \omega^k$,使得 $\eta = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$

Remark

- 对于 $k > 1$,存在不可分解的 k-余向量.
- 任意 k-余向量写作可分解余向量的线性组合.

命题 7.5 (楔积的泛性质)

楔积是唯一的具有结合律、双线性、反交换律且满足

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I$$

的 $\Lambda^k (V^*) \times \Lambda^l (V^*) \to \Lambda^{k+l} (V^*)$ 的映射.

Proof 任取 k-余向量和 l-余向量 ω, η,则 ω, η 均写作 ε^I 的线性组合. 将每个 ε^I 写作 $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$ 的形式,利用结合律、双线性、反交换律,易见 $\omega \wedge \eta$ 的唯一性.

定义 7.8 (外代数)

设 V 是 n-维线性空间, 定义线性空间 $\Lambda(V^*)$

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*)$$

在楔积下, $\Lambda(V^*)$ 构成反交换的分次代数, 称为 V 的外代数 (或 Grassman 代数).

Remark

- $\dim\, \Lambda(V^*) = 2^n$

7.1.3 内部乘法

定义 7.9

设 V 是有限维线性空间, 对每个 $v \in V$, 定义线性映射

$$i_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$$

称为通过 v 的内部乘法,

$$i_v\omega(w_1, \cdots, w_{k-1}) := \omega(v, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1})$$

Remark

- 约定当 ω 为零向量时,$i_v\omega := 0$

引理 7.4

设 V 是有限维线性空间,$v \in V$, 则

1. $i_v \circ i_v = 0$
2. 若 $\omega \in \Lambda^k(V^*)$,$\eta \in \Lambda^l(V^*)$, 则

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v\eta)$$

Proof 只证明第二条.

由于每个正 rank 的余向量都可以写作可分解余向量的线性组合, 因此只需考虑 ω 和 η 均可分解的情况即可. 该特殊情况的公式是下面的公式的直接结果: 对于 $\omega^1, \cdots, \omega^k$, 以下成立

$$i_v(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v)\, \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k$$

为此, 取 $v_1 = v$, 并任取 $v_2, \cdots, v_k$, 接下来证明

$$\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(v_1, \cdots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1)\left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(v_2, \cdots, v_k)$$

左侧取值为 $\det\left(\omega^i(v_j)\right)$, 右侧取值为 $\left(\omega^i(v_j)\right)$ 按第一行的展开式, 故二者相等.

7.2 流形上的微分形式

定义 7.10

设 M 是 n-维光滑流形, 回忆 T^kT^*M 是 M 上的共变 k-张量丛, 由全体交错张量的子集记作 Λ^kT^*M

$$\Lambda^kT^*M := \coprod_{p\in M} \Lambda^k\left(T_p^*M\right)$$

♣

Remark

1. Λ^kT^*M 是 T^kT^*M 的光滑子丛, 进而是 M 上的 rank-$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ 的光滑向量丛.

   Proof 在每个坐标上取 T^kT^*M 的坐标标架中交错的项, 它构成 λ^kT^*M 的一个局部光滑标架, 从而由子丛光滑性的局部标架判据,Λ^kT^*M 是光滑子丛.

定义 7.11 (微分形式)

Λ^kT^*M 的一个截面被称为是一个微分 k-形式, 或简称 k-形式. 即一个（连续）的张量场, 它在每一点处的取值均为一个交错张量. k-被称为是形式的次数. 即全体光滑 k-形式构成的向量空间为

$$\Omega^k(M) := \Gamma\left(\Lambda^kT^*M\right)$$

♣

Remark

- 可以逐点的定义两个微分形式的楔积: $(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$
- 定义 $\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$, 则 $\Omega^*(M)$ 构成一个反交换的分次代数.

命题 7.6 (基表示)

在每个光滑坐标卡上,k-形式 ω 写作

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}x^I$$

♠

Remark

- 视 ω_I 为 0-形式, 数乘无非是 0-形式的楔积.
- 每个 ω_I 都是连续函数, 且 ω 光滑当且仅当每个 ω_I 均光滑.
- 引理7.2翻译为

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta^I_J$$

- 分量 ω_I 由

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right)$$

给出

定义 7.12 (微分形式的拉回)

是 $F : M \to N$ 是光滑映射,ω 是 N 上的微分形式, 拉回 $F^*\omega$ 被定义为 ω 作为张量场通过 F 的拉回, 它是 M 上的一个微分形式:

$$(F^*\omega)_p (v_1, \cdots, v_k) = \omega_{F(p)} \left(\mathrm{d}F_p (v_1), \cdots, \mathrm{d}F_p (v_k) \right)$$

♣

引理 7.5 (拉回的性质)

设 $F : M \to N$ 是光滑映射, 则

1. $F^* : \Omega^k (N) \to \Omega^k (M)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性映射.
2. $F^* (\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$;
3. 在任意光滑坐标卡上

$$F^* \left(\sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k} \right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ F) \, \mathrm{d}\left(y^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(y^{i_k} \circ F\right)$$

♡

Proof

1. 由逐点拉回的线性立即得到;
2.

$$\begin{aligned}
&(F^* (\omega \wedge \eta))_p (v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}) \\
&= (\omega \wedge \eta)_{F(p)} \left(\mathrm{d}F_p (v_1), \cdots, \mathrm{d}F_p (v_k), \mathrm{d}F_p (v_{k+1}), \cdots, \mathrm{d}F_p (v_{k+l}) \right) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_k} \omega_{F(p)} \left(\mathrm{d}F_p \left(v_{\sigma(1)}\right), \cdots, \mathrm{d}F_p \left(v_{\sigma(k)}\right) \right) \eta_{F(p)} \left(\mathrm{d}F_p \left(v_{\sigma(k+1)}\right), \cdots, \mathrm{d}F_p \left(v_{\sigma(k+l)}\right) \right) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_k} (F^*\omega)_p \left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\right) (F^*\eta)_p \left(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}\right) \\
&= (F^*\omega \wedge F^*\eta)_p (v_1, \cdots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

3. 由结合律,

$$\sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k} = \sum_I{}' \left(\omega_I \, \mathrm{d}y^{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}$$

由性质 1.2. 和结合律归纳地得到

$$F^* \left(\sum_I{}' \omega_I \, \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}\right) = \sum_I{}' \left(F^* \omega_I \, \mathrm{d}y^{i_1}\right) \wedge \left(F^* \, \mathrm{d}y^{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(F^* \, \mathrm{d}y^{i_k}\right)$$

由 1-形式拉回的性质, 我们得到上式等于

$$\begin{aligned}
&\sum_I{}' \left(\left(\omega_I \circ F\right) \mathrm{d}\left(y^{i_1} \circ F\right)\right) \wedge \mathrm{d}\left(y^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(y^{i_k} \circ F\right) \\
&= \sum_I{}' \left(\omega_I \circ F\right) \mathrm{d}\left(y^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(y^{i_k} \circ F\right)
\end{aligned}$$

Example 7.2 设 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$,$\omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2-形式 $y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. 拉回映射 $F^*\omega$ 按以下方式计算

$$\begin{aligned}
F^*\left(y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\right) &= \left(y \circ f\right) \mathrm{d}\left(x \circ F\right) \wedge \mathrm{d}\left(z \circ F\right) + \left(x \circ F\right) \mathrm{d}\left(y \circ F\right) \wedge \mathrm{d}\left(z \circ F\right) \\
&= v \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\left(u^2 - v^2\right) + u \, \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}\left(u^2 - v^2\right) \\
&= v \, \mathrm{d}u \wedge \left(2u \, \mathrm{d}u - 2v \, \mathrm{d}v\right) + u \, \mathrm{d}v \wedge \left(2u \, \mathrm{d}u - 2v \, \mathrm{d}v\right) \\
&= 2uv \left(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u - \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v\right) - 2v^2 \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + 2u^2 \, \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u \\
&= -2\left(v^2 + u^2\right) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Example 7.3 令 $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 2-形式, 视极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 为单位映射关于不同坐标的坐标表示, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \mathrm{Id}^*\left(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right) \\
&= \mathrm{d}\left(r\cos\theta\right) \wedge \mathrm{d}\left(r\sin\theta\right) \\
&= \left(\cos\theta \, \mathrm{d}r - r\sin\theta \, \mathrm{d}\theta\right) \wedge \left(\sin\theta \, \mathrm{d}r + r\cos\theta \, \mathrm{d}\theta\right) \\
&= -r\sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r + r\cos^2\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= r \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

命题 7.7 (顶形式的拉回)

设 $F : M \to N$ 是 n-维（带边）流形之间的光滑映射. 设 (x^i) 和 (y^j) 分别是开子集 $U \subseteq M$ 和 $V \subseteq N$ 上的光滑坐标, 且 u 是 V 上的连续实值函数, 那么在 $U \cap F^{-1}(V)$ 上有以下成立

$$F^*\left(u \, \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n\right) = \left(u \circ F\right)\left(\det DF\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

其中 DF 表示 F 在这些坐标上的 Jacobi 矩阵.

Proof 由于 $\Lambda^n T^*M$ 在每一点处的纤维由 $\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ 张成, 因此只需要说明等式两端在 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ 上的取值相同. 一方面

$$F^*\left(u\,\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n\right)=(u\circ F)\,\mathrm{d}F^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^n$$

命题??给出

$$\mathrm{d}F^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}F^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=\det\left(\mathrm{d}F^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)=\det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right)$$

另一方面

$$\left(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=1$$

分别带入即可.

推论 7.2

设 $(U,(x^i))$ 和 $\left(\tilde{U},(\tilde{x}^j)\right)$ 是 M 上相交的光滑坐标卡, 则以下恒等式在 $U\cap\tilde{U}$ 上成立:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n=\det\left(\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

Proof 上面的命题中将 F 取成单位映射, 它关于这两个坐标的 Jacobi 就是 $\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}$

定义 7.13 (内部乘法)

内部乘法自然地推广到向量场和微分形式上, 取逐点的作用: 对于 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 和 $\omega\in\Omega^k(M)$, 定义一个 $(k-1)$-形式 $i_X\omega$

$$\left(i_X\omega\right)_p:=i_{X_p}\omega_p$$

命题 7.8

设 X 是 M 上的光滑向量场, 则

1. 若 ω 是光滑的微分形式, 则 $i_X\omega$ 是光滑的;
2. $i_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 因此对应与光滑的丛同态 $i_X:\lambda^kT^*M\to\Lambda^{k-1}T^*M$

Proof

1. 设 $\omega=\sum_I'\omega_I\,\mathrm{d}x^I$, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 设 $i_x\omega=\sum_J'\omega_J'\,\mathrm{d}x^J$, 则

$$\omega_J=\left(i_X\omega\right)\left(\mathrm{d}x^J\right)=X^i\omega^{(i,J)}=X^i\omega_{(i,J)}$$

其中 X^i 和 $\omega_{(i,J)}$ 均为光滑函数, 因此 $i_X\omega$ 是光滑的.

2. i_X 的 $C^\infty(M)$-线性由逐点内部乘法的线性, 以及 1. 得到.

7.3 外微分

定义 7.14 (欧氏空间上的外微分)

设 $\omega = \sum_J' \omega_J \, \mathrm{d}x^J$ 是开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{H}^n$) 上的光滑 k-形式. 定义 $\mathrm{d}\omega$ 为以下 $(k+1)$-形式

$$\mathrm{d}\left(\sum_J{}' \omega_J \, \mathrm{d}x^J\right) := \sum_J{}' \mathrm{d}\omega_J \wedge \mathrm{d}x^J$$

具体地

$$\mathrm{d}\left(\sum_J{}' \omega_J \, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge x^{j_k}\right) := \sum_J{}' \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}$$

♣

Remark

1. 当 ω 是 1-形式时,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\omega_j \, \mathrm{d}x^j\right) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i\right) \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j
\end{aligned}$$

此时 ω 是闭的, 当且仅当 $d\omega = 0$.

2. 当 f 是零形式时

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

命题 7.9 ($\mathbb{R}^n$ 上外微分的性质)

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上是线性的;
2. 若 ω 是光滑 k-形式,η 是光滑 l-形式, 它们定义在开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{H}^n$) 上, 则

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

3. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$;
4. d 与拉回交换: 若 U 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$ 上的开集, V 是 $\mathbb{R}^m$ 或 $\mathbb{H}^m$ 上的开集,

> $F:U\to V$ 是光滑映射,$\omega\in\Omega^k(V)$, 则
> $$F^*(\mathrm{d}\omega)=d(F^*\omega)$$

Proof

1. 线性由定义和切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的线性显然;
2. 由 d 和 $\wedge$ 的线性, 只需考虑 $\omega=u\,\mathrm{d}x^I$ 和 $\eta=v\,\mathrm{d}x^J$ 的情况. 需要先说明对于一般的多重指标 I (不要求递增), 有 $\mathrm{d}\left(u\,\mathrm{d}x^I\right)=\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}x^I$ 成立: 事实上, 设 J 是递增指标,$\sigma\in S_k$, 使得 $J=I_\sigma$, 则
$$\mathrm{d}\left(u\,\mathrm{d}x^I\right)=(\operatorname{sgn}\sigma)\,\mathrm{d}\left(u\,\mathrm{d}x^J\right)=(\operatorname{sgn}\sigma)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}x^J=\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}x^I$$
接下来,
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)&=\mathrm{d}\left(u\,\mathrm{d}x^I\wedge v\,\mathrm{d}x^J\right)\\&=\mathrm{d}(uv)\wedge\left(\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\right)\\&=(v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v)\wedge\left(\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\right)\\&=\left(\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}x^I\right)\wedge\left(v\,\mathrm{d}x^J\right)+(-1)^k\,u\mathrm{d}x^I\wedge\left(\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}x^J\right)\\&=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\,\omega\wedge\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$
3. 对于 $k=0$ 的情况, 我们有
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}u)&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j\right)\\&=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2u}{\partial x^j\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=0\end{aligned}$$
利用上面的结果和 2., 考虑一般的情况
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}&\left({\sum_J}'\,\mathrm{d}\omega_J\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}\right)\\&={\sum_J}'\,\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_J)\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}\\&+{\sum_J}'\sum_{i=1}^k(-1)^k\,\mathrm{d}\omega_J\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^{j_1}\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}=0\end{aligned}$$
4. 由线性, 只需要检查 $\omega=u\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$ 的情况, 此时, 左侧为
$$\begin{aligned}F^*(\mathrm{d}\omega)&=F^*\left(\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\&=\mathrm{d}(u\circ F)\wedge\mathrm{d}\left(x^{i_1}\circ F\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(x^{i_k}\circ F\right)\end{aligned}$$

□

利用这些性质将微分形式的定义移植到流形上去

定理 7.1 (流形上外微分的存在唯一性)

设 M 是光滑带边流形. 则对所有的 k 存在唯一的算子 $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$, 使得以下性质成立:

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上线性;
2. 若 $\omega\in\Omega^k(M)$, $\eta\in\Omega^l(M)$, 则
$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$
3. $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}\equiv 0$;
4. 对于 $f\in\Omega^0(M)=C^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分, 由 $\mathrm{d}f(X)=Xf$ 给出.

Proof 对于 M 上的任意一个光滑坐标卡 (U,φ), 在其上定义
$$\mathrm{d}\omega:=\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)$$
右侧式为上面定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的外微分在 φ 下的拉回. 需要说明此定义是良定义的, 为此, 考虑两个重叠的光滑坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) , 则 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是它们之间的过渡函数, 为 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{H}^n$) 上的开子集的微分同胚. 由命题7.9,
$$\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)=\mathrm{d}\left(\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)^*\varphi^{-1*}\omega\right)$$
又 $\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)^*=\psi^{-1^*}\varphi^*$ 因此
$$\psi^{-1*}\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)=\mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)$$
从而
$$\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)=\psi^*\mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right)$$
这就说明了良定义性. 再来说明这样定义的外微分满足性质 1.-4. 首先线性由 $\mathbb{R}^n$ 上 d 的线性和拉回的线性是显然的. 再来考虑 2,
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)&=\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}(\omega\wedge\eta)\right)\\
&=\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\wedge\varphi^{-1*}\eta\right)\\
&=\varphi^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\wedge\varphi^{-1*}\eta+(-1)^k\varphi^{-1*}\omega\wedge\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\eta\right)\right)\\
&=\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\wedge\varphi^*\varphi^{-1*}\eta+(-1)^k\varphi^*\varphi^{-1*}\omega\wedge\varphi^*\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\eta\right)\\
&=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

对于 3,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\circ(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}\left(\varphi^{*}\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\right) \\ &= \varphi^{*}\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\varphi^{*}\mathrm{d}\left(\varphi^{-1*}\omega\right)\right) \\ &= \varphi^{*}\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\varphi^{-1*}\omega\right) \equiv 0 \end{aligned}$$

对于 4.

$$\mathrm{d}f(X) = \varphi^{*}\mathrm{d}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(X) = \mathrm{d}\left(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\right)(X) = Xf$$

其中第二个等号后的 d 既可以表示外微分, 又可以表示函数微分, 从而可以通过 φ^{*} 拉回为函数的微分 $\mathrm{d}f$.

为了说明唯一性, 设 d 是任意满足上面四条性质的算子. 首先需要说明 $\mathrm{d}\omega$ 是被局部决定的: 若 ω_1 和 ω_2 是在开集 $U \subseteq M$ 上相等的微分形式, 任取 $p \in U$, 设 ψ 是 p 点的支撑在 U 的光滑 bump 函数, 令 $\eta = \omega_1 - \omega_2$, 则 $\psi\eta$ 通过补充 U 以外的定义为 0, 是恒为 0 的微分形式, 从而 $0 = \mathrm{d}\psi\eta = \psi\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\psi\wedge\eta$, 在 p 的附近, 我们有 $\psi \equiv 1$, 且 $d\psi \equiv 0$, 因此 $\mathrm{d}\omega_1|_p - \mathrm{d}\omega_2|_p = 0$.

现在任取 $\omega \in \Omega^k(M)$, 设 (U,φ) 是任意光滑坐标卡, 则 ω 在 U 上可以写作 $\sum_I' \omega_I\,\mathrm{d}x^I$, 任取 $p \in U$, 通过延拓 ω_I 和 x^I 得到新的微分形式 $\sum_I' \tilde{\omega}_I\,\mathrm{d}\tilde{x}^I$, 它在 p 的附近与 ω 相等. 上面的四条性质和前文的讨论表明, $\mathrm{d}\left(\sum_I' \tilde{\omega}_I\,\mathrm{d}\tilde{x}^I\right)$ 在 p 的附近由 ω_I 和 $\mathrm{d}x^I$ 唯一确定, 因此 ω 是被唯一决定了的. □

定义 7.15

若 $A = \bigoplus_k A^k$ 是分次代数, 线性映射 $T : A \to A$ 被称为是一个 m 次的映射, 若 $T\left(A^k\right) \subseteq A^{k+m}$. 它被称为是一个反导子, 若它满足

$$T(x,y) = (Tx)\,y + (-1)^k x\,(Ty), \quad x \in A^k, y \in A^l$$

♣

Remark 上面的定理由此可以表述为: 函数的微分可以唯一地延拓到 $\Omega^*(M)$ 上次数为 $+1$ 且平方为 0 的反导子.

命题 7.10 (内部乘法的反导子性)

设 M 是光滑流形, $X \in \mathfrak{X}(M)$. 内部乘法 $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ 是次数为 -1 且平方为 0 的反导子.

♠

Proof 次数为 -1 和平方为 0 是显然的, 接下来考虑反导子性. 由引理7.4得到反导子性. □

命题 7.11 (外微分与拉回的交换性)

设 $F: M \to N$ 是光滑映射, 对于每个 k, 拉回映射 $F^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 与 d 交换:

$$F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(F^*\omega), \quad \omega \in \Omega^k(N)$$

Proof 分别任取 M 和 N 的光滑坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ), 在 $U \cap F^{-1}(V)$ 上

$$\begin{aligned}
F^*(\mathrm{d}\omega) &= F^*\psi^* \mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right) \\
&= \varphi^* \circ \left(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)^* \mathrm{d}\left(\psi^{-1*}\omega\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\omega \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right) \\
&= \varphi^* \mathrm{d}\left(\varphi^{-1*} F^*\omega\right) \\
&= \mathrm{d}(F^*\omega)
\end{aligned}$$

□

定义 7.16

称光滑微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 是闭的, 若 $\mathrm{d}\omega = 0$. 称它是恰当的, 若存在 $(k-1)$ 形式 η, 使得 $\omega = \mathrm{d}\eta$.

第 8 章 de Rham 上同调

8.1 de Rham 上同调群

定义 8.1

$d:\Omega^p(M)\to\Omega^{p+1}(M)$ 是线性的, 核和像都是线性子空间, 定义

$$\mathcal{Z}^p(M)=\ker\left(d:\Delta O^p(M)\to\Omega^{p+1}(M)\right)=\{\text{closed p-forms on M}\}$$

$$\mathcal{B}^p(M)=\operatorname{Im}\left(d:\Omega^{p-1}(M)\to\Omega^p(M)\right)=\{\text{exact p-forms on M}\}$$

约定 $\Omega^p(M)$ 当 $p<0$ 或 $p>\neq\dim M$ 时为零.

♣

定义 8.2

定义 p 阶 de Rham 上同调群为商空间

$$H_{\mathrm{dR}}^p(M)=\frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

♣

Example 8.1 Poincare 引理相当于说

$$H_{\mathrm{dR}}^1(U)=0$$

对于任意的星型开集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 成立.

命题 8.1

任意光滑映射 $F:M\to N$ 的拉回映射 $F^*:\Omega^p(N)\to\Omega^p(M)$ 将 $\mathcal{Z}^p(N)$ 送到 $\mathcal{Z}^p(M)$, 将 $\mathcal{B}^p(N)$ 送到 $\mathcal{B}^p(M)$, 给出 $H_{\mathrm{dR}}^p(N)$ 到 $H_{\mathrm{dR}}^p(M)$ 的线性映射, 成为诱导上同调映射.

♠

Proof 由拉回和外微分的交换性易得.

□

推论 8.1

$M\mapsto H_{\mathrm{dR}}^p(M)$ 连同 $F\mapsto F^*$ 给出一个反变函子.

♡

推论 8.2

de Rham 上同调是微分同胚不变的.

♡

8.1.1 基本计算

命题 8.2

令 $\{M_j\}$ 是可数个 (带边) 光滑 n-流形, $M=\coprod_j M_j$. 则对于每个 p, 含入映射 $\iota_j : M_j \hookrightarrow$ 共同诱导出 $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 到 $\prod_j H^p_{\mathrm{dR}}(M_j)$ 的同构.

命题 8.3

若 M 是连通的 (带边) 流形, 则 $H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ 等于常值函数空间, 从而使 1 维的.

Proof $\mathcal{B}^0(M)=0$, $\mathcal{Z}^0(M)=\{f : \mathrm{d}f=0\}=\{f \text{ is constant}\}$

□

推论 8.3

0 维流形 M 的 $H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ 是一些 1-向量空间的直积, 每份对应一个点.

引理 8.1

任取光滑 (带边) 流形 M, 存在两个映射 $i_0^*, i_1^* : \Omega^*(M\times I)\to\Omega^*(M)$ 之间的同伦算子. 其中

$$i_t : M\to M\times I,\quad i_t(x)=(x,t)$$

命题 8.4

设 M,N 是带边流形, $F,G : M\to N$ 同伦的光滑映射. 则对于每个 p, 诱导映射 $F^*, G^* : H^p_{\mathrm{dR}}(M)\to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 相同.

Proof

$$H : M\times I\to N$$

是 F 到 G 的同伦, 则

$$F^*=(H\circ i_0)^*=i_0^*\circ H^*=i_1^*\circ H^*=(H\circ i_1)^*=G^*$$

□

定义 8.3 (同伦不变性)

设 M 和 N 是同伦等价的光滑 (带边) 流形, 则

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M)\simeq H^p_{\mathrm{dR}}(N)$$

对于每个 p 成立.

定义 8.4

定义 $\Phi : H^1_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,q), \mathbb{R})$，给定上同调类 $[\omega] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M)$，定义

$$\Phi[\omega] : \pi_1(M,q) \to \mathbb{R}, \quad \Phi[\omega][\gamma] = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是代表 $[\gamma]$ 的一个分段光滑曲线.

定义 8.5

设 M 是连通的光滑流形，对于每个 $q \in M$，$\Phi : H^1_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi(M,q), \mathbb{R})$ 是良定义的单射.

Remark 事实上是同构.

Proof 单射的部分相当于说若 ω 在任意基于 q 的回路上为零，则它是恰当的. 而恰当当且仅当任意回路上的积分为 0(不一定基于 q).

只需要对于基于 q' 任意的回路，将回路插入进 q' 到 q 的往返路径中，得到 q 的回路即可.

□

推论 8.4

若 M 单连通，且有有限基本群，则 $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = 0$.

Proof 不存在非平凡的有限群到 $\mathbb{R}$ 的群同态.

□

引理 8.2 (紧支的 Poincare 引理)

令 $n \geq p \geq 1$,ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上紧支的 p-形式. $p = n$ 另外假设 $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上紧支的 $(p-1)$-形式 η，使得 $\mathrm{d}\eta = \omega$

定义 8.6

记 $\Omega^p_c(M)$ 是 M 上紧支的光滑 p-形式空间. 则可以定义相应的紧支 de Rham 上同调群 $H^p_c(M)$.

定理 8.1

$$H^p_c(\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} 0 & 0 \leq p < n \\ \mathbb{R}, & p = n \end{cases}$$

Proof 对于 $0<p<n$ 的同调群，根据紧支的 Poincare 引理，闭紧支形式都是恰当紧支的.

对于 $p=0$ 的同调群，由于闭链只有常函数，而紧支的常函数只有0，故可得 $H_c^p(\mathbb{R}^n)\simeq 0$

对于 $p=n$ 的情况，定义映射

$$\Phi: H_c^n(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad [\omega]\mapsto\int_{\mathbb{R}^n}\omega$$

Stokes 定理给出了 I 的良定义性，紧支 Poincare 引理给出了 Φ 是单的.

为了说明 I 是满射，任取 $C\in\mathbb{R}$，我们证明存在光滑紧致的 n-形式，使得其在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分等于 C. 具体地，取支撑在 $\overline{B}(0,1)$ 的光滑 bump 函数 Φ，设

$$A=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n=\int_{\overline{B}(0,1)}\Phi\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

则

$$\frac{\Phi}{A}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^n$$

是所需的光滑紧支 n-形式.

$\square$

8.1.2 顶上同调

性质组合	$H^n(M;\mathbb{Z})$	$H^n(M;R)$ (R 是域, $R\neq\mathbb{Z}_2$)	$H^n(M;\mathbb{Z}_2)$
紧致且可定向	$\mathbb{Z}$	R	$\mathbb{Z}_2$
紧致且不可定向	0	0	$\mathbb{Z}_2$
非紧致且可定向	0	0	0
非紧致且不可定向	0	0	0

8.2 度理论

第三部分

黎曼流形

第 9 章 Riemann 度量

9.1 Riemann 流形

定义 9.1 (Riemann 度量和 Riemann 流形)

设 M 是一个光滑（带边）流形,M 上的一个 Riemann 度量是指, 在每一点处正定的 M 上的一个光滑对称共变 2-张量.

一个（带边）Riemann 流形是指一对 (M, g), 其中 M 是光滑（带边）流形,g 是 M 上的一个 Riemann 度量.

♣

Remark

1. Riemann 度量不是度量. 后续的“度量”都指 Riemann 度量, 作为代替, 我们用“距离函数”来称一个真正的度量.
2. 设 g 是 M 上的一个 Riemann 度量, 则 g_p 是 T_pM 上的一个内积. 因此经常用 $\langle v, w\rangle_p$ 表示 $\mathrm{g}_p(v, w)$, 其中 $v, w \in T_pM$.
3. 在每个光滑坐标 (x^i) 上,Riemann 度量有基表示
$$\mathrm{g} = \mathrm{g}_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$
由对称性, 也可写作对称积的形式
$$\mathrm{g} = \mathrm{g}_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

Example 9.1 (欧式度量). Riemann 度量最常见的一个例子是 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式度量 $\overline{\mathrm{g}}$,
$$\bar{g} := \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$
其中 δ_{ij} 是 Kronecker 积. 通常将张量 α 与自身的对称积写作 α^2, 那么欧式度量也可以写作
$$\bar{g} = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2$$
将它作用到向量 $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$ 上, 得到
$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij}v^iw^j = \sum_{i=1}^{n} v^iw^i = v \cdot w$$
换言之, 欧式度量在每一点处的值就是欧式内积.

Example 9.2 (乘积度量). 若 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是 Riemann 流形, 可以定义积流形 $M \times \tilde{M}$

上的度量 $\hat{g} := g \oplus \tilde{g}$, 称为是乘积度量:

$$\hat{g}\left(\left(v, \tilde{v}\right), \left(w, \tilde{w}\right)\right) := g\left(v, w\right) + \tilde{g}\left(\tilde{v}, \tilde{w}\right)$$

其中 $(v, \tilde{v})$,$(w, \tilde{w}) \in T_pM \oplus T_q\tilde{M} \simeq T_{(p,q)}\left(M \times \tilde{M}\right)$. 给定任意 M 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 和 $\tilde{M}$ 的局部坐标 $(y^1, \cdots, y^m)$, 得到 $M \times \tilde{M}$ 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m)$, 乘积度量的（作为二次型）局部表示可以写成对角矩阵

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}$$

命题 9.1 (Riemann 度量的存在性)

每个光滑（带边）流形都容许一个 Riemann 度量.

Idea 对流形按坐标单位分解, 取每个局部上欧式度量通过坐标映射的拉回度量, 它们共同拼成了流形上的一个整体的度量.

Proof 设 M 是光滑（带边）流形, 取 M 的一个坐标开覆盖 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. 在每个坐标开集上, 存在 Reimann 度量 $g_\alpha := \varphi_\alpha^* \overline{g}$, 它有坐标表示 $\delta_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j$, 其中 $\overline{g}$ 是 $\varphi_\alpha\left(U_\alpha\right)$ 上的欧式度量,. 取从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 M 的一个单位分解 $\{\psi_\alpha\}$, 定义

$$g := \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha$$

则 g 是 M 上的光滑 2-张量场, 又显然 g 是对称的, 故只需要说明正定性. 任取非零的 $v \in T_pM$, 则

$$g_p\left(v, v\right) = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha|_p\left(v, v\right)$$

是一个有限和, 又每个有定义的 $g_\alpha|_p\left(v, v\right)$ 均为正, 因此 $g\left(v, v\right) > 0$, 又显然 g_p 非负, 故而正定.

定义 9.2 (Riemann 流形上的几何)

- 切向量 $v \in T_pM$ 的长度或模长被定义为

$$|v|_g := \langle v, w\rangle_g^{\frac{1}{2}} = g_p\left(v, v\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 两个切向量 $v, w \in T_pM$ 之间的角度被定义为唯一的 $\theta \in [0, \pi]$, 满足

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle_g}{|v|_g\,|w|_g}$$

- 称切向量 $v, w \in T_pM$ 是正交的, 若 $\langle v, w\rangle_g = 0$.

9.1.1 度量的局部表示

命题 9.2 (坐标表示)

设 (M,g) 是（带边）-Riemann 流形. 若 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是一个开集 $U\subseteq M$ 上的任意光滑坐标卡, 则 g 可以在 U 上被局部地写作

$$g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

其中 $g_{ij},i,j=1,\cdots,n$ 是 n^2 个光滑函数, 由 $g_{ij}(p)=\left\langle\partial_i|_p,\partial_j|_p\right\rangle$ 给出.
以上张量场的分量函数构成一个非奇异的对称矩阵函数 (g_{ij}).

Proof

1. 由于坐标张量场 $\{\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j\}_{i,j}$ 构成 2-反变张量空间 $T^2(U)$ 的一组基, 因此存在光滑函数 $g_{ij},i,j=1,\cdots,n$, 使得 $g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$ 对 $g=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$ 两边作用在 $\langle\partial_i,\partial_j\rangle$ 上, 得到

$$\langle\partial_i,\partial_j\rangle=g_{ij}$$

由 g 的对称性,

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle=\langle\partial_j,\partial_i\rangle=g_{ji}$$

于是 g 可以写成对称积的形式

$$\begin{aligned}g&=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j\\&=\frac{1}{2}\left(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j+g_{ji}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j\right)\\&=\frac{1}{2}\left(g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j+g_{ij}\,\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i\right)\\&=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

2. 上面 $g_{ij}=g_{ji}$ 已经表明了 (g_{ij}) 是一个对称矩阵函数. 为了看出非奇异性, 考虑 $v=v^i\partial_i|_p$ 是 T_pM 上的一个向量, 使得 $g_{ij}(p)\,v^j=0$, 则 $\langle v,v\rangle=g_{ij}(p)\,v^iv^j=0$, 表明 $v=0$. 因此

$$(g_{ij})\,(v_1,\cdots,v_n)^{\mathsf{T}}=0\iff(v_1,\cdots,v_n)=0$$

(g_{ij}) 是非奇异的.

□

命题 9.3 (标架表示)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形，$E_1,\cdots,E_n$ 是开集 $U\subseteq M$ 上的 TM 的一个局部光滑标架，$(\varepsilon^1,\cdots,\varepsilon^n)$ 是相应的对偶余标架，则 g 在 U 上可以局部表示为

$$g=g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j$$

其中 $g_{ij}(p)=\left\langle E_i|_p\,,E_j|_p\right\rangle$，且矩阵值函数 (g_{ij}) 是对称且光滑的.

Proof 类似上一个命题的证明，不加赘述.

□

命题 9.4

设 g 是 M 上的一个 Riemann 度量,$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 是光滑向量场. 则 g 在 X,Y 上的作用给出一个光滑函数 $\langle X,Y\rangle$,

$$\langle X,Y\rangle(p)=\langle X_p,Y_p\rangle_g$$

设在某个局部标架和对偶余标架下，$g=g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j$，$X=X^iE_i,Y=Y^jE_j$，则函数 $\langle X,Y\rangle$ 局部表示为

$$\langle X,Y\rangle=g_{ij}X^iY^j$$

从而是光滑的.
特别地，我们有一个非负实值函数

$$|X|:=\langle X,X\rangle^{\frac{1}{2}}$$

它是处处连续，且在 $X\neq 0$ 的开集上是光滑的.

Proof 我们有

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle&=g_{kl}\varepsilon^k\varepsilon^l\left(X^iE_i,Y^jE_j\right)\\&=g_{kl}X^iY^j\varepsilon^k(E_i)\,\varepsilon^l(E_j)\\&=g_{ij}X^iY^j\end{aligned}$$

$$\left(\langle X,X\rangle^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{g_{ij}'X^iX^j+g_{ij}\left(X^i\right)'X^j+g_{ij}X^i\left(X^j\right)'}{2\sqrt{\langle X,X\rangle}}$$

当 $X\neq 0$ 时，$\langle X,X\rangle>0$，此时可以继续求导，任意阶的分子分母均光滑，且当 $\langle X,X\rangle\neq 0$ 时，分母也非零.

□

定义 9.3 (正交标价)

设 (M,g) 是 n-维（带边）Riemann 流形. 称 M 的定义在开子集 $U\subseteq M$ 上的一个局部标价 $(E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 是一个正交标价, 若对于每个 $p\in U$,$(E_1|_p,\cdots,E_n|_p)$ 构成 T_pM 的一个正交基, 或等价地说 $\langle E_i,E_j\rangle_g=\delta_{ij}$.

Remark

1. 此时度量 g 有局部坐标表示

$$g=\left(\varepsilon^1\right)^2+\cdots+\left(\varepsilon^n\right)^2$$

其中 $\left(\varepsilon^i\right)^2$ 表示对称积 $\varepsilon^i\varepsilon^i=\varepsilon^i\otimes\varepsilon^i$

命题 9.5 (正交化)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形,(X_j) 是 M 的定义在开子集 $U\subseteq M$ 上的一个光滑局部标价. 那么存在 U 上的光滑正交标价 (E_j), 使得

$$\operatorname{span}\left(E_1|_p,\cdots,E_j|_p\right)=\operatorname{span}\left(X_1|_p,\cdots,X_j|_p\right),\quad j=1,2,\cdots,n,\quad p\in U$$

Proof 对于每一点 $p\in U$, 对 $(X_j|_p)$ 应用 Gram-Schimidt 正交化, 可以通过

$$E_j:=\frac{X_j-\sum_{i=1}^{j-1}\langle X_j,E_i\rangle_g E_i}{\left|X_j-\sum_{i=1}^{j-1}\langle X_j,E_i\rangle_g E_i\right|_g}$$

归纳地得到粗张量场的 n 元组 $(E_1,\cdots,E_n)$. 对于每个 $j=1,\cdots,n$ 和 $p\in U$, 由于 $X_j|_p\notin\operatorname{span}\left(E_1|_p,\cdots,E_{j-1}|_p\right)$, 故分母在 U 上无处退化, 因此 (E_j) 是光滑的正交标架.

推论 9.1 (局部正交标价的存在性)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, 则对于每个 $p\in M$, 存在 p 附近的光滑局部正交标架.

定义 9.4 (单位切丛)

对于（带边）Riemann 流形 (M,g), 定义它的**单位切丛**, 为由以下单位向量组成的子集 $UTM\subseteq TM$:

$$UTM:=\left\{(p,v)\in TM:|v|_g=1\right\}$$

命题 9.6

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形, 则它的单位切丛 UTM 是一个光滑的, 真嵌入到 TM 的余维数为 1 的带边子流形, 使得 $\partial(UTM)=\pi^{-1}(\partial M)$（其中 $\pi:UTM\to M$ 是典范投影）. 单位是连通的, 当且仅当 M 是连通的（当 $n>1$）; 并且单位切

丛是紧的, 当且仅当 M 是紧的.

9.1.2 拉回度量

定义 9.5

设 M, N 是光滑（带边）流形,g 是 N 上的一个 Riemann 度量,$F: M \to N$ 是光滑映射. 则拉回 F^*g 是 M 上的一个光滑 2-张量场. 此外若它是正定的, 则为 M 上的一个度量, 称为是由 F 决定的拉回度量.

命题 9.7 (拉回度量判据)

设 $F: M \to N$ 是一个光滑映射, g 是 N 上的一个 Riemann 度量. 那么 F^*g 是 M 上的一个 Riemann 度量当且仅当 F 是一个光滑浸入.

Proof 只需要考察正定性. 任取 $v \in T_pM$, $(F^*g)_p(v, v) = 0$ 当且仅当 $g_{F(p)}(F_{*,p}v, F_{*,p}v) = 0$, 当且仅当 $F_{*,p}v = 0$, 因此 F^*g 正定当且仅当 $F_{*,p}$ 是单射对于每一点 $p \in M$ 成立, 即 F 是 M 上的光滑浸入.

Example 9.3 考虑光滑映射 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

是一个常态、单的光滑浸入, 因此是一个嵌入. 它的像被称为是螺旋面. 拉回度量为

$$\begin{aligned}
F^*\overline{g} &= d(u\cos v)^2 + d(u\sin v)^2 + d(v)^2 \\
&= (\cos v du - u\sin v dv)^2 + (\sin v du + u\cos v dv)^2 + dv^2 \\
&= \cos^2 v du^2 - 2u\sin v\cos v du dv + u^2\sin^2 v dv^2 \\
&+ \sin^2 v du^2 + 2u\sin v\cos v du dv + u^2\cos^2 v dv^2 + dv^2 \\
&= du^2 + (u^2+1)dv^2.
\end{aligned}$$

Remark 当 u 为是实值函数时, 约定记号 $\mathrm{d}u^2$ 表示对称积 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u$.

定义 9.6 (等距浸入、嵌入)

设 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, > ld\right)$ 是两个（带边）Riemann 流形. 一个满足 $F^*\tilde{g} = g$ 的光滑浸入或嵌入 $F: M \to \tilde{M}$, 分别被称为是一个 等距浸入或 等距嵌入.

定义 9.7 (等距同构)

- 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 Riemann 流形. 称光滑映射 $F:M\to N$ 是一个等距同构, 若它是一个微分同胚, 并且满足 $F^*\tilde{g}=g$.
- 更一般地, 称 F 是一个局部等距同构, 若对于每个 $p\in M$, 都存在 p 的邻域 U, 使得 $F|_U$ 是 U 到 $\tilde{M}$ 上一个开集的等距同构; 等价地说,F 是满足 $F^*\tilde{g}=g$ 的局部微分同胚.
- 称 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是等距同构的, 若存在 Riemann 流形之间的等距同构.
- 称 (M,g) 局部等距同构于 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$, 若 M 的每一点上都有等距同构于 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 上一个开集的邻域.

♣

定义 9.8 (平坦性)

称 Riemann n-流形 (M,g) 是平坦的, 且 g 是平坦度量, 若 (M,g) 局部等距同构于 $(\mathbb{R}^n,\bar{g})$

♣

Remark

1. 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是等距同构的 Riemann 流形, 那么 g 是平坦的当且仅当 $\tilde{g}$ 亦然.

   Proof 由对称性, 只需证明一边. 任取 $q\in\tilde{M}$, 设 F 是 (M,g) 到 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的等距同构, 那么存在 $p\in M$ 使得 $F(p)=q$. 若 (M,g) 是平坦的, 那么存在 p 的邻域 U, 和等距同构 φ, 使得 $\varphi:(U,g|_U)\simeq(\mathbb{R}^n,\bar{g})$. 又注意到 $F^{-1}|_{F(U)}:\left(F(U),\tilde{g}|_{F(U)}\right)\simeq(U,g|_U)$, 因此 $\varphi\circ F^{-1}|_{F(U)}:\left(F(U),\tilde{g}|_{F(U)}\right)\simeq(\mathbb{R}^n,\bar{g})$. 其中 $F(U)$ 是 p 的开邻域, 因此 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是平坦的.

定义 9.9

对于 Riemann 流形 (M,g), 以下等价

1. g 是平坦的;
2. M 上的每一点都含于某个坐标开集上, 在其上 g 有坐标表示 $g=\delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$;
3. M 上的每一点都含于某个坐标开集上, 使得其上的坐标标架是正交的;

♣

9.1.3 法丛

定义 9.10

设 (M,g) 是 n -维（带边）Riemann 流形,$S \subseteq M$ 是 k-维 Riemann 子流形.

- 对于每个 $p \in S$, 称 $v \in T_pM$ 是 S 的一个法向, 若 v 通过内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ 与 T_pS 中的每个向量垂直.
- S 在 p 处的法空间, 是指由全体 p 的法向向量组成的子空间 $N_pS \subseteq T_pM$.
- S 的法丛是指 S 在所有点的法空间的无交并 $NS \subseteq TM$.
- 投影映射 $\pi_{NS} : NS \hookrightarrow S$ 被定义为 $\pi : TM \to M$ 在 NS 上的限制.

♣

命题 9.8 (子流形的法丛)

令 (M,g) 是（带边）Riemann n-流形. 对于任意 k-维浸入子流形 $S \subseteq M$, 法丛 NS 是 $TM|_S$ 的光滑 rank-$(n-k)$ 子流形. 对于每个 $p \in S$, 存在 p 的邻域上的 NS 的关于 g 的正交标架.

♠

9.2 Riemann 距离函数

定义 9.11 (曲线长度)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形. 若 $\gamma : [a,b] \to M$ 是逐段光滑曲线, 则 γ 的长度为

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g \, \mathrm{d}t$$

♣

命题 9.9 (等距同构不变性)

曲线的长度在 Riemann 流形的等距同构下不变. 更确切地说, 设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是两个 Riemann(带边) 流形,$F : M \to \tilde{M}$ 是局部等距同构. 则 $L_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = L_g(\gamma)$ 对每个 M 上的逐段光滑曲线 γ 成立.

♠

Proof 由 $[a,b]$ 的紧性, 它可以分为有限个充分小的区间, 使得曲线的在区间上的像包

含在某个等距同构的开邻域上，于是

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{g}}(F\circ\gamma) &= \int_a^b \left(\langle F_*\gamma'(t), F_*\gamma'(t)\rangle_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle_{F^*\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle_{g}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= L_g(\gamma)
\end{aligned}
$$

命题 9.10 (长度的参数无关性)

设 (M,g) 是（带边）Riemann 流形,$\gamma:[a,b]\to M$ 是逐段光滑曲线. 若 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的重参数化, 那么 $L_g(\tilde{\gamma}) = L_g(\gamma)$.

Proof

1. 首先设 γ 光滑,$\varphi:[c,d]\to[a,b]$ 是微分同胚使得 $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$, 并且 $\varphi'>0$. 我们有

$$
\begin{aligned}
L_g(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d |\tilde{\gamma}'(t)|_g \,\mathrm{d}t = \int_c^d \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma\circ\varphi)(t)\right|_g \mathrm{d}t \\
&= \int_c^d |\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))|_g \,\mathrm{d}t = \int_c^d |\gamma'(\varphi(t))|_t\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b |\gamma'(s)|_g \,\mathrm{d}s \\
&= L_g(\gamma)
\end{aligned}
$$

2. 当 $\varphi'<0$ 时, 积分方向调换的符号改变和 $\varphi'(t)$ 移出绝对值的符号改变相抵消, 结果不变.
3. 若 γ 逐段光滑, 只需在每一段上重复上述过程后相加即可.

以下设 $\partial M=\varnothing$

定义 9.12 (Riemann 距离)

设 (M,g) 是连通的 Riemann 流形. 对于每个 $p,q\in M$, 定义 p 到 q 的（Riemann）距离为全体 $L_g(\gamma)$ 的下确界, 其中 γ 是 p 到 q 的逐段光滑曲线. 记 p 到 q 的距离为 $d_g(p,q)$.

命题 9.11 (等距同构不变)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是两个连通的 Riemann 流形, $F:M\to\tilde{M}$ 是 Riemann 等距同构. 则对于所有的 $p,q\in M$, $d_{\tilde{g}}(F(p),F(q)) = d_g(p,q)$

Proof 注意到每个连接 p,q 的逐段光滑曲线都给出长度相同的连接 $F(p)$ 与 $F(q)$ 的逐段光滑曲线，因此由定义

$$d_{\tilde{g}}(F(p),F(q)) \leq d_g(p,q)$$

相同的讨论应用与 $F^{-1}:\tilde{M}\to M$，得到另一个方向的不等式.

引理 9.1

设 g 是开子集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的一个 Riemann 度量. 给定紧子集 $K\subseteq U$，存在正常数 c,C，使得对于所有的 $x\in K$ 和 $v\in T_x\mathbb{R}^n$，

$$c|v|_{\bar{g}} \leq |v|_g \leq C|v|_{\bar{g}}$$

♡

Idea 范数的齐次性保证了，范数可以被一个包含原点的简单闭合曲面所决定. 据此，考察 $|v|_{\bar{g}}=1$ 的点构成的闭合曲面，它在里面可以装下一个以原点为中心的小球，从外面被一个以原点为中心的大球包住.

Proof 令 $L\subseteq T\mathbb{R}^n$ 为

$$L:=\left\{(x,v)\in TR^n : x\in K, |v|_{\bar{g}}=1\right\}$$

将 $T\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 等同,L 无非是 $K\times\mathbb{S}^{n-1}$，从而是紧集. 因为模长 $|v|_g$ 是 L 上正定的连续函数，因此存在 c,C，使得 $c\leq|v|_g\leq C$ 对于任意 $(x,v)\in L$ 成立. 若 $x\in K$，且 v 是非零向量，那么令 $\lambda=|v|_{\bar{g}}$，则 $(x,\lambda^{-1}v)\in L$，由范数的齐次性

$$|v|_g=\lambda\left|\lambda^{-1}v\right|_g\leq\lambda C=C|v|_{\bar{g}}$$

类似地有 $|v|_g\geq c|v|_{\bar{g}}$. 当 $v=0$ 时不等式显然成立. 综上命题得证.

定理 9.1 (Riemann 流形作为度量空间)

设 (M,g) 是连通的 Riemann 流形. 在 Riemann 距离函数下,M 是一个度量空间，且它的度量拓扑与原本的拓扑相同.

♡

Remark 由此，可以在连通 Riemann 流形上谈论一切度量空间的性质.

Idea

- 非负性和三角不等式不难说明，对于正定性，利用引理9.1在正则坐标球上将连接 p,q 的曲线的 Riemann 距离与坐标欧氏距离相比较，给出下界，由此说明：p,q 因为隔了一段欧氏距离，所以隔了一段 Riemann 距离，从而说明正定性.
- 说明度量拓扑开集的每一点都含于某个坐标球里：在 p 附近的坐标球里，利用度量开集的性质取度量半径充分小的度量球，利用9.1，取欧式直线段（长度是 Riemann 距离的上界）说明它包在坐标球里.

- 坐标开球中的点都含于某个 Riemann 距离球：坐标球的中心点与坐标球外的点隔了一段固定的 Riemann 距离，因此 Riemann 意义下与中心点近的点，一定在坐标开球里.

推论 9.2 (可度量性)

每个光滑（带边）流形都是可度量的.

Idea

- 连通的流形可度量9.1. 对于不连通的流形，在两两连通分支之间建立长度为 1 的“桥”，这样就得到了整体的度量.
- 若要考察拓扑，只需要在每一点附近取（充分小的）连通的（度量或坐标）开球.

9.3 切-余切同构

定义 9.13 (度量诱导的丛同构)

设 (M, g) 是（带边）Riemann 流形. 按以下方式定义 $\hat{g} : TM \to T^*M$：
对于每个 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$，令 $\hat{g}(v) \in T_p^*M$

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w), \quad w \in T_pM^{a}$$

则 $\hat{g}$ 是一个丛同构.

[a] 通过度量配对的方式，将向量视为余向量

Idea 由于我们拿到手的就是一个逐点的定义，因此利用 $C^\infty(M)$-线性的刻画引理来说明是最方便的.

Proof 考虑 $\hat{g}$ 在向量场上的作用:

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

因为对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，关于 Y 的函数 $\hat{g}(X)(\cdot)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的，由张量场的刻画引理（6.1），$\hat{g}(X)$ 是光滑的余向量场. 又 $\hat{g}(X)$ 视为 X 的函数是 $C^\infty(M)$-线性的，故由丛同态的刻画引理，$\hat{g}$ 定义出光滑的丛同态.

若 $\hat{g}(v) = 0$ 对某个 $v \in T_pM$ 成立，则

$$0 = \hat{g}(v, v) = \langle v, v \rangle_g$$

正定性立即给出 $v = 0$，这表明 g 在每一点出都给出线性空间的单射，维数关系又表明这是一个双射，进而给出丛同构.

命题 9.12 (矩阵表示)

在任意光滑坐标 (x^i) 上, 设 $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$. 若 X, Y 是光滑向量场, 我们有

$$\hat{g}(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$$

这表明余向量场 $\hat{g}(X)$ 有坐标表示

$$\hat{g}(X) = g_{ij}X^i\,\mathrm{d}x^j$$

换言之, $\hat{g}$ 作为丛同态的关于 TM 和 T^*M 坐标标架的矩阵表示, 与 g 本身的矩阵相同[a].

[a] 将 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 写成行向量 $(X^1, \cdots, X^n)$, 则右指标列标固定, $\hat{g}(X) = (X^1, \cdots, X^n)(g_{ij})$ 的第 j 列就是 $g_{ij}X^i$

Proof 利用

$$Y^j = \mathrm{d}x^j(Y)$$

□

定义 9.14

通常记向量场 $\hat{g}(X)$ 的分量, 按

$$\hat{g}(X) = X_j\,\mathrm{d}x^j, \quad X_j = g_{ij}X^i \text{[a]}$$

可以说 $\hat{g}(X)$ 是通过 X 降低指标得到的. 经常记 $\hat{g}(X)$ 为 $X^\flat$.

[a] 对于欧式度量, $X_j = X^j$, 相应的降低指标无非就是把列向量写成行向量

Remark $\flat$ 在音乐中表示降调.

定义 9.15

$\hat{g}^{-1} : T_p^*M \to T_pM$ 的矩阵是矩阵 (g_{ij}) 的逆, 记作 (g^{ij}), 也是对称矩阵.

对于余向量场 $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, 向量场 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 有坐标表示

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \omega^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega^i = g^{ij}\omega_j \text{[a]}$$

可以说 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 是通过 ω 提升指标得到的, 经常记 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 为 $\omega^\sharp$

[a] 把 ω 写成列向量 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 则左指标行标固定, $\hat{g}^{-1}(\omega) = (g^{ij})(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 的第 i 行就是 $\omega^i = g^{ij}\omega_j$

Remark 符号 $\flat$ 和 $\sharp$ 是一对互逆同构, 称为是音乐同构.

定义 9.16 (梯度)

对于 Reimann 流形 (M,g) 上的光滑函数 f，定义 f 的梯度为一个向量场

$$\operatorname{grad} f := (\mathrm{d}f)^{\sharp} = \hat{g}^{-1}(\mathrm{d}f)$$

♣

Remark

- 对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$，
$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle_g = \hat{g}(\operatorname{grad} f)(X) = \mathrm{d}f(X) = Xf$$
即
$$\langle \operatorname{grad} f, \cdot\rangle_g = \mathrm{d}f$$
- $\operatorname{grad} f$ 有坐标表示
$$\operatorname{grad} f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$
特别地，在欧式度量下
$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

9.4 张量的内积

定义 9.17 (余向量的内积)

设 g 是 M 上的 Riemann 度量，$x \in M$，定义 T_X^*M 上的内积为

$$\langle \omega, \eta\rangle_g := \langle \omega^{\sharp}, \eta^{\sharp}\rangle_g$$

♣

Remark

1. 利用 $g_{kl}g^{ki} = g_{lk}g^{ki} = \delta_l^i$，得到
$$\begin{aligned}\langle \omega, \eta\rangle &= g_{kl}\left(g^{ki}\omega_i\right)\left(g^{lj}n\eta_j\right)\\ &= \delta_l^i g^{lj}\omega_i\eta_j\\ &= g^{ij}\omega_i\eta_j\end{aligned}$$ [1]
2. 利用升降指标的记号，可以写成
$$\langle \omega, \eta\rangle = \omega_i\eta^i = \omega^j\eta_j$$

命题 9.13

设 (M,g) 是 (带边)(伪)Riemann 流形, 令 (E_i) 是 M 的一个局部标架, (ε^i) 是对偶的余标架, 则以下等价

1. (E_i) 正交.
2. (ε^i) 正交.
3. $(\varepsilon^i)^\sharp = E_i, \forall i$.

Proof

$$\begin{aligned}\left\langle \varepsilon^i, \varepsilon^j \right\rangle &= \left\langle (\varepsilon^i)^\sharp, (\varepsilon^j)^\sharp \right\rangle \\ &= g^{ij}\end{aligned}$$

而 (E_i) 正交, 当且仅当 $g_{ij} = \delta_i^j$, 当且仅当 $g^{ij} = \delta_j^i$, 当且仅当 (ε^i) 正交.

$$(\varepsilon^i)^\sharp = g^{kj}\omega_j E_k = g^{ki} E_i$$

故

$$(\varepsilon^i)^\sharp = E_i, \forall i \iff g^{ki} = \delta_k^i, \forall k, i \iff (E_i)\ \text{正交}$$

□

定义 9.18 (光滑纤维度量)

设 $E \to M$ 是一个光滑向量丛. E **上的一个光滑纤维度量**, 是指在每个纤维 E_p 上的内积, 且是光滑变化地, 即使得对于任意的 E 的 (局部) 光滑向量场 σ, τ,$\langle \sigma, \tau \rangle$ 是光滑函数.

命题 9.14 (张量的内积)

设 (M,g) 是 n 维 (带边)Riemann 流形. 则存在唯一的定义在每个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 的光滑纤维度量, 使得若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+l}$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_{k+l}$ 是合适的向量场或余向量场, 都有

$$\langle \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k+l}, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_{k+l} \rangle = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \cdot \cdots \cdot \langle \alpha_{k+l}, \beta_{k+l} \rangle$$

在此内积下, 若 $(E_1, \cdots, E_n)$ 是 TM 的一个局部正交标架, $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ 是对应的对偶余标架, 则形如 $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l}$ 构成 $T^{(k,l)}(T_pM)$ 的一个正交标架. 并且在任意一组标架 (不必正交) 下, 纤维度量满足

$$\langle F, G \rangle = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} F^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_l} G^{r_1, \cdots, r_k}_{s_1, \cdots, s_l}$$

若 F, G 均为协变张量, 则写作

$$\langle F, G\rangle = F_{j_1,\cdots,j_l} G^{j_1,\cdots,j_l}$$

$G^{j^1,\cdots,j^l}$ 表为提升指标:

$$G^{j_1,\cdots,j_l} = g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_l s_l} G_{s_1,\cdots,s_l}$$

9.5 构造 Riemann 流形的方法

9.5.1 Riemann 子流形

定义 9.19 (诱导度量)

设 (M, g) 是一个 Riemann 流形, 每个子流形 $S \subseteq M$(带边、浸入、嵌入) 上都继承了自然的拉回度量 $\iota^* g$, 其中 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是含入映射. 此拉回度量也称为是 S 上的诱导度量. 具体地, 对于 $v, w \in T_p S$

$$(\iota^* g)(v, w) = g\left(\mathrm{d}\iota_p(v), d\iota_p(w)\right) = g(v, w)$$

Remark

1. 将 $T_p S$ 与它在 $\mathrm{d}\iota_p$, 位于 $T_p M$ 中的像等同, 则 $(\iota^* g)(v, w) = g(v, w), v, w \in T_p S$, 因此 $(\iota^* g)$ 无非就是 g 与 S 相切的向量上的限制.

定义 9.20 (Riemann 子流形)

$(M, g), S$ 同前. 称 $(S, \iota^* g)$ 为 M 的 Riemann(带边) 子流形.

Example 9.4 $\mathbb{S}^n$ 上的诱导度量 $\mathring{g} := \iota^* \overline{g}$ 被称为是球上的圆度量, 其中 $\iota : \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Example 9.5 (图像坐标系上的诱导度量).

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集,$S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 的图像. 映射 $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$,$X\left(u^1, \cdots, u^n\right) = \left(u^1, \cdots, u^n, f(u)\right)$ 是 S 的光滑全局参数表示. X 上的诱导度量由以下给出

$$X^* \overline{g} = X^* \left(\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^{n+1}\right)^2\right) = \left(\mathrm{d}u^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}u^n\right)^2 + \mathrm{d}f^2$$

Example 9.6 (旋转曲面上的诱导度量).

设 C 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$ 的 1-维嵌入子流形,S_C 是由 C 生成的旋转曲面. 为了计算 S_C 上的诱导度量, 选择 C 的光滑局部参数表示 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$. 映射 $X(t, \theta) := (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t))$ 给出 S_C 的光滑局部参数表示, 设 (t, θ) 限制在平

面的充分小的开集上. 可以计算

$$\begin{aligned} X^*\overline{g} &= \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\cos\theta\right)^2 + \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\sin\theta\right)^2 + \mathrm{d}\left(b\left(t\right)\right)^2 \\ &= \left(a'\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\quad + \left(a'\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t\right)^2 + \left(b'\left(t\right)\ \mathrm{d}t\right)^2 \\ &= \left(a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2\right)\ \mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2 \end{aligned}$$

特别地, 若 γ 是单位速度曲线（以时间为参数的速度为 1 的曲线的）, 即 $\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2 = a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2 = 1$, 则有最简单的形式 $\mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2$

定义 9.21

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 m-维光滑 Riemann（带边）流形, $M \subseteq \tilde{M}$ 是 n-为光滑（带边）子流形, $\tilde{M}$ 的在一个开子集 $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ 上的一个局部标架 $(E_1, \cdots, E_n)$ 被称为是与 M 适配的, 若前 n 个向量场 $(E_1, \cdots, E_n)$ 与 M 相切. ♣

命题 9.15

令 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是一个 Riemann 流形（无边）, $M \subseteq \tilde{M}$ 是（带边）嵌入子流形[a]. 给定 $p \in M$, 存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的邻域 $\tilde{U}$, 和一个 $\tilde{M}$ 在 $\tilde{U}$ 上的光滑正交标架, 与 M 适配.

[a]这里要求嵌入子流形, 主要是为了利用切片判据, 将切空间做“光滑的分离”, 以确保正交化的施行不会让向量跑到空间外面去. 由于标架的适配性是标架在局部上的行为, 对于 M 的开子集 U, U 上与 M 适配和与 U 适配是一回事. 因此利用浸入子流形的局部嵌入性, 可以将条件放宽为浸入子流形. ♠

Proof 由 M 是嵌入子流形, 任给 $p \in M$, 存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的坐标卡 $(U, (x^1, \cdots, x^n))$, 使得 $U \cap M$ 是 U 的一个 k-切片, 通过坐标的平移, 可以设 $U \cap M$ 上点的坐标为

$$(x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0)$$

U 上的前 k 个坐标向量场 $x^1, \cdots, x^k$ 与 M 相切, 对 $x^1, \cdots, x^n$ 施行 Schmidt 正交化, 得到 $(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$, 则 $\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^k$ 仍与 M 相切, 因此 $(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$ 构成一个 $\tilde{M}$ 在 U 上的与 M 适配的光滑正交标架.

□

定义 9.22 (法空间)

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是一个黎曼流形, $M \subseteq \tilde{M}$ 是 $\tilde{M}$ 的光滑（带边）子流形. 给定 $p \in M$ 和向量 $v \in T_p\tilde{M}$.

1. 称 v 与 M 是正交的, 若 $\langle v, w\rangle = 0$ 对于所有的 $w \in T_pM$ 成立.
2. 全体在 p 处与 M 正交的向量构成 $T_p\tilde{M}$ 的一个子空间, 被称为是 p 处的法

空间, 记作 $N_pM = (T_pM)^{\perp}$.
3. 正有交分解 $T_p\tilde{M} = T_pM \oplus N_pM$;
4. 称 $T\tilde{M}|_M$ 的一个截面为沿 M 的法向量场, 若 $N_p \in N_pM$ 对于任意的 $p \in M$ 成立;
5. 称集合

$$NM := \coprod_{\pi \in M} N_pM$$

为 M 的法丛.

命题 9.16

设 $\tilde{M}$ 是 Riemann m-流形, $M \subseteq \tilde{M}$ 是 n-维浸入或嵌入 (带边) 子流形, 则 NM 是 $T\tilde{M}|_M$ 的光滑 rank- $(m-n)$ 子丛. 存在光滑丛同态

$$\pi^{\top} : T\tilde{M}|_m \to TM, \quad \pi^{\perp} : T\tilde{M}|_M \to NM$$

称为是切投影和法投影, 对于每一点 $p \in M$, 它们在 $T_p\tilde{M}$ 的限制分别表现为到 T_pM 和 N_pM 的正交投影.

Proof 任给 $p \in M$, 由浸入子流形的局部嵌入性, 存在 p 在 M 中的邻域 U, 使得 U 可以被嵌入到 $\tilde{M}$ 中. 由命题9.15, 存在 p 在 $\tilde{M}$ 上的邻域 $\tilde{U}$, 使得 $\tilde{U}$ 上存在适配于 M (实际上是适配于 U, 只不过这两者是一样的) 的正交标架 $(E^1, \cdots, E^m)$. 对于每个 $q \in \tilde{U}$, $E_q^1, \cdots, E_q^n$ 构成 T_qM 的一个基, $E_q^{n+1}, \cdots, E_q^m$ 构成 N_qM 的一组基. 由子丛的局部标架判据, NM 构成 $T\tilde{M}|_M$ 的一个光滑 rank-$(m-n)$ 的子丛.

按要求逐点地定义 $\pi^{\top}$ 和 $\pi^{\perp}$ 为局部的正交投影, 那么它们可以分别表示为

$$\pi^{\top}\left(X^1E_1 + \cdots + X^mE_m\right) := X^1E_1 + \cdots + X^nE_n$$
$$\pi^{\perp}\left(X^1E_1 + \cdots + X^mE_m\right) := X^{n+1}E_{n+1} + \cdots + X^mE_m$$

这表明 $\pi^{\top}$ 和 $\pi^{\perp}$ 是光滑的. □

子流形 $M \subseteq \tilde{M}$ 上的计算通常由 **光滑局部参数化的形式给出**: 即一个光滑映射 $X : U \to \tilde{M}$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集 (当 M 有边时, 或为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的), 使得 $X(U)$ 是 M 上的一个开集, 且 X 视作 U 到 M 上的映射时, 成为映到像集的微分同胚. 用 X 同时表示它视为映到 M 和映到 $\tilde{M}$ 的映射.

若令 $V = X(U) \subseteq M$, $\varphi = X^{-1} : V \to U$, 则 (V, φ) 是 M 上的一个光滑坐标卡.

设 (M, g) 是 $\left(\tilde{M}\right), \tilde{g}$ 的 Riemann 子流形, $X : U \to \tilde{M}$ 是 M 的一个光滑局部参数化.

则 g 的坐标表示由以下 U 上的 2-张量场给出:

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* g = X^* g = X^* \iota^* \tilde{g} = (\iota \circ X)^* \tilde{g}$$

由于 $\iota \circ X$ 无非就是 X 子集 (视作到 $\tilde{M}$ 的映射), 于是上面的拉回度量就是 $X^* \tilde{g}$.

一旦 $\tilde{g}$ 的坐标表示给出, 可以轻松地计算得到拉回张量场. 例如, 若 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的 n-Riemann 浸入子流形, $X: U \to \mathbb{R}^m$ 是 M 的一个光滑局部参数化, U 上的诱导度量就是

$$g = X^* \bar{g} = \sum_{i=1}^m \left(\mathrm{d}X^i\right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^j\right)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \frac{\partial X^i}{\partial u^k} \mathrm{d}u^j \,\mathrm{d}u^k$$

Example 9.7 图像坐标系上的诱导度量 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $f: U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 则 f **的图像** 是子集 $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 n 维嵌入子流形. 他有全局参数化 $X: U \to \mathbb{R}^{n+1}$, 称为是**图像参数化**, 由 $X(u) = (u, f(u))$ 给出. 相应的 M 上的坐标 $u^1, \cdots, u^n$ 称为是**图像坐标**. 在图像坐标下, $\Gamma(f)$ 的诱导度量是

$$X^* \bar{g} = X^* \left(\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^{n+1}\right)^2\right) = \left(\mathrm{d}u^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}u^n\right)^2 + \left(\mathrm{d}f\right)^2$$

应用到 $\mathbb{S}^2$ 的上半平面上, 在参数化 $X: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

下, 可以看到 $\mathbb{S}^2$ 上的圆度量可以局部地写作

$$\begin{aligned} \mathring{g} = X^* \bar{g} &= \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2 + \left(\frac{u \,\mathrm{d}u + v \,\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 \\ &= \frac{\left(1 - v^2\right) \mathrm{d}u^2 + \left(1 - u^2\right) \mathrm{d}v^2 + 2uv \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v}{1 - u^2 - v^2} \end{aligned}$$

Example 9.8 旋转曲面 设 H 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$, $C \subseteq H$ 是 1-维嵌入子流形. 由 C 决定的 **旋转曲面**, 是指子集 $S_C \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$S_C = \left\{(x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in C\right\}$$

称 C 为它的**生成曲线**. 每个 C 的光滑局部参数化 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$, 都给出 S_C 的一个光滑局部参数化

$$X(t, \theta) = (a(t) \cos\theta, a(t) \sin\theta, b(t))$$

设 (t, θ) 限制在坐标平面上充分小的坐标开集上. 则 t-坐标曲线 $t \mapsto X(t, \theta_0)$ 被称为是 **子午线**. θ-坐标曲线 $\theta \mapsto X(t_0, \theta)$ 被称为是**纬圆**.

S_C 上的诱导度量是

$$\begin{aligned}X^*\bar{g} = & \ \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\cos\theta\right)^2 + \ \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\sin\theta\right)^2 + \ \mathrm{d}\left(b\left(t\right)\right)^2 \\ & = \left(a'\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 \\ & + \left(a'\left(t\right)\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\left(t\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 \\ & + \left(b'\left(t\right)\ \mathrm{d}t\right)^2 \\ & = \left(a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2\right)\ \mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2\end{aligned}$$

特别地，若 γ 是单位速度曲线,($\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2 = a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2 \equiv 1$)，则上述化为 $\mathrm{d}t^2 + a\left(t\right)^2\ \mathrm{d}\theta^2$

9.5.2 乘积

定义 9.23 (warped 积)

设 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 是两个 Riemann 流形，$f : M_1 \to \mathbb{R}^+$ 是严格正的光滑函数，定义 warped 积 $M_1 \times_f M_2$ 为配备了度量 $g = g_1 \oplus f^2 g_2$ 的积流形 $M_1 \times M_2$，其中 g 被定义为

$$g_{(p_1,p_2)}\left(\left(v_1, v_2\right), \left(w_1, w_2\right)\right) = \left.g_1\right|_{p_1}\left(v_1, w_1\right) + f\left(p_1\right)^2 \left.g_2\right|_{p_2}\left(v_2, w_2\right)$$

♣

Example 9.9

1. 设 H 是半平面 $\{(r, z) : r > 0\}$,$C \subseteq H$ 是 1-嵌入子流形，令 $S_C \subseteq \mathbb{R}^3$ 是对应的旋转曲面. 令 C 配备在 H 上诱导的度量，$\mathbb{S}^1$ 配备标准度量 $f : C \to \mathbb{R}$ 是到 z-轴的距离函数: $f\left(r, z\right) = r$，则 S_c 等距同构于 warped 积 $C \times_f \mathbb{S}^1$
2. 令 ρ 表示 $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ 上的标准坐标函数，则映射 $\Phi\left(\rho, \omega\right) = \rho\omega$ 给出 warped 积 $\mathbb{R}^+ \times_\rho \mathbb{S}^{n-1}$ 到 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的等距同构，其中后者配备了欧式度量.

Proof

1. 设 C 有一个单位速度参数化 $\gamma : I \to H, \gamma\left(t\right) = \left(a\left(t\right), b\left(t\right)\right)$. 则旋转的一个参数化为

$$\left(\theta, t\right) \mapsto \left(a\left(t\right)\cos\theta, a\left(t\right)\sin\theta, b\left(t\right)\right)$$

因此在 $\left(a\left(t\right)\cos\theta, a\left(t\right)\sin\theta, b\left(t\right)\right)$ 处，有

$$\tilde{g} = a^2\left(t\right)\ \mathrm{d}\theta^2 + \ \mathrm{d}t^2$$

另一方面，考虑 $\mathbb{S}^1$ 的参数化

$$\theta \mapsto \left(\cos\theta, \sin\theta\right)$$

以及 C 的参数化 γ, $C\times\mathbb{S}^1$ 有参数化

$$(t,\theta)\mapsto((a(t),b(t)),(\cos\theta,\sin\theta))$$

在 $((a(t),b(t),(\cos\theta,\sin\theta)))$ 处,

$$g_1=(\mathrm{d}a(t))^2+(\mathrm{d}b(t))^2=\mathrm{d}t^2$$
$$g_2=(\mathrm{d}\cos\theta)^2+(\mathrm{d}\sin\theta)^2=\mathrm{d}\theta^2$$

于是此处

$$g=\mathrm{d}t^2+f((a(t),b(t)))\,\mathrm{d}\theta^2=\mathrm{d}t^2+a(t)\,\mathrm{d}\theta^2$$

则考虑映射

$$\varphi:(a(t)\cos\theta,a(t)\sin\theta,b(t))\mapsto((a(t),b(t)),(\cos\theta,\sin\theta))$$

则

$$\varphi^*g=\tilde{g}$$

这表明 φ 是等距同构.

2. 设 $V_\rho=\partial_\rho$ 是 $\mathbb{R}^+$ 的坐标向量场, $V_\omega\in T_p\mathbb{S}^{n-1}$. 则

$$(\Phi^*\bar{g})(V_p,V_\omega)=\bar{g}((\mathrm{d}\Phi)V_\rho,(\mathrm{d}\Phi)V_\omega)$$

通过将嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上, 可以计算得到

$$\mathrm{d}\Phi(\partial_\rho)=\omega\in T_{\rho\omega}\mathbb{R}^n$$
$$\mathrm{d}\Phi(V_\omega)=\rho V_\omega\in T_{\rho\omega}\mathbb{R}^n$$

于是

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\rho,V_\rho)=\bar{g}(\omega,\omega)=|\omega|^2=1$$

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\omega,V_\omega)=\bar{g}(\rho V_\omega,\rho V_\omega)=\rho^2\bar{g}(V_\omega,V_\omega)$$

$$(\Phi^*\bar{g})(V_\rho,V_\omega)=\bar{g}(\omega,\rho V_\omega)=\rho\bar{g}(\omega,V_\omega)=0$$

另一方面

$$g(V_\rho,V_\omega)=0$$

$$g(V_\rho,V_\rho)=\bar{g}(V_\rho,V_\rho)$$

$$g(V_\omega,V_\omega)=\rho^2\bar{g}(V_\omega,V_\omega)$$

这结合对称正定 2-张量由对角元所决定, 足以说明 $g=(\Phi^*\bar{g})$

$\square$

第 10 章 模型 Riemann 流形

10.1 Riemann 流形的对称性

定义 10.1 (齐次性)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 表示全体 M 的自等距同构[a]. 成 (M,g) 是齐次的 Riemann 流形, 若 $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 传递地作用在 M 上. 即对于任意一对 $p,q\in M$, 存在等距同构 $\varphi: M\to M$, 使得 $\varphi(p)=q$.

[a]在复合下构成群

Idea 齐次的流形在每一点处看起来都是一样的.

Remark

1. 对于每个 $\varphi\in \mathrm{Iso}\,(M,g)$, 全微分 $\mathrm{d}\varphi$ 映 TM 到自身, 且在每一个点 $p\in M$ 上的限制是一个线性同构 $\mathrm{d}\varphi_p: T_pM\to T_{\varphi(p)}M$.

定义 10.2 (迷向)

1. 给定 $p\in M$, 令 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 表示 p 处的迷向子群, 即 $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 中由固定了 p 的等距同构组成的子群. [a]
2. 对于每个 $\varphi\in \mathrm{Iso}_p\,(M,g)$, 线性映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 将 T_pM 映到它自己, 映射 $I_p:\mathrm{Iso}_p\,(M,g)\to \mathrm{GL}\,(T_pM)$,$I_p\,(\varphi)=\mathrm{d}\varphi_p$ 是 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 的一个表示, 称为迷向表示. [b]
3. 称 M 是在 p 处迷向的, 若 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 的迷向表示传递地作用在 T_pM 的单位向量场. [c]
4. 若 M 在每一点处都是迷向的, 则称 M 是迷向的.

[a]以 p 为中心的旋转和反射

[b]等距同构在局部上的等效替代. 视 I_p 为拓扑范畴到模范畴的函子

[c]在 p 点处看, 每个方向看起来都是一样的.

定义 10.3

领 $\mathrm{O}\,(M)$ 表示 M 的切空间上的全体正交基:

$$\mathrm{O}\,(M):=\coprod_{p\in M}\{T_pM\text{的正交基}\}$$

存在 $\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 在 $\mathrm{O}\,(M)$ 上诱导的群作用，通过用等距同构 φ 的微分，将 p 处的正交基推出到 $\varphi\,(p)$ 处的正交基:

$$\varphi\cdot(b_1,\cdots,b_n)=\left(\mathrm{d}\varphi_p\,(b_1)\,,\cdots,\,\mathrm{d}\varphi_p\,(b_n)\right)$$

称 (M,g) 是标架齐次的，若此诱导作用在 $\mathrm{O}\,(M)$ 上是传递的. 换言之，对于任意的 $p,q\in M$，以及 p,q 处选定的正交基，存在等距同构，将 p 映到 q，将选定的 p 处的正交基映到选定的 q 处的正交基. ♣

命题 10.1

设 (M,g) 是 Riemann 流形.

1. 若 M 在一点处是迷向的，且它是齐次的，则 M 是处处迷向的.
2. 若 M 是标架齐次的，则是齐次且迷向的. ♠

Proof 在 M 处一点 p 迷向，是说 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 传递地作用在 T_pM 的单位向量场上.

齐次的，是说对于任意的 q，存在等距同构 $\varphi\in\mathrm{Iso}\,(M,g)$，使得 $\varphi\,(p)=q$.

考虑 $\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$ 和 $\mathrm{Iso}_q\,(M,g)$ 的关系.

$\mathrm{d}\varphi_p:T_pM\to T_qM$ 是等距同构.

任取 T_qM 处的单位向量 v,w，$\mathrm{d}\varphi_p^{-1}\,(v):=\tilde{v}$，$\mathrm{d}\varphi_p^{-1}\,(w):=\tilde{w}$ 是 T_pM 上的单位向量，存在 $\psi\in\mathrm{Iso}_p\,(M,g)$，使得 $\mathrm{d}\psi_p\,(\tilde{v})=\tilde{w}$，于是

$$\mathrm{d}\varphi_p\circ\mathrm{d}\psi_p\circ\mathrm{d}\varphi_p^{-1}\,(v)=w$$

是 $\mathrm{Iso}_q\,(M,g)$ 中映 v 为 w 的等距同构. 故 M 在 q 处迷向. 由于 q 任取，M 处处迷向.

显然标架齐次蕴含齐次性. 任取 $p\in M$，以及 T_pM 上的两个单位向量 v,w，他们可以分别扩充为 T_pM 的一个正交基. 由于标架齐次性，存在这两个正交基的一个等距同构 $\mathrm{d}\phi_p$,$\mathrm{d}\varphi_p$ 将 v 映到 w.

□

Idea 一个齐次的 Riemann 流形在任意点上看起来都是一样的，而一个迷向的 Riemann 流形在每个方向上看起来都是一样的. 从而一个迷向的 Riemann 流形自动是齐次的. 然而，存在一点处迷向但不是处处迷向的 Riemann 流形，也存在齐次但是处处不迷向的 Riemann 流形，还存在齐次且迷向，但不是标架齐次的 Riemann 流形. 这些断言的证明将在学习测地线和曲率后的理论后得到证明.

Myers-Steenrod 定理给出，$\mathrm{Iso}\,(M,g)$ 总是光滑作用在 M 上的一个李群.

10.2 欧式空间

命题 10.2 (欧式空间)

n-维欧式空间在配备了欧式度量 $\bar{g}$ 下构成一个 Riemann 流形 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$.

命题 10.3 (实内积空间)

任取 n-维实内积空间 V. 对于每个 $p \in V$ 和 $v, w \in T_pV \simeq V$, 定义 $g(v, w) = \langle v, w\rangle$. 选取 V 的一组正交基 $(b_1, \cdots, b_n)$, 它给出 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的一个基同构 $(x^1, \cdots, x^n) \mapsto x^i b_i$. 显然是 (V, g) 和 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ 间的一个等距同构. 故每个 n-维内积空间作为 Riemann 流形都彼此同构.

每个正交变换 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 平移变换 $x \mapsto b + x$, 以及形如 $x \mapsto b + Ax$ 的变换都是等距同构.

我们可以将这些等距同构实现为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑李群作用.

定义 10.4

视 $\mathbb{R}^n$ 为加法下的李群, $\theta : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathrm{O}(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上自然的作用. 定义**欧式群** $\mathrm{E}(n)$ 为积流形 $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ 在乘法 $(b, A)(b', A') := (b + Ab', AA')$ 下的半直积李群 $\mathbb{R}^n \rtimes_\theta \mathrm{O}(n)$. 通过映射 $\rho : E(n) \to \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$,

$$\rho(b, A) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它有忠实的表示.

欧式群在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用表示为

$$(b, A) \cdot x = b + Ax$$

Remark

1. 半直积的构造使得此作用满足结合律.
2. 当 $\mathbb{R}^n$ 配备了欧式度量时, 此作用是一个等距同构, 且他在 $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ 上的诱导作用是传递的. 因此每个欧式空间都是标架齐次的.

10.3 球面

定义 10.5

给定 $R>0$, 令 $\mathbb{S}^n(R)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以原点为中心, R 为半径的球面, 且配备了欧式度量诱导的度量 $\mathring{g}_R$, 称为半径为 R 的圆度量.

命题 10.4

正交群 $\mathrm{O}(n+1)$ 传递地作用在 $O(\mathbb{S}^n(R))$ 上, 从而每个球面都是标架齐次的.

Proof 只需要证明对于任意的 $p\in\mathbb{S}^n(R)$, 以及任意 $T_p\mathbb{S}^n(R)$ 的正交基 (b_i), 都存在正交变换, 将北极点 $N=(0,\cdots,0,R)$ 映到 p, 将 $T_N\mathbb{S}^n(R)$ 的基 $(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ 映到 (b_i).

视 p 为长度为 R 的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的向量, 令 $\hat{p}=\frac{p}{R}$. 由于 (b_i) 相切与球面, 故 (b_i) 与 $\hat{p}$ 正交, 故 $(b_1,\cdots,b_n,\hat{p})$ 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个标准正交基. 令 α 表示列向量为这一组正交基的矩阵, 则 $\alpha\in O(n+1)$, 他将 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $(\partial_1,\cdots,\partial_{n+1})$ 映到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基 $(b_1,\cdots,b_n,\hat{p})$ [1]. 立即得到 $\alpha(N)=p$. 又 α 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上线性地作用, 他的微分 $\mathrm{d}\alpha_N: T_N\mathbb{R}^{n+1}\to T_p\mathbb{R}^{n+1}$ 的表示矩阵与 α 的坐标表示相同, 故 $\mathrm{d}\alpha_N(\partial_i)=b_i,\forall i=1,\cdots,n$.
□

定义 10.6 (共形)

1. 设 g_1,g_2 是 M 上的两个度量, 称它们是彼此共形相关的, 若存在正的函数 $f\in C^\infty(M)$, 使得 $g_2=fg_1$.
2. 给定两个 Riemann 流形 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$, 称微分同胚 $\varphi:M\to\tilde{M}$ 是一个**共形微分同胚 (或共形变换)**, 若它将 $\tilde{g}$ 拉回到一个与 g 共形的度量:
$$\varphi^*\tilde{g}=fg\text{对于某个正函数}f\in C^\infty(M)\text{成立}$$
3. 称两个 Riemann 流形是共形等价的, 若存在他们之间的共形微分同胚.
4. 称 Riemann 流形 (M,g) 是**局部共形平摊的**, 若 M 上的每一个点都有共形等价于 $(\mathbb{R}^n,\bar{g})$ 上一开集的邻域.

10.3.1 球极投影

考虑 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{S}^n(R)\setminus\{N\}$, 其中 N 是 $\mathbb{S}^n(R)$ 的北极点, 以及映射 $\sigma:\mathbb{S}^n(R)\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n$, 它将球面上除北极点以外的点 $P=(\xi^1,\cdots,\xi^n,\tau)$, 送到 P 与 $N=(0,\cdots,0,R)$ 的

[1]这里滥用了一下记号

连线在 $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上的交点 $U = (u^1, \cdots, u^n, 0)$ 的自然投影 $u = (u^1, \cdots, u^n)$ 上. 存在 λ, 使得

$$(N - U) = \lambda (N - P)$$

从而有方程组

$$R = \lambda (R - \tau)$$
$$u = \lambda \xi$$

给定 ξ, τ, 解出 τ 带入方程, 可得 σ 的坐标表示

$$\sigma (\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}$$

反过来, 给定 u, 解得

$$\xi = \frac{u}{\lambda}$$
$$\tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

P 点由这两个方程以及他在球面上刻画, 带入 $|\xi|^2 + |\tau|^2 = \mathbb{R}^2$, 得到

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2$$

解得

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}$$

带入方程, 得到

$$\sigma^{-1} (u) = \left(\frac{2uR^2}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right)$$

为 σ 的逆映射. 从而给出了 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{S}^n (R) \setminus \{N\}$ 的微分同胚.

定义 10.7 (球极投影)

上面构造的映射 $\sigma : \mathbb{S}^n (R) \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ 被称为是球极投影. ♣

命题 10.5

球极投影是 $\mathbb{S}^n (R) \setminus \{N\}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 之间的共形微分同胚. ♠

Proof σ^{-1} 本身是 $\mathbb{S}^n (R) \setminus \{N\}$ 的一个光滑参数化, 我们可以直接用它来计算拉回度量.

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = (\sigma^{-1})^* \bar{g} = \sum_j \left(\mathrm{d} \left(\frac{2u^j R^2}{|u|^2 + R^2} \right)^2 \right) + \mathrm{d} \left(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right)^2$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\frac{2u^j R^2}{|u|^2+R^2} &= 2R^2\,\mathrm{d}\frac{u^j}{|u|^2+R^2}\\
\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{u^j}{|u|^2+R^2}\right) &= \frac{\left(|u|^2+R^2\right)-u^j\left(2u^j\right)}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\\
\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{u^j}{|u|^2+R^2}\right) &= \frac{-2u^j u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2},\quad k\neq j
\end{aligned}
$$

故

$$
\mathrm{d}\frac{2u^j R^2}{|u|^2+R^2} = \frac{2R^2}{|u|^2+R^2}\,\mathrm{d}u^j - 4R^2u^j\frac{u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\,\mathrm{d}u^k
$$

此外

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\right) &= -2R^3\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{|u|^2+R^2}\right)\\
\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{|u|^2+R^2}\right) &= -\frac{2u^j}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

故

$$
\mathrm{d}\left(R\frac{|u|^2-R^2}{|u|^2+R^2}\right) = 4R^3\frac{u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\,\mathrm{d}u^k
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma^{-1}\right)^*\bar{g} &= \sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2 - \sum_j 16R^4\frac{u^j u^k}{\left(|u|^2+R^2\right)^3}\,\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^j + \sum_j 16R^4\frac{\left(u^j\right)^2\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&\quad + 16R^6\frac{\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&= \sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2 - 16R^4\frac{\left(\sum_j u^j\,\mathrm{d}u^j\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^3} + 16R^4\frac{|u|^2\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&\quad + 16R^6\frac{\left(u^k\,\mathrm{d}u^k\right)^2}{\left(|u|^2+R^2\right)^4}\\
&= \sum_j\frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u^j\right)^2\\
&= \frac{4R^4}{\left(|u|^2+R^2\right)^2}\bar{g}
\end{aligned}
$$

□

推论 10.1

每个带圆度量的前面都是局部共形平坦的. ♡

Proof 球极投影给出去北极点球面与欧式空间的一个共形微分同胚, 类似的给出南极点的球极投影, 可以得到去南极点球面与欧式空间的共形微分同胚.

□

第 11 章 联络

11.1 Introduction

我们希望在流形上定义曲线的加速度. 在欧氏空间中, 我们直接对每个分量再求导就可以实现, 这是因为 $\mathbb{R}^n$ 上的每个点的切空间是等距同构的, 切向量都可以 "活在" 同一个 $\mathbb{R}^3$ 空间中, 可以自然地做减法定义出极限. 但在流形 M 上, T_pM 和 T_qM 对于不同的 p, q 是不同的向量空间, 我们需要在 M 上附加一种几何结构（联络）, 使得不同切空间的向量可以通过某种认为的方式比较（平移）, 来定义出曲线的 "加速度" （速度向量场的协变导数）.

11.2 联络

定义 11.1

令 $\pi : E \to M$ 是光滑（带边）流形 M 上的一个光滑向量丛, $\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间. E **上的一个联络**是指, 一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

写作 $(X, Y) \to \nabla_X Y$, 满足以下三条

1. $\nabla_X Y$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$ 线性的: 对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, 以及 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$,
$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$$
2. $\nabla_X Y$ 在 Y 上是 $\mathbb{R}$ 线性的: 对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$,
$$\nabla_X (a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$$
3. ∇ 满足以下乘积律: $f \in C^\infty(M)$,
$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$$

♣

Remark

1. 称 $\nabla_X Y$ 为 Y 在 X 方向上的协变导数.

引理 11.1 (局部性)

设 ∇ 是光滑向量丛 $E \to M$ 上的联络, $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$,$Y, \tilde{Y} \in \Gamma(E)$, $p \in M$. 若存在 p 的某个邻域 U, 使得 $X|_U = \tilde{X}|_U, Y|_U = \tilde{Y}|_U$, 则 $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$

Proof 如果能分别证明 X 和 Y 上的局部性, 由公共邻域上的一致性, 就可以得到

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$$

所以接下来依次说明.

先考虑 Y, 由 ∇ 在 Y 上的 $\mathbb{R}$-线性, 只需要说明若 Y 在 p 的局部上退化, 则 $\nabla_X Y$ 在 p 处退化. 设 U 是 p 的邻域, 使得 $Y|_U \equiv 0$, 取 M 的支撑在 U 上的光滑 bump 函数 $\varphi \in C^\infty(M)$, 则 $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$. 于是 $\varphi Y \equiv 0$ 在 M 上成立. 由 ∇ 在 Y 上的 $\mathbb{R}$-线性, $\nabla_X(\varphi Y) = 0$; 再由乘积律

$$0 = \nabla_X(\varphi Y) = \varphi \nabla_X Y + (X\varphi) Y$$

在 p 处取值, 得到

$$\nabla_X Y|_p = 0$$

接下来考虑 X, 由 ∇ 在 X 上的线性, 也只需要说明若 X 在 p 的局部上退化, $\nabla_X Y$ 在 p 处退化. 我们做类似的构造得到 $\varphi X \equiv 0$ 在 M 上成立, 由 ∇ 在 X 上的线性, 得到

$$0 = \nabla_{\varphi X} Y = \varphi \nabla_X Y$$

在 p 处取值得到

$$\nabla_X Y|_p = 0$$

综上可得命题成立. □

命题 11.1 (联络的限制)

设 ∇ 是光滑向量丛 $E \to M$ 上的一个联络. 则对于每个开集 $U \subseteq M$, 存在限制丛 $E|_U$ 上唯一的联络 ∇^U , 使得对于任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \Gamma(E)$,

$$\nabla^U_{(X|_U)}(Y|_U) = (\nabla_X Y)|_U$$

Proof 先证明唯一性. 设 ∇^U 和 $\tilde{\nabla}^U$ 是满足条件的两个联络. 任取任意的 $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 对于给定的 $p \in U$, 都可以利用 bump 函数构造出光滑向量场 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ 和光滑截面 $\tilde{Y} \in \Gamma(E)$, 使得 $\tilde{X}|_U$ 和 $\tilde{Y}|_U$ 分别在 U 上与 X, Y 一致. 则由局部性和题设条件

$$\nabla^U_X Y|_p = \nabla^U_{(\tilde{X}|_U)} \left(\tilde{Y}|_U\right)\Big|_p = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)\Big|_p = \tilde{\nabla}^U_{(\tilde{X}|_U)} \left(\tilde{Y}|_U\right)\Big|_p = \tilde{\nabla}^U_X Y|_p$$

这就说明了唯一性.

为了说明存在性, 对于 $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 对于每个 $p \in U$, 就按上述方式构造 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$, 并定义

$$\nabla_X^U Y|_p := \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)\Big|_p$$

由局部性可知此定义无关 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 的选取, 我们给出了映射 $\nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E|_U) \to \Gamma(E|_U)$. 最后, 对于联络定义的三条性质的验证, 只需要在每一点的局部上做延拓, 应用 ∇ 所满足的对应的性质, 再利用良定义性将 $\sim$ 去掉即可. □

命题 11.2

设 ∇ 是光滑向量丛 $E \to M$ 上的一个联络. 对于任意的 $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y, \tilde{Y} \in \Gamma(E)$, 以及 $p \in M$, 若 $X|_p = \tilde{X}\Big|_p$, 且 $Y = \tilde{Y}$ 在 p 的某个邻域上成立, 则 $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\Big|_p$

Remark

1. 换言之, ∇ 对 Y 有局部性, 对 X 有逐点性.

Proof 对于 Y 的局部性已经在之前的引理中处理过. 另外由 ∇ 对 X 的线性, 只需要说明若 X 在 p 处退化, 则 $\nabla_X Y|_p = 0$. 由 ∇ 的局部性, 我们可以只在 p 的一个坐标邻域 (U, x^i) 上考虑, 设 X 在其上表为 $X = X^i \partial_i$, 则 $X^i(p) = 0$. 由 ∇ 的线性和乘积律, 在 U 上有

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y = X^i \nabla_{\partial_i} Y$$

上式在 p 处取值, 可得 $\nabla_X Y|_p = 0$. □

11.2.1 切丛上的联络

定义 11.2

设 M 是光滑（带边）流形.M **上的一个联络**, 通常是指切丛 $TM \to M$ 上的一个联络

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

定义 11.3 (联络系数)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 (E_i) 是 TM 在开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标价. 对于每一组指标 i, j, $\nabla_{E_i} E_j$ 都可以按同一组标架

展开：

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

当 i, j, k 跑遍 1 到 $n = \dim M$ 时，定义出 n^3 个光滑函数 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$，被称为是 ∇ 关于给定标架的联络系数。

命题 11.3 (坐标表示)

设 M 是光滑（带边）流形，∇ 是 TM 上的一个联络. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个局部标架，令 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是 ∇ 关于这组标架的联络系数. 对于光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$，按标架展开为 $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$，则有

$$\nabla_X Y = \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k{}^{a}$$

[a]记忆时分成两部分来记，一部分是对固定向量场对数量函数求导的部分，这部分比较少；一部分是固定数量函数对向量场求导的部分，这部分要拆的细碎一点，既要拆求导的方向 X^i，又要拆导出的坐标表示 E_k

Proof 由联络的性质

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^j E_j\right) \\
&= Y^j \nabla_X E_j + X\left(Y^j\right) E_j \\
&= Y^j \nabla_{\left(X^i E_i\right)} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \nabla_{E_i} E_j + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= X^j Y^j \Gamma_{ij}^k E_k + X\left(Y^k\right) E_k \\
&= \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k
\end{aligned}$$

□

命题 11.4 (联络系数的变换法则)

令 M 是光滑（带边）流形，∇ 是 TM 上的一个联络. 给定 TM 在开子集 $U \subseteq M$ 上的两个局部标架 (E_j) 和 $\left(\tilde{E}_j\right)$，Γ_{ij}^k 和 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ 表示 ∇ 在两个标架上的联络系数. 若 $\tilde{E}_i = A_i^j E_j$ 对某个函数矩阵 $\left(A_i^j\right)$ 成立. 则

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q E_q\left(A_j^p\right)$$

11.2.2 联络的存在性

局部上的联络可以通过一组特定的标架的坐标来决定，包含了 n^3 个光滑函数的信息，一个 n 个坐标，每个坐标都分别对应了 X、Y 的 n 个信息.

每个局部坐标上都可以构造出局部的联络，通过单位分解可以整合出一个整体的联络.

一般情况下，联络不具有对第二个分量的 $C^{\infty}(M)$ 线性，因而无法成为一个 $(1,2)$-张量场，作为代替的，它满足对第二个分量的 Lebniz 律，它比 $C^{\infty}(M)$-线性多了一个 $(Xf)Y$，通过对两个联络做差，可以抵消此项，定义出一个关于 Y 满足 $C^{\infty}(M)$-线性的映射，从而定义出一个 $(1,2)$-张量场.

每两个联络都相差一个 $(1,2)$-张量场，并且每个联络加上一个 $(1,2)$-张量场还是一个联络，由此可见，联络的多少和 $(1,2)$-张量场的多少是一样的，联络的空间就是一个 $(1,2)$- 张量场的仿射空间.

接下来我们依次严格说明以上这些事实.

内容提要

- 联络的坐标对应
- 联络的差张量
- 联络的存在性
- 联络空间的大小

Example 11.1 欧式联络 在 $T\mathbb{R}^n$ 上，定义欧式联络 $\overline{\nabla}$，按照

$$\overline{\nabla}_X Y = X\left(Y^1\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X\left(Y^n\right)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

容易验证它满足联络公理的三条性质.

Example 11.2 $\mathbb{R}^n$ 子流形上的切联络 令 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个嵌入子流形. 定义 TM 上的切联络 $\nabla^{\top}$ 为

$$\nabla_X^{\top} Y = \pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M\right)$$ [1]

其中 $\pi^{\top}$ 是到 TM 的正交投影，$\overline{\nabla}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式联络，$\tilde{X},\tilde{Y}$ 分别是 X,Y 的光滑延拓.

引理 11.2

设 M 是一个光滑（带边）n-流形，M 容许一个全局标架 (E_i)，则公式

$$\nabla_X Y = \left(X\left(Y^k\right) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$

给出 TM 上的联络与 M 上的 n^3 份光滑实函数 $\left\{\Gamma_{ij}^k\right\}$ 空间的一个一一对应. ♡

Proof 根据命题 11.3，每个联络都按照题设公式给出了 n^3 个 M 上的光滑实函数. 另一方面，给定 $\left\{\Gamma_{ij}^k\right\}$，按题设公式定义 ∇_X^Y，易见 X 和 Y 均是光滑的，且对 Y 具有 R-线性，

[1] 切联络就是把子流形的曲线放到父空间中去，求完导数后再正交地投影到子流形切空间上. 由于在父流形中求导时并不会产生沿子流形法相的什么信息，因此在投影时也没有舍弃信息.

对 X 具有 $C^{\infty}(M)$-线性. 最后来检查 Lebniz 律, 设 $\tilde{Y}=fY$, $f\in C^{\infty}(M)$, 则 $\tilde{Y}^{k}=fY^{k}$, 于是对于我们定义的 ∇, 有

$$\begin{aligned}
\nabla_{X}\tilde{Y} &= \left(X\left(\tilde{Y}^{k}\right)+X^{i}\tilde{Y}^{j}\Gamma_{ij}^{k}\right)E_{k} \\
&= \left(X\left(fY^{k}\right)+X^{i}fY^{k}\Gamma_{ij}^{k}\right)E_{k} \\
&= \left(fX\left(Y^{k}\right)+(Xf)\left(Y^{k}\right)+fX^{i}Y^{j}\Gamma_{ij}^{k}\right)E_{k} \\
&= f\left(X\left(Y^{k}\right)+X^{i}Y^{j}\Gamma_{ij}^{k}\right)E_{k}+(Xf)\left(Y^{k}E_{k}\right) \\
&= f\nabla_{X}Y+(Xf)Y
\end{aligned}$$

这就说明了 Lebniz 律, 综上命题成立.

□

命题 11.5

每个光滑（带边）流形的切丛上都容许一个联络.

Proof 令 M 是一个光滑（带边）流形,$\{U_{\alpha}\}$ 是覆盖了 M 的一个坐标卡. 则上述引理给出了每个 U_{α} 上的联络 ∇^{α} 的存在性. 取从属于 $\{U_{\alpha}\}$ 的 M 的单位分解 $\{\varphi_{\alpha}\}$, 定义

$$\nabla_{X}Y:=\sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}\nabla_{X}^{\alpha}Y$$

由局部有限性, 易见每一对 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 都给出了 M 上的一个光滑向量场. 接下来只需要依次验证联络的三条公里, 两条线性均由局部联络 ∇^{α} 的线性容易看出, 不加赘述, 主要验证以下 Lebniz 律. 为此, 直接计算

$$\begin{aligned}
\nabla_{X}(fY) &= \sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}\nabla_{X}^{\alpha}(fY) \\
&= \sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}\left((Xf)Y+f\nabla_{X}^{\alpha}Y\right) \\
&= (Xf)\sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}Y+f\sum_{\alpha}\varphi_{\alpha}\nabla_{X}^{\alpha}Y \\
&= (Xf)Y+f\nabla_{X}Y
\end{aligned}$$

□

命题 11.6

设 M 是光滑（带边）-流形. 任取 TM 上的两个联络 ∇^{0} 和 ∇^{1}, 定义映射 $D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, 按

$$D(X,Y):=\nabla_{X}^{1}Y-\nabla_{X}^{0}Y$$

则 D 由 $C^{\infty}(M)$ 上的双线性, 从而定义出一个 $(1,2)$-张量场, 称为 ∇^{0} 和 ∇^{1} 之间

的差张量场.

Proof 两条线性是明显的,Lebniz 律只需要看到两者相减抵消了 $(Xf)Y$, 得到 $f\left(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^0 Y\right)$ 即可.

□

定理 11.1

令 M 是光滑（带边）-流形, ∇^0 是 TM 上的任意联络. 则 TM 上的全体联络的集合 $\mathscr{A}(TM)$ 等于以下仿射空间

$$\mathscr{A}(TM) = \left\{\nabla^0 + D : D \in \Gamma\left(T^{(1,2)TM}\right)\right\}$$

其中 $\nabla^0 + D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 被定义为

$$\left(\nabla^0 + D\right)_X Y = \nabla_X^0 Y + D(X, Y)$$

Proof 任取 $\nabla^1 \in \mathscr{A}(TM)$,$\nabla^1 = \nabla^0 + (\nabla^1 - \nabla^0) \in \{\nabla^0 + D\}$. 反之, 任取形如 $\nabla^0 + D$ 的函数, 容易看出他满足联络的两条线性公里, 对于 Lebniz 律,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^0 + D\right)_X (fY) &= \nabla_X^0 (fY) + D(X, fY) \\
&= f\left(\nabla_X^0 Y + D(X, Y)\right) + (Xf) Y \\
&= f\left(\nabla^0 + D\right)_X (Y) + (Xf) Y
\end{aligned}$$

故 Lebniz 律成立.

□

11.3 张量场上的协变导数

切丛上的联络可以扩展到任意混合张量丛上.

命题 11.7 (命题)

设 M 是光滑（带边）-流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 则 ∇ 唯一地决定出任意张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 上的一个联络, 也记作 ∇, 使得它满足以下性质:

1. 在 $T^{(1,0)}TM = TM$ 上, ∇ 与给定的联络一致;
2. 在 $T^{(0,0)}TM = M \times \mathbb{R}$ 上, ∇ 由函数的微分给出:

$$\nabla_X f = Xf$$

3. ∇ 满足张量积的 Lebniz 律:

$$\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

4. ∇ 与所有的缩并交换: 若 tr 表示在任意一对合适的指标上的迹, 则

$$\nabla_X (\mathrm{tr}\ F) = \mathrm{tr}\ (\nabla_X F)$$

并且此联络还额外满足以下性质:

(a). ∇ 对于余向量场 ω 和向量场 Y 之间的自然配对满足 Lebniz 律:

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

(b). 对于所有的 $F \in \Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right)$, 光滑 1-形式 $\omega^1, \cdots, \omega^k$, 以及光滑向量场 $Y_1, \cdots, Y_l$, 成立

$$\begin{aligned}
(\nabla_X F)\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, Y_1, \cdots, Y_l\right) = {} & X\left(F\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, Y_1, \cdots, Y_l\right)\right) \\
& - \sum_{i=1}^{k} F\left(\omega^1, \cdots, \nabla_X \omega^i, \cdots \omega^k, Y_1, \cdots, Y_l\right) \\
& - \sum_{j=1}^{l} F\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, Y_1, \cdots, \nabla_X Y_j, \cdots, Y_l\right)
\end{aligned}$$

Proof 我们首先说明满足 1.-4. 的每一族作用在所有从上的联络, 也都满足 a 和 b. 设 ∇ 是这样的一族联络. 为了说明 (a), 注意到 $\langle \omega, Y \rangle = \mathrm{tr}\ (\omega \otimes Y)$, 1.-4. 给出

$$\begin{aligned}
\nabla_X \langle \omega, Y \rangle &= \mathrm{tr}\ (\nabla_X (\omega \otimes Y)) \\
&= (\nabla_X \omega) \otimes Y + \omega \otimes (\nabla_X Y) \\
&= \mathrm{tr}\ ((\nabla_X \omega) \otimes Y) + \mathrm{tr}\ (\omega \otimes (\nabla_X Y)) \\
&= \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle
\end{aligned} \tag{11.1}$$

对于 (b), 我们利用

$$F\left(\omega^1, \cdots, \omega^k, Y_1, \cdots, Y_l\right) = \underbrace{\mathrm{tr} \circ \cdots \circ \mathrm{tr}}_{k+l}\left(F \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_l\right)$$

其中每个缩并算子都作用在 F 的一个上指标和对应的 1-形式的下指标, 或者 F 的一个

下指标和对应的向量场的一个上指标上. 类似 (a) 的证明, 我们有

$$
\begin{aligned}
&X\left(F\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\right)\\
&=\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+l}\left(\nabla_X\left(F\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_l\right)\right)\\
&=\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+l}\left(\left(\nabla_X F\right)\otimes\left(\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_l\right)+F\otimes\left(\nabla_X\left(\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes\right.\right.\right.\\
&=\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+1}\left(\left(\nabla_X F\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_l\right)\right)\\
&=\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+1}\left(\left(\nabla_X F\right)\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_l\right)\\
&+\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}F\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\nabla_X\omega^i\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes Y_l\right)\\
&+\underbrace{\mathrm{tr}\circ\cdots\circ\mathrm{tr}}_{k+1}\left(\sum_{j=1}^{l}F\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k\otimes Y_1\otimes\cdots\otimes\nabla_X Y_j\otimes\cdots\otimes Y_l\right)
\end{aligned}
$$

将迹并移项得到性质 (b).

现在来证明唯一性. 设 ∇ 是满足上述 1.-4. 的联络, 则 (a) 和 (b) 也满足. 注意到 2. 和 (a) 给出每个 $1-$ 形式 ω 的协变导数可以按以下方式计算

$$\left(\nabla_X\omega\right)(Y)=X\left(\omega\left(Y\right)\right)-\omega\left(\nabla_X Y\right) \tag{11.2}$$

1-形式上的联络由原来 TM 上的联络所确定, (b) 给出了计算任意张量场的协变导数的公式, 因此联络是唯一确定的.

现在来说明票再行, 我们按上述相同的方式定义 1-形式的斜边导数, 并用性质 (b) 定义 ∇ 在所有张量丛上的斜边导数.

首先需要说明的是定义的结果对于每个 ω^i 和 Y_j 都在 $C^\infty(M)$ 上是线性的, 从而定义的结果可以称为一个光滑张量场. 将 $f\omega^i$ 代替 ω^i, 或将 fY_j 代替 Y_j. 以 $f\omega^i$ 为例, 容易看出 $X\left(F\left(\omega^1,\cdots,f\omega^i,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\right)$ 及 $F\left(\omega^1,\cdots,f\omega^i,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)$ 以外的项的 $C^\infty(M)$-线性. 对于余下的两项, 注意到

$$
\begin{aligned}
&X\left(F\left(\omega^1,\cdots,f\omega^i,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\right)\\
=&X\left(fF\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\right)\\
=&fX\left(F\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\right)+F\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)(Xf)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&F\left(\omega^1,\cdots,\nabla_X\left(f\omega^i\right),\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)\\
=&fF\left(\omega^1,\cdots,\nabla_X\omega^i,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)+F\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)(Xf)
\end{aligned}
$$

余项抵消, 因此按此方法定义的 ∇ 具有 $C^{\infty}(M)$-线性. ∇ 在 X 上的 $C^{\infty}(M)$ 线性和 F 上的 $\mathbb{R}$ 线性由性质 (b) 和 11.2给出. Lebniz 律由 2. 和 3. 看出. □

命题 11.8 (局部坐标表示)

设 M 是光滑(带边)流形, ∇ 是 TM 上的联络. 设 (E_i) 是 M 上的一个局部标架 (ε^j) 是对应的对偶标架, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是 ∇ 关于此标架的联络系数. 设 X 是光滑向量场 X^iE_i 是在此标架下的局部表示, 则

1. 一个 1-形式 $\omega=\omega_i\varepsilon^i$ 的协变导数由以下给出
$$\nabla_X(\omega)=\left(X(\omega_k)-X^j\omega_i\Gamma_{jk}^i\right)\varepsilon^k$$
2. 若 $F\in\Gamma\left(T^{(k,l)TM}\right)$ 是一个任意阶的光滑混合张量场, 局部表示为
$$F=F_{j_1,\cdots,j_l}^{i_1,\cdots,i_k}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}$$
则 F 的协变导数在局部上由下式给出
$$\nabla_XF=\left(X\left(F_{j_1\cdots j_l}^{i_1\cdots i_k}\right)+\sum_{s=1}^{k}X^mF_{j_1\cdots j_l}^{i_1\cdots p\cdots i_k}\Gamma_{mp}^{i_s}-\sum_{s=1}^{l}X^mF_{j_1\cdots p\cdots j_l}^{i_1\cdots i_k}\Gamma_{mj_s}^{p}\right)^{a}\times$$
$$E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}$$

[a] 记忆公式只需要按合适的顺序分类, 来厘清对 $E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}$ 这一组的贡献. 产生贡献的项是指标至多相差一个的那些. s 表示 ∇_X 出现在 s 位置的项的贡献, 在其下的 p 表示 ∇_X 在第 s 个位置作用在 E_p 上的贡献, 贡献为 $F_{j_1\cdots j_l}^{i_1\cdots p\cdots i_k}$ 多个 $X(E_p)$ 在 E_{i_s} 下的分量 $X^m\Gamma_{mp}^{i_s}$ ♠

Proof 对于 1.

$$\begin{aligned}\nabla_X(\omega)&=\nabla_X\left(\omega_i\varepsilon^i\right)\\&=(X\omega_i)\varepsilon^i+\omega_i\left(\nabla_X\varepsilon^i\right)\\&=(X(\omega_k))\varepsilon^k+\omega_i\left(\nabla_{X^jE_j}\varepsilon^i\right)\\&=(X(\omega_k))\varepsilon^k+X^j\omega_i\left(\nabla_{E_j}\varepsilon^i\right)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla_{E_j}\varepsilon^i(Y)&=E_j\left(\varepsilon^i(Y)\right)-\varepsilon^i\left(\nabla_{E_j}Y\right)\\&=E_j\left(\varepsilon^i\left(Y^kE_k\right)\right)-\varepsilon^i\left(\nabla_{E_j}\left(Y^kE_k\right)\right)\\&=E_jY^i-\varepsilon^i\left(\left(E_jY^k\right)E_k+Y^k\nabla_{E_j}E_k\right)\\&=E_jY^i-\varepsilon^i\left(\left(E_jY^k\right)E_k\right)-\varepsilon^i\left(Y^k\Gamma_{jk}^lE_l\right)\\&=E_jY^i-E_jY^i-Y^k\varepsilon^i\left(\Gamma_{jk}^lE_l\right)\\&=-\Gamma_{jk}^i\varepsilon^k(Y)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla_X(\omega) &= (X(\omega_k))\varepsilon^k - X^j\omega_i\Gamma^i_{jk}\varepsilon^k \\ &= \left(X(\omega_k) - X^j\omega_i\Gamma^i_{jk}\right)\varepsilon^k\end{aligned}$$

对于 2. 考虑

$$\begin{aligned}&\nabla_X\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}\right) \\ &= X\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l} \\ &+ \sum_{s=1}^{k}F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes\nabla_X E_{i_s}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l} \\ &+ \sum_{r=1}^{l}F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\nabla_X\varepsilon^{j_r}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}\end{aligned}$$

其中

$$X(E_{i_s}) = \left(X^m\Gamma^p_{mi_s}\right)E_p,\quad \nabla_X\varepsilon^{j_r} = -\left(X^m\Gamma^{j_r}_{mp}\right)\varepsilon^p$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{k}F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes\nabla_X E_{i_s}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l} \\ &= \sum_{s=1}^{k}\left(X^m\Gamma^p_{mi_s}\right)F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_p\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}\end{aligned}$$

交换 i_s 和 p 的求和次序, 得到

$$\sum_{s=1}^{k}\left(X^m\Gamma^{i_s}_{mp}\right)F^{i_1\cdots p\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_s}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}$$

对于余标架的部分, 有类似地结论. 求和得到 $\nabla_X F$ 的局部表示.

命题 11.9 (全协变导数)

设 M 是光滑（带边）-流形, ∇ 是 TM 上的联络. 对每个 $F\in\Gamma\left(T^{(k,l)}TM\right)$, 映射

$$\nabla F : \underbrace{\Omega^1(M)\otimes\cdots\otimes\Omega^1(M)}_{k\text{个}}\otimes\underbrace{\mathfrak{X}(M)\otimes\cdots\otimes\mathfrak{X}(M)}_{l+1\text{个}}\to C^\infty(M)$$

$$(\nabla F)\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l,X\right) = (\nabla_X F)\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,Y_1,\cdots,Y_l\right)$$

定义出 M 上的一个光滑 $(k,l+1)$-张量场, 称为 F 的全协变导数.

Proof 由 ∇_X 对 X 的 $C^\infty(M)$-线性, ∇F 在第 $k+l+1$ 个分量上具有 $C^\infty(M)$ 线性; 由 F 是 $k+l$-张量场, ∇F 在前 $k+l$ 个分量上都具有 $C^\infty(M)$ 线性. 从而 ∇F 对所有分量都具有 $C^\infty(M)$-线性. 由张量场的刻画引理, ∇F 是一个 $(k,l+1)$-张量场. □

用一个分号来区分由微分导致的指标：例如，对于向量场 $Y=Y^iE_i$，$(1,1)$-张量场 ∇Y 的微分记作 $Y^i_{;j}$，从而

$$\nabla Y = Y^i_{;j}E_i\otimes\varepsilon^j$$

其中

$$Y^i_{;j}=E_jY^i+Y^k\Gamma^i_{jk}$$

对于 1-形式 ω，类似地有

$$\nabla\omega=\omega_{i;j}\varepsilon^i\otimes\varepsilon^j,\quad \omega_{i;j}=E_j\omega_i-\omega_k\Gamma^k_{ji}$$

更一般地，我们有以下命题

命题 11.10

设 M 是光滑（带边）-向量场，∇ 是 TM 上的一个联络；令 (E_i) 是 TM 的一个光滑局部标架 $\{\Gamma^k_{ij}\}$ 是相应的联络系数. 则 (k,l)-张量场 F 的全协变导数的关于这组标架的表示由以下给出

$$F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l;m}=E_m\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)+\sum_{s=1}^{k}F^{i_1\cdots p\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\Gamma^{i_s}_{mp}-\sum_{s=1}^{l}F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots p\cdots j_l}\Gamma^p_{mj_s}\text{[a]}$$

[a] ∇_XF 与 $\nabla F(\cdot,\cdots,\cdot,X)$ 相比，就是直接提前用一堆 ε^m 把 X 吃进去变成一堆数 X^m 了，把 X^m 还回去不直接写出来就是这个公式

Proof ∇_XF 在 $E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}$ 下的系数为

$$X\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)+\sum_{s=1}^{k}X^mF^{i_1\cdots p\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\Gamma^{i_s}_{mp}-\sum_{s=1}^{l}X^mF^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots p\cdots j_l}\Gamma^p_{mj_s}$$

后两项将 X^m 写作 $\varepsilon^m(X)$，就给出了它们为 $F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l;m}$ 的贡献. 对于第一项，

$$X\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)=(X^mE_m)\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)=E_m\left(F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)\varepsilon^m(X)$$

综合以上可得所需公式.

□

命题 11.11

设 F 是一个光滑 (k,l)-张量场，G 是一个光滑 (r,s)-张量场，则 $F\otimes G$ 的全协变导数的分量由以下给出

$$(\nabla(F\otimes G))^{i_1\cdots i_kp_1\cdots p_r}_{j_1\cdots j_lq_1\cdots q_s;m}=F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l;m}G^{p_1\cdots p_r}_{q_1\cdots q_s}+F^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}G^{p_1\cdots p_r}_{q_1\cdots q_s;m}$$

11.3.1 第二协变导数

定义 11.4

对于给定的切从上的联络 ∇, 将它扩展到任意阶张量丛上. (k,l)-张量 F, 我们可以对 F 的全协变导数再取一次协变导数, 得到一个 $(k,l+2)$-张量场 $\nabla^2 F := \nabla(\nabla F)$
.

对于给定的 $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, 定义一个 (k,l)-张量场 $\nabla^2_{X,Y}F$ 为

$$\nabla^2_{X,Y}F(\cdots) := \nabla^2 F(\cdots, Y, X)$$

♣

Remark $\nabla^2_{X,Y}F$ 与 $\nabla_X(\nabla_Y F)$ 不同, 前者具有对 Y 有 $C^\infty(M)$-线性, 而后者不然. 事实上, 二者的关系由以下命题给出:

命题 11.12

令 M 是光滑（带边）-流形, ∇ 是 TM 上的联络. 则对于每个光滑向量场或张量场 F,

$$\nabla^2_{X,Y}F = \nabla_X(\nabla_Y F) - \nabla_{(\nabla_X Y)}F$$

♠

Proof 注意到

$$\nabla_Y F = \operatorname{tr}(\nabla F \otimes Y)$$

类似地

$$\nabla^2_{X,Y}F = \operatorname{tr}\left(\operatorname{tr}\left(\nabla^2 F \otimes X\right)\right) \otimes Y$$

由 ∇_X 与缩并的交换性

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla_Y F) &= \nabla_X(\operatorname{tr}(\nabla F \otimes Y)) \\
&= \operatorname{tr}(\nabla_X(\nabla F \otimes Y)) \\
&= \operatorname{tr}(\nabla_X(\nabla F) \otimes Y + \nabla F \otimes \nabla_X Y) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{tr}\left(\nabla^2 F \otimes Y\right)\right) + \operatorname{tr}(\nabla F \otimes \nabla_X Y) \\
&= \nabla^2_{X,Y}F + \nabla_{(\nabla_X Y)}F
\end{aligned}$$

□

Example 11.3 协变 Hessian 设 u 是 M 上的光滑函数. 则 $\nabla u \in \Gamma\left(T^{(0,1)}TM\right) = \Omega^1(M)$ 就是 1-形式 $\mathrm{d}u$: $\nabla_u(X) = \nabla_X u = Xu = \mathrm{d}u(X)$. 2-张量 $\nabla^2 u = \nabla(\mathrm{d}u)$ 称为 u 的协变 Hessian. 上面的命题表明它在光滑向量场 X,Y 上的作用由以下给出

$$\nabla^2 u(Y,X) = \nabla^2_{X,Y}u = \nabla_X(\nabla_Y u) - \nabla_{(\nabla_X Y)}u = X(Yu) - (\nabla_X Y)u$$

在任意局部坐标上,

$$\nabla^2 u = u_{;ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \quad u_{;ij} = \partial_j \partial_i u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u$$

11.4 沿曲线的向量场和张量场

定义 11.5

1. 设 M 是光滑（带边）流形. 给定光滑曲线,$\gamma : I \to M$, 沿 γ 的一个向量场，是指一个连续映射 $V : I \to TM$, 使得 $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 对于每个 $t \in I$ 成立.
2. 沿 γ 的全体向量场记作 $\mathfrak{X}(\gamma)$.

♣

Remark

1. 称 V 是沿 γ 的一个光滑向量场, 若它作为从 I 到 TM 的映射是光滑的.
2. 在逐点加法和数乘下, $\mathfrak{X}(\gamma)$ 构成一个 $C^\infty(I)$-模.

Example 11.4

1. 光滑曲线 γ 在每一点 t 处的速度 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 共同构成一个沿 γ 的光滑向量场.
2. 若 γ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线, 令 $N(t) = R\gamma'(t)$, 其中 R 是逆时针旋转 $\pi/2$ 的映射, 则 $N(t)$ 始终与 $\gamma'(t)$ 正交. 在标准坐标系, $N(t) = (-\dot{\gamma}^2(t), \dot{\gamma}^1(t))$, 从而 N 是沿 γ 的一个光滑向量场.

命题 11.13

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 沿 γ 的一个向量场 $V(t) : I \to TM$ 是可扩张的[a], 若存在一个光滑向量场 $\tilde{V}$, 它定义在 M 的一个包含了 γ 的像的开集上, 使得 $V = \tilde{V} \circ \gamma$
.

[a]沿曲线的向量场实际上不是流形上的向量场, 由于 γ 可能把 I 上不同的点映到 M 上的同一点, 我们可能无法直接通过 $V(t)$ 给出 M 上的一个向量场. 因此我们在沿曲线的向量场中, 需要再特别取出一部分更好的.

♠

Remark 若 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 但是 $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$, 则 γ' 不是可扩张的.

定义 11.6

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线. 一个沿 γ 的张量场，是指一个从 I 到某个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 的连续映射 σ, 使得 $\sigma(t) \in T^{(k,l)}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$ 对每个 $t \in I$ 成立.

♣

Remark

1. 称 σ 是一个沿 γ 的光滑张量场，若在此之上它是从 I 到 $T^{(k,l)}TM$ 的光滑映射.
2. 类似地，称沿 γ 的一个光滑张量场是可扩张的，若存在定义在 $\gamma(I)$ 的邻域上的光滑张量场 $\tilde{\sigma}$，使得 $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \gamma$

11.4.1 沿曲线的协变导数

定理 11.2

令 M 是光滑（带边）-流形，∇ 是 TM 上的一个联络. 对于每个光滑曲线，$\gamma : I \to M$，∇ 决定了唯一的算子

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

称为是沿 γ 的斜边导数，使得它满足以下几条性质

1. $\mathbb{R}$-线性：
$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \quad a, b \in \mathbb{R}$$
2. Lebniz 律：
$$D_t(fV) = f'V + fD_tV, \quad f \in C^\infty(I)$$
3. 若 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 是可扩张的，则对于每个 V 的扩张 $\tilde{V}$，
$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}^{a}$$

[a]把无交叉的沿曲线向量场的协变导数，拉回到流形上面.

Remark 对于沿 γ 的任意阶张量场空间，存在类似地结论.

Proof 首先说明唯一性. 设 D_t 是满足以上三条的算子，任取 $t_0 \in I$，接下来说明 D_tV 在 t_0 处的取值由 V 在任意包含了 t_0 的区间 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 上所决定（若 t_0 是 I 的端点，则将 γ 的坐标表示延拓到稍大一些的区间上，在其上证明唯一性再限制回 I 上）. 由 $\mathbb{R}$-线性，只需证明若 V_1 是在 t_0 的某个邻域 U 上退化的向量场，则 $D_tV_1(t_0) = 0$. 为此，取 t_0 的支撑在 U 上的光滑 bump 函数 $\varphi \in C^\infty(I)$，则

$$0 = D_t(\varphi V_1) = \varphi' V_1 + \varphi D_t V_1$$

在 t_0 处取值，得到

$$D_tV_1(t_0) = 0$$

故 D_t 具有关于 V 的局部性. 取 M 的在 $\gamma(t_0)$ 附近的一个光滑坐标 (x^i), 设

$$V(t) = V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}$$ [2]

由于每个 ∂_j 都是可扩张的, 我们有

$$\begin{aligned}
D_t V(t) &= D_t\left(V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&= \dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)} + V^j(t)\,D_t\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&= \dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)} + V^j(t)\,\nabla_{\gamma'(t)}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\\
&= \dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)} + V^j(t)\left(\nabla_{\dot{\gamma}^i(t)\,\partial_i|_{\gamma(t)}}\,\partial_j|_{\gamma(t)}\right)\\
&= \dot{V}^k(t)\,\partial_k|_{\gamma(t)} + V^j(t)\left(\dot{\gamma}^i(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\,\partial_k|_{\gamma(t)}\right)\\
&= \left(\dot{V}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\,V^j(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}
\end{aligned}$$ [3]

这表明若这样的算子 D_t 存在, 则他是被唯一决定的.

对于存在性, 若 $\gamma(I)$ 包含在单个坐标卡里, 我们可以直接用

$$D_t V(t) = \left(\dot{V}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\,V^j(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)} \tag{11.3}$$

来定义 $D_t V$. 易见 D_t 具有 $\mathbb{R}$ 线性. 对于 Lebniz 律, 计算

$$\begin{aligned}
D_t(fV) &= \left(f\dot{V}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\,f(t)\,V^j(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}\\
&= \left(f'(t)\,V^k(t) + f(t)\,\dot{V}^k(t) + \dot{\gamma}(t)\,f(t)\,V^j(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}\\
&= f(t)\,D_t V(t) + f'(t)\,V(t)
\end{aligned}$$

第三条由 $D_t V$ 的定义, 以及 $\nabla_{\gamma'(t)}(\cdot)$ 的局部性可以看出.

对于一般的情况, 我们用一组坐标卡覆盖 $\gamma(I)$, 并在每一个局部坐标上按上述方式定义 $D_t V$, 局部性给出图册在相交处的一致性, 故存在性得证. □

命题 11.14

设 M 是光滑（带边）流形, 令 ∇ 是 TM 上的一个联络, 令 $p \in M$, $v \in T_pM$. 设 Y 和 $\tilde{Y}$ 两个光滑向量场, 光滑曲线 $\gamma: I \to M$, 使得 $\gamma(t_0) = p, \gamma'(t_0) = v$, 且 Y 和 $\tilde{Y}$ 在 $\gamma(I)$ 上一致, 则 $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$ ♠

Remark 于是我们得到了联络关于 Y 的更强的局部性, 它不仅仅是由邻域所决定的, 还

[2] 虽然对于一般的曲线, 我们无法直接将像集上的协变导数作为它的定义, 但是由于协变导数是被希望具有线性的, 因此只需要在局部上将不好的沿曲线的向量场线性分解成一些容易定义出协变导数的好的向量场, 就可以先给出局部上的定义.

[3] 比对一般的斜边导数来看, 就是把沿 X 的协变导数取成是沿曲线切向 γ', $X(Y^k)$ 表现出来就是直接对分量函数求导 $\frac{\partial}{\partial t}(V^k) = \dot{V}^k$, X^iY^j 表现出来就是 $\dot{\gamma}^iV^j$, X^i 对应的是曲线切向的分量 $\dot{\gamma}^i$, Y^j 对应是求导对象向量场的分量 V^j

是由沿着求导方向的附近的曲线像所决定的.

Proof 定义沿 γ 的光滑向量场 Z, $Z(t) = Y_{\gamma(t)} = \tilde{Y}_{\gamma(t)}$, 则 Y 和 $\tilde{Y}$ 都是 Z 的扩张, 由沿光滑向量场的协变导数的性质 3, $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y} = D_t Z(t_0)$

□

11.4.2 测地线

定义 11.7 (加速度和测地线)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络.

- 对于每个光滑曲线 $\gamma : I \to M$, 定义 γ 的加速度, 为沿 γ 的向量场 $D_t\gamma'$.
- 称光滑曲线 γ 为一个（关于 ∇）的测地线[a]，若它的加速度为零: $D_t\gamma' \equiv 0$. 设在光滑坐标 (x^i) 下, $\gamma(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$, 则由（11.4.1）, γ 是测地线当且仅当它的分量函数满足以下测地线方程:

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0$$

[a]物体不受外力的最自然的运动轨迹

定理 11.3 (测地线的局部存在唯一性)

设 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 对于每个 $p \in M$, $w \in T_pM$ 以及 $t_0 \in \mathbb{R}$. 存在包含了 t_0 的一个开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$, 以及一个测地线 $\gamma : I \to M$, 使得 $\gamma(t_0) = p$, $\gamma'(t_0) = w$. 并且任意两个这样的测地线在定义域的公共部分一致.

定义 11.8

1. 称测地线 $\gamma : T \to M$ 是极大的, 若它不能被延拓到更大的区间上, 即: 不存在定义在一个严格包含了 I 的区间 $\tilde{I}$ 上的测地线 $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$, 使得 $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$.
2. 一个测地线段是指定义域为紧区间的测地线.

Proof 主要用到 ODE 的解的存在唯一性, 之后写.

□

推论 11.1 (极大测地线的存在唯一性)

设 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的联络. 对于每个 $p \in M$, 和 $v \in T_pM$, 存在唯一地极大的测地线 $\gamma : I \to M$, 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, 其中 I 是包含了 0 的一个开区间.

Proof 给定 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$. 令 I 是全体可以定义出测地线的包含了 0 的开区间的并. 由测地线的存在唯一性, 所有满足条件的测地线在相交处一致, 因此它们共同定义出一个测地线 $\gamma : I \to M$, 显然是满足给定条件的唯一的极大测地线.

□

Example 11.5 $\mathbb{R}^n$ 上关于欧式联络的极大测地线就是常值曲线和具有常值速度的直线.

定义 11.9

满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = v$ 的唯一的极大测地线 γ, 通常被称为是以 p 为起点, v 为初速度的测地线, 记作 γ_v.

♣

11.4.3 平行移动

定义 11.10

设 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 称一个沿光滑曲线 γ 的光滑向量场或张量场 V, 是沿 γ（关于 ∇）平行的, 若 $D_tV \equiv 0$.

♣

Remark

1. 测地线可以被描述成：速度向量场沿自身平行的光滑曲线.

Example 11.6 令 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的一个光滑向量场. 则 V 是关于欧式联络沿 γ 平行的, 当且仅当 V 的分量函数皆为常数.

命题 11.15

光滑曲线 γ 的局部坐标表示为 $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$, 则由公式11.4.1, 向量场 V 沿 γ 平行, 当且仅当

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\,\dot{\gamma}^i(t)\,\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)), \quad k = 1, \cdots, n$$

♠

Remark 对于光滑张量场, 可以依据11.10得到类似地结论.

定理 11.4 (线性 ODE 的存在唯一性和光滑性)

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开区间, 且对于 $1 \le j, k \le n$, 令 $A^k_j : I \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 对于所有的 $t_0 \in I$, 和每个初值向量 $(c^1, \cdots, c^n) \in \mathbb{R}^n$, 以下线性初值问题

$$\dot{V}^k(t) = A^k_j(t)\,V^j(t)$$
$$V^k(t_0) = c^k$$

有在 I 上的唯一光滑解，并且解是依赖于 $(t,c) \in I \times \mathbb{R}^n$ 光滑的。

定理 11.5 (平行移动的存在唯一性)

设 M 是（带边）-光滑流形，∇ 是 TM 上的一个联络。给定光滑曲线 $\gamma : I \to M, t_0 \in I$，以及向量 $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ 或张量 $v \in T^{k(k,l)}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$，存在唯一的沿 γ 平行的向量场或张量场 V，使得 $V(t_0) = v$，称为是 v 沿 γ 的平行移动。

定义 11.11 (平行移动映射)

对于每个 $t_0, t_1 \in I$，定义映射

$$P^{\gamma}_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

称为是平行移动映射，为 $P^{\gamma}_{t_0 t_1}(v) := V(t_1), v \in T_{\gamma(t_0)}M$，其中 V 是 v 沿 γ 的平行移动。

Remark

1. 由于平行性的方程是线性的 ODE,$P^{\gamma}_{t_0 t_1}$ 是线性映射。又 $P^{\gamma}_{t_1 t_0}$ 是它的一个逆，因此平行移动映射是同构。

Idea 流形上不同点 p, q 的切空间 T_pM, T_qM 本无自然的同构，但是平行移动映射 $P^{\gamma}_{p,q}$ 沿从 p 到 q 路径 γ 提供了人为但比较一致的比较规则。

此外，还可以将研究的曲线放宽为逐段光滑的曲线，相应的有沿逐点光滑曲线的平行移动的存在唯一性。

接下来介绍一个在处理平行移动的问题时非常有用的工具

定义 11.12 (平行标架)

给定 $T_{\gamma(t_0)}M$ 的一组基 $(b_1, \cdots, b_n)$，可以让每个 b_i 沿着 γ 做平行移动，得到 n 个沿 γ 平行的向量场 $(E_1, \cdots, E_n)$。由于平行移动映射是是线性同构，对于每个 t，$(E_i(t))$ 在 $\gamma(t)$ 处构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基。称这样的沿 γ 的 n 个向量场为沿 γ 的平行标架 .

命题 11.16

设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架。每个沿 γ 的向量场 $V(t)$ 表为 $V(t) = V^i(t) E_i(t)$.

1. $V(t)$ 沿 γ 的协变导数表为

$$D_t V(t) = \dot{V}^i(t) E_i(t)$$

2. $V(t)$ 沿 γ 平行，当且仅当 $V^i(t)$ 均为常数。

Proof 由 D_t 满足的 Lebniz 律, 和 E_i 的平行性: $D_tE_i=0$, 立即得到.

□

定理 11.6 (平行移动决定的协变微分)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的联络. 设 $\gamma: I\to M$ 是一个光滑曲线, V 是沿 γ 的光滑向量场, 则对于每个 $t_0\in I$,

$$D_tV(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{P^{\gamma}_{t_1t_0}V(t_1)-V(t_0)}{t_1-t_0}$$

Proof 设 (E_i) 是沿 γ 的平行标架, 记 $V(t)=V^i(t)E_i(t), t\in I$. 一方面我们有 $D_t(V_0)=\dot{V}^i(t_0)E_i(t_0)$, 另一方面对于每个固定的 $t_1\in I$, $V(t_1)$ 沿 γ 的平行移动是沿 γ 的一个常系数的向量场 $W(t)=V^i(t_1)E_i(t)$，从而 $P^{\gamma}_{t_1t_0}V(t_1)=V^i(t_1)E_i(t_0)$，带入后取极限 $t_1\to t_0$, 即可得到极限式等于 $\dot{V}^i(t_0)E_i(t_0)$.

□

推论 11.2 (平行移动决定的联络)

设 M 是光滑（带边）流形, ∇ 是 TM 上的一个联络. 设 X,Y 是沿 M 的光滑向量场. 对于每个 $p\in M$,

$$\nabla_XY\big|_p=\lim_{h\to 0}\frac{P^{\gamma}_{h0}Y_{\gamma(h)}-Y_p}{h}$$

其中 $\gamma: I\to M$ 是任意使得 $\gamma(0)=p$ 以及 $\gamma'(0)=X_p$ 的光滑曲线.

第 11 章 练习

Problem 11.1 设 M 是光滑 n-流形, ∇ 是 TM 上的一个联络, (E_i) 是某个开子集 $U\subseteq M$ 上的局部标架, (ε^i) 是对偶的余标架.

1. 说明存在唯一的 U 上光滑 1-形式的 $n\times n$ 矩阵 $(\omega_i{}^j)$，称为这组标架的联络 1-形式, 使得

$$\nabla_XE_i=\omega_i^j(X)E_j$$

对于所有的 $X\in\mathfrak{X}(U)$ 成立.

2. CARTAN 第一结构方程: 证明这些微分形式满足以下方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^j=\varepsilon^i\wedge\omega_i^j+\tau^j$$

其中 $\tau^1,\cdots,\tau^n\in\Omega^2(M)$ 是挠 2-形式, 通过以下挠张量 τ 和局部标架 (E_i) 定义

$$\tau(X,Y)=\tau^j(X,Y)E_j$$

Proof 若存在这样的 1-形式 ω, 则

$$\Gamma_{ij}^{k}E_k=\nabla_{E_i}E_j=\omega_j^k\left(E_i\right)E_k$$

得到 $\omega_j^k\left(E_i\right)=\Gamma_{ij}^k, \forall i,j,k$. 于是我们定义

$$\omega_i^j\left(X\right)=X^k\Gamma_{ki}^j,\quad \forall X=X^kE_k\in\mathfrak{X}\left(U\right)$$

则由 Γ_{ki}^j 的光滑性, ω_i^j 是光滑的余标架. 对于任意的 $X=X^kE_k\in\mathfrak{X}\left(U\right)$,

$$\nabla_XE_i=X^k\nabla_{E_k}E_i=X^k\Gamma_{ki}^lE_l=\omega_i^l\left(X\right)E_l=\omega_i^j\left(X\right)E_j$$

接下来证明 CARTAN 第一结构方程, 一方面

$$\mathrm{d}\varepsilon^j\left(E_k,E_l\right)=E_k\left(\varepsilon^j\left(E_l\right)\right)-E_l\left(\varepsilon^j\left(E_k\right)\right)-\varepsilon^j\left(\left[E_k,E_l\right]\right)=-\varepsilon^j\left(\left[E_k,E_l\right]\right)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon^i\wedge\omega_i^j+\tau^j\right)\left(E_k,E_l\right)&=\varepsilon^i\left(E_k\right)\omega_i^j\left(E_l\right)-\varepsilon^i\left(E_l\right)\wedge\omega_i^j\left(E_k\right)+\tau^j\left(E_k,E_l\right)\\&=\omega_k^j\left(E_l\right)-\omega_l^j\left(E_k\right)+\varepsilon^j\left(\tau\left(E_k,E_l\right)\right)\end{aligned}$$

其中

$$\omega_k^j\left(E_l\right)=\varepsilon^j\left(\nabla_{E_l}E_k\right)=\Gamma_{lk}^j,\quad \omega_l^j\left(E_k\right)=\varepsilon^j\left(\nabla_{E_k}E_l\right)=\Gamma_{kl}^j$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^j\left(\tau\left(E_l,E_l\right)\right)&=\varepsilon^j\left(\nabla_{E_k}E_l-\nabla_{E_l}E_k-\left[E_k,E_l\right]\right)\\&=\Gamma_{kl}^j-\Gamma_{lk}^j-\varepsilon^j\left(\left[E_k,E_l\right]\right)\end{aligned}$$

于是

$$\left(\varepsilon^j\wedge\omega_i^j+\tau^j\right)\left(E_k,E_l\right)=-\varepsilon^j\left(\left[E_k,E_l\right]\right)=\mathrm{d}\varepsilon^j\left(E_k,E_l\right)$$

因此

$$\mathrm{d}\varepsilon^j=\varepsilon^i\wedge\omega_i^j+\tau^j$$

□

第 12 章 Levi-Civita 联络

12.1 切联络

定义 12.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形, $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, V 是沿 γ 的在 TM 中取值的向量场, 则 V 既可以视作 M 的关于切向联络的沿 γ 的向量场, 又可以视作 $\mathbb{R}^n$ 的关于欧式联络的沿 γ 的向量场. 令 $\overline{D}_t V$ 表示 V 关于欧式联络 $\overline{\nabla}$ 的协变导数, $D_t^\top V$ 表示 V 关于切向联络 $\nabla^\top$ 的协变导数.

命题 12.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形, $\gamma : I \to M$ 是 M 上的光滑曲线, V 是取值在 TM 的沿 γ 的光滑向量场. 则对于每个 $t \in I$,

$$D_t^\top V(t) = \pi^\top \left(\overline{D}_t V(t) \right)$$

Idea 能直接使用的是两种联络的关系, 建立两种曲线协变导数的联系需要通过曲线导数与联络的关系, 间接使用两种联络间的关系. 曲线协变导数与联络的关系是通过坐标表示实现的, 而两者联络的关系是通过正交投影实现的, 因此我们需要找到与正交投影相容的坐标表示, 即我们需要适配于 M 的正交标架. M 的嵌入性给出了这样的正交标架（命题9.15）.

Proof 任取 $t_0 \in I$, 存在 $\gamma(t_0)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的邻域 U, 使得 U 上存在 $\mathbb{R}^n$ 的适配于 TM 的正交标架 $(E_1, \cdots, E_n)$, 这组标架的前 k 个 $(E_1, \cdots, E_k)$ 在 $M \cap U$ 上的限制构成 TM 的一个正交标架, 其中 $k = \dim M$. 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subseteq U$, 则 V 在 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 可以被分解为

$$V(t) = V^1(t) \left. E_1 \right|_{\gamma(t)} + \cdots + V^k(t) \left. E_k \right|_{\gamma(t)}$$

此时有

$$
\begin{aligned}
\pi^{\top}\left(\overline{D}_t V(t)\right) &= \pi^{\top}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\, \overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\, \pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\, \nabla^{\top}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right) \\
&= D_t^{\top} V(t)
\end{aligned}
$$

□

推论 12.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形. 一个光滑曲线 $\gamma : I \to M$ 是关于 M 上切联络的测地线, 当且仅当对于所有的 $t \in I$ 它的加速度 $\gamma''(t)$ 与 $T_{\gamma(t)}M$ 正交.

Proof 由于 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式联络的联络系数均为 0, 于是 γ' 沿 γ 的欧式协变导数就是加速度: $\overline{D}_t\gamma'(t) = \gamma''(t)$. 故 γ 是测地线, 当且仅当 $\bar{D}_t\gamma'(t) = \gamma''(t) \equiv 0$, 当且仅当 $\pi^{\top}(\gamma''(t)) \equiv 0$, 即 $\gamma''(t)$ 与 $T_{\gamma(t)}M$ 正交对于所有的 $t \in I$ 成立.

□

12.2 抽象 Riemann 流形上的联络

12.2.1 度量联络

定义 12.2

设 g 是光滑（带边）流形 M 上的联络或伪联络. 称 TM 上的联络 ∇ 是与 g 相容的, 或为一个度量联络, 若它对于所有的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 满足以下乘积律:

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

命题 12.2 (度量联络的等价刻画)

令 (M, g) 是（带边）Riemann 流形或伪-Riemann 流形, ∇ 是 TM 上的一个联络, 则以下几条等价:

1. ∇ 与 g 相容: $\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.
2. g 关于 ∇ 平行: $\nabla g \equiv 0$ [a].

3. 在任意光滑局部标架 (E_i) 下, ∇ 的联络系数满足

$$\Gamma_{ki}^{l} g_{lj} + \Gamma_{kj}^{l} g_{il} = E_k\left(g_{ij}\right).$$[b]

4. 若 V, W 是沿任意光滑曲线 γ 的光滑向量场, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle$$

5. 若 V, W 是沿 M 上的光滑曲线 γ 平行的向量场, 则 $\langle V, W\rangle$ 沿 γ 是常值的.
6. 任给 M 上的光滑曲线 γ, 每个沿 γ 的平行移动都是线性的等距同构.
7. 给定 M 上的任意光滑曲线 γ, 每个在 γ 一点处的正交基, 都可以延拓成沿 γ 平行的正交标架.

[a] ∇g 可以看成是平行移动偏离刚性的程度

[b] Γ 的左下指标是作用在 g_{ij} 的标架,Γ 的右下指标表示 g_{ij} 中跑动的指标, 指标随着 Γ 的上标跑动.

Proof 首先证明 1. $\iff$ 2. , 由命题 11.7, 对称 2-张量 g 的全协变导数由以下给出

$$(\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

其中 $X(g(Y, Z)) = \nabla_X\langle Y, Z\rangle$.

为了说明 2. $\iff$ 3., 考虑 ∇_g 在光滑局部标架 (E_i) 下的分量

$$g_{ij;k} = E_k\left(g_{ij}\right) - g_{lj}\Gamma_{ki}^{l} - g_{il}\Gamma_{kj}^{l}$$

$\nabla g \equiv 0$ 当且仅当这些分量全为零.

现在来说明 1. $\iff$ 4.. 设 V, W 是沿光滑曲线 $\gamma: I \to M$ 的光滑向量场. 给定 $t_0 \in I$, 在 $\gamma(t_0)$ 的一个邻域上选择坐标系 (x^i), 并设 $V = V^i\partial_i, W = W^j\partial_j$, 对于某些光滑函数 $V^i, W^j: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ 成立. 由 ∂_i, ∂_j 的可扩张性, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V^i W^j\langle\partial_i, \partial_j\rangle\right) \\ &= \left(\dot{V}^i W^j + V^i\dot{W}^j\right)\langle\partial_i, \partial_j\rangle + V^i W^j\nabla_{\gamma'(t)}\langle\partial_i, \partial_j\rangle\end{aligned}$$

若 1. 成立, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle &= \left[\left(\dot{V}^i W^j\langle\partial_i, \partial_j\rangle + V^i W^j\left\langle\nabla_{\gamma'(t)}\partial_i, \partial_j\right\rangle\right)\right] + \left[\left(V^i\dot{W}^j\langle\partial_i, \partial_j\rangle\right) + V^i W^j\left\langle\partial_i, \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j\right\rangle\right] \\ &= \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle\end{aligned}$$

在 t_0 附近成立. 反之, 若 4. 成立, 则对于任意的 X, 选取 $\gamma: (-1, 1) \to M$, 使得

$(\gamma(0), \gamma'(0)) = (p, X_p)$，则

$$\begin{aligned}\nabla_{X_p}\langle Y_p, Z_p\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t))\rangle \\ &= \langle D_t Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t))\rangle + \langle Y(\gamma(t)), D_t Z(\gamma(t))\rangle \\ &= \langle \nabla_{X_p} Y_p, Z_p\rangle + \langle Y_p, \nabla_{X_p} Z_p\rangle\end{aligned}$$

故

$$\nabla_X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

在 p 附近成立.

现在来说明 $4. \implies 5. \implies 6. \implies 7. \implies 4.$.

若 4. 成立, 设 V, W 是沿 γ 平行的, 有 $D_tV, D_tW = 0$, 从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle = 0$, 故 $\langle V, W\rangle$ 是常值的.

若 5. 成立, 任取 $T_{\gamma(t_0)}M$ 上的两个向量 v_0, w_0, 设 V, W 是它们沿 γ 平行的向量场, 使得 $V(t_0) = v_0, W(t_0) = w_0, P^{\gamma}_{t_0t_1} = V(t_1), P^{\gamma}_{t_0t_1} = W(t_1)$. 因为 $\langle V, W\rangle$ 是沿 γ 常值的, 立即有 $\langle P^{\gamma}_{t_0t_1}v_0, P^{\gamma}_{t_0t_1}w_0\rangle = \langle V(t_1), W(t_1)\rangle = \langle V(t_0), W(t_0)\rangle = \langle v_0, w_0\rangle$, 个 $P^{\gamma}_{t_0t_1}$ 是一个线性的等距同构.

若 6. 成立, 设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, (b_i) 是 $T_{\gamma(t_0)}M$ 的一个正交基, $t_0 \in I$. 可以将每个 b_i 通过平行移动扩展为沿 γ 平行的一个光滑向量场 E_i, 由于对于任意的 $t_1 \in I$,$P^{\gamma}_{t_0t_1}$ 是线性同构, 故 (E_i) 在 γ 的每个点是都是标准正交基.

若 7. 成立, 设 V, W 是沿光滑曲线 γ 的光滑向量场, 则存在沿 γ 平行的正交标架 (E_i). 我们设 $V = V^iE_i, W = W^jE_j$，则正交性意味着 $g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle$，沿 γ 取常值（±1 或 0）. 平行性给出 $D_tV = D_t(V^iE_i) = \dot{V}^iE_i + V^iD_tE_i = \dot{V}^iE_i$, 类似地 $D_tW = \dot{W}^iE_i$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i V^iW^i\right) \\ &= \sum_i\left(\dot{V}^iW^i + \dot{W}^iV^i\right) \\ &= \dot{V}^iW^j\langle E_i, E_j\rangle + V^i\dot{W}^j\langle E_i, E_j\rangle \\ &= \langle D_tV, W\rangle + \langle V, D_tW\rangle\end{aligned}$$

□

推论 12.2

设 (M, g) 是（带边）Riemann-流形或伪-Riemann 流形, ∇ 是 M 上的度量联络, $\gamma : I \to M$ 是一个光滑曲线.

1. $|\gamma'(t)|$ 是常值，当且仅当对于任意的 $t \in I$，都有 $D_t\gamma'(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 正交；
2. 若 γ 是测地线，则 $|\gamma'(t)|$ 是常值.

Proof

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle = 2\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$$
   故 $|\gamma'(t)|$ 是常值，当且仅当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle \equiv 0$，当且仅当 $\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle \equiv 0$，即 $D_t\gamma'(t)$ 恒与 $\gamma'(t)$ 正交.
2. 若 γ 是测地线，则 $\gamma'(t)$ 沿 $\gamma(t)$ 平行，即 $D_t\gamma'(t) = 0$，故 $\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle = 0$，$D_t\gamma'(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 正交，由 1. 可知 $|\gamma'(t)|$ 是常值.

□

命题 12.3

u 设 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{r,s}$ 的嵌入 Riemann 子流形或伪 Riemann 子流形，则 M 上的切联络与诱导度量或伪度量相容.

Proof 设 $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$，$\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$ 是它们在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{r,s}$ 上的一个开子集的光滑延拓. 对于 M 上的点，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla^{\top}_X(Y,Z) = X\langle Y,Z\rangle = \tilde{X}\left\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\left\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle + \left\langle\tilde{Y},\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle\pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y},\tilde{Z}\right)\right\rangle + \left\langle\tilde{Y},\pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}\right)\right\rangle \text{[1]} \\
&= \langle\nabla^{\top}_X,Z\rangle + \langle Y,\nabla^{\top}_X Z\rangle
\end{aligned}$$

□

[1] 因为 $\tilde{Z},\tilde{Y}$ 都与 M 相切

12.3 对称联络

定义 12.3 (对称联络)

称光滑流形 M 的切丛上的一个联络 ∇ 是对称的, 若

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

♣

定义 12.4 (联络的挠张量)

设 M 是光滑流形, ∇ 是 M 的切丛上的联络, 定义联络的挠张量为一个 $(1,2)$-张量场 $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

♣

Proof 由于 $\nabla_X Y$ 和 $\nabla_Y X$ 分别不具有关于 Y 的 $C^\infty(M)$-线性和关于 X 的 $C^\infty(M)$-线性, 因此需要说明 τ 关于这两个分量的 $C^\infty(M)$-线性, 从而得到 τ 确实给出一个 $(1,2)$-张量场,

$$\nabla_X Y = \left(X(Y_k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$

$$\nabla_Y X = \left(Y(X_k) + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \left(X^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k$$

任取 $f \in C^\infty(M)$, 我们有

$$\tau(fX, Y) = \left((fX)^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k = f\left(X^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k$$

故 τ 关于 X 是 $C^\infty(M)$-线性的, 由对称性可知关于 Y 的 $C^\infty(M)$-线性.

□

由上面的论证过程, 可以立即得到以下对称联络的等价刻画:

命题 12.4

设 M 是光滑流形,∇ 是其切丛上的一个联络, 则以下几条等价

1. ∇ 是对称的;
2. ∇ 的挠张量 $\tau \equiv 0$;
3. 在任意一组局部坐标标架下, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k$.

♠

命题 12.5

设 M (伪) 欧氏空间的一个嵌入 (伪) Riemann 子流形, 则 M 的切联络是对称的. ♠

Proof 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的嵌入 Riemann 子流形或伪-Riemann 子流形, 其中 $\mathbb{R}^n$ 配备了欧式度量或伪欧式度量 $\bar{q}^{(r,s)}, r+s=n$. 令 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, 令 $\tilde{X},\tilde{Y}$ 是 X,Y 在分为空间上的一个开子集的扩张. $\iota: M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ 是含入映射. 立即有 X,Y 是 ι-相关于 $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 的, 由李括号的自然性, $[X,Y]$ 是 ι-相关于 $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 的. 特别地, $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 与 M 相切, 且在 M 上的限制等于 $[X,Y]$. 因此

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\top}_X Y-\nabla^{\top}_Y X &= \pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M-\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X}|_M\right)\\
&= \pi^{\top}\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]|_M\right)\\
&= \left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]|_M\\
&= [X,Y]
\end{aligned}
$$

□

定理 12.1 (Riemann 几何基本定理)

设 (M,g) 是（带边）（伪）Riemann 流形. 则存在唯一的 TM 上的联络 ∇, 使得 ∇ 与 g 相容且是对称的. 此联络称为是 g 的 **Levi-Civita 联络**（若 g 正定, 则也称为 Riemann 联络）.

♡

Idea 证明唯一性的想法以联络的度量性为基础考察 $\langle\nabla_X Y,Z\rangle$, 说明它是无关于联络选取的. 为此, 利用对称性, 将形式 $\langle\nabla_X Y,Z\rangle$ 的项适当填上与 ∇ 无关的项写成统一的一个.

对于存在性, 由于唯一性的证明给出了联络和向量场度量的公式, 借由此公式以及度量, 给出局部上的一个坐标表示, 唯一性允许我们将每个局部上的联络拼成总体上的联络.

Proof 通过给 ∇ 一个无关于联络选取的公式来给出唯一性. 设 ∇ 是满足性质的联络, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$. 由联络对度量的相容性

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle\\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle\\
Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle
\end{aligned}
$$

利用对称性替换每个式子的最后一项, 得到

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_Z X\rangle+\langle X,[X,Z]\rangle\\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_X Y\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle\\
Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Y Z\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle
\end{aligned}
$$

前两项相加减去后一项，得到

$$X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle=2\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle X,[Y,Z]\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle-\langle X,[Z,Y]\rangle$$

解出 $\langle\nabla_XY,Z\rangle$ 得到

$$\langle\nabla_XY,Z\rangle=\frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle\right)$$

现在设 ∇^1 和 ∇^2 是 TM 上的两个与 g 相容的对称联络. 由于右侧不依赖于联络的选取, 因此 $\langle\nabla^1_XY-\nabla^2_XY,Z\rangle=0$ 对于所有的 X,Y,Z 成立. 从而 $\nabla^1_XY=\nabla^2_XY$ 对于所有的 X,Y 成立, $\nabla^1=\nabla^2$.

接下来说明存在性, 设 $(U,(x^i))$ 是任意一个局部光滑坐标卡. 按上面的公式定义 $\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle$, 其中每个李括号都是零, 我们得到

$$\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle=\frac{1}{2}\left(\partial_i\langle\partial_j,\partial_l\rangle+\partial_j\langle\partial_l,\partial_i\rangle-\partial_l\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right)\tag{12.1}$$

利用以下记号

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle,\quad\nabla_{\partial_j}\partial_j=\Gamma^m_{ij}\partial_m$$

得到

$$\Gamma^m_{ij}g_{ml}=\frac{1}{2}\left(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{li}-\partial_lg_{ij}\right)$$

设 g^{kl} 是逆度量, 按 l 与上式加权求和, 并利用 $g_{ml}g^{kl}=\delta^k_m$, 得到

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^m_{ij}\delta^k_m=\Gamma^m_{ij}g_{ml}g^{kl}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{li}-\partial_lg_{ij}\right)\tag{12.2}$$

由此足够定义出局部上的联络 ∇, 按照

$$\nabla_XY=\left(X\left(Y^k\right)+X^iY^j\Gamma^k_{ij}\right)\partial_k$$

注意到公式

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_ig_{jl}+\partial_jg_{li}-\partial_lg_{ij}\right)\tag{12.3}$$

右侧关于 i,j 对称. 因此 $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$, 这表明我们在局部上定义出的联络是对称的. 计算

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ki}g_{lj}+\Gamma^l_{kj}g_{il}&=\frac{1}{2}\left(\partial_kg_{ij}+\partial_ig_{kj}-\partial_jg_{ki}\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_kg_{ji}+\partial_jg_{ki}-\partial_ig_{kj}\right)\\&=\partial_kg_{ij}\end{aligned}$$

由度量联络的第三条等价刻画 (12.2), ∇ 与 g 相容. □

该证明的过程给出了计算 Levi-Civita 联络的一些公式

命题 12.6

设 (M,g) 是（带边）（伪）Riemann 流形, 令 ∇ 是它的 Levi-Civita 联络.

1. 设 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 则

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle\Big)\end{aligned} \tag{12.4}$$

(**Koszul's formula**)

2. 在任意 M 的光滑坐标卡下,Levi-Civita 联络的联络系数由以下给出

$$\Gamma_{ij}^{k}{}^{a} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$

3. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标架, 令 $c_{ij}^{k} : U \to \mathbb{R}$ 是按以下方式定义的 n^3 个光滑函数:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^{k} E_k$$

则 Levi-Civita 联络在这组标架下的联络系数为

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^{m} - g_{lm}c_{ji}^{m} + g_{im}c_{lj}^{m}\right)$$

4. 若 g 是 Riemann 度量, (E_i) 是光滑局部正交标架, 则

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^{k} - c_{ik}^{j} - c_{jk}^{i}\right)$$

[a] 称为 Christoffel 符号

Proof 前两条在上面的定理中的证明过程中已经给出了. 将 E_i, E_j, E_l 带入方程 12.4中, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{q} g_{ql} &= \langle \nabla_{E_i} E_j, E_l\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - \langle E_j, c_{il}^{m} E_m\rangle - \big\langle E_l, c_{ji}^{m} E_m\big\rangle + \big\langle E_i, c_{lj}^{m} E_m\big\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^{m} - g_{lm}c_{ji}^{m} + g_{im}c_{lj}^{m}\right)\end{aligned}$$

两边作用一个逆度量 g^{kl} , 得到

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^{m} - g_{lm}c_{ji}^{m} + g_{im}c_{lj}^{m}\right)$$

若 (E_i) 正交, 我们有 $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}\left(E_i\delta_{jk} + E_j\delta_{ik} - E_k\delta_{ij} - c_{ik}^{j} - c_{ji}^{k} + c_{kj}^{i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(c_{ij}^{k} - c_{ik}^{j} - c_{jk}^{i}\right), \quad (i, j, k\text{两两不同})\end{aligned}$$

□

命题 12.7

1. （伪）-欧氏空间上的 Levi-Civita 联络就是欧式联络;
2. 若 M 是（伪）欧氏空间上的嵌入（伪）黎曼子流形, 则 M 上的 Levi-联络就是切联络 $\nabla^{\top}$

Proof 欧式联络是度量的且是对称的,Levi-Civita 联络的唯一性表明 Levi-Civita 联络就是欧式联络. 第二条由命题12.5, 和命题 12.3给出.

□

命题 12.8 (联络的自然性)

设 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是（带边）（伪）Riemann 流形, ∇ 是 g 的 Levi-Civita 联络,$\tilde{\nabla}$ 是 $\tilde{g}$ 的 Levi-Civita 联络. 若 $\varphi : M \to \tilde{M}$ 是等距同构, 则 $\varphi^{*}\tilde{\nabla} = \nabla$.

Proof 由 Levi-Civita 联络的唯一性, 只需要证明拉回联络 $\varphi^{*}\tilde{\nabla}$ 是对称且与 g 相容的. 对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $p \in M$, 我们有

$$\langle Y_p, Z_p\rangle = \langle \mathrm{d}\varphi_p\left(Y_p\right), \mathrm{d}\varphi_p\left(Z_p\right)\rangle = \left\langle \left(\varphi_{*}Y\right)_{\varphi(p)}, \left(\varphi_{*}Z\right)_{\varphi(p)}\right\rangle$$

换言之,

$$\langle Y, Z\rangle = \langle \varphi_{*}Y, \varphi_{*}Z\rangle \circ \varphi$$

因此

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z\rangle &= X\left(\langle \varphi_{*}Y, \varphi_{*}Z\rangle \circ \varphi\right) \\
&= \left(\left(\varphi_{*}X\right)\langle \varphi_{*}Y, \varphi_{*}Z\rangle\right) \circ \varphi \\
&= \left(\left\langle \tilde{\nabla}_{\varphi_{*}X}\left(\varphi_{*}Y\right), \varphi_{*}Z\right\rangle + \left\langle \varphi_{*}Y, \tilde{\nabla}_{\varphi_{*}X}\left(\varphi_{*}Z\right)\right\rangle\right) \circ \varphi \\
&= \left\langle \left(\varphi^{-1}\right)_{*}\tilde{\nabla}_{\varphi_{*}X}\left(\varphi_{*}Y\right), Z\right\rangle + \left\langle Y, \left(\varphi^{-1}\right)_{*}\tilde{\nabla}_{\varphi_{*}X}\left(\varphi_{*}Z\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\varphi^{*}\tilde{\nabla}\right)_{X} Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \left(\varphi^{*}\tilde{\nabla}\right)_{X} Z\right\rangle
\end{aligned}$$

这表明拉回联络与 g 相容. 接下来考虑对称性, 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{*}\tilde{\nabla}\right)_{X} Y - \left(\varphi^{*}\tilde{\nabla}\right)_{Y} X &= \left(\varphi^{-1}\right)_{*}\left(\tilde{\nabla}_{\varphi_{*}X}\left(\varphi_{*}Y\right) - \tilde{\nabla}_{\varphi_{*}Y}\left(\varphi_{*}X\right)\right) \\
&= \left(\varphi^{-1}\right)_{*}\left(\left[\varphi_{*}X, \varphi_{*}Y\right]\right)^{2} \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

□

[2] 因为 $\tilde{\nabla}$ 是无挠的

推论 12.3 (测地线的自然性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是（带边）（伪）Riemann 流形,$\varphi:M\to\tilde{M}$ 是局部等距同构. 若 γ 是 M 上的测地线, 则 $\varphi\circ\gamma$ 是 M 上的测地线.

Proof 测地线是局部的, 并且在微分同胚的拉回下是保持的[3].

□

12.4 指数映射

在本节中, 我们假设 (M,g) 是（伪）黎曼 n-流形, 且配备 Levi-Civita 联络. 对于每一点 $p\in M$ 和 $v\in T_pM$, 它们决定了唯一的一个极大测地线, 记作 γ_v.

引理 12.1 (尺度变换引理)

对于每个 $p\in M,v\in T_pM$,$c,t\in\mathbb{R}$,

$$\gamma_{cv}(t)=\gamma_v(ct)^{a}$$

只要上面两边其一有定义.

[a]速度越大, 参数集越小

Proof 若 $c=0$, 则对于所有的 $t\in\mathbb{R}$, 两边等于 p, 故不妨设 $c\neq 0$. 此时只需要证明若 $\gamma_v(ct)$ 存在, 则 $\gamma_{cv}(t)$ 也存在且二者相等（通过乘以 $\frac{1}{c}$）.

设 γ_v 的最大区间是 $I\subseteq\mathbb{R}$, 方便起见, 记 $\gamma=\gamma_v$, 定义新的曲线 $\tilde{\gamma}:c^{-1}I:\to M,\tilde{\gamma}(v)=\gamma(ct)$.

接下来说明 $\tilde{\gamma}$ 是以 p 为起点, cv 为初速度的测地线. 由定义易见 $\tilde{\gamma}(0)=\gamma(0)=p$, 又 $\dot{\tilde{\gamma}}^i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma^i(ct)=c\dot{\gamma}^i(ct)$, 故 $\tilde{\gamma}'(0)=c\gamma'(0)=cv$, 故 $\tilde{\gamma}$ 以 p 为起点, cv 为初速度. 现在设 D_t 和 $\tilde{D}_t$ 分别是沿 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 的协变导数, 则

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t\tilde{\gamma}'(t)&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\tilde{\gamma}}^k(t)+\dot{\tilde{\gamma}}^i(t)\dot{\tilde{\gamma}}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma}(t))\right)\partial_k\\&=\left(c^2\ddot{\gamma}^i(ct)+c^2\ddot{\gamma}^i(ct)\ddot{\gamma}^j(ct)\Gamma_{ij}^k(\gamma(ct))\right)\partial_k\\&=c^2D_t\gamma'(ct)=0\end{aligned}$$

因此 $\tilde{\gamma}$ 是测地线. 最后, 若 $\tilde{\gamma}$ 不是极大的, 则容易得到覆盖了 γ 的测地线, 与它的极大性矛盾, 故 $\tilde{\gamma}$ 是极大的.

综上可得 $\gamma_{cv}(t)=\gamma_v(ct)$

[3]相对于同一个微分同胚拉回的联络

□

定义 12.5 (指数映射)

1. 定义一个子集 $\mathscr{E} \subseteq TM$, 称为指数映射域

$$\mathscr{E} = \left\{ v \in TM : \gamma_v \text{定义在包含了 } [0,1] \text{ 的一个区间上} \right\}^{a}$$

2. 在 $\mathscr{E}$ 上定义指数映射 $\exp : \mathscr{E} \to M$

$$\exp(v) = \gamma_v(1)^{b}$$

3. 对于每个 $p \in M$, 指数映射在 p 上的限制, 记作 $\exp_p$, 为 $\exp$ 在 $\mathscr{E}_p := \mathscr{E} \cap T_pM$ 上的限制.

[a]初速度不能太大, 需要允许物体可以自然地跑动单位时间

[b]以 p 为起点, 初速度为 v, 自然地跑动单位时间后, 在 M 上所处的位置.

♣

命题 12.9 (指数映射的性质)

令 (M, g) 是（伪）-Riemann 流形, $\exp : \mathscr{E} \to M$ 是它的指数映射, 则

1. $\mathscr{E}$ 是 TM 上包含了零截面的一个开集, 并且每个 $\mathscr{E}_p \subseteq T_pM$ 都是关于 0 呈星形的[a].
2. 对于每个 $v \in TM$, 测地线 γ_v 由以下给出

$$\gamma_v(t) = \exp(tv)$$

若 t 使得两边中的一个有定义.

3. 指数映射是光滑的.
4. 对于每个 $p \in M$, 微分 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0 : T_0(T_pM) \simeq T_pM \to T_pM$ 在 $T_0(T_pM)$ 和 T_pM 的通常同构下是 T_pM 上的单位映射,

[a]对于任意的 $y \in \mathscr{E}_p$ 从 0 到 y 的线段落在 $\mathscr{E}_p$ 上

♠

Proof [4] 对于 2., 由尺度变换引理,

$$\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

若 t 使得上述其中一个有定义.

任取 $v \in \mathscr{E}_p$, 则 γ_v 至少在 $[0,1]$ 上有定义. 因此对于任意的 $t \in [0,1]$, 尺度变换引理给出

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

[4]未完成

是有定义的, 从而 $tv \in \mathscr{E}_p$, $\mathscr{E}_p$ 关于 0 是星形集.

为了计算 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0(v)$, $v \in T_pM$, 选择 T_pM 上以 0 为起点, v 为初速度的曲线 τ, 并计算 $\exp_p \circ \tau$ 的初速度即可. 这里我们取 $\tau(t) = tv$, 则

$$\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\exp_p \circ \tau\right)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma_v(t) = v$$

□

命题 12.10 (指数映射的自然性)

设 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是 (伪) -Riemann 流形, $\varphi : M \to M$ 是局部等距同构. 则对于每个 $p \in M$, 下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_p \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi_p"] \arrow[d, "\exp_p"'] & \tilde{\mathscr{E}}_{\varphi(p)} \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{M}
\end{tikzcd}$$

Proof 任取 $v \in \mathscr{E}_p$, 则 M 在的以 p 为起点, v 为初速度的极大测地线 γ_v 至少在 $[0, 1]$ 上有定义. 由于 φ 是局部的等距同构, $\varphi \circ \gamma_v$ 也是一个极大测地线, 它的起点为 $\varphi \circ \gamma_v(0) = \varphi(p)$, 初速度为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ \gamma_v)(0) = \mathrm{d}\varphi_p \gamma_v'(0) = \mathrm{d}\varphi_p(v)$, 我们有 $\varphi \circ \gamma_v = \gamma_{\mathrm{d}\varphi_p(v)}$

$$\varphi\left(\exp_p(v)\right) = \varphi\left(\gamma_v(1)\right) = \gamma_{\mathrm{d}\phi_p(v)}(1) = \exp_{\varphi(p)} \circ \left(\mathrm{d}\varphi_p\right)(v)$$

这就说明了图表的交换性. □

命题 12.11

设 (M, g) 和 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 是 (伪) -Riemann 流形, M 是连通的. 设 $\varphi, \psi : M \to \tilde{M}$ 是局部等距同构, 使得对于某个 $p \in M$, $\varphi(p) = \psi(p)$, 且 $\mathrm{d}\varphi_p = \mathrm{d}\psi_p$, 则 $\varphi \equiv \psi$.

Proof 令

$$S = \left\{q \in M : \varphi(q) = \psi(q), \mathrm{d}\varphi_q = \mathrm{d}\psi_q\right\}$$

任取 $p \in S$, 由自然性,

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{\varphi(p)} \circ \mathrm{d}\varphi_p = \exp_{\psi(p)} \circ \mathrm{d}\psi_p = \psi \circ \exp_p$$

由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 是单位映射, 存在包含了原点的开邻域 $U_0 \subseteq T_pM$, 和包含了 p 的开邻域 $V \subseteq M$, 使得 $\exp_p$ 成为它们之间的微分同胚, 故 φ 和 ψ 在 p 的一个邻域上相等, 微分的局部性又给出在其上 $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\psi$, 故 S 是一个开集.

此外，任取 $q \in S^c$，若 $\varphi(q) \neq \psi(q)$，由 $\varphi-\psi$ 的连续性，存在 q 使得 $\varphi \neq \psi$ 在其上成立；若 $\varphi(q)=\psi(q)$ 但 $\mathrm{d}\varphi_q \neq \mathrm{d}\psi_q$，由 $\mathrm{d}\phi-\mathrm{d}\psi$ 的连续性，存在 q 的邻域使得 $\mathrm{d}\varphi \neq \mathrm{d}\psi$ 在其上成立，故 S^c 是开集，S 是闭集.

最后，连通性要求 $S=M$. □

定义 12.6

称（伪）Riemann 流形 (M,g) 是测地完备的，若每个极大测地线对于所有的 $t\in\mathbb{R}$ 有定义，或者等价地说指数映射的定义域是整个 TM . ♣

12.5 法邻域和法坐标

定义 12.7

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形，$p\in M$. 若 p 的邻域 U 是 $0\in T_pM$ 的某个星形邻域在 $\exp_p$ 下的微分同胚像，则称 U 为 p 的一个法邻域 . ♣

Proof 法邻域的存在性：指数映射 $\exp_p$ 将开集 $\mathscr{E}_p \subseteq T_pM$ 光滑地映到 M 上，由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 可逆，知存在 $0\in T_pM$ 的一个邻域 V，以及 $p\in M$ 的一个邻域 U，使得 $\exp_p$ 成为 V 到 U 的一个微分同胚.

□

定义 12.8 (法坐标)

对于每个 T_pM 的正交基 (b_i)，它决定了一个基同构 $B:\mathbb{R}^n\to T_pM$，$B\left(x^1,\cdots,x^n\right)=x^ib_i$. 若 $U=\exp_p(V)$ 是 p 的法邻域，可以将指数映射与同构复合，得到光滑坐标映射 $\varphi=B^{-1}\circ\left(\exp_p|_V\right)^{-1}:U\to\mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "B^{-1}"] & \mathbb{R}^n \\
U \arrow[u, "\left(\exp_p|_V\right)^{-1}"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

称这样的坐标为以 p 为中心的法坐标[a].

[a]将邻域按指数映射的对应线性化为切空间，切空间上可以轻松地找到正交坐标，给出了 U 上的正交坐标（下个命题中证明）. ♣

命题 12.12 (法坐标的唯一性)

设 (M,g) 是（伪）Riemann n- 流形，$\pi \in M$，U 是以 p 为中心的一个法邻域. 对于每个以 p 中心的 U 上的法坐标卡，坐标基在 p 点处正交；并且对于每个 T_pM 的正交基 (b_i)，存在唯一的 U 上的法坐标 (x^i)，使得 $\partial_i|_p = b_i, i = 1, \cdots, n$. 当 g 正定时，对于任意两个法坐标卡 (x^i) 和 $(\tilde{x}^j)$ 都有

$$\tilde{x}^j = A_i^j x^i$$

对于某个（常值）正交矩阵 $\left(A_i^j\right) \in O(n)$ 成立.

Proof 设 φ 是 U 上以 p 为中心的法坐标，坐标函数为 (x^i). 则由定义有 $\varphi = B^{-1} \circ \exp_p^{-1}$，其中 $B : \mathbb{R}^n \to T_pM$ 是由 T_pM 的一组正交基 (b_i) 决定的. 由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 是单位映射且 B 是线性的，故 $\partial_i|_p = \left(\mathrm{d}\varphi_p\right)^{-1}(\partial_i|_0) = B(\partial_i|_0) = b_i$，故坐标基就是它的定义依赖的坐标基，故在 p 点处正交.

对于每个 T_pM 的正交基 (b_i)，上面的计算表明它给出的法坐标就是满足条件的法坐标，故存在性得证.

若 $\tilde{\varphi} = \tilde{B}^{-1} \circ \exp_p^{-1}$ 是另一个法坐标，则

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \tilde{B}^{-1} \circ \exp_v^{-1} \circ \exp_v \circ B = \tilde{B}^{-1} \circ B =: A$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上两个正交基的变换. 若 $\tilde{\varphi}$ 的坐标向量场与 b_i 相同，则它是被 (b_i) 所决定的坐标，我们有 $\tilde{B} = B$，从而 $\tilde{\varphi} = \varphi$，这就说明了唯一性.

最后，若 g 正定，则 A 是正交矩阵，最后一个断言成立.

□

命题 12.13 (法坐标的性质)

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形，$(U,(x^i))$ 是任意以 $p \in M$ 为中心的法坐标，则

1. p 的坐标是 $(0, \cdots, 0)$；
2. 若 g 是 Riemann 度量，则 p 处的度量分量为 $g_{ij} = \delta_{ij}$，否则为 $g_{ij} = \pm\delta_{ij}$.
3. 对于每个 $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$，以 p 为起点，v 为初速度的测地线 γ_v 在法坐标下表示为线
$$\gamma_v(t) = (tv_1, \cdots, tv^n)$$
只要 t 落在某个包含了 0 且满足 $\gamma_v(I) \subseteq U$ 的区间 I 上
4. 在这组坐标下的 Christoffel 符号在 p 点处退化；
5. g_{ij} 在这组坐标下的所有一阶偏导数在 p 点处退化.

Proof 1. 由法坐标的定义直接得到,2. 由法坐标的正交性得到.3. 由

$$\gamma_v(t) = \exp_p(vt) = B^{-1}(vt) = \left(tv^1, \cdots, tv^n\right)$$

任取 $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$, $\gamma_v(t) = (tv^1, \cdots, tv^n)$, $\dot{\gamma}_v(t) = (v^1, \cdots, v^n)$, $\ddot{\gamma}_v(t) = 0$, 测地线方程化为

$$v^i v^j \Gamma_{ij}^k(tv) = 0$$

取 $t = 0$, 得到 $\Gamma_{ij}^k(0) v^i v^j = 0$ 对于所有的 k, v 成立. 特别地, 对于固定的 a 取 $v = \partial_a$, 得到 $\Gamma_{aa}^k = 0$. 分别做替换 $v = \partial_a + \partial_b$ 和 $v = \partial_b - \partial_a$ 并相减后得到 $\Gamma_{ab}^k = 0$, 在 p 处对于所有的 a, b, k 成立. 故 4. 得证. 最后 5. 由命题12.2的 3. 将 E_k 替换为 ∂_k 并结合本命题的 4. 可以得到,

□

第 13 章 测地线和距离

定义 13.1 (极小曲线)

令 (M,g) 是 Riemann 流形, 称一个 M 上的容许曲线 γ 是**极小的**, 若 $L_g(\gamma) \leq L_g(\tilde{\gamma})$ 对于所有有着相同端点的容许曲线 $\tilde{\gamma}$ 成立. ♣

Remark

1. 当 M 连通时, γ 极小当且仅当 $L_g(\gamma)$ 等于两端点的距离.

13.1 曲线族

定义 13.2 (单参数曲线族)

设 (M,g) 是 Riemann 流形.

给定区间 $I, J \subseteq \mathbb{R}$, 称一个连续映射 $\Gamma : J \times I \to M$ 为一个**单参数曲线族**. 这样一个曲线族给出 M 上的两类曲线:

1. 对于固定的 s, 定义在 $t \in I$ 上的**主曲线**: $\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$;
2. 对于固定的 t, 定义在 $s \in J$ 上的**横截曲线**: $\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s,t)$; ♣

定义 13.3 (沿曲线族的向量场)

对于单参数曲线族 $\Gamma : J \times I \to M$, 定义沿 Γ 的向量场为一个连续映射 $V : J \times I \to TM$, 使得 $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M, \forall (s,t)$. ♣

定义 13.4 (速度向量)

若单参数曲线族 $\Gamma : J \times I \to M$ 是光滑的 (或至少是连续可微的), 我们记主曲线和横街曲线的速度向量分别为

$$\partial_t \Gamma(s,t) = (\Gamma_s)'(t) \in T_{\Gamma(s,t)}M; \quad \partial_s \Gamma(s,t) = \Gamma^{(t)\prime}(s) \in T_{\Gamma(s,t)}M$$ ♣

定义 13.5 (容许曲线族)

称单参数曲线族 Γ 为一个**容许曲线族**, 若

1. Γ 的定义域形如 $J \times [a,b]$, 其中 J 是开集;
2. 存在 $[a,b]$ 的分划 $(a_0, \cdots, a_k)$, 使得 Γ 在每个 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上光滑;

3. 对于每个 $s \in J, \Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ 是一个容许曲线.

此时称这样的一个分划为曲线族的容许分划.

Remark $\partial_s\Gamma$ 和 $\partial_t\Gamma$ 在每个 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上是光滑的, 但是在一般来说在整个定义域上不是.

定义 13.6 (变分)

给定容许曲线 $\gamma : [a,b] \to M$,

1. γ **的一个变分**是指一个容许曲线族 $\Gamma : J \times [a,b] \to M$, 使得 J 是包含了 0 的一个开区间, 且 $\Gamma_0 = \gamma$;
2. 若在此之上, $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ 和 $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ 对于所有的 $s \in J$ 成立[a], 则称 Γ 为 γ 的一个**真变分**.

[a]即有相同的起点和终点

定义 13.7 (沿曲线族的分段光滑向量场)

设 Γ 是容许曲线族, 沿 γ **的一个分段光滑向量场**, 是指一个（连续的）沿 Γ 的向量场, 使得对于某个 Γ 的容许分划 $(a_0, \cdots, a_k)$, 有向量场在每个矩形 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 上的限制是光滑的.

Remark 若 V 是沿 Γ 的一个分段光滑的向量场, 我们可以分别计算 V 沿主曲线和耿个曲线的协变导数; 得到的沿 Γ 的向量场分别记作 D_tV 和 D_sV.

命题 13.1

设 Γ 是一个容许曲线族, 它可以定义出 $\partial_s\Gamma$ 是沿 Γ 分段光滑的向量场.

Proof 由 Γ 的光滑性, 在每一个矩形上都可以分别定义光滑的 $\partial_s\Gamma$, $\partial_s\Gamma$ 沿集合 $J \times \{a_i\}$ 的取值仅依赖于 Γ 在 $J \times \{a_i\}$ 上的取值, 故分别定义在在 $J \times [a_{i-1}, a_i]$ 和 $J \times [a_i, a_{i+1}]$ 的 $\partial_s\Gamma$ 在交集上一致. 最后由粘合引理可知 $\partial_s\Gamma$ 在 $J \times [a,b]$ 是连续的. □

定义 13.8 (变分场)

设 Γ 是 γ 的变分,Γ 的变分场是指沿 γ 分段光滑的向量场 $V(t) = \partial_s\Gamma(0,t)$ [a] .

[a]在 γ 的变换行为 Γ 下, γ 在开始时的变化趋势.

定义 13.9

称沿 γ 的向量场 V 为一个真向量场, 若 $V(a)=0$ 且 $V(b)=0$.

引理 13.1

若 γ 是容许曲线, V 是沿 γ 逐段光滑的向量场, 则 V 是某个 γ 的变分的变分场. 若 V 是真向量场, 则变分也可以被取成真变分.

Proof 设 γ 和 V 满足条件, 对于使得 $\exp_{\gamma(t)}(sV(t))$ 有定义的 s,t, 我们令 $\Gamma(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(sV(t))$. 由 $[a,b]$ 的紧性, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 Γ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$ 上有定义. 通过复合映射, 在每个使得 V 光滑的 $[a_{i-1},a_i]$ 上, Γ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a_{i-1},a_i]$ 上光滑. 由指数映射的性质,

$$\Gamma_s(0,t)=\partial_s\left(\exp_{\gamma(t)}(sV(t))\right)=\partial_s\left(\sigma_{V(t)}(s)\right)=\sigma'_{V(t)}(0)=V(t)$$

其中 $\sigma_{V(t)}$ 表示以 $V(t)$ 为初速度的测地线. 故 Γ 的变分场是 V. 此外, 若 $V(a)=0$ 且 $V(b)=0$, 则上述定义给出 $\Gamma(s,a)\equiv\gamma(a)$, $\Gamma(s,b)\equiv\gamma(b)$, 故 Γ 是真变分.

□

引理 13.2 (对称引理)

设 $\Gamma: J\times[a,b]\to M$ 是一个容许曲线族. 在使得 Γ 光滑的矩形 $J\times[a_{i-1},a_i]$ 上, 有

$$D_s\partial_t\Gamma=D_t\partial_s\Gamma$$

Proof 命题是局部的, 我们在 $\Gamma(s_0,t_0)$ 周围的一个局部坐标 (x^i) 上考虑. 设 Γ 在其上写作 $\Gamma(s,t)=(x^1(s,t),\cdots,x^n(s,t))$, 则

$$\partial_t\Gamma=\frac{\partial x^k}{\partial t}\partial_k;\quad \partial_s\Gamma=\frac{\partial x^k}{\partial s}\partial_k$$

由测地线的坐标公式

$$D_s\partial_t\Gamma=\left(\frac{\partial^2x^k}{\partial s\partial t}+\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$$
$$D_t\partial_s\Gamma=\left(\frac{\partial^2x^k}{\partial t\partial s}+\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$$

交换第二行 i,j 的次序, 并由联络的对称性 $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$ 可得二者相等.

□

13.2 极小曲线是测地线

定理 13.1 (第一变分公式)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是单位速度容许曲线, $\Gamma:J\times[a,b]\to M$ 是 γ 的一个变分,V 是它的变分场, 则 $L_g(\Gamma_s)$ 是 s 的一个光滑函数, 并且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V, D_t\gamma'\rangle\,\mathrm{d}t\text{[1]} - \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle V(a_i),\Delta_i\gamma'\right\rangle\text{[2]} \\ +\left\langle V(b),\gamma'(b)\right\rangle - \left\langle V(a),\gamma'(a)\right\rangle\end{aligned} \tag{13.1}$$

其中 $(a_0,\cdots,a_k)$ 是 V 的一个容许分划, 对于每个 $i=1,\cdots,k-1$, $\Delta_i\gamma':=\gamma'(a_i^+)-\gamma'(a_i^-)$ 是速度向量场 γ' 在 a_i 处的跳跃. 特别地, 若 Γ 是真变分, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V, D_t\gamma'\rangle\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{k-1}\left\langle V(a_i),\Delta_i\gamma'\right\rangle \tag{13.2}$$

内部弯曲成本：平均速度变化的横向弯曲趋势的总和

能量（长度）变化的贡献 = 端点的推动作用-内部的弯曲成本-连接点的折角成本

Proof 在每个使得 Γ 光滑的矩形 $J\times[a_{i-1},a_i]$ 上, 由于 $L_g(\Gamma_s)$ 的被积函数是定义在紧集上的光滑函数, 故可以做任意次积分下求导, 由于 $L_g(\Gamma_s)$ 是这些积分的总和, 故它是 s 的光滑函数.

方便起见, 引入记号

$$T(s,t)=\partial_t\Gamma(s,t)\,,\quad S(s,t)=\partial_s\Gamma(s,t)$$

在区间 $[a_{i-1},a_i]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L_g\left(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}\right) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle T,T\rangle^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{1}{2}\langle T,T\rangle^{-\frac{1}{2}}\,2\langle D_sT,T\rangle\,\mathrm{d}t\text{[3]} \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{1}{|T|}\langle D_tS,T\rangle\,\mathrm{d}t\text{[4]}\end{aligned}$$

在 $s=0$ 处取值，由于 $S(0,t)=V(t), T(0,t)=\gamma'(t)$（长度为 1）. 我们有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g\left(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}\right) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, \gamma'(t)\rangle - \langle V, D_t\gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \left\langle V, \gamma'\left(a_i^-\right)\right\rangle - \left\langle V, \gamma'\left(a_{i-1}^+\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

对 i 求和即得所需公式. □

定理 13.2 (弧长参数化极小曲线的测地性)

Riemann 流形上的极小曲线若有单位速度参数化，则为一个测地线.

Idea 根据变分公式，在弯折不存在的情况下，因为没有改变长度的趋势，故无非产生依赖于速度变化的真弯曲，而速度变化在通过 bump 函数削弱端点影响后本身给出一种真弯曲，故速度变化无法产生. 此时进一步地，无法产生依赖于弯折的真弯曲，而定点的弯折也可以被逐段光滑的真弯曲实现，故弯折也是无法产生的.

Proof 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是单位速度的极小曲线，$(a_0,\cdots,a_k)$ 是 γ 的一个容许分划. 任取 γ 的真变分 Γ，则 $L_g(\Gamma_s)$ 是关于 s 的光滑函数，使得它在 $s=0$ 处达到极小值，故 $\mathrm{d}(L_g(\Gamma_s))/\mathrm{d}s$ 在 $s=0$ 处成立. 由于每个沿 γ 的真向量场都是某个真变分的变分场，故方程 13.2 的右侧对于任意这样的 V 退化.

首先说明 $D_t\gamma'=0$ 在每个区间 $[a_{i-1},a_i]$ 上成立. 对于给定的这样的区间，令 $\varphi\in C^\infty(M)$ 是在 (a_{i-1},a_i) 上大于零，其他点等于零的 bump 函数. 将真向量场 $V=\varphi D_t\gamma'$ 带入13.2右侧，得到

$$
0=-\int_{a_{i-1}}^{a_i}\varphi\left|D_t\gamma'\right|^2\,\mathrm{d}t
$$

故 $D_t\gamma'=0$ 在每个子区间上成立.

接下来说明 $\Delta_i\gamma'=0$ 对于每个 0 和 k 之间的 i 成立. 对于每个这样的 i，通过坐标卡上的光滑 bump 函数，构造一个沿 γ 的逐段光滑的向量场 V，使得 $V(a_i)=\Delta_i\gamma'$，对于 $j\neq i$, $V(a_j)=0$ [5]. 则 13.2化为 $-\left|\Delta_i\gamma'\right|^2=0$，故 $\Delta_i\gamma'=0$ 对于每个 i 成立.

最后，每个单侧速度向量在 a_i 处相接，a_i 处以 $\gamma'\left(a_i^+\right)=\gamma'\left(a_i^-\right)$ 为初速度的局部测地线的存在唯一性给出 $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 和 $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 落在同一个极大测地线上，因此 γ 是光滑的. □

[3] Levi-Civita 联络的度量性

[4] 13.2

[5] 利用 bump 函数提取一些点

推论 13.1

单位速度容许曲线 γ 是 L_g 的一个临界点, 当且仅当它是一个测地线. ♡

Proof 若 γ 是一个临界点, 则上面定理的证明可以不加修饰地用来说明 γ 是一个测地线. 反之, 若 γ 是一个测地线, 则方程 13.2右侧的第一项由测地线方程可知是退化的, 第二项由 γ' 无间断可知是退化的.

□

13.3 测地线的局部极小性

定义 13.10 (局部极小)

令 (M,g) 是 Riemann 流形, 称一个正则（或分段正则）曲线 $\gamma: I \to M$ **是局部极小的**, 若每个 $t_0 \in I$ 都有邻域 $I_0 \subseteq I$, 使得任取 $a,b \in I_0$ 满足 $a<b$, 都有 γ 在 $[a,b]$ 上的限制是极小的. ♣

Remark 每个极小的容许曲线段都是局部极小的.

定义 13.11 (开测地球)

若 $\varepsilon>0$ 使得 $\exp_p$ 是球 $B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM$ （在 g_p 定义的范数下）到像集的微分同胚, 则像集 $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ 是 p 的一个法邻域, 称为是 M **上的一个（开）测地球**. ♣

定义 13.12 (闭测地球)

若闭球 $\overline{B}_\varepsilon(0)$ 含于一个开集 $V \subseteq T_pM$, 使得 $\exp_p$ 是 V 到其像集的微分同胚, 则称 $\exp_p(\overline{B}_\varepsilon(0))$ 为**一个闭测地球**, 并称 $\exp_p(\partial B_\varepsilon(0))$ 为**一个测地球面**. ♣

Remark

1. 在 T_pM 上, 紧集 $\overline{B}_\varepsilon(0)$ 和闭集 V^c 之间有正的距离, 故存在 $\varepsilon'>\varepsilon$, 使得 $B_{\varepsilon'}(0) \subseteq V$, 故每个闭测地球都含于一个更大的开测地球.
2. 在以 p 为中心的 Riemann 法坐标下, 以 p 为中心的开闭测地球和测地球面, 无非就是以 p 为中心的坐标球和坐标球面.

定义 13.13

设 U 是 $p \in M$ 的一个法邻域. 给定 U 上以 p 为中心的法坐标 (x^i), 定义**径向距离**

函数$r : U \to \mathbb{R}$,
$$r(x)=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$$
并定义 $U\setminus\{p\}$ 上的径向向量场 ∂_r
$$\partial_r=\frac{x^i}{r(x)}\frac{\partial}{\partial x^i}$$
♣

引理 13.3

在每个 $p\in M$ 的法邻域 U 上，径向距离函数和径向向量场是良定义的，无关于法坐标的选取. r,∂_r 均在 $U\setminus\{p\}$ 上光滑, r^2 在 U 上光滑. ♡

Proof 由12.12, 设两个法坐标之间相差一个正交矩阵 (A^i_j), 设两个法坐标的径向距离函数分别是 $r,\tilde{r}$, 径向向量场分别是 $\partial_r,\tilde{\partial}_r$, 则
$$\begin{aligned}\tilde{r}(x)&=\sqrt{(\tilde{x}^1)^2+\cdots+(\tilde{x}^n)^2}\\&=\sqrt{(A^1_ix^i)^2+\cdots+(A^n_ix^i)^2}\\&=\sqrt{\sum_i\sum_{k=1}^n(A^k_i)^2(x^i)^2}\\&=\sqrt{\sum_i(x^i)^2}=r(x)\end{aligned}$$
以及
$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{r}}&=\frac{\tilde{x}^i}{\tilde{r}(x)}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\\&=\frac{\tilde{x}^i}{r(x)}\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\&=\frac{A^i_jx^j}{r(x)}\frac{\partial\left(A^k_j\left(x^k\right)\right)}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\&=\frac{A^i_jx^j}{r(x)}A^i_j\frac{\partial}{\partial x^j}\\&=\frac{x^j}{r(x)}\frac{\partial}{\partial x^j}=\partial_r\end{aligned}$$
光滑性由分量表示可以见得.

□

定理 13.3 (Gauss 引理)

设 (M,g) 是 Riemann 流形, U 是以 $p\in M$ 中心的测地球, ∂_r 表示 $U\setminus\{p\}$ 上的径向向量场. 则 ∂_r 是 $U\setminus\{p\}$ 上的正交于测地球面[a]的单位向量场.

[a]即与交点处的切空间正交

Idea ∂_r 由法坐标给出, 利用法坐标的性质计算模长. 过程中利用到以下重要事实:

1. 径向向量场形式上于点坐标整体相差一个 $r(x)$, 速度与点从形式上整体相差一个倍数的曲线是坐标直线, 法坐标上的坐标直线就是测地线.
2. 测地线是速度不变的.
3. 法坐标下的度量分量与欧式度量相同.
4. 法坐标下的曲线速度就是对各分量求导[6]

于是我们将一点 q 处的径向向量场 $\partial_r|_q$ 刻画为单位速度测地线在某点处的速度, 给出 ∂_r 的模长.

Idea 将切向量用曲线 σ 表示, 考虑将 σ 沿径向单位速度地变换到原点得到一个曲线族. 证明中会看到, 由于径向变换是沿测地线的变换, 且变换是均匀的, 并且横向曲线在球面上, 与原点距离恒等, 故 S,T 的正交性不随时间变化. 这样原点的正交性就可以给出所需点的正交性.

Proof 设 (x^i) 是 U 上以 p 为中心的法坐标. 任取 $q\in U\setminus\{p\}$, 设 q 的坐标表示为 $q=(q^1,\cdots,q^n)$, 并记 $b:=r(q)=\sqrt{(q^1)^2+\cdots+(q^n)^2}$, 我们有 $\partial_r|_q=\frac{q^i}{b}\frac{\partial}{\partial x^i}|_q$.

令 $v=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\in T_pM$ 是 p 处的一个切向量, 分量 $v^i=\frac{q^i}{b}$, 考虑以 p 为起点, v 为初速度的测地线[7], 在它在法坐标下的坐标表示为

$$\gamma_v(t)=\left(tv^1,\cdots,tv^n\right)$$

我们有

$$\left|\gamma_v'(0)\right|_g=|v|_g=\sqrt{(v^1)^2+\cdots+(v^n)^2}=\frac{1}{b}\sqrt{(q^1)^2+\cdots+(q^n)^2}=1$$

故 γ_v 是单位速度测地线, 又 $\gamma_v(b)=(q^1,\cdots,q^n)=q$, $\gamma_v'(b)=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_q=\partial_r|_q$, 这表明 $\partial_r|_q$ 是单位向量.

接下来说明正交性, 取 q,b,v 如上, 令 $\Sigma_b=\exp_p(\partial B_b(0))$ 是包含了 q 的测地球面. 令 $w\in T_qM$ 在 q 点处与 $\sum_n$ 相切, 希望证明 $\left\langle w,\partial_r|_q\right\rangle_g=0$.

选取 Σ_b 上的光滑曲线 $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Sigma_b$, 使得 $\sigma(0)=q,\sigma'(0)=w$. 设 σ 在 (x^i) 下

[6]因为 Christoffel 符号退化

[7]径向测地线

的坐标表示为 $\sigma(s)=(\sigma^1(s),\cdots,\sigma^n(s))$. 定义曲线族 $\Gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,b]\to U$

$$\Gamma(s,t):=\left(\frac{t}{b}\sigma^1(s),\cdots,\frac{t}{b}\sigma^n(s)\right)$$

同样的记 $S=\Gamma_s,T=\Gamma_t$, 则

$$\begin{aligned}
S(0,0)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\Gamma_s(0)=0\\
T(0,0)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Gamma_t(0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma_v(t)=v\\
S(0,b)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\sigma(s)=w\\
T(0,b)&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=b}\gamma_v(t)=\gamma_v'(b)=\left.\partial_r\right|_q
\end{aligned}$$

因此当 $(s,t)=(0,0)$ 时, $\langle S,T\rangle=\langle 0,v\rangle=0$, 此外当 $(s,t)=(0,b)$ 时, $\langle S,T\rangle=\left\langle w,\left.\partial_r\right|_q\right\rangle$. 接下来只需要说明 $\langle S,T\rangle$ 与 t 无关, 计算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle S,T\rangle&=\langle D_tS,T\rangle+\langle S,D_tT\rangle\quad(\text{联络的度量性})\\
&=\langle D_sT,T\rangle+\langle S,D_tT\rangle\quad(\text{对称引理})\\
&=\langle D_sT,T\rangle\qquad(\Gamma_s(t)\text{ 是测地线})\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|T|^2\equiv 0,\quad(|T|=|\Gamma_s'|\equiv 1)
\end{aligned}$$

这就证明了定理. □

推论 13.2

令 U 是以 $p\in M$ 为中心的测地球, r,∂_r 分别是径向距离和径向向量场. 则 $\operatorname{grad} r=\partial_r$ 在 $U\setminus\{p\}$ 上成立. ♡

Remark 有事实: 设 $f\in C^\infty(M),X\in\mathfrak{X}(M)$ 无处退化. 则 $X=\operatorname{grad}$, 当且仅当 $Xf\equiv\left.|X|\right._g sr$, 且 X 与 f 在所有正则点处的水平集正交.

Proof 只需证明 ∂_r 与 r 的水平集正交, 且 $\partial_r(r)\equiv|\partial_r|_g^2$. 由于 r 的水平集就是测地球面, 故第一个断言由 Gauss 引理直接得到. 对于第二个断言, 可以直接计算得到 $\partial_r(r)=1$, 并由 Gauss 引理知 $|\partial_r|_g\equiv 1$ 得到命题. □

命题 13.2

设 (M,g) 是 Riemann 流形. 令 $p\in M$,q 是含于某个以 p 为中心的测地球. 则从 p 到 q 的径向测地线是唯一的（不计重参数化）的从 p 到 q 的 M 上的极小曲线 ♠

Proof 取 $\varepsilon>0$, 使得 $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ 是包含了 q 的一个测地球. 令 $\gamma:[0,c]\to M$ 是 p 到

q 的弧长参数化的径向测地线. 则 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ 对某个单位向量 $v \in T_pM$ 成立. 此时 $L_g(\gamma) = c$.

为了说明 γ 极小, 任取 p 到 q 的容许曲线 $\sigma : [0, b] \to M$, 不妨设它也是弧长参数化的. 设 $a_0 \in [0, b]$ 是最后一次使得 $\sigma(t) = p$ 的点[8], $b_0 \in [0, b]$ 是 a_0 之后第一次使得 $\sigma(t)$ 到达 p 为中心 c 为半径的测地球 Σ_c 的点[9]. 则 $r \circ \sigma$ 在 $[a_0, b_0]$ 上连续, (a_0, b_0) 上分段光滑, 由微积分基本定理

$$\begin{aligned} r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(\sigma(t))\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \mathrm{d}r(\sigma'(t))\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \langle \operatorname{grad} r, \sigma'(t) \rangle_g\, \mathrm{d}t \\ &\le \int_{a_0}^{b_0} |\operatorname{grad} r|\, |\sigma'(t)|\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{a_0}^{b_0} |\sigma'(t)|\, \mathrm{d}t \\ &= L_g\left(\sigma|_{[a_0, b_0]}\right) \le L_g(\sigma) \end{aligned} \tag{13.3}$$

因此 $L_g(\sigma) \ge r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) = c$, 故 γ 是极小的.

现在设 $L_g(\sigma) = c$, 则方程 13.3中的不等号都化为等号. 不妨设 σ 是单位速度曲线, 则第二个不等号给出 $a_0 = 0, b_0 = b = c$. 第一个不等号给出非负项 $\left|\operatorname{grad} r_{\sigma(t)}\right| |\sigma'(t)| - \langle \operatorname{grad} r, \sigma'(t) \rangle_g$ 恒为零. 这当且仅当 $\sigma'(t)$ 与 $\operatorname{grad} r$ 相差一个正的系数, 又 σ 是单位速度的, $\sigma'(t) = \operatorname{grad} r|_{\sigma(t)} = \partial_r|_{\sigma(t)}$. 因此 σ 和 γ 都是 ∂_r 在 $t = c$ 时过 q 的积分曲线故 $\sigma = \gamma$. □

推论 13.3

设 (M, g) 是连通的 Riemann 流形, $p \in M$. 在每个以 p 为中心的开或闭的测地球上, 径向距离函数 $r(x)$ 与 M 中 p 到 x 的 Riemann 距离相等. ♡

Proof 闭的径向测地球含于更大的开的测地球, 我们只证明开的情况即可. 设 x 在开测地球 $\exp_p(B_c(0))$ 上, 则又上面的命题, p 到 x 的径向测地线 γ 是极小的. 它的速度向量等于 ∂_r, 同时是 $g-$ 范数下的单位向量和法坐标的欧式范数[10]下的单位向量, 给出 γ 的 g-长度等于欧式长度, 后者又等于 $r(x)$.

[8] 为了让曲线在区间内不经过原点（奇点

[9] 为了让它不跑出测地球径向距离函数的定义域

[10] 在坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 上看

□

推论 13.4

在连通的 Riemann 流形上，每个开或闭的测地球也是有着相同半径的开或闭的度量球，每个测地球面也是有着相同半径的度量球面.

♡

Proof 设 (M, g) 是 Riemann 流形，任取 $p \in M$，令 $V = \exp_p\left(\bar{B}_c(0)\right) \subseteq M$ 是半径为 $c > 0$ 的绕 p 的闭测地球. 任取 M 上一点 q，若 $q \in V$，则上面的推论给出 q 在以 p 为中心,c 为半径的度量球中. 反之，若 $q \notin V$，则考虑从 p 到 q 的容许曲线 γ. 设 S 是以 p 为中心，c 为半径的测地球面. 则 $S^c = \exp_p(B_c(0)) \cup \left(M \setminus \exp_p(B_c(0))\right)$ 是不连通的. 故存在 $t_0 \in (a, b)$，使得 $\gamma(t_0) \in S$. 由于 $q \notin V$，q 和 $\gamma(t_0)$ 之间存在正的距离，故 $L_g(\gamma) > L_g\left(\gamma|_{[a,t_0]}\right) \geq c$，这表明 $d_g(p, q) > c$，q 不在绕 p 的半径为 c 的闭度量球中.

现在设 $W = \exp_p(B_c(0))$ 是以 c 为半径的开的测地球，则 W 可以写成一些闭测地球的并，这些闭测地球也同时是一些闭的度量球，这些闭的度量球并成绕 p 的半径为 c 的度量球. 故开的测地球也是相同半径的度量球.

最后关于球面的结论可通过闭球划去开球得到.

□

定义 13.14

对于度量球、球面的记号 $B_c(p), \bar{B}_c(p), S_c(p)$，也可以用来表示测地球.

♣

第 14 章 曲率

定义 14.1 (平坦性)

称 Riemann 流形 (M,g) 是平坦的，若它局部等距同构于欧式空间[a]。

[a]任一点有等距同构于 $\mathbb{R}^n$ 上一开集的邻域

命题 14.1

设 (M,g) 是平坦的 Riemann 流形，∇ 是其上的 Levi-Civita 联络，则对于任意的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，

$$\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ=\nabla_{[X,Y]}Z$$

Proof 由联络的局部性，等式由向量场在局部上的限制决定，又 (M,g) 是平坦的，从而是保度量的，又 Levi-Civita 联络由度量唯一决定，从而只需要在 $\mathbb{R}^n$ 上一开集 U 的关于 $\overline{\nabla}$ 的上述等式。

任取 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(U)$，则

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ=\overline{\nabla}_X\left(Y\left(Z^k\right)\partial_k\right)=XY\left(Z^k\right)\partial_k$$

类似地

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ=YX\left(Z^k\right)\partial_k$$

故

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ=(XY-YX)\left(Z^k\right)\partial_k=\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

故命题成立。

□

定义 14.2 (平坦性条件)

称光滑流形 M 上的联络满足 **平坦性条件**，若对于 M 上任意开集 U，定义在 U 上的光滑向量场 X,Y,Z 都满足

$$\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ=\nabla_{[X,Y]}Z$$

推论 14.1

若 (M,g) 上一个平坦的（伪）Riemann 流形，则它的 Levi-Civita 联络满足平坦性条件。

14.1 曲率张量

定义 14.3

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形，定义映射 $R:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$$

其中 ∇ 为 (M,g) 的 Levi-Civita 联络。♣

命题 14.2

上面定义的映射 R 是多 $C^\infty(M)$-线性的，从而定义出 M 上的一个 $(1,3)$-张量场。♠

Proof 显然映射 R 上 $\mathbb{R}$-线性的。任取 $f\in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}R(X,fY,Z)&=\nabla_X\nabla_{fY}Z-\nabla_{fY}\nabla_XZ-\nabla_{[X,fY]}Z\\&=\nabla_X(f\nabla_YZ)-f\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{f[X,Y]+(Xf)Y}Z\\&=(Xf)\nabla_YZ+f\nabla_X\nabla_YZ-f\nabla_Y\nabla_XZ-f\nabla_{[X,Y]}Z-(Xf)\nabla_YZ\\&=f\nabla_X\nabla_YZ-f\nabla_Y\nabla_XZ-f\nabla_{[X,Y]}Z\\&=fR(X,Y,Z)\end{aligned}$$

这表明 R 关于 Y 上 $C^\infty(M)$-线性的，又 $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$，故 R 关于 X 也是 $C^\infty(M)$-线性的。计算

$$\begin{aligned}R(X,Y,fZ)&=\nabla_X\nabla_Y(fZ)-\nabla_Y\nabla_X(fZ)-\nabla_{[X,Y]}(fZ)\\&=\nabla_X(f\nabla_YZ+Y(f)Z)-\nabla_Y(f\nabla_XZ+X(f)Z)\\&-f\nabla_{[X,Y]}Z-[X,Y](f)Z\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla_X(f\nabla_YZ+Y(f)Z)&=f\nabla_X\nabla_YZ+(Xf)\nabla_YZ+Y(f)\nabla_XZ+XY(f)Z\\\nabla_Y(f\nabla_XZ+X(f)Z)&=f\nabla_Y\nabla_XZ+(Yf)\nabla_XZ+X(f)\nabla_YZ+YX(f)Z\end{aligned}$$

二者相减，得到

$$\begin{aligned}&\nabla_X(f\nabla_YZ+(Yf)Z)-\nabla_Y(f\nabla_XZ+(Xf)Z)\\&=f(\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ)-([X,Y]f)Z\end{aligned}$$

结合以上，得到

$$R(X,Y,fZ)=fR(X,Y,Z)$$

□

定义 14.4

对于一对光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，由 $Z \mapsto R(X,Y)Z$ 给出的映射 $R(X,Y): \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 可以视作 TM 上的光滑丛自同态[a]，称为由 X 和 Y 决定的曲率自同态。

称张量 R 为 (Riemann) 曲率自同态或 $(1,3)$-曲率张量。

[a] $C^\infty(M)$-线性给出 $R(X,Y)$ 在每个纤维的限制不依赖于邻域的选取。

命题 14.3

曲率自同态 R 在 (x^i) 上写作

$$R = R_{ijk}^l \, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_l$$

其中 R_{ijk}^l 满足

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$$

Proof 由张量场的坐标表示，$\{\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_l\}$ 是 $(1,3)$-张量场空间的一组基，故 R 可以写作以上坐标表示。通过两边作用 $(\partial_i, \partial_j)\partial_k$，可以计算得到 $R_{ijk}^l \partial_l$。

□

命题 14.4

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形，则在任意光滑局部坐标下，$(1,3)$-曲率张量场的分量函数由以下给出:

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{im}^l$$

Idea 记忆: 展开 $\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k$ 关于两个求导分量的对称差.

Proof

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k$$

其中

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\left(\Gamma_{jk}^l \partial_l\right) = \left(\partial_i \Gamma_{jk}^l\right)\partial_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_{\partial_i}\partial_l \\
&= \left(\partial_i \Gamma_{jk}^l\right)\partial_l + \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l\right)\partial_l \\
&= \left(\partial_i \Gamma_{jk}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l\right)\partial_l
\end{aligned}$$

类似地

$$\nabla_{\partial_j}\nabla \partial_i \partial_k = \left(\partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\right)\partial_l$$

最后，由于 $[\partial_i, \partial_j] = 0$，故 $\nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k = 0$，上两式相减即可得命题成立。

$\square$

命题 14.5

设 (M, g) 是光滑（伪）Riemann 流形，$\Gamma : J \times I \to M$ 是 M 上的一个光滑单参数曲线族，则对于任意沿 Γ 的光滑向量场 V，都有

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R\left(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma\right) V$$

Proof 命题是局部的，对于每个 $(s, t) \in J \times I$，我们选取附近的一个局部坐标 (x^i)，并记

$$\Gamma(s, t) = \left(\gamma^1(s, t), \cdots, \gamma^n(s, t)\right), \quad V(s, t) = V^j(s, t)\, \partial_j|_{\Gamma(s,t)}$$

我们有

$$D_t V = \frac{\partial V^i}{\partial t} \partial_i + V^i D_t \partial_i$$

再作用 D_s，得到

$$D_s D_t V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t} \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t \partial_i + V^i D_s D_t \partial_i$$

由对称性对 $D_t D_s V$ 也有类似的结论，两式相减，得到

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i\left(D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i\right)$$

记 $S = \partial_s \Gamma, T = \partial_t \Gamma$，则

$$S = \frac{\partial \gamma^k}{\partial s} \partial_k, \quad T = \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \partial_j$$

由于 ∂_i 是可扩张的，

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i &= D_s\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \partial_j} \partial_i\right) \\ &= D_s\left(\frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i\right) \\ &= \frac{\partial^2 \gamma^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} D_s \nabla_{\partial_j} \partial_i \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} D_s \nabla_{\partial_j} \partial_i &= \nabla_{\frac{\partial \gamma^k}{\partial s} \partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \frac{\partial \gamma^k}{\partial s} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i \end{aligned}$$

故

$$D_s D_t \partial_i = \frac{\partial^2 \gamma^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \frac{\partial \gamma^k}{\partial s} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

类似地

$$D_t D_s \partial_i = \frac{\partial^2 \gamma^j}{\partial t \partial s} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial \gamma^j}{\partial s} \frac{\partial \gamma^k}{\partial t} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

$$\begin{aligned} D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i &= \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \frac{\partial \gamma^k}{\partial s} \left(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i \right) \\ &= \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} \frac{\partial \gamma^k}{\partial s} R\left(\partial_k, \partial_j\right) \partial_i = R\left(S, T\right) \partial_i \end{aligned}$$

于是

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i R\left(S, T\right) \partial_i = R\left(S, T\right) V$$

□

定义 14.5

定义（Riemann）曲率张量为 $(0,4)$-张量场 $Rm = R^\flat$，即

$$Rm\left(X, Y, Z, W\right) = \left\langle R\left(X, Y\right) Z, W \right\rangle_g$$

♣

命题 14.6 (坐标表示)

在任意一组光滑坐标卡下，

$$Rm = R_{ijkl}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l$$

其中 $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$，进而

$$R_{ijkl} = g_{lm} \left(\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^m - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^m \right)$$

♠

Idea 记忆: 对 R_{ijk}^l 降低指标 $g_{lm} R_{ijk}^m$, 计算 $\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k$ 关于求导分量的对称差.

Proof 将 Rm 按张量场空间的坐标基展开，计算

$$\begin{aligned} Rm\left(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) &= \left\langle R\left(\partial_i, \partial_j\right) \partial_k, \partial_l \right\rangle_g \\ &= \left\langle R_{ijk}^m \partial_m, \partial_l \right\rangle_g \\ &= g_{ml} R_{ijk}^m \end{aligned}$$

并带入 R_{ijk}^m 的计算公式

$$R_{ijk}^m = \left(\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^m - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^m \right)$$

即可

□

命题 14.7

Levi-Civita 联络的曲率张量是局部等距同构不变的：若 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是（伪）Riemann 流形，$\varphi: M \to \tilde{M}$ 是一个局部等距同构，则 $\varphi^*\widetilde{Rm} = Rm$，其中 $\widetilde{Rm}$ 和 Rm 均由 Levi-Civita 联络定义

Proof 由于局部等距同构保持 Levi-Civita 联络，故曲率自同态张量 $\varphi^*\tilde{R} = R$，进而 $\varphi^*\tilde{R}_{ijk}^m = R_{ijk}$，又 $\varphi^*\tilde{g}_{lm} = g_{lm}$，故 $\varphi^*\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl}$，从而 $\varphi^*\widetilde{Rm} = Rm$

□

14.2 平坦流形

引理 14.1

设 M 是光滑流形，∇ 是 M 上满足平坦性条件的任意联络。给定 $p \in M$ 以及 $v \in T_pM$，则存在一个在 p 的某个邻域上平行的向量场 V，使得 $V_p = v$。

Proof *

令 $p \in M$，$v \in T_pM$，设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是以 p 为中心的一个光滑坐标。通过缩小坐标的像，不妨设坐标映射的像是一个开立方体 $C_\varepsilon = \{x : |x^i| < \varepsilon, i = 1,\cdots,n\}$，利用坐标映射将坐标的定义域与 C_ε 等同。

按以下方式构造一个向量场 V，先将 v 沿着 x^1-坐标轴做平行移动，则我们在 x^1-轴上的每一个点确定了一个切向量；在令 x^1-轴上的每一个点沿着 x^2-曲线做平行移动，则我们在 (x^1,x^2)-平面上的每一个点确定了切向量，以此类推，知道我们再 $(x^1,\cdots,x^n)$-平面上的每一个点都确定了切向量。我们再 C_ε 上定义了一个向量场 V，通过流的一些知识，可以证明 V 是一个光滑向量场[1]。

接下来证明 $\nabla_X V = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(C_\varepsilon)$。由于 $\nabla_X V$ 是关于 X 具有 $C^\infty(M)$-线性的，只需要证明 $\nabla_{\partial_i} V = 0$ 对于所有的 $i = 1,\cdots,n$ 成立。根据构造，$\nabla_{\partial_1} V$ 在 x^1-轴上成立，$\nabla_{\partial_2} V$ 在 (x^1,x^2)-平面上成立，一般地，$\nabla_{\partial_k} V = 0$ 在 $M_k \subseteq C_\varepsilon$ 成立，其中 $M_k = \left\{x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\right\}$。接下来，我们对 k 归纳地证明

$$\nabla_{\partial_1} V = \cdots = \nabla_{\partial_k} V = 0, \quad \text{在} M_k \text{上成立}$$

当 $k = 1$ 由 V 的构造已经成立，当 $k = n$ 时就是我们所需要的。假设上式对于某个 k 成立，则 $\nabla_{\partial_{k+1}} V$ 在整个 M_{k+1} 上成立；而对于 $i \le k$，$\nabla_{\partial_i} V$ 在 $M_k \subseteq C_\varepsilon$ 上成立。

[1]现在还不会证

由于 $[\partial_{k+1}, \partial_i]$ 成立，由平坦性条件，我们有

$$\nabla_{\partial_{k+1}}\left(\nabla_{\partial_i} V\right)=\nabla_{\partial_i}\left(\nabla_{\partial_{k+1}} V\right)=0$$

在 M_{k+1} 上成立。这表明 $\nabla_{\partial_i} V$ 在 M_k 上的任意一点都沿着 x^{k+1}-曲线平行。而 $\nabla_{\partial_i} V$ 在 M_k 上任一点都为零，向量场在该点沿 x^{k+1} -曲线的平行移动唯一，就是零向量场。而 M_{k+1} 的每一个点都落在这样一个 x^{k+1}-曲线上，故 $\nabla_{\partial_i} V$ 在 M_{k+1} 上为零。

□

定理 14.1

一个（伪）-Riemann 流形是平坦的，当且仅当它（关于 Levi-Civita 联络）的曲率张量恒为零。

♡

定理 14.2

令 (M, g) 是（伪）-Riemann 流形；I 是包含了 0 的开区间；令 $\Gamma: I \times I \rightarrow M$ 是光滑的单参数曲线族；令 $p=\Gamma(0,0), x=\partial_s \Gamma(0,0)$，$y=\partial_t \Gamma(0,0)$。对于任意的 $s_1, s_2, t_1, t_2 \in I$，令 $P_{s_1, t_1}^{s_1, t_2}: T_{\Gamma\left(s_1, t_1\right)} M \rightarrow T_{\Gamma\left(s_1, t_2\right)} M$ 是沿曲线 $t \mapsto \Gamma\left(s_1, t\right)$ 从时间 t_1 到 t_2 的平行移动，令 $P_{s_1, t_1}^{s_2, t_2}: T_{\Gamma\left(s_1, t_1\right)} M \rightarrow T_{\Gamma\left(s_2, t_1\right)} M$ 表示沿曲线 $s \mapsto \Gamma\left(s, t_1\right)$ 的从时间 s_1 到 s_2 的平行移动。则对于所有的 $z \in T_p M$，

$$R(x, y) z=\lim _{\delta, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{\delta, 0}^{0,0} \circ P_{\delta, \varepsilon}^{\delta, 0} \circ P_{0, \varepsilon}^{\delta, \varepsilon} \circ P_{0,0}^{0, \varepsilon}(z)-z}{\delta \varepsilon}$$

♡

14.3 曲率张量的对称性

命题 14.8 (曲率张量的对称性)

设 (M, g) 是（伪）Riemann 流形。则 g 的 $(0,4)$-曲率张量对于所有的向量场 W, X, Y, Z 有一下成立

1. $Rm(W, X, Y, Z)=-Rm(X, W, Y, Z)$ [a]
2. $Rm(W, X, Y, Z)=-Rm(W, X, Z, Y)$ [b]
3. $Rm(W, X, Y, Z)=Rm(Y, Z, W, X)$ [c]
4. 代数 Biachi 恒等式：

$$Rm(W, X, Y, Z)+Rm(X, Y, W, Z)+Rm(Y, W, X, Z)=0$$ [d]

在任意一组坐标下，有对应分量表示的形式

1′. $R_{ijkl}=-R_{jikl}$.

2′. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

3′. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

4′. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

---

[a]交换求导次序的反称

[b]交换回路差呈现方式的反称

[c]交换回路差的产生和呈现的对称

[d]前三个的轮换对称，来自联络的对称性

Proof

1. 由定义显然；
2. 只需要证明 $Rm(W, X, Y, Y)$ 对于所有的 Y 成立，然后就可以通过展开 $Rm(W, X, Y + Z, Y$ 得到. 因此我们需要证明

$$\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y \rangle + \langle \nabla_X \nabla_W, Y \rangle - \left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y \right\rangle$$

证明的秘诀是利用度量性，把外面的导数求到里面去，考虑

$$\begin{aligned} WX \langle Y, Y \rangle &= 2W \langle \nabla_X Y, Y \rangle = 2 \langle \nabla_W \nabla_X Y, Y \rangle + 2 \langle \nabla_X Y, \nabla_W Y \rangle \\ XW \langle Y, Y \rangle &= 2X \langle \nabla_W Y, Y \rangle = 2 \langle \nabla_X \nabla_W Y, Y \rangle + 2 \langle \nabla_W Y, \nabla_X Y \rangle \\ [W, X] \langle Y, Y \rangle &= 2 \left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y \right\rangle \end{aligned}$$

前两式相加减去后一个，得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \langle \nabla_W \nabla_X Y, Y \rangle + 2 \langle \nabla_X \nabla_W Y, Y \rangle - 2 \left\langle \nabla_{[W,X]} Y, Y \right\rangle \\ &= 2Rm(W, X, Y, Y) \end{aligned}$$

3. 先证明第四个，由 Rm 的定义，只需要证明

$$R(W, X) Y + R(X, Y) W + R(Y, W) X = 0$$

按定义直接展开，利用对称性，得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\nabla_W\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_W Y-\nabla_{[W,X]}Y\right)\\
&+\left(\nabla_X\nabla_Y W-\nabla_Y\nabla_X W-\nabla_{[X,Y]}W\right)\\
&+\left(\nabla_Y\nabla_W X-\nabla_W\nabla_Y X-\nabla_{[Y,W]}X\right)\\
&=\nabla_W\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X\right)+\nabla_X\left(\nabla_Y W-\nabla_W Y\right)+\nabla_Y\left(\nabla_W X-\nabla_X W\right)\\
&-\nabla_{[W,X]}Y-\nabla_{[X,Y]}W-\nabla_{[Y,W]}X\\
&=\nabla_W[X,Y]+\nabla_X[Y,W]+\nabla_Y[W,X]\\
&-\nabla_{[W,X]}Y-\nabla_{[X,Y]}W-\nabla_{[Y,W]}X\\
&=[W,[X,Y]]+[X,[Y,W]]+[Y,[W,X]]
\end{aligned}
$$

由 Jacobi 恒等式得证.

□

命题 14.9 (微分 Bianchi 恒等式)

曲率张量的全协变导数满足一下恒等式

$$\nabla Rm\left(X,Y,Z,V,W\right)+\nabla Rm\left(X,Y,V,W,Z\right)+Rm\left(X,Y,W,Z,V\right)=0^{a} \quad (14.1)$$

它的分量形式为

$$R_{ijkl;m}+R_{ijlm;k}+R_{ijmk;l}$$

[a] 后三个轮换

14.4 Ricci 恒等式

定义 14.6 (曲率同态的对偶)

令 $R(X,Y)^{*}:T^{*}M\to T^{*}M$ 为 $R(X,Y)$ 的对偶映射，按以下方式定义

$$\left(R\left(X,Y\right)^{*}\eta\right)(Z)=\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right)$$

定理 14.3 (Ricci 恒等式)

在 (伪)Riemann 流形 M 上，二阶全协变导数对于向量场和张量场满足一下恒等式. 若 Z 是一个光滑向量场，则

$$\nabla^2_{X,Y}Z-\nabla^2_{Y,X}Z=R\left(X,Y\right)Z \quad (14.2)$$

若 β 是一个光滑 1-形式，则

$$\nabla^2_{X,Y}\beta - \nabla^2_{Y,X}\beta = -R(X,Y)^*\beta \tag{14.3}$$

设 B 是任意 (k,l) -张量，则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}B - \nabla^2_{Y,X}B\right)\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&= B\left(R(X,Y)^*\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right) + B\left(\omega^1,\cdots,R(X,Y)^*\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&- B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,R(X,Y)W_1,\cdots,W_l\right) - B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,R(X,Y)W_l\right)\end{aligned} \tag{14.4}$$

在光滑局部标价下，这些结论有分量形式

$$\begin{aligned}Z^i_{;pq} - Z^i_{;qp} &= -R^i_{pqm}Z^m\\ \beta^i_{;pq} - \beta^i_{;pq} &= R^m_{pqi}\beta_m\\ B^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_l;pq} &= -R^{i_1}_{pqm}B^{mi_2\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} - \cdots - R^{i_k}_{pqm}B^{i_1\cdots i_{k-1}m}_{j_1,\cdots,j_l}\\&\quad + R^m_{pqj_1}B^{i_1,\cdots,i_k}_{mj_2\cdots j_l} + \cdots + R^m_{pqj_l}B^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1\cdots j_{l-1}m}\end{aligned}$$

♡

Proof

对于任意的张量场 B，我们有

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}B - \nabla^2_{Y,X}B &= \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_{\nabla_X Y}B - \nabla_Y\nabla_X B + \nabla_{\nabla_Y X}F\\&= \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_Y\nabla_X B - \nabla_{[X,Y]}B\end{aligned}$$

首先考虑向量场的结论，我们

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\&= R(X,Y)Z\end{aligned}$$

对于 1-形式的情况，我们反复利用 ∇ 与自然配对的相容性

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X\omega)Y + \omega(\nabla_X Y),$$

计算

$$\begin{aligned}(\nabla_X(\nabla_Y\beta))(Z) &= \nabla_X((\nabla_Y\beta)Z) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\&= \nabla_X(\nabla_Y(\beta(Z) - \beta(\nabla_Y Z))) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\&= \nabla_X(\nabla_Y(\beta(Z))) - \nabla_X(\beta(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y\beta)(\nabla_X Z)\\&= XY(\beta(Z)) - X(\beta(\nabla_Y Z)) - Y(\beta(\nabla_X Z)) + \beta(\nabla_Y\nabla_X Z)\end{aligned}$$

类似的

$$(\nabla_Y(\nabla_X\beta))(Z) = YX(\beta(Z)) - Y(\beta(\nabla_X Z)) - X(\beta(\nabla_Y Z)) + \beta(\nabla_X\nabla_Y Z)$$

以及

$$\nabla_{[X,Y]}\beta(Z)=[X,Y]\beta(Z)-\beta\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}\beta(Z)-\nabla^2_{Y,X}\beta(Z)&=\nabla_X\nabla_Y\beta(Z)-\nabla_Y\nabla_X\beta(Z)-\nabla_{[X,Y]}\beta(Z)\\&=\beta(\nabla_Y\nabla_X Z)-\beta(\nabla_X\nabla_Y Z)+\beta\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)\\&=-\beta(R(X,Y)Z)\\&=-R(X,Y)^*\beta(Z)\end{aligned}$$

故 1-形式的情况得证. 现在考虑任意张量场 F,G, 则

$$\begin{aligned}&\nabla^2_{X,Y}(F\otimes G)-\nabla^2_{Y,X}(F\otimes G)\\&=\nabla_X\nabla_Y(F\otimes G)-\nabla_Y\nabla_X(F\otimes G)-\nabla_{[X,Y]}(F\otimes G)\\&=(\nabla_X\nabla_Y F)\otimes G+(\nabla_X F)\otimes(\nabla_Y G)+(\nabla_Y F)\otimes(\nabla_X G)+F\otimes(\nabla_X\nabla_Y G)\\&-(\nabla_Y\nabla_X F)\otimes G+(\nabla_Y F)\otimes(\nabla_X G)-(\nabla_X F)\otimes(\nabla_Y G)+F\otimes(\nabla_Y\nabla_X G)\\&-\left(\nabla_{[X,Y]}F\right)\otimes G-F\otimes\left(\nabla_{[X,Y]}G\right)\\&=\left(\nabla^2_{X,Y}F\right)\otimes G+F\otimes\left(\nabla^2_{X,Y}G\right)\end{aligned}$$

考虑 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l$，则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X}\right)\left(V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l\right)\\&=(R(X,Y)V_1)\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l+V_1\otimes\cdots\otimes(R(X,Y)V_k)\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l\\&-V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\left(R(X,Y)^*\eta^1\right)\otimes\cdots\otimes\eta^l-V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\left(R(X,Y)^*\eta^l\right)\end{aligned}$$

记 $B=V_1\otimes\cdots\otimes V_k\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^l$, 则

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X}\right)B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&=B\left(R(X,Y)^*\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)+\cdots+B\left(\omega^1,\cdots,R(X,Y)^*\omega^k,W_1,\cdots,W_l\right)\\&-B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,R(X,Y)W_1,\cdots,W_l\right)-B\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,W_1,\cdots,R(X,Y)W_l\right)\end{aligned}$$

最后, 对于分量形式的刻画, 我们利用

$$R(E_q,E_p)E_j=R_{qpj}^m E_m=-R_{pqj}^m E_m$$

和

$$R(E_q,E_p)^*\varepsilon^i=-R_{qpm}^i\varepsilon^m=R_{pqm}^i\varepsilon^m$$

□

14.5 Ricci 曲率和标量曲率

定义 14.7

设 (M,g) 是 n-维 (伪)Riemann 流形

1. 定义 Ricci 曲率为一个 2-张量场, 记作 Rc, 通过缩并曲率自同态的第一个指标和最后一个指标, 即

$$Rc(X,Y) := \operatorname{tr}\left(Z \mapsto R(Z,X)Y\right)^{a}$$

则在一组光滑标架下,

$$Rc = R_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$$

其中 $R_{ij} = Rc(E_i, E_j)$

2. 定义标量曲率为函数 S, 通过取 Ricci 张量的迹

$$S = \operatorname{tr}_g Rc^{b}$$

[a] 由于曲率自同态本身是 $(1,3)$ -张量, 斜变指标只有一个选择, 体现在映射的结果 $R(Z,X)Y$ 上; 固定了 X,Y, 选择构造以 Z 为自变量嵌入到张量的映射, 体现了我们选择缩并的逆变指标是第一个,X,Y 对应的指标不缩并.

[b] 对 Rc 取内积 g 下的迹需要将 Rc 转换成 $TM \to TM$ 的映射, 这里将 Rc 自然同构于 $(1-1)$ 张量 $TM \to TM^*$, 再将作用的结果通过 $\tilde{g}^{-1}$ 提升指标.

♣

命题 14.10

1.
$$R_{ij} = R^k_{kij} = g^{km}R_{kijm}$$

2.
$$S = \operatorname{tr}_g Rc = R^i_i = g^{ij}R_{ij}$$

♠

Proof

1. $R_{ij} = Rc(E_i,E_j) = \operatorname{tr}(Z \mapsto R(Z,E_i)E_j) = R^k_{kij}$ 又

$$R_{kijm} = \left\langle R^l_{kij}E_l, E_m \right\rangle = g_{lm}R^l_{kij}$$

故

$$g^{lm}R_{kijm} = R^l_{kij}$$

从而

$$R^k_{kij} = g^{km}R_{kijm}$$

2. $\tilde{Rc}: TM \to TM^*$, $\tilde{Rc}(X)(Y) := Rc(X,Y)$.$\tilde{g}^{-1}: T^*M \to TM$ 降低指标.

$$\tilde{Rc}(E_i)(E_j) = Rc(E_i, E_j) = R_{ij} \implies \tilde{Rc}(E_i) = R_{ij}\varepsilon^j$$

$$Rc' := \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{Rc}: TM \to TM$$

$$Rc'(E_i)\left(\varepsilon^j\right) = \tilde{g}^{-1}\left(\tilde{Rc}(E_i)\right)\left(\varepsilon^j\right) = \tilde{g}^{-1}\left(R_{im}\varepsilon^m\right)\left(\varepsilon^j\right)$$

$$\tilde{g}^{-1}(\varepsilon^m) = g^{ml}E_l$$

因此

$$Rc'(E_i)\left(\varepsilon^j\right) = R_{im}g^{ml}E_l\varepsilon^j = R_{im}g^{mj}$$

这表明

$$R_i^j = g^{jm}R_{im}$$

故

$$\mathrm{tr}\ _gRc = \mathrm{tr}\ Rc' = R_i^i = g^{ij}R_{ij}$$

□

定义 14.8 (无迹 Ricci 张量)

定义 g 的**无迹 Ricci 张量** 为以下对称 2-张量:

$$\mathring{Rc} = Rc - \frac{1}{n}Sg$$

♣

命题 14.11

设 (M,g) 是 n- (伪)Riemann 流形, 则 $\mathrm{tr}_g\mathring{Rc} \equiv 0$, 则 Ricci 张量正交分解为

$$Rc = \mathring{Rc} + \frac{1}{n}Sg$$

因此, 当 g 是 Riemann 度量时,

$$|Rc|_g^2 = \left|\mathring{Rc}\right|_g^2 + \frac{1}{n}S^2$$

♠

Proof

$$\mathrm{tr}_g g = g^{ij}g_{ji} = \delta_i^i = n$$

于是

$$\mathrm{tr}_g\left(\mathring{Rc}\right) = \mathrm{tr}_g(Rc) - \frac{1}{n}S\mathrm{tr}_g(g) = S - \frac{1}{n}Sn = 0$$

任取 2-张量 h, 则

$$\langle h, g\rangle_g = h^{kl} g_{kl} = g^{ki} g^{lj} h_{ij} g_{kl} = g^{ki} \delta_k^j h_{ij} = g^{ij} h_{ij} = \operatorname{tr}_g(h)$$

$$\left\langle \overset{\circ}{Rc}, g \right\rangle_g = \operatorname{tr}_g\left(\overset{\circ}{Rc}\right) = 0$$

故两者正交. 最后, 范数的等式依据 g 的双线性展开, 由正交性, 以及

$$\langle g, g\rangle_g = n$$

得到. □

定义 14.9 (外协变导数)

若 T 是 (伪)Riemann 流形上的光滑 2-张量, 定义T 的**外协变导数** 为一个 3-张量 DT

$$(DT)(X, Y, Z) = -(\nabla T)(X, Y, Z) + (\nabla T)(X, Z, Y)$$

它的分量表示为

$$(DT)_{ijk} = -T_{ij;k} + T_{ik;j}$$

Remark 这是 1-形式的外微分的一个推广,

$$(\mathrm{d}\eta)(Y, Z) = (-\nabla\eta)(Y, Z) + (\nabla\eta)(Z, Y)$$

14.6 Weyl 张量

定义 14.10 (代数曲率张量)

设 V 是 n 维实线性空间. 令 $\mathcal{R}(V^*) \subseteq T^4(V^*)$ 表示 V 上全体具有以下 $(0,4)$-Riemann 曲率张量对称性的协变 4-张量 T 构成的线性空间:

1. $T(w, x, y, z) = -T(x, w, y, z)$
2. $T(w, x, y, z) = -T(w, x, z, y)$
3. $T(w, x, y, z) = T(y, z, w, x)$
4. $T(w, x, y, z) + T(x, y, w, z) + T(y, w, x, z) = 0$

$\mathcal{R}(V^*)$ 上的一个元素称为一个**代数曲率张量**.

Remark 与 Riemann 曲率张量的情况一样, 事实上第 3 条可以其它对称性推出, 这里方便起见仍把它写进定义.

命题 14.12

设 V 是 n 维实线性空间, 则

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Proof 用 $\mathcal{B}(V^*)$ 表示满足对称性 1.-3. 的全体 4-张量. 定义映射 $\Phi : \Sigma^2\left(\bigwedge^2(V)^*\right) \to \mathcal{B}(V^*)$

$$\Phi(B)(w,x,y,z) = B(w\wedge x, y\wedge z)$$

其中 $\Sigma^2\left(\bigwedge^2(V)^*\right)$ 表示全体定义在逆变交错 2-张量空间上的双线性映射. 易见 $\Phi(B)$ 满足对称性 1.-3. 事实上, Φ 是线性同构: 取 V 的一组基 $b_1,\cdots,b_n$, 则 $\{b_i\wedge b_j : i<j\}$ 构成 $\bigwedge^2 V$ 的一组基. 对以下做线性扩张

$$\Psi(T)(b_i\wedge b_j, b_k\wedge b_l) = T(b_i,b_j,b_k,b_l)$$

简单计算发现 Ψ 是 Φ 的逆. 于是我们得到

$$\dim \mathcal{B}(V^*) = \frac{\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}+1\right)}{2} = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$$

这里用到了 $\dim \bigwedge^2 V = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 以及 m 维线性空间上的双线性映射空间的维数为 $\frac{m(m+1)}{2}$ 的事实.

接下来, 定义映射 $\pi : \mathcal{B}(V^*) \to T^4(V^*)$

$$\pi(T)(w,x,y,z) = \frac{1}{3}\left(T(w,x,y,z) + T(x,y,w,z) + T(y,w,x,z)\right)$$

事实上, π 是交错算子 Alt 在 $\mathcal{B}(V^*)$ 上的限制映射, 因此 $\mathrm{Alt}(T)$ 的 24 项, 由于 T 满足的 1.-3. 对称性, 每八项相同, 合为一项. 故 $\mathrm{Im}\,\pi \subseteq \bigwedge^4(V^*)$. 事实上, $\mathrm{Im}\,\pi = \bigwedge^4(V^*)$, 这是因为每个交错 4-张量满足对称性 1.-3. 从而本身就在 $\mathcal{B}(V^*)$ 中, 并且它在 π 下的像就是它自己. 最终, 由维数公式

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \dim \mathcal{B}(V^*) - \dim \bigwedge^4(V^*) = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \binom{n}{4}$$

化简得到 $\mathcal{R}(V^*)$ 的维数. □

定义 14.11 (Kulkarni-Nomizu 积)

设 V 是 n 维线性空间, 给定 $h,k \in \Sigma^2(V^*)$, 按以下方式定义一个协变 4-张量 $h \owedge k$, 称为 h 和 k 的 Kulkarni-Nomizu 积,

$$\begin{aligned} h \owedge k(w,x,y,z) = h(w,z)k(x,y) &+ h(x,y)k(w,z) \\ &- h(w,y)k(x,z) - h(x,z)k(w,y) \end{aligned}$$

在任意一组基下，分量形式为

$$(h \owedge k)_{ijlm} = h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il}$$

♣

Remark 当定义的曲率张量跟我们取反号时，对应的 Kulkarni-Nomizu 积也得定义成符号相反的.

引理 14.2 (Kulkarni-Nomizu 积的性质)

令 V 是配备了标量乘法 g 的 n 维向量空间. h, k 是 V 上的对称 2-张量，T 是 V 上的代数曲率张量，tr_g 表示对第一个和最后一个指标的缩并.

1. $h \owedge k$ 是一个代数曲率张量.
2. $h \owedge k = k \owedge h$.
3. $\mathrm{tr}_g\left(h \owedge g\right) = \left(n-2\right)h + \left(\mathrm{tr}_g h\right)g$.
4. $\mathrm{tr}_g\left(g \owedge g\right) = 2\left(n-1\right)g$.
5. $\left\langle T, h \owedge g\right\rangle_g = 4\left\langle \mathrm{tr}_g T, h\right\rangle_g$.
6. 若 g 正定，则 $\left|g \owedge h\right|_g^2 = 4\left(n-2\right)\left|h\right|_g^2 + 4\left(\mathrm{tr}_g h\right)^2$

♡

Proof [*]

1. 只需要证明代数 Bianchi 恒等式. 任取 $w, x, y, z \in V$,

$$\begin{aligned}
&h \owedge k\left(w,x,y,z\right) + h \owedge k\left(x,y,w,z\right) + h \owedge k\left(y,w,x,z\right)\\
&= h\left(w,z\right)k\left(x,y\right) + h\left(x,y\right)k\left(w,z\right) - h\left(w,y\right)k\left(x,z\right) - h\left(x,z\right)k\left(w,y\right)\\
&+ h\left(x,z\right)k\left(w,y\right) + h\left(w,y\right)k\left(x,z\right) - h\left(w,x\right)k\left(y,z\right) - h\left(y,z\right)k\left(w,x\right)\\
&+ h\left(y,z\right)k\left(w,x\right) + h\left(w,x\right)k\left(y,z\right) - h\left(x,y\right)k\left(w,z\right) - h\left(w,z\right)h\left(x,y\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

2. 由定义立即得到. 是

3. 在一组基下计算,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_g\left(h \owedge g\right)_{jl} &= \left(h \owedge g\right)_{ijl}^{i}\\
&= g^{im}\left(h \owedge g\right)_{ijlm}\\
&= g^{im}\left(h_{im}g_{jl} + h_{jl}g_{im} - h_{il}g_{jm} - h_{jm}g_{il}\right)\\
&= h_i^i g_{jl} + nh_{jl} - h_{jl} - h_{jl}\\
&= \left(n-2\right)h_{jl} + \left(\mathrm{tr}_g h\right)g_{jl}
\end{aligned}$$

由于 3. 的证明不需要 h 的对称性，故 4. 由 $\mathrm{tr}_g g = n$ 立即得到. □

第 14 章 练习

Problem 14.1 设 M 是一个 (伪)Rimeann 流形, 令 (x^i) 是以 $p \in M$ 为中心的法坐标. 证明以下在 p 处成立:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il}\right)$$

Proof

利用曲率张量的对称性, 以及法坐标的 Christoffel 在原点处退化来说明.

法坐标的 Christoffel 符号在 p 点处退化, 故在 p 点处,

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\left(\Gamma_{jk}^m\partial_m\right)\\ &= \left(\partial_i\Gamma_{jk}^m\right)\partial_m\end{aligned}$$

类似地

$$\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k = \left(\partial_j\Gamma_{ik}^m\right)\partial_m$$

于是

$$\begin{aligned}R\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \left[\partial_i,\partial_j\right]\partial_k\\ &= \left(\partial_i\Gamma_{jk}^m - \partial_j\Gamma_{ik}^m\right)\partial_m\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\left\langle R\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k,\partial_l\right\rangle &= \left\langle\partial_i\Gamma_{jk}^m\partial_m,\partial_l\right\rangle - \left\langle\partial_j\Gamma_{ik}^m\partial_m,\partial_l\right\rangle\\ &= g_{ml}\partial_i\Gamma_{jk}^m - g_{ml}\partial_j\Gamma_{ik}^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_j\partial_l g_{ik} &= \partial_j\partial_l\left\langle\partial_i,\partial_k\right\rangle\\ &= \partial_j\left\langle\nabla_{\partial_l}\partial_i,\partial_k\right\rangle + \partial_j\left\langle\partial_i,\nabla_{\partial_l}\partial_k\right\rangle\\ &= \partial_j\left\langle\Gamma_{li}^m\partial_m,\partial_k\right\rangle + \partial_j\left\langle\partial_i,\Gamma_{lk}^m\partial_m\right\rangle\\ &= \partial_j\left(\Gamma_{li}^m g_{mk}\right) + \partial_j\left(\Gamma_{lk}^m g_{im}\right)\\ &= g_{mk}\partial_j\Gamma_{li}^m + g_{im}\partial_j\Gamma_{lk}^m\end{aligned}$$

类似地

$$\partial_i\partial_k g_{jl} = g_{ml}\partial_i\Gamma_{kj}^m + g_{jm}\partial_i\Gamma_{kl}^m$$

$$\partial_i\partial_l g_{jk} = g_{mk}\partial_i\Gamma_{lj}^m + g_{jm}\partial_i\Gamma_{lk}^m$$

$$\partial_j\partial_k g_{il} = g_{ml}\partial_j\Gamma_{ki}^m + g_{im}\partial_j\Gamma_{lk}^m$$

前两式减后两式除以二, 得到右式等于

$$\frac{1}{2}\left(g_{mk}\partial_j\Gamma^m_{li}+g_{ml}\partial_i\Gamma^m_{kj}-g_{mk}\partial_i\Gamma^m_{lj}-g_{ml}\partial_j\Gamma^m_{ki}\right)=\frac{1}{2}\left(-R_{ijlk}+R_{ijkl}\right)=R_{ijkl}$$

□

Problem 14.2 设 ∇ 是 (伪)Riemann 流形 (M,g) 上的 Levi-Civita 联络, $\omega_i{}^j$ 是与局部标架 (E_i) 对应的联络 1-形式矩阵. 定义一个 2-形式的矩阵 Ω_i^j, 称为 **曲率 2-形式**, 为

$$\Omega_i{}^j=\frac{1}{2}R_{kli}{}^j\varepsilon^k\wedge\varepsilon^l$$

其中 (ε^i) 是对偶余 (E_i) 的余标架. 证明以下 **Cartan 第二结构方程**成立:

$$\Omega_i^j=\mathrm{d}\omega_i{}^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j$$

Proof

$$\nabla_X E_i=\omega_i^j(X)\,E_j$$

$$\Gamma^j_{ki}E_j=\nabla_{E_k}E_i=\omega_i^j(E_k)\,E_j$$

故

$$\omega_i^j(E_k)=\Gamma^j_{ki}$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j(E_k,E_l)=E_k\left(\omega_i^j(E_l)\right)-E_l\left(\omega_i^j(E_k)\right)-\omega_i^j([E_k,E_l])$$

$$\omega_i^k\wedge\omega_k^j(E_k,E_l)=\omega_i^m(E_k)\,\omega_m^j(E_l)-\omega_i^m(E_l)\,\omega_m^j(E_k)$$

$$\begin{aligned}
R_{kli}&=\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i-\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i-\nabla_{[E_k,E_l]}E_i\\
&=\nabla_{E_k}\left(\omega_i^j(E_l)\,E_j\right)-\nabla_{E_l}\left(\omega_i^j(E_k)\,E_j\right)-\omega_i^j([E_k,E_l])\,E_j\\
&=\omega_i^j(E_l)\,\nabla_{E_k}E_j+E_k\left(\omega_i^j(E_l)\right)E_j-\omega_i^j(E_k)\,\nabla_{E_l}E_j-E_l\left(\omega_i^j(E_k)\right)E_j\\
&-\omega_i^j([E_k,E_l])\,E_j\\
&=\omega_i^j(E_l)\,\omega_j^m(E_k)\,E_m+E_k\left(\omega_i^j(E_l)\right)E_j-\omega_i^j(E_k)\,\omega_j^m(E_l)\,E_m-E_l\left(\omega_i^j(E_k)\right)E_j\\
&-\omega_i^j([E_k,E_l])\,E_j\\
&=\omega_i^m(E_l)\,\omega_m^j(E_k)\,E_j+E_k\left(\omega_i^j(E_l)\right)E_j-\omega_i^m(E_k)\,\omega_m^j(E_l)\,E_j-E_l\left(\omega_i^j(E_k)\right)E_j\\
&-\omega_i^j([E_k,E_l])\,E_j
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
R^j_{kli}&=\omega_i^m(E_l)\,\omega_m^j(E_k)+E_k\left(\omega_i^j(E_l)\right)-\omega_i^m(E_k)\,\omega_m^j(E_l)-E_l\left(\omega_i^j(E_k)\right)\\
&-\omega_i^j([E_k,E_l])
\end{aligned}$$

$$\Omega_i^j=\frac{1}{2}R^j_{kli}\left(\varepsilon^k\otimes\varepsilon^l-\varepsilon^l\otimes\varepsilon^k\right)=\sum_{k<l}R^j_{kli}\varepsilon^k\otimes\varepsilon^l$$

于是

$$\Omega_i^j(E_k, E_l) = R_{kli}^j = \mathrm{d}\omega_i^j(E_k, E_l) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(E_k, E_l)$$

□

第 15 章 Riemann 子流形

在本章中，都假设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 m 维（伪）Riemann 流形，(M,g) 是 $\tilde{M}$ 的 n 维嵌入子流形，记与 (M,g) 有关的协变导数和曲率量为 $(\nabla,R,Rm,\text{etc.})$，$\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的相关量相应地记作 $\left(\tilde{\nabla},\tilde{R},\widetilde{Rm},\text{etc.}\right)$. 可以不严格地用 $\langle v,w\rangle$ 同时表示关于 g 和 $\tilde{g}$ 的度量配对.

15.1 第二基本形式

类似于 9.5.1中的操作，在 M 适配于 $\tilde{M}$ 的一组正交标架 $(E_1,\cdots,E_m)$ 下，定义称为是切投影和法投影的正交投影:

$$\pi^{\top}:T\tilde{M}|_M\to TM,$$
$$\pi^{\perp}:T\tilde{M}|_M\to NM.$$

为 $(E_1,\cdots,E_m)$ 向 $\operatorname{span}(E_1,\cdots,E_n)$ 和 $\operatorname{span}(E_{n+1},\cdots,E_m)$ 的通常投影. 它们都是光滑丛同态[1]. 若 X 是 $T\tilde{M}|_M$ 的一个截面，通常简记 $X^{\top}=\pi^{\top}X$, $X^{\perp}=\pi^{\perp}X$ 分别为 X 的切投影和法投影.

若 X,Y 是 $\mathfrak{X}(M)$ 上的光滑向量场，可以将它们延拓到 $\tilde{M}$ 的一个开子集上 (也记作 X 和 Y)，作用氛围协变导数 $\tilde{\nabla}$ 后在 M 上的点分解，得到

$$\tilde{\nabla}_XY=\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^{\top}+\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^{\perp}$$

定义 15.1 (第二基本形式)

定义M 的**第二基本形式** 为映射 $\mathrm{II}:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\Gamma(NM)$

$$\mathrm{II}(X,Y)=\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^{\perp},$$

其中 X,Y 被延拓到了 $\tilde{M}$ 的任意开子集上. ♣

Remark

1. 由于 $\pi^{\perp}$ 映光滑截面为光滑截面,$\mathrm{II}(X,Y)$ 是 NM 上的一个光滑截面.
2. 这个定义还不完整，它的良定义性在下面的命题中指出.

[1]在每个纤维上线性，且将光滑截面映到光滑截面

命题 15.1 (第二基本形式的性质)

设 (M,g) 是 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 (伪)Riemann 子流形,$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

1. $\mathrm{II}(X,Y)$ 与 X,Y 延拓到 $\tilde{M}$ 中开子集的方式无关.
2. $\mathrm{II}(X,Y)$ 在 $C^\infty(M)$ 关于 X 和 Y 是双线性的.
3. $\mathrm{II}(X,Y)$ 是关于 X 和 Y 对称的.[a]
4. $\mathrm{II}(X,Y)$ 在一点 $p\in M$ 处的取值仅依赖于 X_p 和 Y_p.

[a]命题中这些性质对于 X 来说都是天然的. 由于对称性, Y 也具有 X 拥有的一切性质.

Proof 取 X,Y 到 M 在 $\tilde{M}$ 上的邻域上的一个延拓. 先说明 $\mathrm{II}(X,Y)$ 是对称的. 由联络 $\tilde{\nabla}$ 的对称性,

$$\mathrm{II}(X,Y)-\mathrm{II}(Y,X)=\left(\tilde{\nabla}_XY-\tilde{\nabla}_YX\right)^\perp=[X,Y]^\perp$$

由于 X,Y 都与 M 相切, 故 $[X,Y]$ 亦然, 从而 $[X,Y]^\perp=0$. 这就说明, II 的对称性. $\tilde{\nabla}_XY|_p$ 关于 X 仅依赖与 X_p 处的取值, 关于 X 是 $C^\infty(M)$-线性的, 与 X 在 $\tilde{M}$ 中的延拓方式无关, 故 $\mathrm{II}(X,Y)$ 关于 X 也满足这些性质. 由于对称性,$\mathrm{II}(X,Y)$ 关于 Y 由满足这些性质. □

定义 15.2

对于任意的 $p\in M$, $v,w\in T_pM$, 定义 $\mathrm{II}(v,w)$ 为 $\mathrm{II}(V,W)$ 在 p 处的取值, 其中 V,W 是 M 上满足 $V_p=v,W_p=W$ 的任意向量场.

Remark 由上述第二基本形式的性质4.可得

定理 15.1 (Gauss 公式)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 若 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 被延拓到定义在 M 于 $\tilde{M}$ 中邻域上的任意光滑向量场, 则由以下公式沿着 M 成立:

$$\tilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+\mathrm{II}(X,Y)$$

Idea 由联络的正交分解和第二基本形式的定义, 只需要证明 $\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^\top=\nabla_XY$. 再由 Levi-Civita 联络的唯一性, 只需要证明 $\left(\tilde{\nabla}_XY\right)^\top$ 给出 M 上良定义的对称度量联络.

推论 15.1 (沿曲线的 Gauss 公式)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形,$\gamma:I\to M$ 是光滑曲

线. 若 X 是沿 γ 处处相切于 M 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_t X = D_t X + \mathrm{II}\left(\gamma', X\right)$$

♡

Proof 任取 $t_0 \in I$, 我们可以找到 $\gamma\left(t_0\right)$ 附近的适配正交标架 $\left(E_1, \cdots, E_m\right)$. 将 $X\left(t\right)$ 展开为 $X\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} X^i\left(t\right) E_i\left(t\right)|_{\gamma(t)}$ 利用 Lebniz 律,Gauss 公式和 E_i 的可扩张性, 得到

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_t X &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{X}^i E_i + X^i \tilde{\nabla}_{\gamma'} E_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{X}^i E_i + X^i \nabla_{\gamma'} E_i + X^i\,\mathrm{II}\left(\gamma', E_i\right)\right) \\
&= D_t X + \mathrm{II}\left(\gamma', X\right)
\end{aligned}$$

□

定义 15.3 (Weingarten 映射)

对于任意法向量场 $N \in \Gamma\left(NM\right)$, 可以按以下方式得到一个标量值的对称双线性形式 $\mathrm{II}_N : \mathfrak{X}\left(M\right) \times \mathfrak{X}\left(M\right) \to C^\infty\left(M\right)$

$$\mathrm{II}_N\left(X, Y\right) = \left\langle N, \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

令 $W_N : \mathfrak{X}\left(M\right) \to \mathfrak{X}\left(M\right)$ 表示上面的对称双线性型对应的自伴随线性映射, 它由以下刻画

$$\left\langle W_N\left(X\right), Y\right\rangle = \mathrm{II}_N\left(X, Y\right) = \left\langle N, \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle$$

则映射 W_N 称为 N **方向的 Weingarten 映射**. 由于第二基本形式是 $C^\infty\left(M\right)$-双线性的, 故 W_N 是 $C^\infty\left(M\right)$-线性的, 从而给出 TM 到自身的一个光滑丛同态. ♣

命题 15.2 (Weingarten 方程)

设 $\left(M, g\right)$ 是 (伪)Riemann 子流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 对于每个 $X \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ 和 $N \in \Gamma\left(NM\right)$, 以下方程成立:

$$\left(\tilde{\nabla}_X N\right)^\top = -W_N\left(X\right)$$

其中 N 被延拓到 $\tilde{M}$ 的任意开子集上. ♠

Remark 可以说, 法向量能代替氛围联络的法向信息 (第二基本形式).

Proof 在 M 的点上, 协变导数 $\tilde{\nabla}_X N$ 无关于 X 和 N 延拓的方式[2]. 任取 $Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, 将它扩张到 $\tilde{M}$ 上的一个开子集. 由于 $\left\langle N, Y\right\rangle$ 沿着 M 恒等于零, 且 X 相切于 M, 下面

[2] 仅由求导方向的曲线像的取值所决定11.14

的计算对于 M 上的所有点成立:

$$\begin{aligned}0 &= X\langle N, Y\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \left\langle N, \tilde{\nabla}_X Y\right\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle N, \mathrm{II}(X, Y)\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_X N, Y\right\rangle + \langle W_N(X), Y\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_X N + W_N(X), Y\right\rangle\end{aligned}$$

由于 Y 可以被选为任意于 M 相切的向量场, 我们有

$$0 = \left\langle\tilde{\nabla}_X N + W_N(X)\right\rangle^{\top} = \left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\top} + W_N(X)$$

$\square$

定理 15.2 (Gauss 方程)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 以下方程成立:

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = Rm(W, X, Y, Z) - \langle\mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle + \langle\mathrm{II}(W, Y), \mathrm{II}(X, Z)\rangle$$ ♡

Proof 将 W, X, Y, Z 延拓到 $\tilde{M}$ 的任意开子集上, 按定义展开 $\widetilde{Rm}$, 并由 Gauss 公式, 沿着 M 有以下成立

$$\begin{aligned}\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) &= \left\langle\tilde{\nabla}_W\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]}Y, Z\right\rangle \\ &= \left\langle\tilde{\nabla}_W(\nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)), Z\right\rangle - \left\langle\tilde{\nabla}_X(\nabla_W Y + \mathrm{II}(W, Y)), Z\right\rangle \\ &\quad - \left\langle\tilde{\nabla}_{[W,X]}Y, Z\right\rangle\end{aligned}$$

对所有 $\tilde{\nabla}.\mathrm{II}(\cdot,\cdot)$ 的项应用 Weingarten 方程, 比如

$$\left\langle\tilde{\nabla}_W \mathrm{II}(X, Y), Z\right\rangle = -\langle\mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle$$

得到

$$\begin{aligned}\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = &\left\langle\tilde{\nabla}_W\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X\nabla_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]}Y, Z\right\rangle \\ &- \langle\mathrm{II}(W, Z), \mathrm{II}(X, Y)\rangle + \langle\mathrm{II}(X, Z), \mathrm{II}(W, Y)\rangle\end{aligned}$$

将每个 $\tilde{\nabla}$ 按切向和法向分解, 由于 Z 是切向的, 可以通过 Gauss 公式将 $\tilde{\nabla}$ 的 $\sim$ 去掉,

得到

$$\left\langle \tilde{\nabla}_W \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X \nabla_W Y - \tilde{\nabla}_{[W,X]} Y, Z \right\rangle = \left\langle \nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W,X]} Y, Z \right\rangle$$
$$= Rm\left(W, X, Y, Z\right)$$

故最终我们得到

$$\widetilde{Rm}\left(W, X, Y, Z\right) = Rm\left(W, X, Y, Z\right) - \left\langle \mathrm{II}\left(W, Z\right), \mathrm{II}\left(X, Y\right)\right\rangle + \left\langle \mathrm{II}\left(W, Y\right), \mathrm{II}\left(X, Z\right)\right\rangle$$

□

定义 15.4 (法联络)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的 Riemann 子流形. 定义**法联络** $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(NM) \to \Gamma(NM)$ 为

$$\nabla^{\perp}_X N = \left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\perp}$$

其中 N 被延拓成 M 在 $\tilde{M}$ 的邻域上的一个光滑向量场.

命题 15.3

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的一个嵌入 Riemann 子流形, 则 $\nabla^{\perp}$ 是 NM 上良定义的联络, 并且与 $\tilde{g}$ 相容: 对于任意两个 NM 的截面 N_1, N_2, 以及每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有

$$X\left\langle N_1, N_2\right\rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_X N_1, N_2\right\rangle + \left\langle N_1, \nabla^{\perp}_X N_2\right\rangle$$

定义 15.5 (对第二基本形式的协变导数)

令 $F \to M$ 是一个向量丛, 它在每个 $p \in M$ 处的纤维为全体双线性映射 $T_pM \times T_pM \to N_pM$. 则 F 是 M 上的一个光滑向量丛. F 的每个截面都对应到一个 $C^{\infty}(M)$-双线性的光滑映射 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(NM)$ [a]. 按以下方式定义 F 上的联络 ∇^F

$$\left(\nabla^F_X B\right)(X, Y) = \nabla^{\top}_X \left(B\left(Y, Z\right)\right) - B\left(\nabla_X Y, Z\right) - B\left(Y, \nabla_X Z\right)$$ [b]

[a] 例如第二基本形式

[b] 回忆张量场上联络的计算公式

定理 15.3 (Codazzi 方程)

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形. 设 $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$

被延拓到 M 的任意开邻域上，则

$$\left(\widetilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp}=\left(\nabla^F_W\mathrm{II}\right)(X,Y)-\left(\nabla^F_X\mathrm{II}\right)(W,Y)$$

Proof 由于等式两边都是法向的，只需要证明对于任意的 $N\in\Gamma(NM)$，

$$\left\langle\widetilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}=\left\langle\left(\nabla^F_W\mathrm{II}\right)(X,Y),N\right\rangle-\left\langle\left(\nabla^F_X\mathrm{II}\right)(W,Y),N\right\rangle$$

由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned}\left\langle\tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}&=\left\langle\tilde{\nabla}_W\left(\nabla_XY+\mathrm{II}(X,Y)\right),N\right\rangle^{\perp}\\&-\left\langle\tilde{\nabla}_X\left(\nabla_WY+\mathrm{II}(W,Y)\right),N\right\rangle^{\perp}\\&-\left\langle\tilde{\nabla}_{[W,X]}Y,N\right\rangle^{\perp}\end{aligned}$$

对右侧只保留法向部分展开，得到

$$\begin{aligned}\left\langle\tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}&=\left\langle\mathrm{II}(W,\nabla_XY)+\left(\nabla^F_W\mathrm{II}\right)(X,Y)+\mathrm{II}(\nabla_WX,Y)+\mathrm{II}(X,\nabla_WY),N\right\rangle\\&-\left\langle\mathrm{II}(X,\nabla_WY)+\left(\nabla^F_X\mathrm{II}\right)(W,Y)+\mathrm{II}(\nabla_XW,Y)+\mathrm{II}(\nabla_XY,W),N\right\rangle\\&-\left\langle\mathrm{II}([W,X],Y),N\right\rangle\end{aligned}$$

两对含有 ∇_XY 和 ∇_WY 的项相消，额外的三项通过 $\nabla_WX+\nabla_XW-[W,X]=0$ 相消，最终，得到

$$\left\langle\tilde{R}(W,X)Y,N\right\rangle^{\perp}=\left\langle\left(\nabla^F_W\mathrm{II}\right)(X,Y)-\left(\nabla^F_X\mathrm{II}\right)(W,Y),N\right\rangle$$

即为所需. □

15.2 曲线的曲率

定义 15.6 (测地曲率)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 子流形，$\gamma:I\to M$ 是 M 上的光滑单位速度曲线. 定义 γ 的 (测地) 曲率为加速度场的模长，即函数 $\kappa:I\to\mathbb{R}$

$$\kappa(t):=\left|D_t\gamma'(t)\right|.$$ [a]

对于一般的参数曲线，对 M 分情况定义:

1. M 是黎曼流形，则任取 γ 是 M 上的任意正则曲线，可以找到它的单位速度重参数化 $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$，我们定义 γ 在 t 处的 (测地) 曲率为 $\tilde{\gamma}$ 在 $\varphi^{-1}(t)$ 处的 (测地) 曲率.

2. 若 M 是伪黎曼流形，需要限制 γ 为使得 $|\gamma'(t)|$ 处处非零的曲线，做类似地定义.

[a]描述了曲线偏离测地线的程度.

命题 15.4

单位速度曲线有退化的 (测地) 曲率，当且仅当它是测地线.

定义 15.7

设 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (伪)Riemann 流形，(M,g) 是它的 Riemann 子流形. 每个 $\gamma: I\to M$ 都有两种测地曲率.

1. γ 视为 M 上的光滑曲线时，它的测地曲率 κ 称为**内蕴曲率**;
2. γ 视为 $\tilde{M}$ 上的光滑曲线时，它的测地曲率 $\tilde{\kappa}$ 称为**外蕴曲率**.

命题 15.5 (II 的几何解释)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流形，$p\in M$,$v\in T_pM$.

1. $\mathrm{II}(v,v)$ 是 g-测地线 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-加速度.
2. 若 v 是单位向量，则 $|\mathrm{II}(v,v)|$ 是 γ_v 在 p 处的 $\tilde{g}$-曲率.

Proof 设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是使得 $\gamma(0)=p$,$\gamma'(0)=v$ 的正则曲线. 对 γ' 应用沿 γ 的 Gauss 公式，得到

$$\tilde{D}_t\gamma' = D_t\gamma' + \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

若 γ 是 M 上的 g-测地线，则上述公式化为

$$\tilde{D}_t\gamma' = \mathrm{II}(\gamma',\gamma')$$

在零处取值得到所需的两个结论.

□

引理 15.1

设 V 是一个内积空间,W 是向量空间，$B,B': V\times V\to W$ 是对称且双线性的. 若 $B(v,v)=B'(v,v)$ 对于所有的单位向量 $v\in V$ 成立，则 $B=B'$

Remark 由此，II 完全由 $\mathrm{II}(v,v)$ 所决定，其中 v 取遍单位向量.

Proof 若条件成立，由 B 和 B' 的双线性，$B(v,v)=B'(v,v)$ 对于所有的向量 v 成立，

而不只是单位向量. 引理由以下极化恒等式立即得到

$$B(v,w)=\frac{1}{4}\left(B(v+w,v+w),B(v-w,v-w)\right)$$

□

定义 15.8 (完全测地)

称 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的子流形 (M,g) 是**完全测地的**, 若对于每个与 M 在某一点 t_0 与 M 相切的 $\tilde{g}$-测地线, 都在某个区间 $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ 上完全地落在 M 上.

♣

命题 15.6

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 子流域, 则一下三条等价:

1. M 在 $\tilde{M}$ 中是完全测地的.
2. M 上的每个 g-测地线也都是 $\tilde{M}$ 上的 $\tilde{g}$-测地线.
3. M 的第二基本形式恒为零.

♠

Idea 对于 $1.\implies 2$, 将 $\tilde{M}$ 与 M 相切的测地线 $\tilde{\gamma}$ 的加速度利用 Gauss 公式分解, 两项正交故均为零. 测地线的唯一性给出二者在局部上相等. 应用到每个局部上得到全局相等.

$2.\implies 3.$, 利用 Gauss 公式得到 $\mathrm{II}(\gamma',\gamma')=0$ 对于任意 M 的 g-测地线 γ 成立. 测地线的存在唯一性给出 TM 上的任意切向量都刻画为测地线的速度, 而 II 由对角量 $\mathrm{II}(v,v)$ 所决定, 故 $\mathrm{II}\equiv 0$.

$3.\implies 1.$ 还是利用 Gauss 公式, 得到曲线加速度的局部相等, 再由唯一性退出测地线的局部相等.

15.3 超曲面

本节考虑 M 是 $\tilde{M}$ 的超曲面[3]的特殊情况. 设 (M,g) 是 $(n+1)$-维 Riemann 流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的 n-维嵌入 Riemann 子流形.

此时, M 上每一个点只有两个单位法向量. 在局部适配正交标价 $(E_1,\cdots,E_{n+1})$ 下, 唯二的选择是 $\pm E_{n+1}$. 因此, 对于 M 的每一个点, 在充分小的邻域内都能选取光滑的沿 M 的单位法向量场.

若 M 和 $\tilde{M}$ 均可定向, 则可以选取沿 M 的全局光滑单位法向量场. 对于一般情况而言则未必.

[3]余维数为 1 的子流形

15.3.1 标量第二基本形式和形状算子

定义 15.9

选定超曲面 $M \subseteq \tilde{M}$ 的一个光滑单位向量场 N 后, 定义 M 的标量第二基本形式为由 $h = \mathrm{II}_N$ 给出的对称协变 2-张量场 $h \in \Gamma\left(\Sigma^2 T^* M\right)$, 换言之

$$h(X, Y) = \langle N, \mathrm{II}(X, Y) \rangle$$

Remark 符号由 N 的选取决定, 绝对值无关于 N 的选取.

命题 15.7

1.
$$h(X, Y) = \left\langle N, \tilde{\nabla}_X Y \right\rangle$$

2. $h(X, Y)$ 可以由
$$\mathrm{II}(X, Y) = h(X, Y) N$$
确定. 即若 $\mathrm{II}(X, Y) = h'(X, Y) N$, 则 $h(X, Y) = h'(X, Y)$

Proof 对于 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 延拓到 $\tilde{M}$ 的开集上, 由 Gauss 公式

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)$$

又 $\nabla_X Y$ 与 N 正交, 故 $\tilde{\nabla}_X Y = \mathrm{II}(X, Y)$.

第二条通过两边与 N 度量配对即可. □

定义 15.10 (形状算子)

选定的法向量 N 决定出 Weiengarten 映射 $W_N : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, 记作 $s = W_N$, 称为是 M 的形状算子.

Remark 与 h 类似, s 的符号由 N 的选取决定.

命题 15.8

1. s 可以视为通过 h 提升指标得到的 M 的 $(1,1)$-张量场, 由一下刻画
$$\langle sX, Y \rangle = h(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

2. 分量形式下, 写作
$$s_i^j = h_i^j = g^{jk} h_{ik}$$

3. 由于 h 是对称的, s 是 TM 的自伴随的自同态, 即

$$\langle sX, Y\rangle = \langle X, sY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Remark 设 S, B, I 分别为 s, h, g 的矩阵, 则 $S = B \cdot I^{-1}$, 从而 $\det s = \det h (\det g)^{-1}$

Proof

$$h_{ij} = h(E_i, E_j) = \langle sE_i, E_j\rangle = \langle s_i^k E_k, E_j\rangle = s_i^k g_{kj}$$

从而

$$g^{jk} h_{ij} = s_i^k g_{kj} g^{jk} = s_i^k$$

互换 k, j, 得到

$$s_i^j = g^{jk} h_{ik}$$

可以写成矩阵

$$(s) = (g)^{-1}(h)$$

□

定理 15.4 (超曲面的基本方程)

设 (M, g) 是黎曼流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的 Riemann 超曲面,N 是沿 M 的光滑单位法向量.

1. **超曲面的 Gauss 公式**: 若 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 延拓到 $\tilde{M}$ 的开集上, 则

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) N$$

2. 超曲面曲线的 Gauss 公式: 若 $\gamma : I \to M$ 是一个光滑曲线, $X : I \to TM$ 是沿 γ 的光滑向量场, 则

$$\tilde{D}_t X = D_t X + h(\gamma', X) N$$

3. 超曲面的 Weigarten 方程: 对于所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\tilde{\nabla}_X N = -sX$$

[a]

4. 超曲面的 Gauss 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, Z) = Rm(W, X, Y, Z) - \frac{1}{2}(h \owedge h)(W, X, Y, Z)$$

5. 超曲面的 Codazzi 方程: 对于所有的 $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\widetilde{Rm}(W, X, Y, N) = (Dh)(Y, W, X)$$

[b]

[a]可以说法向量完全提纯了氛围联络的法向信息 (第二基本形式)

[b]外微分是后两个作为求导项交换; 是先对着最后一项求导的, 是负的.

Proof 1.2. 由一般情况的方程立即得到. 对于 3. 先写出一般的 Weigarten 方程

$$\left(\tilde{\nabla}_X N\right)^{\top} = -sX$$

由于 $\langle \nabla_{\tilde{X}} N, N \rangle = \frac{1}{2} X\left(|N|^2\right) = 0$[4], 立即有 $\tilde{\nabla}_X N$ 与 M 相切, 故 3. 成立.

最后来说明 Codazzi 方程, 首先由一般的 Codazzi 方程

$$\left(\tilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp} = \left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y) - \left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y)$$

由于 N 是单位向量场,

$$0 = \nabla_W^{\perp} \langle N, N \rangle_{\tilde{g}} = 2\left\langle \nabla_W^{\perp} N, N \right\rangle_{\tilde{g}}$$

故 N 关于法向联络平行. 因此

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_W^F \mathrm{II}\right)(X,Y) &= \nabla_W^{\perp}\left(h(X,Y)N\right) - \mathrm{II}\left(\nabla_W X, Y\right) - \mathrm{II}\left(X, \nabla_W Y\right) \\
&= \left(W\left(h(X,Y)\right) - h\left(\nabla_W X, Y\right) - h\left(X, \nabla_W Y\right)\right)N \\
&= \left(\nabla_W h\right)(X,Y)N
\end{aligned}$$

类似地

$$\left(\nabla_X^F \mathrm{II}\right)(W,Y) = \left(\nabla_X h\right)(W,Y)N$$

注意到由于 h 是对称的, 故 $(\nabla_W h)$ 和 $(\nabla_X h)$ 亦然. 因此

$$\left(\tilde{R}(W,X)Y\right)^{\perp} = -\left(\nabla_X h\right)(Y,W)N + \left(\nabla_W h\right)(Y,X)N = (Dh)(Y,W,X)N$$

两边与 N 度量配对即可. □

15.3.2 主曲率

引理 15.2

设 V 是有限维内积空间, $s: V \to V$ 是自伴随的线性自同态. 令 C 表示 V 的单位向量集, 则存在 $v_0 \in C$, 使得函数 $v \mapsto \langle sv, v \rangle$ 在 v_0 处达到极大值, 并下每个这样的向量都是 s 关于特征值 $\lambda_0 = \langle sv_0, v_0 \rangle$ 的一个特征向量.

[4]由于法空间只有一个方向, 故当模长不变时, 法向量沿某个切向的偏移趋势只可能是切向的

命题 15.9 (有限维谱定理)

设 V 是有限维内积空间, $s : V \to V$ 是自伴随的线性自同态. 则 V 有一个 s-特征向量组成的正交基, 并且每个特征值都是实数.

命题 15.10

形状算子 $s : T_pM \to T_pM$ 有实特征值 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$, 以及由 s-正交向量组成的 T_pM 的正交基 $(b_1, \cdots, b_n)$, 使得 $sb_i = \kappa_i b_i, \forall i$. 在这组基下,$h$ 和 s 都表为正对角矩阵, h 有以下形式

$$h(v, w) = \kappa_1 v^1 w^1 + \cdots + \kappa_n v^n w^n$$

定义 15.11

称形状算子 s 在点 $p \in M$ 处的特征值为 M **在点** p **处的主曲率**, 相应的特征空间称为主方向.

Remark

1. 当反转选定的法向量时, 主曲率都改变方向.
2. 主方向和主曲率无关于坐标基的选取.

定义 15.12

1. 定义 Gauss 曲率为
$$K = \det(s)$$
2. 定义平均曲率为
$$H = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(s) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}_g(h)$$

由于迹和行列式都无关于坐标基的选取, 当单位法向量选定时, 上面的两个曲率是良定义的, 并且可以通过主曲率表示为

$$K = \kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n, \quad H = \frac{1}{n}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_n)$$

Remark 当反转法向量时, H 改变符号, K 变为 $\coprod_{n=1}^{\infty}(-1)^n K$

15.4 欧氏空间上的超曲面

用 (M, g) 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 n 维嵌入 Riemann 子流形, $\bar{g}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的欧式度量, g 是 $\bar{g}$ 在 M 上的诱导度量.

命题 15.11

对于欧式空间上的超曲面 M, 有以下 Gauss 方程和 Codazzi 方程成立

$$\frac{1}{2}h \owedge h = Rm,$$

$$Dh = 0$$

在 M 的一组局部标价下,

$$h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl} = R_{ijkl}$$

$$h_{ij;k} - h_{ik;j} = 0$$

特别地, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上超曲面的 Riemann 曲率张量完全由第二基本形式决定.

Remark

1. 满足 $Dh = 0$ 的对称 2-张量被称为是一个 **Codazzi 张量**. 因此 $Dh = 0$ 可以看作是 h 称为一个 Codazzi 张量.
2. 对于 n-Riemann 流形 (M, g), 以及给定的光滑对称 2-张量 h. 定理给出了存在以 h 为表带第二基本形式的等距同构浸入 $M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 的必要条件.
3. 事实上, Gauss 方程和 Codazzi 方程至少在局部上给出了上面这种情况的充分条件.

命题 15.12

设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是超曲面. 对于每个单位向量 $v \in T_pM$, 令 $\gamma = \gamma_v : I \to M$ 是 M 上以 v 为初速度的测地线. 则 $|h(v, v)|$ 是 γ 在 0 处的欧式曲率. 并且 $h(v, v) = \langle \gamma''(0), N_p \rangle > 0$ 当且仅当 $\gamma''(0)$ 与 N_p 有相同的方向.

Proof 由 Gauss 公式

$$\gamma''(0) = \bar{D}_t\gamma'(0) = D_t\gamma'(0) + h(v, v) N_p = h(v, v) N_p$$

故

$$|\gamma''(0)| = |h(v, v)|$$

且

$$\langle \gamma''(0), N_p \rangle_{\bar{g}} = h(v, v)$$

□

命题 15.13

设 $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ 是单位速度曲线, $t_0 \in I$,$\kappa(t_0) \neq 0$. 则

1. 存在单位速度参数化的圆 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, 被称为是 $\gamma(t_0)$ 处的 **密切圆**, 使得在

$t = t_0$ 处, c 与 γ 有着相同的位置, 速度和加速度.

2. γ 在 t_0 处的欧式曲率 $\kappa(t_0) = \frac{1}{R}$, 其中 R 是密切圆的半径.

Proof $\mathbb{R}^m$ 上的任意圆都存在形如下的单位参数化 c

$$c(t) = q + R\cos\left(\frac{t-t_0}{R}\right)v + R\sin\left(\frac{t-t_0}{R}\right)w$$

其中 (v, w) 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一对正交的单位向量. 它满足

$$c(t_0) = q + Rv, \quad c'(t_0) = w, \quad c''(t_0) = -\frac{v}{R}$$

通过令

$$R = \frac{1}{\kappa(t_0)}, \quad w = \gamma'(t_0), \quad v = -\frac{\gamma''(t_0)}{\kappa(t_0)}, \quad q = \gamma(t_0) + \frac{\gamma''(t_0)}{\kappa^2(t_0)}$$

可以得到对应的 c 就是符合条件的密切圆.

接下来说明唯一性, 设

$$c_1(t) \equiv 1 + R_1\cos\left(\frac{t-t_0}{R_1}\right)v_1 + R_1\sin\left(\frac{t-t_0}{R_1}\right)w_1$$

是另一个密切圆. 则

$$w_1 = \gamma'(t_0) = w$$

$$-\frac{v_1}{R_1} = \gamma''(t_0) = -\frac{v}{R} \implies v_1 = v, R_1 = R$$

进而

$$q_1 = \gamma(t_0) - R_1v_1 = \gamma(t_0) - Rv = q$$

从而得到 $c \equiv c_1$, 这就说明了唯一性.

□

15.4.1 欧式空间上的计算

对于光滑嵌入超曲面 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, 通常来说在一组局部参数表示下的计算是最简单的. 设 $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 M 的一个光滑局部参数化. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的坐标 $(u^1, \cdots, u^n)$ 给出了 M 上的一个局坐标. 坐标向量场 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ 推出到 M 上的向量场 $\mathrm{d}X(\partial_i)$. 既可以将 $\mathrm{d}X(\partial_i)$ 看作是限制切丛 $T\mathbb{R}^{n+1}|_M$ 上的截面, 也可以将它看成是 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数. 在这种等同下, $\mathrm{d}X(\partial_i)$ 在 $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ 的标准基下的坐标表示, 等同于他作为 $\mathbb{R}^{n+1}$-值函数的坐标表示. 事实上, 对于视为向量值函数的情况我们可以计算

$$\mathrm{d}X_u(\partial_i) = \partial_i X(u) = \left(\partial_i X^1(u), \cdots, \partial_i X^n(u)\right)$$

另一方面，在坐标上考虑微分映射在切向量上的作用：如果将切向量视为行向量，则 $\mathrm{d}X_u(\partial_i)$ 表为第 i 个单位坐标行向量右乘 Jacobi 矩阵，结果为 Jacobi 矩阵的第 i 行. 这与向量值函数按每个分量求导如出一辙.

定义 15.13

方便起见，记

$$X_i = \partial_i X$$

M 上沿着 U 的向量场.

一旦我们计算出了向量场 $X_1, \cdots, X_n$，可以通过以下方式计算处一个单位法向量场：任取不含于 $\operatorname{span}(X_1, \cdots, X_n)$ 的坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial x^{j_0}}$，对局部标价 $(X_1, \cdots, X_n, \frac{\partial}{\partial x^{j_0}})$ 施行 Gram-Schmidt 正交化，得到与 M 适配的正交标价 $(E_1, \cdots, E_{n+1})$. 两个单位法向量的选择是 $N = \pm E_{n+1}$.

对于 3 维欧式空间的情况，特别的可以通过叉乘后做单位化的方式得到使得标架正定向的单位法向量

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

命题 15.14

设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是嵌入超曲面. $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 M 的一个局部参数化. $(X_1, \cdots, X_n)$ 是由 X 决定的 TM 的一个局部标架. 则标量第二基本形式 h 由以下给出：

1. $$h(X_i, X_j) = \langle sX_i, X_j \rangle = -\langle \nabla_{X_i} N, X_j \rangle = -\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} N, X_j \right\rangle$$

2. $$h(X_i, X_j) = \langle X_{ij}, N \rangle := \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^j u^i}, N \right\rangle$$

[a]

[a]这里是法向量场的参数表示

Remark 同时视 N 为 M 上的向量场和 M 上沿 U 的向量场.

Proof 对以下恒等于零的函数对 u_j 求导

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}(u), N(X(u)) \right\rangle$$

得到

$$0=\left\langle\frac{\partial^2 X}{\partial u^j u^i}(u), N(X(u))\right\rangle+\left\langle\frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \frac{\partial}{\partial u^j} N(X(u))\right\rangle \tag{*}$$

接下来利用曲线速度计算 $\frac{\partial}{\partial u^j} N\left(X\left(u_0\right)\right)$, 考虑 U 上的一个局部标架 $\left(u^1, \cdots, u^n\right)$, 定义曲线 $\gamma(t)=X\left(u_0^1, \cdots, u_0^j+t, \cdots, u_0^n\right)$, 则 $\gamma(0)=X\left(u_0\right)$, $\gamma^{\prime}(0)=\frac{\partial X}{\partial u^j}\left(u_0\right)$. 从而

$$\frac{\partial}{\partial u^j} N\left(X\left(u_0\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} N \circ \gamma(0)=D_t(N \circ \gamma)(0)=\overline{\nabla}_{\gamma^{\prime}(0)} N(\gamma(0))=\overline{\nabla}_{X_j\left(u_0\right)} N\left(X\left(u_0\right)\right)$$

接下来由 Weingarten 方程, 我们有

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \frac{\partial}{\partial u^j} N(X(u))\right\rangle & =\left\langle\frac{\partial X}{\partial u^i}(u), \overline{\nabla}_{X_j\left(u_0\right)} N(X(u))\right\rangle \\
& =\left\langle X_i(u),-s\left(X_j(u)\right)\right\rangle \\
& =-h\left(X_i(u), X_j(u)\right)
\end{aligned}$$

带入 (*) 式即可. □

命题 15.15

设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 Riemann 超曲面. 在给定单位法向量下, $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ 是 M 在 p 处的主曲率. 存在等距同构 $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, 将 p 映到原点, 将 p 的一个邻域映到形如 $x^{n+1}=f\left(x^1, \cdots, x^n\right)$ 的图像. 其中

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\kappa_1\left(x^1\right)^2+\kappa_2\left(x^2\right)^2+\cdots+\kappa_n\left(x^n\right)^2\right)+O\left(|x|^3\right)$$

Proof 通过一个平移和一个旋转, 不妨设 p 为原点, 且 $T_p M$ 等于 $\operatorname{span}\left(\partial_1, \cdots, \partial_n\right)$. 通过对前 n 个分量的一个正交变换, 不妨 $\partial_1, \cdots, \partial_n$ 使得 M 的标量第二基本形式的坐标表示具有对角型, 分别以 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ 为对角元. 必要时, 通过一个反射, 不妨设 $(0, \cdots, 1)$ 为单位法向量.

由隐函数定理, 存在函数 f, 使得在 $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的一个邻域 U 上, 成立

$$q \in M \Longleftrightarrow x^{n+1}(q)=f\left(x^1(q), \cdots, x^n(q)\right)$$

于是 M 有参数表示

$$X=\left(x^1, \cdots, x^n, f\left(x^1, \cdots, x^n\right)\right)$$

由于 $T_0 M=\operatorname{span}\left(X_1, \cdots, X_n\right)=\operatorname{span}\left(\partial_1, \cdots, \partial_n\right)$, 故

$$\partial_1 f=\cdots=\partial_n f=0, \quad X_i=\partial_i, \quad i=1, \cdots, n$$

于是由上面的命题

$$h\left(X_i, X_j\right)=\left\langle\frac{\partial^2 X}{\partial x^i x^j}, e_n\right\rangle=\partial_i \partial_j f$$

由 Taylor 展开即得命题成立. □

命题 15.16

$M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 Riemann 超曲面. 若 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的向量场 $N = N^i \partial_i$ [a] 在 M 上的限制成为它的一个单位法向量场. 则对于每个与 M 相切的向量场 $X = X^j \partial_j$, 可以利用 Weingarten 方程直接计算

$$sX = -\overline{\nabla}_X N = -X^j \left(\partial_j N^k\right) \partial_k$$

[a] 这里是几何坐标上的表示, 而非参数坐标

命题 15.17

若 M 在 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上被局部地定义为光滑实函数 F 的正则水平集 $U \cap M$. 则 $\operatorname{grad} F$ 在 $M \cap U$ 上非零, 可以选取沿 M 的单位法向量场为

$$N = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$$

Example 15.1 球面的形状算子 函数 $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|^2$ 是每个球面 $\mathbb{S}^n(R)$ 的光滑定义函数. 梯度为 $\operatorname{grad} F = 2x^i \partial_i$, 沿着 $\mathbb{S}^n(R)$ 长度为 $2R$, 且为外向指向的. 沿着 $\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ 的一个单位法向量场为

$$N = \frac{1}{R} x^i \partial_i$$

容易计算出形状算子为

$$sX = -\frac{1}{R} X^j \left(\partial_j x^i\right) \partial_i = \frac{1}{R} X^i \partial_i = -\frac{1}{R} X$$

于是

$$s = -\frac{1}{R} \operatorname{Id}$$

主曲率均为 $-\frac{1}{R}$, 平均曲率为 $-\frac{1}{R}$, Gauss 曲率为 $(-1)^n \frac{1}{R^n}$.

命题 15.18

对于 $\mathbb{R}^3$ 上的曲面, 若参数化 X 给定, 由于 X_1, X_2 在每一点处与 M 相切, 内积为非零法向量, 故一个单位法向量的选择是

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

15.4.2 曲面 Gauss 曲率的内蕴性

定理 15.5 (Gauss 绝妙定理) 设 (M, g) 是 $\mathbb{R}^3$ 的 2-维嵌入 Riemann 子流形. 对于每个 $p \in M$, M 在 p 处的 Gauss 曲率等于 g 在 p 处的标量曲率的一半, 或者等价地说, 选定 T_pM 的一组规正基 (b_1, b_2) 下,

$$R_{1221} = Rm_p(b_1, b_2, b_2, b_1) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = K(p)$$

因此 Gauss 曲率是 (M, g) 的局部等距同构不变量.

Proof 二维 (伪)Riemann 流形 (M, g) 成立

$$Rm = \frac{1}{4}Sg \owedge g$$

Gauss 方程 $Rm = \frac{1}{2}h \owedge h$ 直接给出 $K(p)$ 用曲率张量的表示. □

定义 15.14 对于抽象的 2-维 Riemann 流形 (M, g), 定义它的 Gauss 曲率 K 为 $K = \frac{1}{2}S$, 其中 S 是它的标量曲率.

15.5 截面曲率

定义 15.15 设 $n \geq 2$, M 是 n 维 Riemann 流形, $p \in M$, $V \subseteq T_pM$ 是原点的星形邻域, 使得 $\exp_p$ 将它微分同胚地映到一个开集 $U \subseteq M$. 令 Π 是 T_pM 的一个二维子空间. 由于 $\Pi \cap V$ 是 V 的一个嵌入子流形, 故 $S_\Pi := \exp_p(\Pi \cap V)$ 是 U 的一个包含了 p 的一个嵌入子流形, 成为 **由 Π 决定的平截面**.

Remark

1. S_Π 是初速度取在 Π 上的测地线扫过的集合.
2. 由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0 : T_0(\Pi \cap V) \simeq \Pi \to T_pS_\Pi$ 是单位映射, 故 $T_pS_\Pi = \Pi$.

定义 15.16 定义 Π 的**截面曲率**, 记作 $\sec(\Pi)$, S_Π 在 p 处的内蕴 Gauss 曲率. 其中 S_Π 配备了嵌入 $S_\Pi \subseteq M$ 的诱导度量.

若 (v,w) 是 Π 的一组基，也记 $\sec(v,w)=sec(\Pi)$.

定义 15.17

对于内积空间 V 上的向量 v,w，引入以下记号

$$|v\wedge w|=\sqrt{|v|^2|w|^2-\langle v,w\rangle^2}$$

Remark 由 Cauchy 不等式，$|v\wedge w|\geq 0$，取等当且仅当 w,v 线性相关. 且 v,w 规范正交时，$|v\wedge w|=1$.

命题 15.19 (截面曲率的计算公式)

令 (M,g) 是 Riemann 流形，$p\in M$. 若 v,w 是 T_pM 上线性无关的向量，则由 v,w 张成的平面的截面曲率由以下给出

$$\sec(v,w)=\frac{Rm_p(v,w,w,v)}{|v\wedge w|^2}$$

Proof 设 Π 是 v,w 张成的 T_pM 的二维子空间. S_Π 是它决定的一个平截面. 设 $\hat{g}$ 是它作为嵌入子流形 $S_\Pi\subseteq M$ 的诱导度量.

先说明 S_Π 的第二基本形式 $\hat{\mathrm{II}}$ 在 p 处退化. 任取 $z\in\Pi$，存在落在 p 充分小邻域的 g-测地线 γ，它以 p 为起点，z 为初速度，并且也落在 S_Π 上. 由曲线的 Gauss 公式，以及测地线方程，我们有

$$0=D_t\gamma'=\hat{D}_t\gamma'+\hat{\mathrm{II}}(\gamma',\gamma')$$

由于右侧两项始终正交，在 p 处取值，得到 $\hat{\mathrm{II}}(z,z)=0$. $\hat{\mathrm{II}}$ 的对称性和极化恒等式给出 $\hat{\mathrm{II}}\equiv 0$. 进而由 Gauss 公式，

$$Rm_p=\hat{Rm}_p$$

可以在任意一组 $\hat{\mathrm{II}}$ 的规正基 (b_1,b_2) 下，得到

$$\sec(b_1,b_2)=\hat{Rm}_p(b_1,b_2,b_2,b_1)=Rm_p(b_1,b_2,b_2,b_1).$$

最后通过下列正交化计算任意 Π 的基 (v,w) 下的截面曲率表示:

$$b_1=\frac{v}{|v|}$$

$$b_2=\frac{w-\langle w,b_1\rangle b_1}{|w-\langle w,b_1\rangle b_1|}=\frac{w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}}{\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|}$$

计算

$$\begin{aligned}
\sec(v,w) &= \sec(b_1,b_2)\\
&= Rm_p(b_1,b_2,b_2,b_1)\\
&= Rm_p\left(\frac{v}{|v|},\frac{w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}}{\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|},\frac{w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}}{\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|},\frac{v}{|v|}\right)\\
&= \frac{Rm_p(v,w,w,v)}{|v|^2\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|^2}
\end{aligned}$$

这里使用了 Rm 关于前 2 和后 2 分量的反对称性. 最后, 化简

$$\begin{aligned}
&|v|^2\left|w-\langle w,v\rangle\frac{v}{|v|^2}\right|^2\\
&= |v|^2\left(|w|^2+\langle w,v\rangle^2\frac{1}{|v|^2}-2\langle w,v\rangle^2\frac{1}{|v|^2}\right)\\
&= |v|^2|w|^2-\langle w,v\rangle^2\\
&= |v\wedge w|^2
\end{aligned}$$

□

命题 15.20

设 R_1,R_2 是有限维内积空间 V 上的代数曲率张量. 若对于任意一对线性无关的 $v,w\in V$, 都有

$$\frac{R_1(v,w,w,v)}{|v\wedge w|}=\frac{R_2(v,w,w,v)}{|v\wedge w|}$$

则 $R_1=R_2$.

Proof 令 $D=R_1-R_2$, 则 D 也是一个 V 上的代数曲率张量. 并且对于任意的 $v,w\in V$, $D(v,w,w,v)=0$.

任取 $w,v,x\in V$,

$$\begin{aligned}
0 &= D(w+v,x,x,w+v)\\
&= D(w,x,x,w)+D(v,x,x,v)+D(w,x,x,v)+D(v,x,x,w)\\
&= 2D(w,x,x,v)
\end{aligned}$$

上面的结果还立即给出

$$\begin{aligned}
0 &= D(w,x+u,x+u,v)\\
&= D(w,x,x,v)+D(w,x,u,v)+D(w,u,x,v)+D(w,u,u,v)\\
&= D(w,x,u,v)+D(w,u,x,v)
\end{aligned}$$

此外, 代数 Bianchi 恒等式给出

$$\begin{aligned} 0 &= D(w,x,u,v) + D(x,u,w,v) + D(u,w,x,v) \\ &= D(w,x,u,v) - D(x,w,u,v) - D(w,u,x,v) \\ &= D(w,x,u,v) + D(w,x,u,v) + D(w,x,u,v) \\ &= 3D(w,x,u,v) \end{aligned}$$

对于所有的 $w,x,u,v \in V$ 成立. □

命题 15.21 (Ricci 曲率和标量曲率的几何意义)

设 (M,g) 是 n 维 Riemann 流形 ($n \geq 2$), $p \in M$.

1. 对于每个单位向量 $v \in T_pM$, $Rc_p(v,v)$ 等于 $(v,b_2),\cdots,(v,b_n)$ 张成的平截面的截面曲率之和. 其中 $(b_1,\cdots,b_n)$ 是使得 $b_1 = v$ 的 T_pM 的任意规正基.
2. p 处的标量曲率, 等于在任意 T_pM 的规正基下, 所有不相等的基向量张成平截面的截面曲率之和.

Proof

1. 任取符合条件的规正基 $(b_1,\cdots,b_n)$,
$$Rc_p(v,v) = R_{11}(p) = R_{k11}{}^k(p) = \sum_{k=1}^n Rm_p(b_k,v,v,b_k) = \sum_{k=2}^n \sec(v,b_k)$$
2. 任取 T_pM 的规正基 $(b_1,\cdots,b_n)$,
$$S(p) = R_j{}^j = g^{jk}R_{jk} = \sum_{k=1}^n R_{kk} = \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n R_{kjj}{}^k = \sum_{j\neq k}\sec(b_j,b_k)$$

□

15.5.1 模型空间的截面曲率

定义 15.18

称一个 Riemann 度量或 Riemann 流形是有常值截面曲率的, 若它的截面曲率在所有点的所有平面上都相同.

第 15 章 练习

Problem 15.1 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集, $f: U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 令 $M = \{(x,f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 f 的图像, 配备了诱导 Riemann 度量和向上的单位法向量场.

1. 计算图像坐标下形状算子的分量, 用 f 及其偏导数表示.
2. 令 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $f(x)=|x|^2$ 定义的抛物面. 计算 M 的主曲率.

Solution

1. 设 M 由 X 参数化

$$X\left(u^1,\cdots,u^n\right)=\left(u^1,\cdots,u^n,f(u)\right)$$

度量

$$g=X^*\bar{g}=\sum_{i=1}^n\left(1+f_i^2\right)\left(\mathrm{d}u^i\right)^2+2\sum_{i\neq j}f_if_j\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j$$

则

$$X_i\left(u^1,\cdots,u^n\right)=(0,\cdots,1,\cdots,0,f_i),\quad i=1,\cdots,n$$

一个法向量 N_1 为

$$N\left(u^1,\cdots,u^n\right)=(-f_1,\cdots,-f_n,1)$$

一个单位法向量为

$$N=\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}(-f_1,\cdots,-f_n,1)$$

$$h_{ij}=\langle s(X_i),X_j\rangle=\left\langle\frac{\partial^2X}{\partial u^iu^j},N\right\rangle=\frac{f_{ij}}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}$$

这是参数坐标下的坐标表示.

接下来计算欧式坐标上的坐标表示. 在坐标下

$$N\left(x^1,\cdots,x^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}(-f_1,\cdots,-f_n,1)$$

其中右侧在 $(x^1,\cdots,x^n)$ 上取值.

$$s(\partial_i)=-\overline{\nabla}_{\partial_i}N=\sum_{j=1}^n\partial_i\left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}f_j\right)\partial_j-\partial_i\left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}\right)\partial_{n+1}$$

当 $i=1,\cdots,n$ 时, 其中

$$\partial_i\frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}=-\frac{\sum_{k=1}^nf_kf_{ki}}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\nabla f\cdot\nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},\quad\partial_if_j=f_{ji}$$

于是

$$s(\partial_i)=\sum_{j=1}^n\left(-\frac{f_j\nabla f\cdot\nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{f_{ji}}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}\right)\partial_j+\frac{\nabla f\cdot\nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\partial_{n+1}$$

或者写成

$$s_i^j = \langle s(\partial_i), \partial_j \rangle = -\frac{f_j \nabla f \cdot \nabla f_i}{\left(|\nabla f|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f_{ji}}{\sqrt{|\nabla f|^2+1}}, \quad i,j=1,\cdots,n$$

此外

$$s(\partial_{n+1}) = 0$$

由于 $X^*(\partial_i) = \frac{\partial}{\partial u^i}, i=1,\cdots,n$. 在图像坐标的坐标表示下,$s$ 的形式与欧式坐标下的相同.

2.

$$f_{ij} = 2\delta_i^j, \quad |\nabla f|^2(u) = 4|u|^2$$

$$\nabla f = 2x^k \partial_k, \quad \nabla f_i = 2\partial_i$$

于是

$$s_i^j = -\frac{8u^j u^i}{\left(4|u|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\delta_i^j}{\sqrt{4|u|^2+1}}$$

由于抛物面是旋转曲面, 任一点出的主曲率与它旋转到第一个坐标平面上的主曲率相同. 只需要计算 $x=(a,0,\cdots,0)$ 处的主曲率. 此时

$$s_1^1 = \frac{2}{(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad s_i^i = \frac{2}{\sqrt{4|u|^2+1}}(i \neq 1), \quad s_{ij} = 0\,(i \neq j).$$

主曲率为

$$\kappa_1 = \frac{2}{\left(4|u|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_2 = \cdots = \kappa_n = \frac{2}{\sqrt{4|u|^2+1}}$$

Problem 15.2 令 (M,g) 是 Riemann 流形 $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ 的嵌入 Riemann 超曲面, F 是 M 的一个局部定义函数, 令 $N = \mathrm{grad}\ F / |\mathrm{grad}\ F|$

1. 说明 M 关于单位法向量 N 的标量第二基本形式由以下给出

$$h(X,Y) = -\frac{\tilde{\nabla}^2 F(X,Y)}{|\mathrm{grad}\ F|}$$

对于所有的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2. 说明 M 的平均曲率由以下给出

$$H = -\frac{1}{n} \mathrm{div}_{\tilde{g}} \left(\frac{\mathrm{grad}\ F}{|\mathrm{grad}\ F|}\right)$$

其中 $n = \dim M$, $\mathrm{div}_{\tilde{g}}$ 是 $\tilde{g}$ 的散度算子.

Proof

1.

$$\tilde{\nabla}^2 F(X,Y) = X(YF) - \left(\tilde{\nabla}_X Y\right) F$$

其中

$$YF = \langle \text{grad } F, Y \rangle = 0$$

此外,

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\nabla}_X \langle \text{grad } F, Y \rangle \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_X \text{grad } F, Y \right\rangle + \left\langle \text{grad } F, \tilde{\nabla}_X Y \right\rangle \\
&= |\text{grad } F| \left\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \right\rangle + \left(\tilde{\nabla}_X Y\right) F \\
&= -|\text{grad } F| \, h(X,Y) - \tilde{\nabla}^2 F(X,Y)
\end{aligned}$$

□

Problem 15.3 设 C 是半平面 $H = \{(r,z) : r > 0\}$ 上的嵌入光滑曲线.$S_c \subseteq \mathbb{R}^3$ 是 C 生成的旋转曲面. $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ 是 C 的一个单位速度参数化. X 是对应的 S_C 的局部参数表示.

1. 计算 S_C 的形状算子和主曲率, 用 a, b 表示, 并说明每一点的主方向都与子午线和纬圆相切.
2. 说明 S_C 在 $X(t,\theta)$ 处的 Gauss 曲率等于 $-a''(t)/a(t)$.

Proof

- $$X(t,\theta) = (a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t))$$
- $$X_1 = (a'(t)\cos\theta, a'(t)\sin\theta, b'(t))$$
- $$X_2 = (-a(t)\sin\theta, a(t)\cos\theta, 0)$$
- $X_1 \times X_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a'\cos\theta & a'\sin\theta & b' \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = (-ab'\cos\theta, -ab'\sin\theta, aa')$
- $|X_1 \times X_2| = \sqrt{a^2(b')^2 + a^2(a')^2} = a$
- 一个法向量为 $N = (-b'\cos\theta, -b'\sin\theta, a')$

- $X_{11} = (a'' \cos\theta, a'' \sin\theta, b'')$，$h_{11} = \langle X_{11}, N\rangle = -a''b' + a'b''$
- $X_{12} = (-a' \sin\theta, a' \cos\theta, 0)$，$h_{12} = \langle X_{12}, N\rangle = 0$
- $X_{22} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$，$h_{22} = \langle X_{22}, N\rangle = ab'$
- $$s\mathbf{x} = \mathbf{x}\begin{pmatrix} -a''b' + a'b'' & 0 \\ 0 & ab' \end{pmatrix}$$
- (t,θ) 处子午线的切向就是 X_1，纬圆的切向就是 X_2.
- $\det h = -aa''(b')^2 + aa'b'b''$
- 对 $(a')^2 + (b')^2 + 1$ 求导，得到
  $$2a'a'' + 2b'b'' = 0 \implies b'b'' = -a'a''$$
  于是
  $$\det h = -aa''(b')^2 - aa''(a')^2 = -aa''$$
- $$\begin{aligned} g = X^*\bar{g} =& \;\mathrm{d}(a\cos\theta)^2 + \mathrm{d}(a\sin\theta)^2 + \mathrm{d}(b)^2 \\ =& \;(a'\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 + (a'\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 \\ &+ (b'\,\mathrm{d}t)^2 \\ =& \;\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$
- $\det g = a^2$
- $K = (\det g)^{-1}\det h = -\frac{a''}{a}$
- $\kappa_2 = \frac{b'}{a}$，$\kappa_1 = \frac{K}{\kappa_2} = -\frac{a''}{b'}$

□

Problem 15.4 说明存在 $\mathbb{R}^3$ 上的旋转曲面，具有恒等于 1 的 Gauss 曲率，而主曲率不是常值的.

Remark 事实上，这个曲面局部等距同构于 $\mathbb{S}^2$. 它给出了两个 $\mathbb{R}^3$ 上局部等距同构但有不同主曲率的非平坦曲面.

Proof 上题给出了旋转曲面的 Gauss 曲率为 $-a''(t)/a(t)$，解 ODE，得到 $a(t) = \cos t$ 满足 $-a''(t)/a(t) = 1$. 取 $b(t) = t$，考虑 $\gamma(t) = (\cos t, t)$ 是定义在合适区间上的光滑曲线，它生成的旋转曲面，的 Gauss 曲率为 1，主曲率为 $\kappa_1 = -\frac{a''}{b'} = \cos t$，$\kappa_2 = \frac{b'}{a} = \csc t$.

□

Problem 15.5 令 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 是 $z = x^2 + y^2$ 给出的抛物面，配备了诱导度量. 证明 S 只在

一点是迷向的.

Proof 考虑参数化

$$X:(u_1,u_2)\mapsto\left(u_1,u_2,u_1^2+u_2^2\right)$$

则

$$\kappa_1=\frac{2}{\left(4\left|u\right|^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \kappa_2=\frac{2}{\sqrt{4\left|u\right|^2+1}}$$

设对应的特征向量分别为 v_1,v_2. 若 S 在一点处迷向, 则存在保持 p 点的等距同构 φ, 使得 $\left(\mathrm{d}\varphi\right)_p v_1=v_2$. 则

$$\kappa_2v_2=sv_2=s\left(\left(\mathrm{d}\varphi\right)_p v_1\right)=\pm\left(\mathrm{d}\varphi\right)_p\left(sv_1\right)=\pm\left(d\varphi\right)_p\left(\kappa_1v_1\right)=\pm\kappa_1v_2$$

由于 $\kappa_1,\kappa_2>0$, 只能有 $\kappa_1=\kappa_2$. 因此 S 在非原点处均不是迷香的. 而在原点处, $s_i^j=2\delta_i^j$, 特征向量正交. 通过一个旋转相互转化. 故 S 只在原点处是迷向的.

□

Problem 15.6 设 (M,g) 是 Riemann 流形, $\gamma:I\to M$ 是 M 上的一个正则 (不一定是单位速度的) 曲线. 说明 γ 在 $t\in I$ 处的测地曲率是

$$\kappa\left(t\right)=\frac{\left|\gamma'\left(t\right)\wedge D_t\gamma'\left(t\right)\right|}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^3}$$

其中分子的范数被定义为

$$\left|\gamma'\left(t\right)\wedge D_t\gamma'\left(t\right)\right|:=\sqrt{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^2\left|D_t\gamma'\left(t\right)\right|^2-\left\langle\gamma'\left(t\right),D_t\gamma'\left(t\right)\right\rangle_g^2}$$

并说明在配备了欧式度量 $\mathbb{R}^3$ 上, 公式写作

$$\kappa\left(t\right)=\frac{\left|\gamma'\left(t\right)\times\gamma''\left(t\right)\right|}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|^3}$$

Proof 弧长函数为

$$s\left(t\right)=\int_0^t\left|\gamma'\left(\tau\right)\right|\,\mathrm{d}\tau$$

$$\kappa\left(t\left(s\right)\right)=\left|D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)\right)'\right|$$

$$\gamma\left(t\left(s\right)\right)'=\gamma'\left(t\left(s\right)\right)t'\left(s\right)=\frac{\gamma'\left(t\left(s\right)\right)}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}$$

从而

$$D_s\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)'\right)=\frac{D_s\left(\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right)}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}+D_s\left(\frac{1}{\left|\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right|}\right)\gamma'\left(t\left(s\right)\right)$$

其中

$$D_s\left(\gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right)=\nabla_{\left(\gamma\left(t\left(s\right)\right)\right)'}\gamma'\left(t\left(s\right)\right)=\nabla_{\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}}\gamma'\left(t\right)=\frac{D_t\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}$$

$$\begin{aligned}D_s\frac{1}{|\gamma'(t(s))|}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{|\gamma'(t(s))|}\\&=-\frac{1}{|\gamma'(t(s))|^2}D_s|\gamma'(t(s))|\end{aligned}$$

由度量性,

$$D_s\langle\gamma'(t(s)),\gamma'(t(s))\rangle=2\langle\gamma'(t(s),D_s\gamma'(t(s)))\rangle=2\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t)|}$$

$$D_s\langle\gamma'(t(s)),\gamma'(t(s))\rangle^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2|\gamma'(t(s))|}(D_s\langle\gamma'(t(s)),\gamma'(t(s))\rangle)$$

于是

$$D_s|\gamma'(t(s))|=\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^2}$$

于是

$$D_s\left(\gamma(t(s))'\right)=\frac{D_t\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|^2}-\gamma'(t)\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^4}$$

模长的平方为

$$\begin{aligned}&\left\langle D_s\left(\gamma(t(s))'\right),D_s\left(\gamma(t(s))'\right)\right\rangle\\&=\frac{|D_r\gamma'(t)|^2}{|\gamma'(t)|^4}+\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle^2}{|\gamma'(t)|^6}-2\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^6}\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle\\&=\frac{|D_t\gamma'(t)|^2}{|\gamma'(t)|^4}-\frac{\langle\gamma'(t),D_t\gamma'(t)\rangle^2}{|\gamma'(t)|^6}\\&=\frac{|\gamma'(t)\wedge D_t\gamma'(t)|^2}{|\gamma'(t)|^6}\end{aligned}$$

最终

$$\kappa(t)=\kappa(t(s))=|D_s(\gamma(t(s)))|=\frac{|\gamma'(t)\wedge D_t\gamma'(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

在欧式空间上, $\gamma'(t)\wedge D_t\gamma'(t)$ 和 $\gamma'(t)\times\gamma''(t)$ 通过 Hodge 星算子对应, 它们具有相同的范数.

□

Problem 15.7 对于 $w>0$, 令 $M_w\subseteq\mathbb{R}^3$ 是由 $\gamma(t)=\left(w\cosh\left(\frac{t}{w}\right),t\right)$ 绕 z 轴生成的旋转曲面, 成为悬链面. 说明 M_w 对于每个 w 都是极小曲面.

Proof 参数化为

$$X(t,\theta)=(a(t)\cos\theta,a(t)\sin\theta,t)$$

其中 $a(t)=w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)$

- $$\begin{aligned} g &= \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\cos\theta\right)^2 + \mathrm{d}\left(a\left(t\right)\sin\theta\right)^2 + \mathrm{d}t^2 \\ &= \left(a'\cos\theta\,\mathrm{d}t - a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 + \left(a'\sin\theta\,\mathrm{d}t + a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)^2 + \mathrm{d}t^2 \\ &= \left(\left(a'\right)^2 + 1\right)\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta^2 \\ &= \cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}\theta^2 \end{aligned}$$
- $a'\left(t\right) = \sinh\left(\frac{t}{w}\right)$
- $a''\left(t\right) = \frac{1}{w}\cosh\left(\frac{t}{w}\right)$
- $X_1 = \left(a'\cos\theta, a'\sin\theta, 1\right) = \left(\sinh\left(\frac{t}{w}\right)\cos\theta, \sinh\left(\frac{t}{w}\right)\sin\theta, 1\right)$
- $X_2 = \left(-a\sin, a\cos, 0\right) = \left(-w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)\sin\theta, w\cosh\left(\frac{t}{w}\right)\cos\theta, 0\right)$
- $X_1 \times X_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a'\cos & a'\sin & 1 \\ -a\sin & a\cos & 0 \end{pmatrix} = \left(-a\cos, -a\sin, aa'\right) = a\left(-\cos, \sin, a'\right)$
- $N = \left(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh\left(\frac{t}{w}\right)\right)\frac{1}{\cosh\left(\frac{t}{w}\right)}$
- $X_{11} = \left(a''\cos\theta, a''\sin\theta, 0\right), X_{22} = \left(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0\right)$
- $s_1^1 = \frac{1}{\cosh}\left(-a''\right)\frac{1}{\cosh^2} = -\frac{1}{w\cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)}, \quad s_2^2 = \frac{a}{\cosh}\frac{1}{a^2} = \frac{1}{w\cosh^2\left(\frac{t}{w}\right)}$ 故平均曲率
$$H = \frac{1}{2}\left(s_1^1 + s_2^2\right) = 0$$

□

Problem 15.8 设 $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 Riemann 超曲面, N 是沿 M 的光滑单位法向量场. 在每个 $p \in M$, $N_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ 可以看做是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的单位向量, 从而视为 $\mathbb{S}^n$ 上面的一个点. 因此, 每个单位法向量场都给出一个车光滑映射 $\nu : M \to \mathbb{S}^n$, 称为是 M 的 Gauss 映射. 说明 $\nu^*\,\mathrm{d}V_{\mathring{g}} = (-1)^K\,\mathrm{d}V_g$, 其中 K 是 M 的 Gauss 曲率.

第 16 章　Gauss-Bonnet 定理

16.1　旋转指标定理

16.1.1　光滑曲线的旋转指标

定义 16.1 (简单闭合曲线)

设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是平面上的一个容许曲线. 成 γ 是简单闭合曲线, 若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 且 γ 在 $[a,b)$ 上是单射.

♣

定义 16.2

定义平面容许曲线 γ 的单位切向量场 T, 为以下给出的沿每个 γ 的光滑线段的向量场

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

♣

Remark 由于 $\mathbb{R}^2$ 上的每个切空间都与 $\mathbb{R}^2$ 自然地等同, 可以认为 T 是映到 $\mathbb{R}^2$ 的映射, 由于 T 是单位长度的, 他可以视为 $\mathbb{S}^1$ 上的映射.

定义 16.3 (切角)

若 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是光滑 (或至少连续可微) 的正则曲线. 若连续函数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ 使得

$$T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in [a,b]$$

则称 θ 为 γ 的一个切角函数.

♣

Remark

1. 令 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$,$q(s) = (\cos s, \sin s)$, 若给定某一点处的取值, 则 $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数 T 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的同伦提升 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, 使得 $q \circ \theta = T$.
2. 上面这条表面切角函数是存在的, 且在相差一个 2π 的意义下唯一 (因为符合条件的初值为 $2k\pi$)

定义 16.4 (光滑曲线的旋转指标)

若 γ 是连续可微的简单闭合曲线, 使得 $\gamma'(a)=\gamma'(b)$, 定义 γ 的 **旋转此步骤为**

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a))$$

♣

Remark

1. 由于 $(\cos\theta(a),\sin\theta(a))=(\cos\theta(b),\sin\theta(b))$,$\theta(b)-\theta(a)$ 是 2π 的整数倍, 故 $\rho(\gamma)$ 是整数.
2. 其他的切角函数总是通过改变 $\theta(b)$ 和 $\theta(a)$ 相同的量得到, 因此 $\rho(\gamma)$ 是良定义的.

16.1.2 分段光滑正则闭曲线的旋转指标

定义 16.5

令 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是容许简单闭曲线. 令 $(a_0,\cdots,a_k)$ 是 $[a,b]$ 的一个容许分划.

1. 称 $\gamma(a_i)$ 为 γ 的 **顶点**.
2. $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 为边.

♣

定义 16.6 (顶点的分类)

在每个顶点 $\gamma'(a_i)$ 上, 记 γ 的左, 右侧速度向量分别为 $\gamma'(a_i^-),\gamma'(a_i^+)$; 令 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 为对应的单位速度向量. 将这些顶点分为以下三类

1. 若 $T(a_i^-)\neq\pm T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个普通顶点.
2. 若 $T(a_i^-)=T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个平坦顶点.
3. 若 $T(a_i^-)=-T(a_i^+)$, 则称 $\gamma(a_i)$ 是一个尖点.

♣

定义 16.7

1. 在每个普通顶点上, 定义 $\gamma(a_i)$ **处的外角** ε_i 为 $T(a_i^-)$ 到 $T(a_i^+)$ 取值在 $(-\pi,\pi)$ 的夹角. 若 $(T(a_i^-),T(a_i^+))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个定向基[a], 则取其中的正直, 反之亦然.
2. 平坦顶点的外角定义为 0.
3. 尖点的外角无法确定方向, 认为尖点处的外角没有定义.
4. 若 $\gamma(a_i)$ 是普通顶点或平坦顶点, 定义 $\gamma(a_i)$ 的内角为 $\theta_i=\pi-\varepsilon_i$.
5. 对于顶点 $\gamma(a)=\gamma(b)$, $T(b)$ 和 $T(a)$ 分别扮演了 $T(a_i^-)$ 和 $T(a_i^+)$ 的角色.

[a]表现为向外扎一个尖

♣

定义 16.8

称分段光滑的正则曲线 γ 为一个曲边多面体, 若它无尖点, 切实某个预紧开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 的边界. 此外

1. 称 Ω 为 γ 的内部.
2. 若 γ 有 Ω 的边界诱导定向, 则称 γ 是正定向的.

♣

定义 16.9 (曲边多面体的切角函数)

定义曲边多面体的切角函数, 为分段光滑的连续函数 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, 使得 $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ 在使得 γ 光滑的任一点处成立. 在规定

$$\theta(a_i) = \lim_{t \to a_i^-} \theta(t) + \varepsilon_i$$

以及

$$\theta(b) = \lim_{t \to b^-} \theta(t) + \varepsilon_k$$

下, θ 是自右连续的. 其中 ε_k 是 $\gamma(b)$ 处的外角.

♣

Remark

1. 存在性: 在 $[a, a_1)$ 上, 存在 T 的在 $\mathbb{R}$ 上的提升 $\theta(t)$, 它取定了 a_1 处的函数值, 从而可以在 $[a_1, a_2)$ 上将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$, 以此类推. 由于曲线是闭合的, 一旦我们指定一点处合适的取值 (以 2π 为间隔), 都可以将 T 唯一地提升到 $\mathbb{R}$ 上.

定义 16.10 (旋转指标)

设 γ 是曲边多面体, 定义它的旋转指标为

$$\rho(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

其中 θ 是 γ 的任一切角函数.

♣

定理 16.1 (旋转指标定理)

正定向的曲边多面体的旋转指标为 $+1$.

♡

16.2 Gauss-Bonnet 公式

定义 16.11

设 (M,g) 是 2-Riemann 流形. 称容许简单闭曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的一个曲边多面体, 若 γ 的像是一个预紧开集 $\Omega\subseteq M$ 的边界, 并且存在包含了 $\bar{\Omega}$ 的定向坐标圆盘, 使得 γ 的坐标像在坐标平面上称为曲边多面体. ♣

Remark

1. **测地多面体**: 若 M 上的曲边多面体 γ 的边界都刚好是测地线段, 则称 γ 为一个测地多面体.
2. 可以按照度量角类似地定义内外角.

定义 16.12 (切角函数)

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的定向光滑坐标卡. 通过坐标映射 φ 可以将 γ,Ω,g 分别与他们在坐标平面上一开集 $\hat{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的表示等同. 令 (E_1,E_2) 是 g 的通过对 (∂_x,∂_y)Gram-Schimtdt 正交化得到的规正基, 使得 E_1 在 $\hat{U}$ 处处与 ∂_x 相差正标量倍.

定义 γ 的切角函数为一个分段连续函数 $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$, 满足

$$T(t)=\cos(t)\ E_1|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\ E_2|_{\gamma(t)}$$

在使得 γ' 连续的点上成立. 并且在分点处自右连续的值. ♣

Remark

1. **存在性**: 由于 T 是单位长度的, 故 $T(t)=u_1E_1+u_2E_2$ 中的 (u_1,u_2) 落在 $\mathbb{S}^1$ 上, 可以将他提升到 $\mathbb{R}$ 上.
2. 通过定义无法直接看出旋转指标的坐标无关性, 这个事实在下面的引理中得到说明.

引理 16.1 (旋转指标)

设 M 是定向的 2-Riemann 流形, 则对于 M 上每个正定向的曲边多面体, 它依赖于任意规正基的旋转指标都为 $+1$. ♡

Idea 可以将度量线性同伦到欧式度量, 说明旋转指标连续地变化, 由于旋转指标的取值是” 跳跃” 的, 从而说明旋转指标的不变性.

Proof 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 上的曲边多面体, Ω 是它的内部, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的

正定向的光滑坐标卡. 则我们既可以用 g 给出的内积来计算旋转指标, 也可以用欧式内积 $\bar{g}$ 来计算, 接下来说明计算结果一致.

定义

$$g_s=(1-s)\,g+s\bar{g},s\in[0,1]$$

容易看出对于每个 s,g_s 是一个度量. $\left(E_1^{(s)},E_2^{(s)}\right)$ 为关于 g_s 对 (∂_x,∂_y) 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的关于 g_s 的规正基,θ_{g_s} 和 ρ_{g_s} 分别为对应单位速度向量, 切角函数和旋转指标.

由于

1. 正交化的公式给出 $E_1^{(s)},E_2^{(s)}$ 关于 s 的连续性.
2. 在任意使得 γ 光滑的区间 $[a_{i-1},a_i]$ 上, 式
$$T_s\left(t\right)=u_1\left(t;s\right)\,E_1^{(s)}\Big|_{\gamma(t)}+u_2\left(t;s\right)\,E_2^{(s)}\Big|_{\gamma(t)}$$
中的 u_1,u_2 可以表示为
$$u_1\left(t;s\right)=\left\langle T_s\left(t\right),E_1^{(s)}\right\rangle_{g_s},\quad u_2\left(t;s\right)=\left\langle T_s\left(t\right),E_2^{(s)}\right\rangle g_s$$
均关于 (t,s) 连续, 其中
$$T_s\left(t\right)=\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|_{g_s}}$$
. 从而 $u_1,u_2:[a_{i-1},a_i]\times[0,1]\to\mathbb{S}^1$ 在给定初值下存在唯一提升.
3. 外角的定义式
$$\varepsilon_i=\frac{\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right),T\left(a_i^+\right)\right)}{\left|\mathrm{d}V_g\left(T\left(a_i^-\right),T\left(a_i^+\right)\right)\right|_{g_s}}\arccos\left\langle T\left(a_i^-,T\left(a_i^+\right)\right)\right\rangle_{g_s}$$
表面 ε_i 关于 s 连续.

故旋转指标函数 ρ_{g_s} 关于 s 连续, 从而是不变的, 恒等于欧式内积下的旋转指标.

□

定义 16.13

设 γ 是单位速度参数化的曲边多面体, 则单位切向量场 $T\left(t\right)=\gamma'\left(t\right)$. 存在沿 γ 的唯一的单位法向量场 N, 使得 $\left(\gamma'\left(t\right),N\left(t\right)\right)$ 构成 $T_{\gamma(t)}M$ 的定向基[a]. 在使得 γ 光滑的点处定义 γ **的符号曲率** 为

$$\kappa_N\left(t\right)=\left\langle D_t\gamma'\left(t\right),N\left(t\right)\right\rangle_g$$

[a]若 γ 正定向, 则这相当于 N 是正交与 $\partial\Omega$ 内指向的

♣

定理 16.2 (Gauss-Bonnet 公式)

令 (M,g) 是定向的 2-Riemann 流形, 设 γ 是 M 上正定向的曲边多面体, Ω 是 γ 的内部, 则

$$\int_\Omega K\,\mathrm{d}A+\int_\gamma \kappa_N\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^k \varepsilon_i=2\pi$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 体积形式 ε_i 是 γ 的外角, 且第二个积分是对弧长的积分. ♡

Proof 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 γ 的一个容许分划, (U,φ) 是包含了 $\overline{\Omega}$ 的正定向的图册, (E_1,E_2) 是 U 上的一个正定向的规正标架, $\theta(t)$ 是 γ 的一个切角函数, 则由 Newton-Lebniz 公式和旋转指标定理

$$2\pi=\theta(b)-\theta(a)=\sum_i\varepsilon_i+\sum_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}\theta'(t)\,\mathrm{d}t$$

接下来考虑 θ' 和 K,κ_N 的关系, 考虑

$$\gamma'(t)=\cos\theta(t)\,E_1|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\,E_2|_{\gamma(t)}$$

以及

$$N(t)=-\sin\theta(t)\,E_1|_{\gamma(t)}+\cos\theta(t)\,E_2|_{\gamma(t)}$$

对 $\gamma'(t)$ 求导, 得到

$$\begin{aligned}D_t\gamma'(t)&=-\sin\theta(t)\,\theta'\,E_1|_{\gamma(t)}+\cos\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_1\\&\quad+\cos\theta(t)\,\theta'\,E_2|_{\gamma(t)}+\sin\theta(t)\,\nabla_{\gamma'}E_2\end{aligned}$$

为了计算 $\nabla_{\gamma'}E_1,\nabla_{\gamma'}E_2$, 注意到

$$\begin{aligned}0&=D_v\langle E_1,E_1\rangle=2\langle\nabla_vE_1,E_1\rangle\\0&=D_v\langle E_2,E_2\rangle=2\langle\nabla_vE_2,E_2\rangle\\0&=D_v\langle E_1,E_2\rangle=\langle\nabla_vE_1,E_2\rangle+\langle E_1,\nabla_vE_2\rangle\end{aligned}$$

由于 E_1,E_2 正交, ∇_vE_1 是 E_2 的倍数, ∇_vE_2 是 E_1 的倍数, 上述第三式, 启发我们令

$$\omega(v)=-\langle\nabla_vE_1,E_2\rangle=\langle E_1,\nabla_vE_2\rangle$$

是一个 1-形式, 则

$$\nabla_vE_1=-w(v)\,E_2,\quad \nabla_vE_2=+w(v)\,E_1$$

现在可以计算得到

$$\begin{aligned}\kappa_N&=\langle D_t\gamma'(t),N\rangle\\&=\theta'-\omega(\gamma')\end{aligned}$$

于是

$$2\pi=\sum_i \varepsilon_i+\int_\gamma \kappa_N \,\mathrm{d}s+\int_\gamma \omega$$

由于 Ω 是带角流形, 由带角流形的 Stokes 定理, 我们要

$$\int_\gamma \omega=\int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

因此只需要证明 $K\,\mathrm{d}A=\mathrm{d}\omega$. 我们有

$$\begin{aligned}
K\,\mathrm{d}A\left(E_1,E_2\right)&=K=Rm\left(E_1,E_2,E_2,E_1\right)\\
&=\left\langle\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2-\nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2-\nabla_{[E_1,E_2]}E_2,E_1\right\rangle\\
&=\left\langle\nabla_{E_1}\omega\left(E_2\right)E_1-\nabla_{E_2}\omega\left(E_1\right)E_1-\omega\left(\left[E_1,E_2\right]\right)E_1,E_1\right\rangle\\
&=\left\langle E_1\omega\left(E_2\right)E_1+\omega\left(E_2\right)\nabla_{E_1}E_1,E_1\right\rangle\\
&-\left\langle E_2\omega\left(E_1\right)E_1+\omega\left(E_1\right)\nabla_{E_2}E_1,E_1\right\rangle-\omega\left(\left[E_1,E_2\right]\right)\\
&=E_1\omega\left(E_2\right)-E_2\omega\left(E_1\right)-\omega\left(\left[E_1,E_2\right]\right)\\
&=\mathrm{d}\omega\left(E_1,E_2\right)
\end{aligned}$$

由于体积形式由其系数决定, 故 $K\,\mathrm{d}A=\mathrm{d}\omega$ 这就完成了证明. □

推论 16.1 (全曲率定理)

令 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是光滑的单位速度简单闭曲线, 使得 $\gamma'(a)=\gamma'(b)$, N 是内指向的法向量, 则

$$\int_a^b \kappa_N(t)\,\mathrm{d}t=2pi$$

♡

16.3 Gauss-Bonnet 定理

定义 16.14

设 M 是一个紧的 2 维流形.

1. M 上的一个曲边三角形, 是指有三个顶点和三个变的曲边多边形.
2. M 的一个光滑三角剖分, 是指有限多个曲边三角形, 它们的内部两两无交, 任意两个不同曲边三角形的交若非空, 则要么为一个顶点, 要么为一条边, 并且这些三角形及其内部的交并成 M,.

♣

定理 16.3 (Tibor Rado)

每个紧的 2-流形, 容许一个三角剖分, 使得每条边都属于两个三角形.

♡

定义 16.15 (欧拉示性数)

设 M 是被三角剖分了的 2-流形, 定义 M(关于这个三角剖分) 的欧拉示性数为

$$\chi(M) = V - E + F$$

其中 V, E, F 分别为三角剖分的顶点数, 边数, 面数.

Remark 事实上欧拉示性数是拓扑不变的, 且无关于三角剖分的选取, 这是代数拓扑中的重要事实.

定理 16.4 (Gauss-Bonnet 定理)

若 (M, g) 是一个被光滑三角剖分了的 2 维紧 Riemann 流形, 则

$$\int_M K \, \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M)$$

其中 K 是 g 的 Gauss 曲率, $\mathrm{d}A$ 是它的 Riemann 密度.

定理 16.5 (分类定理)

1. 每个紧的, 连通的, 可定向的 2 维流形 M 都同胚于一个球面, 或 n 个换面的连通和.
2. 每个不可定向的 2 维流形同胚于 n 份实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 的连通和.
3. 数 n 称为 M 的亏格 .

推论 16.2

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率, 则

1. 若 M 同胚于球面或射影平面, 则 $K > 0$ 在某处成立.
2. 若 M 同胚于环面或 Klein bottle, 则要么 $K \equiv 0$, 要么 K 同事有正负的取值.
3. 若 M 是任意其他紧的面, 则 $K < 0$ 在某处成立.

Proof 应用三角剖分, 亏格 n 的可定向 2-流形的欧拉示性数为 $2 - 2n$, 不可定向的为 $2 - n$.

□

推论 16.3

令 (M, g) 是紧的 2 维 Riemann 流形, K 是它的 Gauss 曲率

1. 若 $K > 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{S}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 要么是平凡的, 要么同构于二元群 $\mathbb{Z}/2$
2. 若 $K \leq 0$ 在 M 上处处成立, 则 M 的万有覆叠流形同胚于 $\mathbb{R}^2$, 且 $\pi_1(M)$ 有

限. ♡

第 17 章　Jacobi 场

17.1　Jacobi 方程

每条主曲线都是测地线的变分，称为是测地变分. 测地变分的变分场 $J(t)$ 满足一个二阶线性方程，称为是 Jacobi 方程. $(J, D_t J)$ 的初值给出了方程的解空间到两份切空间的对应. 称解空间的一个元素为一个 Jacobi 场.

既然测地变分的变分场是 Jacobi 场，反过来问,Jacobi 场合适是测地变分的变分场? 当 M 测地完备或 I 是紧区间是，可以这样构造: 以 $J(0)$ 为初速度确定一条初始的横截曲线，可以沿着它给出一个初值为 v，初始加速度待定的向量场 V. 这样 σ 上每一点，都可以依据 V 长出一条测地线，得到了一个测地变分. 前面的假设保证了充分小的邻域上，测地线延伸到 I 上. 取适当的 $D_s V(0)$ 就可以构造出所需的测地变分.

定义 17.1 (测地变分)

设 (M, g) 是 n 维 (伪)-Riemann 流形. 设 $I, K \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，$\gamma : I \to M$ 是测地线，Γ 是 γ 的一个变分. 称 Γ 为一个**测地变分**，若 $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ 对于每个 $s \in K$ 也是一个测地线.

♣

定理 17.1 (Jacobi 方程)

设 (M, g) 是伪 Riemann 流形，γ 是一个测地线，J 是沿 γ 的一个向量场. 若 J 是一个测地变分的变分场，则它满足以下 **Jacobi 方程**

$$D_t^2 J + R(J, \gamma') \gamma' = 0$$

♡

Proof　设 Γ 是以 J 为变分场的测地变分，令 $T(s, t) = \partial_t \Gamma(s, t)$,$S(s, t) = \partial_s \Gamma(t, s)$. 则测地线方程给出

$$D_t T \equiv 0$$

沿着横街曲线求导，得到

$$D_s D_t T \equiv 0$$

由命题14.5以及对称引理13.2

$$
\begin{aligned}
0 &= D_s D_t T \\
&= D_t D_s T + R(S,T)T \\
&= D_t^2 S + R(S,T)T
\end{aligned}
$$

由于 $T(0,t) = \gamma'(t)$,$S(0,t) = J$, 带入即可得 Jacobi 方程成立.

□

定义 17.2

沿测地线的光滑向量场若满足 Jacobi 方程, 则称为 Jacobi 场.

♣

定理 17.2 (Jaocbi 场的存在唯一性)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形, $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $\gamma : I \to M$ 是测地线. 设 $a \in I$, $p = \gamma(a)$, 任取 $v, w \in T_pM$, 存在唯一的满足以下条件的沿 γ 的 Jacobi 场:

$$J(a) = v, \quad D_t J(a) = w$$

♡

Proof 取正交的沿 γ 的平行标价 (E_i), 设 $v = v^i E_i(a)$, $w = w^i E_i(p)$, $\gamma(t) = \gamma^i(t) E_i(t)$. 则 $\gamma'(t) = \dot{\gamma}^i(t) E_i(t)$. 设 $J(t) = J^i(t) E_i(t)$, 则 Jacobi 方程写作

$$\ddot{J}^i(t) + R^i_{jkl}(\gamma(t)) J^j(t) \dot{\gamma}^k(t) \dot{\gamma}^l(t) = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

是一个二阶线性方程组, 令 $W^i(t) = \dot{J}^i(t)$, 则方程组化为

$$
\begin{aligned}
\dot{J}^i(t) &= W^i(t) \\
\dot{W}^i(t) &= -R^i_{jkl}(\gamma(t)) J^j(t) \dot{\gamma}^k(t) \dot{\gamma}^l(t) \\
&, \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

一个 2n 个方程的一阶线性 ODE, 取定初值 $J^i(a) = v^i$,$W^i(t) = w^i$ 下, 方程组存在唯一的光滑解, 由于 $D_t J(a) = \dot{J}^i(t) E_i(t) = W^i(t) E_i(t) = w^i E_i(t) = w$, 故方程的解 J 即为所需要的 Jacobi 场. □

定义 17.3

给定测地线 γ, 令 $\mathscr{J}(\gamma) \subseteq \mathfrak{X}(\gamma)$ 表示全体沿 γ 的 Jacobi 场.

♣

推论 17.1

设 (M,g) 是 n 维 (伪)Riemann 流形, γ 是一个测地线. 则 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是 $\mathfrak{X}(\gamma)$ 的一个 $2n$ 维线性子空间.

♡

Proof 由于 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是线性方程 (Jaocbi) 方程的解空间, 故 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是一个线性空间. 定

义 $\mathscr{J}(\gamma)$ 到 $T_pM \oplus T_pM$ 的映射 $J \mapsto (J(a), D_tJ(a))$, 由上面的定理是一个双射, 故 $\dim\ (\gamma) = \dim\ (T_pM \oplus T_pM) = 2n$.

□

17.2 Jacobi 场的基本计算

如果一个变分场不将初始的测地线像侧边拖拽, 而只做沿着测地线切向上的改变, 那么它将不包含任何除了初始测地线以外的信息. 始终沿着 γ 切向的 Jacobi 场是" 平凡的", 始终沿着 γ 法向的 Jacobi 场包含了主要的信息. 我们要区分出这些 Jacobi 场.

事实上, 切 Jacobi 场是 2 维的, 由平移变换和尺度变换张成. 剩下的 $(2n-2)$ 维都是法向的.

定义 17.4

给定正则曲线 $\gamma : I \to M$

1. 记 $T^{\top}_{\gamma(t)}M \subseteq T_{\gamma(t)}M$ 为 $\gamma'(t)$ 在 $T_{\gamma(t)}M$ 中张成的子空间.
2. 记 $T^{\perp}_{\gamma(t)}M$ 为 $T^{\top}_{\gamma(t)}M$ 的正交补空间.
3. 若 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 使得 $V(t) \in T^{\top}_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$, 则称 V 为一个沿 γ 的切向量场.
4. 若 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 使得 $V(t) \in T^{\perp}_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$, 则称 V 为沿 γ 的一个法向量场.
5. 令 $\mathfrak{X}^{\top}(\gamma)$ 和 $\mathfrak{X}^{\perp}(\gamma)$ 分别表示沿 γ 的切向量场和法向量场空间.
6. 若 γ 是测地线, 可以类似地定义 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 和 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 分别为沿 γ 的切 Jacobi 场和法 Jacobi 场.

♣

命题 17.1

令 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形, γ 是一个测地线,J 是 γ 的一个 Jacobi 场. 则以下几条等价:

1. J 是一个法 Jacobi 场.
2. J 与 γ' 在两个不同的点处正交.
3. 在某一点处, D_tJ 与 J 均与 γ' 正交.
4. D_tJ 和 J 与 γ' 处处正交.

♠

Proof 令 $f(t) = \langle J, \gamma' \rangle$, 由 $D_t\gamma' = 0$ 和联络的度量性, 可得

$$f'(t) = \langle D_tJ, \gamma' \rangle$$

再求一次导，得到

$$f''(t) = \left\langle D_t^2 J, \gamma' \right\rangle$$

由 Jacobi 方程

$$\begin{aligned} \left\langle D_t^2 J, \gamma' \right\rangle &= \left\langle -R\left(J, \gamma'\right)\gamma', \gamma' \right\rangle \\ &= -Rm\left(J, \gamma', \gamma', \gamma'\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

故 $f''(t) \equiv 0$，从而 $f(t)$ 形如 $at+b$ 是 t 的一个仿射.

根据定义，J 与 γ' 在 t 处正交，当且仅当 f 在 t 处退化，$D_t J$ 与 γ' 正交，当且仅当 f' 在 t 处退化. 而 f' 在两点处退化，当且仅当 $f \equiv 0$; f, f' 一点处均退化，也当且仅当 $f \equiv 0$. 故 $1. \iff 2., 3. \iff 4., 1. \iff 4.$，命题得证.

□

推论 17.2

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形，$\gamma: I \to M$ 是非常值的测地线. 则 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 是 $\mathscr{J}(\gamma)$ 的 $2n-2$ 维子空间，$\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 是 $\mathscr{J}(\gamma)$ 的 2 维子空间. 并且每个 γ 的 Jacobi 场都可以唯一地写作一个切 Jacobi 场和法 Jacobi 场的和.

Proof 对于每个 $a \in I$，映射 $J \mapsto (J(a), D_t J(a))$ 给出 $\mathscr{J}(\gamma)$ 到 $T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ 的一个同构. 又由上面的命题，$\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 无非就是由满足 $\langle w, \gamma'(a) \rangle = \langle v, \gamma'(a) \rangle = 0$ 的全体 $(w,v) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ 构成的子空间下的原像. 故 $\dim \mathscr{J}^{\perp}(\gamma) = 2n-2$.

由于 $J_0(t) = \gamma'(t)$ 和 $J_1(t) = t\gamma'(t)$ 都位于 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$. 又 $\gamma'(t)$ 无处退化，故 J_0 与 J_1 线性无关，$\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 是至少 2 维的. 又 $J^{\perp}(\gamma) \cap J^{\top}(\gamma) = \{0\}$，故 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 只能是 2 维的. 于是有正交分解

$$\mathscr{J}(\gamma) = \mathscr{J}^{\top}(\gamma) \oplus \mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$$

即 γ 唯一地写作一个切 Jacobi 场和一个法 Jacobi 场之和.

□

17.3 一点处退化的 Jacobi 场

对于一点处消失的 Jacobi 场，它可以通过保持起点的变分来实现，具有某种特殊性. 在测地坐标下，他可以看成是两条过原点直线 (测地线) 中间方向相同 $(D_t J(0))$ 的一堆”连接两条直线箭头”.

借由此，在法坐标上，每个切向量都可以实现为在原点消失的沿径向测地线的 Jacobi 场的某个取值.

引理 17.1

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形, $I\subseteq\mathbb{R}$ 是包含了 0 的一个区间, $\gamma:I\to M$ 是测地线. 设 $J:I\to M$ 是 γ 的一个 Jacobi 场, 使得 $J(0)=0$. 若 M 是完备或 I 是紧区间成立其一, 则 J 是以下 γ 的测地变分的变分场

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

其中 $p=\gamma(0),v=\gamma'(0),w=D_tJ(0)$.

Proof 若 $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是光滑曲线, V 是沿 σ 的向量场, 使得

$$\sigma(0)=p,\quad \sigma'(0)=J(0),\quad V(0)=v,\quad D_sV(0)=D_tJ(0)$$

则 J 是以下 γ 的测地变分的变分场

$$\Gamma(s,t)=\exp_{\sigma(s)}(tV(s))$$

本题中, 取 $\sigma(s)\equiv p$, 则 $\sigma'(0)=0=J(0)$. 取 $V(s)=sw+v$, 则

$$V(0)=v,\quad D_sV(0)=w$$

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

□

命题 17.2 (一点退化的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是 n 维 (伪)Riemann 流形, $I\subseteq\mathbb{R}$ 是包含了 0 的一个区间. $\gamma:I\to M$ 是测地线, 使得 $\gamma(0)=p$. $J:I\to M$ 是 γ 的一个 Jacobi 场, 使得 $J(0)=0$,$D_tJ(0)=w$. 则 J 有以下表示

$$J(t)=\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_{tv}(tw)\tag{17.1}$$

其中 $v=\gamma'(0)$, tw 在标准同构 $T_{tv}(T_pM)\simeq T_pM$ 下视作 $T_{tv}(T_pM)$ 中的向量. 若 (x^i) 是 p 的包含了 γ 的像法邻域上的一个法坐标, 则

$$J(t)=tw^i\,\partial_i|_{\gamma(t)}$$

其中 $w^i\,\partial_i|_0$ 是 w 的法坐标表示.

Proof 任取 $t\in I$, t 落在 I 的某个包含了 0 的紧子区间上, 由上面的引理可知, J 在这个紧子区间上表为

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

由链式法则，

$$J(t) = \partial_s \Gamma(0,t) = \mathrm{d}\left(\exp_p\right)_{tv}(tw)$$

在 t 附近成立，我们在每个 t 的附近都能得到这个等式.

在法坐标下，指数映射的坐标表示为单位映射，故 $\Gamma(s,t)$ 显示地写作

$$\Gamma(s,t) = \left(t\left(v^1 + sw^1\right), \cdots, t\left(v^n + sw^n\right)\right)$$

关于 s 求导并取 $s=0$，即可得

$$J(t) = \left(tw^1, \cdots, tw^n\right) = tw^i \left.\partial_i\right|_{\gamma(t)}$$

□

17.3.1 常曲率空间的 Jacobi 场

引理 17.2

方程

$$u''(t) + cu(t) = 0, \quad u(0) = 0$$

的解空间是函数

$$s_c(t) = \begin{cases} t, & c = 0 \\ R\sin\frac{t}{R}, & c = \frac{1}{R^2} > 0 \\ R\sinh\frac{t}{R}, & c = -\frac{1}{R^2} < 0 \end{cases}$$

张成的一维线性子空间.

♡

命题 17.3 (常曲率空间的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是有常曲率 c 的 Riemann 流形，γ 是 M 上的单位速度测地线. 则沿 γ 法向，且在 $t=0$ 处消失的 Jacobi 场具有以下形式：

$$J(t) = ks_c(t)E(t)$$

其中 E 是任意沿 γ 平行的单位法向量场，k 是任意常数. 这样的 Jacobi 场的初值是

$$D_tJ(0) = kE(0)$$

范数为

$$|J(t)| = |s_c(t)|\,|D_tJ(0)|$$

♠

Proof 常曲率空间的曲率自同态的计算公式，连同 Jacobi 方程，给出了 $D_t^2 J$ 与 J 相

差常数 $-c$ 倍的事实. 由此, 给定单位法向量场 $E(t)$ 的情况下, 常数变易法给出这样的 Jacobi 方程的解与方程

$$u''(t) + cu(t) = 0$$

的解 $ks_c(t)$ 一一对应. 于是 J 对应于 $E(t)$ 的所以解就是 $ks_c(t)\,E(t)$. 又 $E(t)$ 是任意单位法向量场, 由此测到了 J 的全部形式.

最后,

$$D_tJ(0) = ks_c'(0)\,E(0) = kE(0) \implies |D_tJ(0)| = |k|$$

$$|J(t)| = k\,|s_c(t)|\,|E(t)| = |s_c(t)|\,|D_tJ(0)|$$

$\square$

第四部分

代数拓扑

第 18 章　范畴论基础

18.1 范畴与态射

定义 18.1 (范畴)

一个范畴 $\mathcal{C}$ 是指以下资料

1. 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 其元素称为 $\mathcal{C}$ 的对象
2. 集合 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 其元素称为 $\mathcal{C}$ 的态射, 配上一对映射

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \underset{t}{\overset{s}{\to}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

   其中 s 和 t 分别给出态射的来源和目标. 对于 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 习惯记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$ 或简记为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中的元素称为 X 到 Y 的态射
3. 对于每个对象 X, 给定元素 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 称为 X 到自身的恒等态射
4. 对于任意的 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 给定态射之间的合成映射

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$
$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

   不致混淆时简记 $fg = f \circ g$. 合成映射满足
   (a). 结合律: 对于任意的态射 $f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 若合成 $f(gh)$ 和 $(fg)h$ 都有定义, 则

$$f(gh) = (fg)h$$

   于是两边可以同时写作 fgh 或 $f \circ g \circ h$;
   (b). 对于任意的态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 都有

$$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$$

♣

18.2 函子与自然变换

定义 18.2 (函子)

设 $\mathcal{C}',\mathcal{C}$ 是范畴，一个函子 $F:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ 是指以下资料：

1. 对象间的映射 $F:\mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}'\right)\to\mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}\right)$
2. 态射间的映射 $F:\mathrm{Mor}\left(\mathcal{C}'\right)\to\mathrm{Mor}\left(\mathcal{C}\right)$，使得
    - F 与来源和目标映射相交换（即 $sF=Fs$,$tF=Ft$）
    - $F\left(g\circ f\right)=F\left(g\right)\circ F\left(f\right)$,$F\left(\mathrm{id_X}\right)=\mathrm{id_{FX}}$

♣

定义 18.3 (自然变换)

函子 $F,G:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ 之间的自然变换 $\theta:F\to G$ 是一族态射

$$\theta_x\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(FX,GX\right),\quad X\in\mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}'\right)$$

使得下图对所有 $\mathcal{C}'$ 中的态射 f 交换，

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\theta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}$$

♣

第 19 章　胞腔复形

19.1 胞腔复形的构造

定义 19.1

设 $k \geq 1$ 是整数, 对于每个指标 $\alpha \in \Lambda$, 令 D_α^k 表示 $\mathbb{R}^k$ 上的单位闭球 $\mathbb{D}^k$ 的一个复制. 给定两个空间 X 和 (Y), 我们称 X 是 Y 通过黏着 k -胞腔得到的, 若存在一族连续映射 $f_\alpha : \mathbb{S}^{k-1} \to Y, \alpha \in \Lambda$, 使得 X 是无交并空间

$$Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha^k$$

在等价关系 $x \sim f_\alpha(x), x \in \partial D_\alpha^k, \alpha \in \Lambda$ 的下的商空间.

Remark

1. 映射 $\{f_\alpha\}$ 被称为是胞腔的黏着映射;
2. 用 ϕ_α 表示商映射在胞腔 D_α^k 上的限制, 则 $\phi_\alpha|\partial D_\alpha^k = f_\alpha$, 并且 ϕ_α 在 D_α^k 的内部上是单射. 因此 ϕ_α 定义出 D_α^k 到其像集的同胚. 称 $\phi_\alpha\left(\mathrm{int}\left(D_\alpha^k\right)\right)$ 为 X 上的开胞腔.
3. 称 ϕ_α 为胞腔的特征映射.
4. D_α^k 的连续像是 X 的紧子空间. 称它们为 (X, Y) 上的闭 k-胞腔, 记作 e_α^k.

引理 19.1

设 X 是 Y 通过黏合 k-胞腔得到的空间, 则

1. X 的一个子集 A 是闭的, 当且仅当 $A \cap Y$ 在 Y 中是闭的, 并且 $A \cap e_\alpha^k$ 在 e_α^k 中是闭的, $\alpha \in \Lambda$;
2. Y 是 X 的一个闭子集.

Remark

1. e_α^k 不需要是闭集, 但若 Y 是 Hausdorff 的, 则 $f_\alpha\left(\mathbb{S}^{k-1}\right)$ 是 Y 的闭子集, 进而 e_α^k 在 X 中是闭的.
2. e_α^k 不必同胚于 $\mathbb{D}^k$, 但 e_α^k 的内部同胚于 $\mathrm{int}\left(\mathbb{D}^k\right)$.

Proof　设 q 是商映射, 则

$$q^{-1}(A) = q^{-1}(A) \cap \left(Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha^k\right) = q^{-1}(A) \cap Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} q|_{D_\alpha^k}^{-1}(A) = q^{-1}(A) \cap Y \sqcup_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha^{-1}(A)$$

$A \cap e_\alpha^k$ 在 e_α^k 中是闭的, 当且仅当 $\phi_\alpha^{-1}(A)$ 是闭的, $A \cap Y$ 在 Y 中是闭的, 当且仅当 $q|_Y^{-1}(A \cap Y) = q^{-1}(A) \cap Y$ 是闭的. 由此可见 1. 成立.

对于 2., 由于 $Y \cap Y = Y$ 在 Y 中是闭的, 且 $\phi_\alpha^{-1}(Y) = f_\alpha^{-1}(Y) = \partial D_\alpha^k$ 是闭集, 由 1. 可知 Y 是闭的. □

定义 19.2 (胞腔复形)

一个胞腔复形包含以下信息:

1. 一个离散集 X^0 , 其中的点称为是 0-胞腔.
2. 有限或无限个集合 $\{X^k\}$, $k = 1, \cdots, n$ 或 $k = 1, 2, \cdots$. 其中称 X^k 为 k-骨架.
3. 对于上面这些 k, X^k 通过 X^{k-1} 黏着 k-胞腔得到.

♣

Remark

1. 若 $X = X^n$ 对于某个 n 成立, 则称 X 是有限维的, 最小的这样的 n 称为是 X 的维数, 它也是 X 的胞腔的最大维数.

Example 19.1 一个一维胞腔复形 $X = X^1$ 在代数拓扑中被称为是一个图. 它由一些顶点 (0-胞腔) 和一些附着的边 (1-胞腔) 组成.

Example 19.2 球面 S^n 有由两个胞腔 e^0, e^n 组成的胞腔复形结构, n 胞腔通过常值映射 $S^{n-1} \to e^0$ 黏着. 等价地说, S^n 是 $D^n \setminus \partial D^n$ 的商空间.

Example 19.3 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 被定义为由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上全体过原点的直线构成的空间. $\mathbb{RP}^n$ 可以被拓扑地描述为 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \quad \lambda \neq 0$ 下的商空间. $\mathbb{RP}^n$ 也可以视为 n-球面 S^n 粘贴对径点得到的空间 $S^n/(v \sim -v)$. 又或者描述为半球面 D^n 通过粘贴 ∂D^n 上的对径点得到的商空间. 在最后一种描述下, 注意到 ∂D^n 粘贴对径点恰好得到 $\mathbb{RP}^{n-1}$, 于是 $\mathbb{RP}^n$ 可以通过 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 黏着一个 n-胞腔得到, 黏着映射为商投影 $S^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$.

通过对 $\mathbb{RP}^n$ 的 n 归纳, 可以得到 $\mathbb{RP}^n$ 拥有一个胞腔复形结构 $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$. 它在每个维数 $i \leq n$ 上恰有一个 i-胞腔.

Example 19.4 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 被定义为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上全体过原点的直线构成的空间, 即 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的复-1 维的子空间的全体. $\mathbb{CP}^n$ 被拓扑地刻画为 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ 下的商空间. 也可以刻画为单位球面 $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ 在等价关系 $v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ 下的商空间. 由于对于最后一个复分量非零的 $v \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, 存在唯一的 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, 使得 $(\lambda v)^n = \lambda v^n \in \mathbb{R}_{>0}$, 且等价关系保持最后一个分量的非零性, 故可以定义等价类在最后一个分量上是否非零. 故 S^{2n+1} 上最后一个复分量非零

的全体向量,唯一地对应到 S^{2n+1} 上最后一个分量非零的等价类. 此外, S^{2n+1} 上最后一个复分量非零的向量形如 $\left(w, \sqrt{1-|w|^2}\right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, |w| \leq 1$, 这些向量的全体由函数 $w \mapsto \sqrt{1-|w|^2}, |w| \leq 1$ 的图像给出, 它恰是边界为 $S^{2n-1} \subseteq S^{2n+1}$ 的上半球面 D_+^{2n} .

综上, S^{2n+1} 在等价关系 $v \sim \lambda v$ 下, 最后一个复分量非零的等价类与 D_+^{2n} 一一对应, 最后一个复分量等于零的等价类全体恰是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$. 于是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 可以通过 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 黏着 $2n$ -胞腔 D_+^{2n} 得到. 黏着映射为商映射 $\partial D_+^{2n} = S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$.

通过对 n 归纳, 可以得到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 由胞腔复形结构 $e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$, 它在每个不大于 $2n$ 的偶维数上恰有一个胞腔.

定义 19.3 (子复形)

设 X 是胞腔复形. 若闭子空间 $A \subseteq X$ 写作 X 的一些胞腔的并, 则称 A 是 X 的一个子复形. ♣

Remark

1. 由于 A 是闭的, A 中每个胞腔的特征映射的像都含于 A. 特别地, 黏着映射的像含于 A. 故 A 本身也是一个胞腔复形.
2. 一个由胞腔复形 X 和子复形 A 组成的对 (X, A) 被称为是一个 CW 对.

Example 19.5 存在自然的包含关系 $S^0 \subseteq S^1 \subseteq \cdots \subseteq S^n$, 但这些子球面不是 S^n 的子复形. 不过可以选择 S^n 的另一种胞腔复形结构, 使得这鞋子球面称为 S^n 的子复形. 具体地, 对于每个 S^k, 令 S^k 是通过 S^{k-1} 黏着两个 k-胞腔得到的, 这两个胞腔分别为 $S^k - S^{k-1}$ 的上半部分和下半部分.

此时, 无穷维球面 $S^\infty = \bigcup_n S^n$ 也是一个胞腔复形. 连接对径点的 2-1 商映射 $S^\infty \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ 将 S^∞ 的两个 n-胞腔与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ 的唯一的 n-胞腔所等同.

Example 19.6 胞腔的闭包不一定是子复形. 例如我们可以通过一个像为 S^1 的非平凡弧的映射 $S^1 \to S^1$ 将一个 2-胞腔黏着到 S^1 上, 此时由于 2-胞腔的闭包只包含了 1-胞腔的一个部分, 故无法成为一个胞腔复形.

19.2 空间上的算子

命题 19.1

若 X 和 Y 是胞腔复形, 则 $X \times Y$ 有由全体积胞腔 $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ 为胞腔的胞腔复形结构. 其中 e_α^m 跑遍 X 的胞腔, e_β^n 跑遍 Y 的胞腔.

Example 19.7

例如由 $S_1^1 = \{a\} \cup e_1^1$ 和 $S_2^1 = \{b\} \cup e_2^1$ 构成的环面 $S^1 \times S^1$, 它的 0-胞腔是 $\{(a,b)\}$, 两个 1-胞腔是 $\{a\} \times e_2^1$ 和 $e_1^1 \times \{b\}$, 一个 2-胞腔是 $e_1^1 \times e_2^2$.

命题 19.2

设 (X, A) 是一个 CW 对, 则商空间 X/A 有继承自 X 的自然的胞腔复形结构[a]. X/A 的胞腔为全体 $X - A$ 上的胞腔, 和一个新的 0-胞腔 [b], 为 A 在 X/A 中的像. 对于 $X - A$ 的一个胞腔 e_α^n, 若它通过 $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ 黏着, 则它在 X/A 上相应的黏着映射为复合映射 $S^{n-1} \to X^{n-1} \to X^{n-1}/A^{n-1}$.

[a]就是把 A 粘成一个点

[b]因为 X 上的胞腔要么完全落在 A 上, 要么最多只有边界粘在 A 上.

Example 19.8 给定任意胞腔结构的 S^{n-1}, 通过 S^{n-1} 黏着一个 n-胞腔构造 D^n, 则 D^n/S^{n-1} 在自然胞腔结构下变成 S^n.[1]

定义 19.4 (楔和)

- 给定拓扑空间 X, Y, 以及各一点 $x_0 \in X, y_0 \in Y$. 定义**楔和** $X \vee Y$, 为通过将无交并 $X \coprod Y$ 上的 x_0, y_0 等同于一点, 得到的商空间.
- 更一般地, 可以对一族拓扑空间 X_α, 定义楔和 $\bigvee_\alpha V_\alpha$ 通过将 $x_\alpha \in X_\alpha$ 等同于一点.

Example 19.9 任给胞腔复形 X, 商空间 X^n/X^{n-1} 就是 n-球面的楔和 $\bigvee_\alpha S_\alpha^n$, 其中每个 X 的 n-胞腔对应于一个 n-球面. [2]

[1] S^n 通过点 $[S^{n-1}]_{/A}$ 黏着 n-胞腔得到.

[2]由于每个 n-胞腔都将边界粘在 $(n-1)$-骨架上, 并且内部两两无交, 因此商去 X^{n-1} 后,n-胞腔的边界都粘在同一个点上.

第 20 章 基本群

20.1 同伦

定义 20.1

设 X, Y 是两个拓扑空间,$f, g : X \to Y$ 是两个连续映射. 称 f 同伦于 g, 记作 $(f \simeq g)$, 若存在连续映射 $F : X \times I \to Y$, 使得 $F(x, 0) = f(x)$, $f(x, 1) = g(x)$ 对于所有的 $x \in X$ 成立. 此时称映射 F 为 f 到 g 的同伦. ♣

Remark

1. 对于每个 $t \in I$, $i_t : X \to X \times I$, $i_t(x) = (x, t)$ 是嵌入映射. 故 $f_t = F \circ i_t : X \to Y$ 是从 X 到 Y 的一组连续映射.
2. $f_0 = f, f_1 = g$.
3. 观察图20.1, 每个 $t \in I$ 对应左侧一片圆, t 比较近的圆映到 Y 的图像是差不多的.

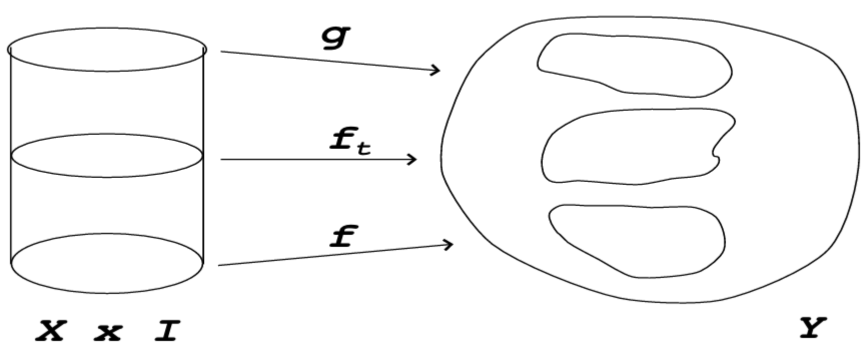

图 20.1: 从 f 到 g 的同伦

Example 20.1 设 X 是拓扑空间, Y 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸集. 令 $f, g : X \to Y$ 是连续映射. 则 f 同伦于 g. 具体地, $H : X \times I \to Y$

$$H(x, t) = tg(x) + (1 - t) f(x)$$

是 f 到 g 的同伦. 此类同伦被称为是直线同伦.

Example 20.2 设 $\mathbb{S}^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ 是单位元. 也可以写作 $\mathbb{S}^1 = \left\{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$. 定义两个映射 $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$,$f(z) = z$, 和$g(z) = -z, z \in \mathbb{S}^1$. 则 f 同伦于 g. 具体地, 定

义 $F : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$

$$F\left(e^{i\theta}, t\right) = e^{i(\theta + t\pi)}$$

注意到 F 是连续映射的复合

$$\mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

$$\left(e^{i\theta}, t\right) \to \left(e^{i\theta}, e^{it\pi}\right) \to e^{i(\theta + t\pi)}$$

其中第二个映射是复数的乘法, 故 F 是连续映射. 此外, 注意到映射族 $\{f_t : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1\}$ 是旋转 $t\pi, 0 \leq t \leq 1$ 的一族映射.

定理 20.1

设 X, Y 是拓扑空间, $C(X, Y)$ 表示 X 到 Y 的全体连续映射. 则同伦关系是 $C(X, Y)$ 上的一个等价关系.

Proof

对于连续映射 $f : X \to Y$, 定义 $H(x, t) = f(x)$ 可以说明自反性.

对于 $H : f \simeq g$, 定义 $H'(x, t) = H(x, (1-t))$, 则 $H' : g \simeq f$, 说明了对称性.

对于 $H_1 : f \simeq g, H_2 : g \simeq h$, 定义 H

$$H(x, t) := \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_2(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

则由粘合引理 H 是连续映射, 说明了传递性.

□

定义 20.2

$C(X, Y)$ 上关于同伦关系的一个等价类, 称为是一个同伦类. 同伦类的全体记作 $[X, Y]$.

定理 20.2

设 $f_1, g_1 : X \to Y$ 是同伦的, 且 $f_2, g_2 : Y \to Z$ 是同伦的. 则复合映射 $f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1 : X \to Z$ 也是同伦的.

Proof

设 $H_1 : f_1 \simeq g_1$, $H_2 : f_2 \simeq g_2$. 则 $f_2 \circ H_1 : X \times I \to Z$ 是 $f_2 \circ f_1$ 到 $f_2 \circ g_1$ 的同伦. 接下来, 定义 $H : X \times I \to Z$, $H(x, t) = H_2(g_1(x), t)$. 则 H 是连续映射, 且 $H(x, 0) = H_2(g_1(x), 0) = f_2 \circ g_1(x)$, $H(x, 1) = H_2(g_1(x), 1) = g_2 \circ g_1(x)$. 现在 $f_2 \circ f_1 \simeq f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$, 因此 $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.

□

20.2 同伦型和可缩空间

对于常值映射 $f: X \to Y, f \equiv y_0$, 记它为 C_{y_0}.

定义 20.3 (可缩)

称拓扑空间 X 是可缩的, 若单位映射 $I_X: X \to X$ 同伦于某个常值映射 $C_x: X \to X$. 称 I_X 到 C_x 的同伦为空间到点 $x \in X$ 的一个收缩. ♣

Example 20.3 $\mathbb{R}^n$ 上的凸集 S 可以收缩到任意点 $x_0 \in S$.

定义 20.4 (星形集)

称 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X 是星形的, 若存在 $x_0 \in X$, 使得任意点到 x_0 的线段都落在 X 上. ♣

定义 20.5 (同伦等价, 同伦型)

设 $f: X \to Y$ 是连续映射. 称 f 是一个同伦等价, 若存在连续映射 $g: Y \to X$, 使得 $g \circ f$ 同伦于 X 上的单位映射 Id_X, 且 $f \circ g$ 同伦于 Y 上的单位映射 Id_Y.
称两个拓扑空间 X, Y 是同伦等价的或有相同的同伦型, 若存在其中一个空间到另一个空间的同伦等价. ♣

Remark

1. 同胚的空间有相同的同伦型, 在下面的例子中可以看到, 有相同同伦型的空间不一定同胚.

Example 20.4 考虑单位 (开或闭) 圆盘 $\mathbb{D}^2$, 以及 $x_0 \in \mathbb{D}$. 令 $i: P = \{x_0\} \to \mathbb{D}^2$ 是含入映射, $C_{x_0}: \mathbb{D}^2 \to P$ 是常值映射. 则 $C_{x_0} \circ i = \mathrm{Id}_P$. 另一方面, 考虑映射 $H: \mathbb{D}^2 \times I \to \mathbb{D}^2$,

$$H(x,t) = (1-t)x + tx_0$$

是 $\mathrm{Id}_{\mathbb{D}^2}$ 到 $i \circ C_{x_0}$ 的同伦. 因此 $\mathbb{D}^2$ 与点空间 P 有相同的同伦型, 而它们显然是不同胚的.

Remark

1. 也可以看到紧致性并非同伦不变的.
2. 类似地, 很多拓扑不变量都不是同伦不变的, 可见同伦分类是一种比较弱的分类.

接下来给出一些同伦不变量, 那么它们显然也是拓扑不变的. 一但我们发现两个拓扑空间的某个同伦不变量是不同的, 则它们是不同伦的, 进而不是同胚的, 这给出判断两

个空间不同胚的方式.

定理 20.3

一个拓扑空间 X 是可缩的, 当且仅当 X 与一个点空间 $P=\{p\}$ 具有相同的同伦型.

Proof

设拓扑空间 X 是可缩的, 设 $H: X\times I\to X$ 是 Id_X 到常值映射 $C_{x_0}: X\to X$ 的同伦. 定义 $i: P\to X$,$i(p)=x_0$,$C: X\to P$, $C(x)=p$. 则 $i\circ C=C_{x_0}\simeq \mathrm{Id}_X$, $C\circ i=\mathrm{Id}_P$. 因此 X 和 P 有相同的同伦型.

反之, 若设 X, P 有相同的同伦型, 则存在 $f: X\to P$, $g: P\to X$, 使得 $f\circ g=\mathrm{Id}_P$, $g\circ f\simeq \mathrm{Id}_X$. 设 $H: g\circ f\simeq \mathrm{Id}_X$. 设 $g(p)=x_0$, 又 $f(x)=p$, 故 $g\circ f\equiv x_0$ 是常值映射. 这表明 X 是可缩的.

□

命题 20.1

设 X 是可缩空间, 则 X 是道路连通的.

Proof

设 X 是可缩空间, $H: \mathrm{Id}_X\simeq C_{x_0}$.

任取 $x_1, x_2\in X$, 则 $f_{x_1}(t) := H(x_1, t)$ 和 $f_{x_2}(t) := H(x_2, t)$ 是连续映射, 使得 $f_{x_1}(0)=x_1, f_{x_1}(1)=x_0, f_{x_2}(0)=x_2, f_{x_2}(1)=x_0$. 定义 $g(t)$

$$g(t) := \begin{cases} f_{x_1}(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ f_{x_2}(2-2t), & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

则 $g(t)$ 是连续映射, 使得 $g(0)=x_1$, $g(1)=x_2$, 这表明 X 是道路连通的.

□

命题 20.2

拓扑空间 X 是可缩的, 当且仅当任意拓扑空间 T 到 X 的任意映射 $f: T\to X$ 是同伦于常值映射的.

Remark

1. 习题给出 $f: X\to T$ 的情况也成立.

Proof

若 X 是可缩的, 存在 $x_0\in X$, 以及 $H: \mathrm{Id}_X\simeq C_{x_0}$. 任取拓扑空间 T 和映射 $f: T\to X$, 则由定理 20.2 , $f=\mathrm{Id}_X\circ f\simeq C_{x_0}\circ f$ 是常值映射.

反之, 若任取拓扑空间 X, 以及映射 $f: T \to X$, 都有 f 同伦于常值映射, 特别地取 $T = X$, $f = \mathrm{Id}_X$, 则 $\mathrm{Id}_X \simeq C_{x_0}$ 对某个 $x_0 \in X$ 成立, 故 X 是可缩的.

□

推论 20.1

设 X 是可缩空间, 则单位映射 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ 同伦于常值映射 $C_x : X \to X$ 对于任意的 $x \in X$ 成立. 特别地, X 可以收缩到 X 上的任意一点.

Proof

设 X 是可缩空间, 上面命题的证明表示, 若 $\mathrm{Id}_X \simeq C_{x_0} : X \to X$, 则任意映射 $f: T \to X$ 都可以同伦到一个恒为 x_0 的常值映射. 特别地取 $T = X$, $f = C_x : X \to X$, 则 $C_x \simeq C_{x_0} \simeq \mathrm{Id}_X$.

□

定义 20.6 (相对同伦)

令 $A \subseteq X$ 是任意子集,$f, gX \to Y$ 是两个连续映射. 称 f 是相对 A 同伦于 g 的, 若存在连续映射 $F: X \times I \to Y$, 使得

$$F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x), \forall x \in X$$

, 并且

$$F(a,t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$$

Remark

1. 如果令 $A = \varnothing$, 就得到了同伦的概念.
2. 特别地, 如果 f, g 相对于 A 同伦, 则在一开始时它们就在 A 上一致.
3. f 相对于 A 同伦于 g 是说, f 可以通过一族在 A 上保持相同的连续映射变动到 g.
4. 不难证明相对于 A 同伦是 $C(X, Y)$ 上的一个等价关系.

定理 20.4

若 X 是相对于 $\{a\}$ 可缩到点 $a \in X$ 的空间. 则对于 a 在 X 中的任意邻域 U, 存在 a 含于 U 的一个邻域 V, 使得 V 上的任意一点都可以通过一个落在 U 上的道路连接到 a, 即 X 是半-局部道路连通的.

Idea

1. 要求收缩是相对于 $\{a\}$ 的, 保证了对于任意的 $t \in I$, 都有 $F(a,t) \in U$, 从而可以找到 a, t 的邻域使得像含于 U.

Proof

若 X 满足条件, 则存在连续映射 $F: X\times I\to X$, 使得 $F(x,1)=a,\forall x\in X$, 且 $F(a,t)=a,\forall t\in I$.

由 F 连续性, 对于任意的 $t\in I$, 存在 a,t 的开邻域 $V_t(a)$ 和 $W(t)$, 使得 $F(V_t(a)\times W(t))\subseteq U$.$\{W(t)\}_{t\in I}$ 构成 I 的一个开覆盖, 由 I 的紧性, 存在有限的子覆盖 $W(t_1),\cdots,W(t_n)$.

现在令 $V(a):=\bigcap_i V_{t_i}(a)$ 是 a 的一个开邻域, 则 $F\left(V(a)\times\bigcup_i W(t_i)\right)=F(V(a)\times I)\subseteq U$. 任取 $i=1,\cdots,n$ 和 $x\in V_{t_i}(a)$, 由于 $F(x,1)=a$,$F(x,0)=x$, 因此 $t\mapsto F(x,t),t\in I$ 使得落在 U 的连接 x 和 a 的道路. □

Example 20.5 (Comb Space) 考虑以下集合 C , 它由从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 的水平线段和所有 $\left(\frac{1}{n},0\right)$ 到 $\left(\frac{1}{n},1\right)$ 的垂直线段组成, 其中 $n=1,2,\cdots$.

1. C 是可缩的 . 投影映射 $p: C\to L$ 是同伦等价, 其中 L 是水平线, 事实上, $i: L\to C$ 是含入映射, 则 $p\circ i=\mathrm{Id}_L$. 另一方面, 定义 $F: C\times I\to C$,
$$F((x,y),t):=(x,(1-t)y)$$
, 则 $F:\mathrm{Id}_L\simeq i\circ p$. 而 L 同胚由单位开区间是可缩的, 又 C 于 L 有相同的同伦型, 因此 C 是可缩的.
2. C 不是相对于 $\{(0,1)\}$ 可缩的. 取 $(0,1)$ 的半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆盘邻域 D , 则任意含于 D 的邻域上, 都有无穷多个连通分支, 由上面的定理可知, C 不是相对于 $\{(0,1)\}$ 可缩的.

定义 20.7

令 $A\subseteq X$. 称 A 是 X 的一个收缩, 若存在连续映射 $r: X\to A$, 使得 $r(a)=a,\forall a\in A$. 此时称映射 r 为收缩映射. ♣

Remark

1. A 是 X 的一个收缩, 当且仅当含入映射 $i: A\to X$ 有连续的左逆.
2. 易见此时 A 的子空间也是 X 的一个收缩.
3. 任意拓扑空间 X 上的每个点 $x_0\in X$ 都是 X 的一个收缩, 收缩映射为 C_{x_0}.
4. 当 A 是 X 的收缩时, 若 X 连通, 则 A 亦然.

定义 20.8

称拓扑空间 X 是可以形变到子空间 $A\subseteq X$ 的, 若存在含入映射 $i: A\to X$ 的同伦右逆 $f: X\to A$, 即单位映射 Id_X 同伦于 $i\circ f: X\to X$. ♣

Remark

1. 也就是说, 存在同伦 $D: X \times I \to X$, 使得

$$D(x,0) = x, D(x,1) = i(f(x)) = f(x)$$

2. 称这样的同伦 D 为 X 到 A 的一个形变.
3. 直观地讲, 存在一个连续的形变 D, 将 X 上每一个点连续变形到 A 中的点.
4. 特别地, 取 $A = \{a\}, a \in X$, 就得到可缩的概念.

定义 20.9

称拓扑空间 X 是可以**强形变到**子空间 A 的, 若含入映射 $i: A \to X$ 有相对于 A 的连续同伦右逆, 即单位映射 $I_X: X \to X$ 相对于 A 同伦于 $i \circ f: X \to X$ ♣

Remark

1. 设 D 是 Id_X 相对于 A 到 $i \circ f$ 的同伦. 则 $D(a,1) = f(a) = a, \forall a \in A$. 此时 $f: X \to A$ 自动是 X 到 A 的一个收缩. 即, 强形变的终映射是一个收缩.
2. 形变的终映射是收缩不一定导出形变是强形变.

定义 20.10

称拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的一个**形变收缩**, 若 X 可以形变到 A, 且形变的终映射是 X 到 A 的一个收缩. ♣

Remark

1. 形变收缩较强形变来说弱一点, 强形变是说让 X 上的点都能跑到 A 里面, 且一直保持 A 中的点不动, 形变收缩是指 A 中的点中间可以来回跑, 但是最后要回到自己的位置上.

为了做强调, 不妨也语意冗余地给出一个定义[1]

定义 20.11

设 X 是拓扑空间, A 是 X 的一个子空间. 称 A 是 X 的一个**强形变收缩**, 若 X 可以强形变到 A, 且形变的终映射是 X 到 A 的一个收缩. ♣

Remark

1. 此时, 含入映射 $i: A \to X$ 有双边的同伦逆, 进而是同伦等价.

Example 20.6 对于 $n \geq 1, \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\} = X$ 是 X 的一个强形变收缩.

Proof

[1] 即便强形变的终映射已经是一个收缩了

定义

$$D(x,t)=(1-t)\,x+t\frac{x}{\|x\|}$$

则 $D:[\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}]\times I\to[\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}]$ 是连续映射. 始映射为 Id_X, 终映射为 $x\mapsto\frac{x}{\|x\|}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}$ 到 $\mathbb{S}^n$ 的一个收缩.

□

20.3 基本群及其性质

定义 20.12 (道路的等价)

设 X 是拓扑空间, α,β 是 X 上的两条有相同端点的道路, 即 $\alpha(0)=\beta(0)=x_0,\alpha(1)=\beta(1)=x_1$. 称 α 和 β 是等价的, 记作 $\alpha\sim_{(x_0,x_1)}\beta$, 若存在他们之间的保端点的同伦, 即存在相对于 α 和 β 之间相对于 $\{0,1\}\subseteq I$ 的同伦. ♣

Remark

1. 通常称这样的一个同伦为道路同伦.

定理 20.5

设 X 是拓扑空间,$x_0,x_1\in X$. 则道路的等价确实给出全体以 x_0 为起点, x_1 为终点的道路的一个等价关系. ♡

Proof

令 $\alpha:I\to X$ 是道路, 使得 $\alpha(0)=x_0$, $\alpha(1)=x_1$. 定义 $H(s,t):=\alpha(s)$, 则 H 是 α 到自身的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 说明了自反性.

接下来, 设 G 是 α 到 β 的道路同伦. 定义 $H(s,t)=G(s,1-t)$. 则 H 是 β 到 α 的道路同伦, 这就说明了传递性.

最后, 设 H 是 α 到 β 的道路同伦, G 是 β 到 γ 的道路同伦, 定义 $K:I\times I\to X$,

$$K=\begin{cases}H(s,2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ G(s,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

则 G 是 α 到 γ 的道路同伦, 这就说明了传递性.

□

推论 20.2

道路的等价也给出 X 上所有以 $x_0 \in X$ 为基点的循环中的一个等价关系.

Remark

1. 以下记以 x_0 为基点的循环 α 和 β 等价, 为 $\alpha \sim_{x_0} \beta$.
2. 记 α 所在的循环的道路等价类为 $[\alpha]$, 也称作循环 α 的同伦类.
3. 令 $\pi_1(X, x_0)$ 表示 X 上以 x_0 为基点的循环的同伦类的全体. 即

$$\pi(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha\text{是}X\text{上以}x_0\text{为基点的循环}\}$$

命题 20.3

设 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 是 X 上以 x_0 为基点的循环, 并且 $\alpha \sim_{x_0} \alpha', \beta \sim_{x_0} \beta'$, 则 $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$

Proof

设 H_1, H_2 分别是 α 到 α' 和 β 到 β' 的同伦.

定义 $H : I \times I \to X$,

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s, t), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1, t), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

则 $H(s,0) = (\alpha * \beta)(s)$, $H(s,1) = (\alpha' * \beta')(s)$, 并且 $H(0,t) = x_0 = H(1,t)$. 因此 $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$

□

推论 20.3

设 α 和 α' 是 x_0 到 x_1 的同伦的道路, β 和 β' 是 x_1 到 x_2 的同伦的道路, 则 $\alpha * \beta$ 和 $\alpha' * \beta'$ 是从 x_0 到 x_2 的同伦的道路, 并且同伦可以被选取为使得 x_1 不变的.

Proof

仿照上个命题即可.

□

定义 20.13

若 α 是从 x_0 到 x_1 的道路, 则 $[\alpha]$ 通常表示为 α 所在的 x_0 到 x_1 的道路同伦类. 拓扑空间 X 上从 x_0 到 x_1 的全体道路同伦类记作 $\pi_1(X, x_0, x_1)$.

定义 20.14 (乘法运算)

定义 $\pi_1(X, x_0, x_1)$ 上的运算

$$\circ : \pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi(X, x_1, x_2) \to \pi_1(X, x_0, x_2)$$

按以下方式

$$[\alpha] \circ [\beta] := [\alpha * \beta]$$

♣

Remark

1. 上面的推论给出了良定义性.

定理 20.6

$\pi_1(X, x_0)$ 在运算 "$\circ$" 构成群.

♡

Remark 以下证明都可以稍作改变, 给出在非循环的道路中对应性质的证明:

1. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, β 是 x_1 到 x_2 的道路, γ 是 x_2 到 x_3 的道路, 则

$$([\alpha] \circ [\beta]) \circ [\gamma] = [\alpha] \circ ([\beta] \circ [\gamma])$$

2. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, 那么
   (a). $[C_{x_0}] \circ [\alpha] = [C_{x_0} * \alpha] = [\alpha]$
   (b). $[\alpha] \circ [C_{x_1}] = [\alpha * C_{x_1}] = [\alpha]$
3. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, 那么
   (a). $[\alpha] \circ [\alpha^{-1}] = [C_{x_0}]$
   (b). $[\alpha^{-1}] \circ [\alpha] = [C_{x_1}]$

Proof

结合律: 只需要说明 $(\alpha * \beta) * \gamma \sim_{x_0} \alpha * (\beta * \gamma)$ 为此, 定义 $H : X \times I \to X$,

$$H(x,t) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right), & s \in [0, \frac{1}{4}(1+t)] \\ \beta(4s-1-t), & s \in [\frac{1}{4}(1+t), \frac{1}{4}(2+t)] \\ \gamma\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right), & s \in [\frac{1}{4}(2+t), 1] \end{cases}$$

即可.

Idea

想法是随 t 的变换改变道路的比例, 因此分别改变 α, β, γ 的取值范围.

先分别确定各道路在 I_s 上分配到的两端点随时间的变化, 再依变化调整道路括号内的数, 对于后者可以通过线性函数 $f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 取 $f(b) = 1$, $f(a) = 0$,a, b 分别是道路在 I_s 上的两端点来构造, 例如对 α 就可以确定最后的一个分段为 $\alpha \circ f$.

接下来说明单位元的存在性: 我们说明 C_{x_0} 所在的等价类 $[C_{x_0}]$ 是单位元. 为此, 只

需要说明 $\alpha * C_{x_0} \sim_{x_0} \alpha$ 以及 $C_{x_0} * \alpha \sim_{x_0} \alpha$.

对于前者，定义 $H : X \times I \to X$

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right), & s \in [0, \frac{1}{2}(t+1)] \\ x_0, & s \in [\frac{1}{2}(t+1), 1] \end{cases}$$

后者是类似的.

最后说明 $\pi_1(X, x_0)$ **中任意元素皆可逆**：对于 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，定义 $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$，只需说明 $[\alpha']$ 与 α 的选取无关，并且 $[\alpha']$ 是 $[\alpha]$ 的逆. 对于第一个断言，设 $\beta \sim_{x_0} \alpha$，H 是对应的道路同伦. 定义 H'

$$H'(x,t) := H(1-s,t)$$

则显然 H' 是 β' 到 α' 的同伦，这就说明了 $[\alpha'] = [\beta']$，第一个断言成立. 接下来说明

$$[\alpha'] \circ [\alpha] = [C_{x_0}] = [\alpha] \circ [\alpha']$$

只说明后一个等式，前一个是类似的. 我们定义

$$H(s,t) := \begin{cases} x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}t] \\ \alpha(2s-t), & s \in [\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2-2s-t), & s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2-t)] \\ x_0, & s \in [\frac{1}{2}(2-t), 1] \end{cases}$$

Idea

几何上，相当于让沿 α 的运动随时间越来越提前折返.

□

定义 20.15

令 X 是拓扑空间，$x_0 \in X$. 称群 $\pi_1(X, x_0)$ 为 X 的以 x_0 为基点的 **基本群**或 **Pincare´ 群** ♣

定理 20.7

设 X 是道路连通空间，x_0, x_1 是 X 上任意两点. 那么 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 是同构的. 事实上，任意从 x_0 到 x_1 的道路都给出 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(X, x_1)$ 的一个同构. ♡

Remark 据此，对于道路连通的 X，可以将 $\pi_1(X, x)$ 简记作 $\pi_1(X)$，称其为 X 的基本群.

Proof

设 ω 是从 x_0 到 x_1 的道路, 则它有逆道路 $\omega^{-1}(t)=\omega(1-t)$. 定义

$$P_\omega:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$$
$$P_\omega[\alpha]=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]$$

首先需要说明映射是良定义的. 设 $\alpha\sim_{x_0}\beta$, 则 $\omega^{-1}*\alpha*\omega\sim_{x_0}\omega^{-1}*\beta*\omega$, 这就说明了良定义. 接下来说明 P_ω 是群同态, 计算

$$\begin{aligned}P_\omega([\alpha]\circ[\beta])&=P_\omega[\alpha*\beta]\\&=[\omega^{-1}*\alpha*\beta*\omega]\\&=[\omega^{-1}*\alpha]\circ[\beta*\omega]\\&=[\omega^{-1}*\alpha*C_{x_0}]\circ[\beta*\omega]\\&=[\omega^{-1}*\alpha*\omega*\omega^{-1}]\circ[\beta*\omega]\\&=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]\circ[\omega^{-1}*\beta*\omega]\\&=P_\omega[\alpha]\circ P_\omega[\beta]\end{aligned}$$

这就说明了同态性. 最后, 以 ω^{-1} 代 ω, 不难得到 P_ω 有逆同态 $P_{\omega^{-1}}$. □

命题 20.4

设 X 是道路连通空间, $x_0,x_1\in X$, 则 $\pi_1(X,x_0)$ 是阿贝尔群, 当且仅当对于任意一对从 x_0 到 x_1 的道路 ω,ω', 都有 $P_\omega=P_{\omega'}$. ♠

Idea

即道路连通空间的基本群交换, 当且仅当给定道路的共轭作用是唯一的.

Proof

设 $\pi_1(X,x_0)$ 是阿贝尔群.$\omega*(\omega')^{-1}$ 和 $\omega'*\omega^{-1}$ 是以 x_0 为基点的循环, 则对于任意的 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$, 交换性给出

$$[\alpha]\circ[\omega*(\omega')^{-1}]=[\omega*(\omega')^{-1}]\circ[\alpha]$$

两边分别依次左作用 $[\omega^{-1}]$ 再右作用 $[\omega']$, 得到

$$[\omega^{-1}*\alpha*\omega]=[(\omega')^{-1}*\alpha*\omega']$$

即 $P_\omega[\alpha]=P_{\omega'}[\alpha]$.

反之, 设 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 中的元素,ω 是 x_0 到 x_1 的道路. 则 $\beta*\omega$ 是 x_0 到 x_1 的道路. 由条件

$$[(\beta*\omega)^{-1}*\alpha*(\beta*\omega)]=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]$$

由于 P_ω 是同构，得到

$$[\beta * \alpha * \beta^{-1}] = [\alpha]$$

此即

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\beta] \circ [\alpha]$$

□

定理 20.8 (连续映射诱导的基本群同态)

每个带基点的拓扑空间间的连续映射 $f : (X, x) \to (Y, y)$ 都诱导出一个群同态 $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$

Proof

设 α 是 X 上以 x 为基点的一个循环，则 $f \circ \alpha$ 是 Y 上以 y 为基点的一个循环. 并且若 $\alpha \sim_x \beta$，则 $f \circ \alpha \sim_y f \circ \beta$. 据此可以定义映射 $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$

$$f_\sharp[\alpha] = [f \circ \alpha]$$

此外，不难看出

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$$

因此

$$f_\sharp([\alpha] \circ [\beta]) = (f_\sharp[\alpha]) \circ (f_\sharp[\beta])$$

因此 $f_\sharp$ 是群同态.

□

定理 20.9 ($\sharp$ 的函子性)

1. 若 $f : X \to X$ 是单位映射，则对于任意的 $x \in X$，$f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ 也是单位映射.
2. 若 $f : (X, x) \to (Y, y)$ 和 $g : (Y, y) \to (Z, z)$ 是两个带基点空间之间的连续映射，则

$$(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$$

Proof

1. 若 f 是单位映射，则对于任意的 $x \in X$，以及以 x 为基点的循环 α，我们都有 $f \circ \alpha = \alpha$，因此 $f_\sharp[\alpha] = [\alpha]$，即 $f_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$.

2. 若 f, g 如题, 任取 α 是以 x 为基点的循环, 我们有

$$\begin{aligned}(g\circ f)_\sharp[\alpha] &= [(g\circ f)\circ\alpha] \\ &= [g\circ(f\circ\alpha)] \\ &= g_\sharp[f\circ\alpha] \\ &= g_\sharp\left(f_\sharp[\alpha]\right) \\ &= \left(g_\sharp\circ f_\sharp\right)[\alpha]\end{aligned}$$

因此 $(g\circ f)_\sharp = g_\sharp\circ f_\sharp$

$\square$

定理 20.10

若 X 和 Y 是同胚的道路连通空间, 则它们的基本群是同构的.

Remark 即基本群是道路连通空间的拓扑不变量.

Proof

若 X, Y 是同胚的, 则存在连续映射 $f: X\to Y$, 它有连续的逆映射 $f^{-1}: Y\to X$, 使得

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_X,\quad f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$$

由 $\sharp$ 的函子性, 我们有

$$\left(f^{-1}\right)_\sharp\circ f_\sharp = \left(f^{-1}\circ f\right)_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$$

以及

$$f_\sharp\circ\left(f^{-1}\right)_\sharp = \left(f\circ f^{-1}\right)_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y)}$$

其中 $y = f(x)$. 而 $f_\sharp$ 和 $\left(f^{-1}\right)_\sharp$ 都是群同态, 因此 $\pi_1(X,x)$ 同构于 $\pi_1(Y,y)$

$\square$

推论 20.4

令 $A\subseteq X$. 设 $r: X\to A$ 是一个收缩, $i: A\to X$ 是含入映射. 则对于每个 $a\in A$, $r_\sharp: \pi_1(X,a)\to\pi_1(A,a)$ 是满射, 且 $i_\sharp: \pi_1(A,a)\to\pi_1(X,a)$ 是单射.

Proof

对于每个 $a\in A$, 复合映射 $(A,a)\xrightarrow{i}(X,a)\xrightarrow{r}(A,a)$ 是单位映射. 由 $\sharp$ 的函子性, $\pi_1(A,a)\xrightarrow{i_\sharp}\pi_1(X,a)\xrightarrow{r_\sharp}\pi_1(A,a)$ 是单位映射, 由此易见 $i_\sharp$ 单而 $r_\sharp$ 满.

$\square$

定理 20.11

若 $f,g:(X,x)\to(Y,y)$ 是相对于 $\{x\}$ 同伦的，则

$$f_\sharp = g_\sharp : \pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,y)$$

Proof

任取以 x 为基点的循环. 由于 f 相对于 $\{x\}$ 同伦于 g，不难得到 $f\circ\alpha\sim_y g\circ\alpha$，即 $f_\sharp[\alpha]=g_\sharp[\alpha]$

□

定理 20.12

若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是相对意义下的同伦等价，则 $f_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是群同构.

Idea

对于相对于点的同伦，可以直接视作带基点的空间上的同伦.

Proof

存在 g，使得 $f\circ g\sim \mathrm{Id}_{(Y,y_0)}$，$g\circ f\sim \mathrm{Id}_{(X,x_0)}$. 应用上面的定理，得到

$$f_\sharp\circ g_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)},\quad g_\sharp\circ f_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y_0)}$$

给出了群同构. □

推论 20.5

若 A 是 X 的一个强形变收缩，则对于每个 $a\in A$,$\pi_1(A,a)$ 同构于 $\pi_1(X,a)$.

Remark 若 X 的子空间 A 是单点集 $A=\{a\}$，且 A 是 X 的一个强形变收缩，则 $\pi_1(X,a)\simeq\pi_1(\{a\},a)$. 通常记作 $\pi_1(a)$. 此外，此时 X 可缩到 $\{a\}$ 故而道路连通，我们有 $\pi_1(X)\sim\pi_1(P)=\{e\}$，其中 P 是点空间.

Proof

强形变收缩意味着终映射 $f:X\to A$，满足 $f\circ i=\mathrm{Id}_A$，并且 $i\circ f\sim\mathrm{Id}_X,\mathrm{rel}\ A$，特别地，对于任意的 $a\in A$，$f:(X,a)\to(A,a)$ 是相对意义下的同伦等价，由上面的定理，$f_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是群同构. □

定理 20.13

设 F 是 $f,g:X\to Y$ 间的同伦. 令 $x_0\in X$，$\sigma:I\to Y$ 是通过 $\sigma(t):=F(x_0,t)$ 定

义的 $f(x_0)$ 到 $g(x_0)$ 的道路, 则下图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[dr, "g_\sharp"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "P_\sigma"] \\
& \pi_1(Y,g(x_0))
\end{tikzcd}$$

Remark

1. 当 $f(x_0)=g(x_0)$ 时, P_σ 无非是内自同构.
2. 当 F 是相对于 x_0 时, $\sigma=C_{f(x_0)}$, 进而 $f_\sharp=g_\sharp$, 定理退化成定理20.11的情况.

Proof

任取 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$, 只需证明 $P_\sigma\circ f_\sharp[\alpha]=g_\sharp[\alpha]$, 即证明

$$[\sigma^{-1}*(f\circ\alpha)*\sigma]=[g\circ\alpha]$$

先来封装如何将 $f\circ\alpha$ 变做 $g\circ\alpha$, 定义 $G:I\times I\to Y$, $G(x,t)=F(\alpha(x),t)$. G 是 $f\circ\alpha$ 到 $g\circ\alpha$ 的连续变化, 且基点的变化与 σ 重合, 我们要做的是对每个不同的时间 t, 都让 $f\circ\alpha$ 连续变化了 t 时间的状态下, 拼接 σ 上的一段, 构成一个循环. 接下来构造 $H:I\times I\to X$ 将 $\sigma^{-1}*(f\circ\alpha)*\sigma$ 同伦到 $g\circ\alpha$.

$$H(s,t)=\begin{cases}\sigma^{-1}(2s), & s\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t]\\ G\left(\frac{4s+2t-2}{3t+1},t\right), & s\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t]\\ \sigma(4s-3), & s\in[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t,1]\end{cases}$$

这样就给出了所需的同伦.

□

推论 20.6

若 $f:X\to Y$ 同伦于常值映射 $C:X\to Y$, 则诱导同态 $f_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 是零映射.

Proof

$C_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,C(x_0))$ 是平凡同态. 由上面的交换图,

$$P_\sigma\circ f_\sharp=C_\sharp$$

两边左作用 $P_{\sigma^{-1}}$, 得到

$$f_\sharp=P_{\sigma^{-1}}\circ C_\sharp$$

是零映射.

□

推论 20.7

设 X 是可缩空间. 则对于任意的 $x_0 \in X$, 每个以 x_0 为基点的循环 α 都等价于 C_{x_0}, 即 $\pi_1(X, x_0) = 0$

Proof

由于 X 是可缩的, Id_X 通过一个同伦 F 同伦到常值映射 C_{x_0} . 因此, 若 σ 下述定义的 x_0 处的循环

$$\sigma(t) = F(x_0, t)$$

我们有

$$P_\sigma \circ \left(\mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)}\right) = C_{[C_{x_0}]}$$

为零映射, 两边左乘 $P_{\sigma^{-1}}$, 得到

$$\mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)} = C_{[\sigma * C_{x_0} * \sigma^{-1}]} = C_{[C_{x_0}]}$$

断言成立. □

定理 20.14

设 X, Y 是有着相同同伦型的道路连通空间, 则它们的基本群同构.

Proof 首先, 道路连通空间的基本群与基点的选取无关, 于是可以任意选取 X 上一点 x_0, 讨论 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(Y, f(x_0))$. 若条件成立, 存在 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, 以及同伦 F, G 使得

$$F: f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y, \quad G: g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$$

设 σ 是通过 $\sigma(t) := F(x_0, t)$ 给出的 x_0 到 $g \circ f(x_0)$ 的道路, 则由交换图

$$(g \circ f)_\sharp = P_\sigma \circ \mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

因此 $g_\sharp \circ f_\sharp = P_\sigma$. 又 P_σ 是一个同构, 因此 $f_\sharp$ 单而 $g_\sharp$ 满. 对 G 类似的讨论可以得到 $f_\sharp$ 满而 $g_\sharp$ 单, 这样就得到了 $f_\sharp, g_\sharp$ 是双射.

□

推论 20.8

设 X, Y 是两个道路连通空间, $f: X \to Y$ 是一个同伦等价, 则 $f_\sharp: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 是一个同构.

20.4 单连通空间

定义 20.16

称 X 是单连通的, 若 X 是道路连通的, 并且 $\pi_1(X) = 0$.

命题 20.5

道路连通空间 X 是单连通的, 当且仅当 X 上任意两条有相同端点的道路是道路同伦的.

Proof

充分性是显然的, 以下说明必要性. 任取 X 上从 x_0 到 x_1 的两条道路 α 和 β, 则 $\alpha * \beta^{-1}$ 是以 x_0 为基点的循环. 由于 X 是单连通的, 我们有

$$[\alpha * \beta^{-1}] = [C_{x_0}]$$

两边右作用 $[\beta]$, 得到

$$[\alpha] = [\alpha * \beta^{-1} * \beta] = [\alpha * \beta^{-1}] \circ [\beta] = [C_{x_0}] \circ [\beta] = [\beta]$$

□

定理 20.15

令 $\{V_i : i \in \Lambda\}$ 是 X 的一个开覆盖, 其中每个 V_i 都是单连通的. 则 X 是单连通的, 若以下两条成立:

1. $\bigcap V_i \neq \varnothing$;
2. 对于每个 $i \neq j$, $V_i \cap V_j$ 是道路连通的.

Proof

由于每个 V_i 都是道路连通的, 并且它们的交非空, 因此 X 是道路连通的. 只需要证明 $\pi_1(X, x) = 0$ 对某个 $x \in X$ 成立.

取一点 $x_0 \in \bigcup V_i$, 并取 X 上以 x_0 为基点的循环 α. 则 $\{\alpha^{-1}(V_i)\}$ 构成 I 的一个开覆盖. 由于 I 是紧集, 覆盖存在一个 Lebesgue 数 ε, 使得参数小于 ε 的覆盖

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

使得对于任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, 存在 j, 使得 $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \alpha^{-1}(V_j)$ 成立. 通过重新编号不妨设 $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \alpha^{-1}(V_k), k = 1, \cdots, n$. 定义道路

$$\alpha_k(s) := \alpha((1-s)t_{k-1} + st_k)$$

则 α_k 是 V_k 上的道路. 并且

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n]$$

由道路连通性, 对于每个 $k = 1, \cdots, n-1$, 存在 $V_k \cap V_{k+1}$ 上的 x_0 到 $\alpha(t_k)$ 的道路 ρ_k, 且注意到 $\alpha(t_n) = \alpha(t_0) = x_0$. 于是

$$\begin{aligned}[\alpha] &= [\alpha_1 * \rho_1^{-1} * \rho_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_{n-1} * \rho_{n-1}^{-1} * \rho_{n-1} * \alpha_n] \\ &= [\alpha_1 * \rho_1^{-1}] \circ [\rho_1 * \alpha_2 * \rho_2^{-1}] \circ \cdots \circ [\rho_{n-2} * \alpha_{n-1} * \rho_{n-1}^{-1}] \circ [\rho_{n-1} * \alpha_n]\end{aligned}$$

注意到 $\rho_{k-1} * \alpha_k * \rho_k^{-1}$ 是 V_k 上的以 x_0 为基点的循环, 而 $\pi_1(V_k, x_0) = 0$, 因此 $[\rho_{k-1} * \alpha_k * \rho_k^{-1}] = [C_{x_0}]$,$k = 2, \cdots, n-1$. 此外 $\alpha_1 * \rho_1^{-1}$ 和 $\rho_{n-1} * \alpha_n$ 分别是 V_1 和 V_n 上以 x_0 为基点的循环, 二者皆为 $[C_{x_0}]$. 综上, 我们有 $[\alpha] = [C_{x_0}]$. 这就表明 $\pi_1(X, x_0) = 0$, 进而 $\pi_1(X) = 0$. □

推论 20.9

设 X 是一些道路连通开集 A_α 的并, 且每个 A_α 都包含了基点 $x_0 \in X$. 若每个交集 $A_\alpha \cap A_\beta$ 都是道路连通的, 则每个 X 上以 x_0 为基点的循环都同伦于若干循环的连接, 其中每个循环都落在某一个 A_α 中. ♡

Proof —上面的证明实际上就是再说这件事情.

□

Example 20.7 标准 n 球面 $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ 是单连通的. 考虑分别挖掉北极点和南极点的两片开集 U,V. 它们分别可缩到南极点和北极点, 进而是单连通的. 并且 $U \cap V$ 作为 $\mathbb{S}^n$ 挖掉两个点[2], 仍然是道路连通的（即使挖掉可数多个点也是）.

20.5 基本群的计算

Example 20.8 令 $\mathbb{D}^n\ (n \geq 1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的单位闭圆盘. 由于 $\mathbb{D}^n$ 是道路连通的, 我们可以在任何点上计算它的基本群, 方便起见, 考虑原点的基本群. 定义 $H : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$

$$H(x, t) := (1-t) X$$

则 $\mathbb{D}^n$ 收缩到原点, 因此 $\pi_1(\mathbb{D}^n) \simeq \pi_1(\{0\}) = 0$

Remark 凸集、星形集等可缩集的基本群都是平凡的.

[2] 同胚于 $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$

定理 20.16

令 X, Y 是分别带基点 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$ 的拓扑空间，则

$$\pi_1 (X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1 (X, x_0) \times \pi_1 (Y, y_0)$$

Remark 令 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族拓扑空间，则对于每个 $\alpha \in \Lambda$，令 $x_\alpha \in X_\alpha$ 是基点. 则以下证明容易推广出

$$\pi_1 \left(\prod X_\alpha, (x_\alpha) \right) \simeq \prod \pi_1 (X_\alpha, x_\alpha)$$

Proof

设 p_1, p_2 是标准投影，显然可看做带基点拓扑空间的投影. 分别诱导出同态

$$p_{1\sharp} : \pi_1 (X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1 (X, x_0),$$

以及

$$p_{2\sharp} : \pi_1 (X \times Y, (x_0, y_0) \to \pi_1 (Y, y_0))$$

定义

$$\rho : \pi_1 (X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi (X, x_0) \times \pi_1 (Y, y_0)$$
$$[\alpha] \mapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha])$$

反过来，我们定义

$$\eta : \pi_1 (X, x_0) \times \pi_1 (Y, y_0) \to \pi_1 (X \times Y, (x_0, y_0))$$
$$[\alpha] \times [\beta] \mapsto [\alpha \times \beta]$$

之前没有处理过良定义性相关的命题，这里需要说明定义是良定义的. 设 $F_1 : \alpha_1 \sim_{x_0} \alpha_2, F_2 : \beta_1 \sim_{y_0} \beta_2$. 定义 $F : I \times I \to X \times Y$

$$F (s, t) = (F_1 (s, t), F_2 (s, t))$$

则 $F (s, 0) = (\alpha_1 (s), \beta_1 (s)), F (s, 1) = (\alpha_2 (s), \beta_2 (s))$，并且 $F (0, t) = F (1, t) = (x_0, y_0)$. 这就说明了良定义性. 最后，容易看到 ρ 和 η 互为逆映射. $\square$

20.5.1 圆的基本群

定义 20.17

指数映射 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$，被定义为 $p(t)=e^{2\pi it}, t\in\mathbb{R}$，以下记 $p_0=(1,0)\in\mathbb{S}^1$.
映射 $p|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ 是开区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 到 $\mathbb{S}^1-\{e^{i\pi}\}$ 的同胚映射. 令 $\ln:\mathbb{S}^1-\{e^{i\pi}\}\to\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 是映射的逆.

♣

Remark

1. $p(t_1+t_2)=p(t_1)\cdot p(t_2), t_1,t_2\in\mathbb{R}$；
2. $p(t_1)=p(t_2)$ 当且仅当 t_1-t_2 是整数；
3. $p^{-1}(p_0)=\mathbb{Z}$.

定义 20.18

设 $f:X\to\mathbb{S}^1$ 是连续映射. 称连续映射 $f':X\to\mathbb{R}$ 为 f 的一个提升或覆叠，若下图交换

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

，即 $p\circ f'=f$.

♣

引理 20.1

设 X 是道路连通空间，并且 $f',f'':X\to\mathbb{R}$ 是连续映射，使得 $p\circ f'=p\circ f''$. 若 f',f'' 在一点 $x_0\in X$ 处相等，则 $f'=f''$.

♡

Proof

定义 $g:X\to\mathbb{R}$, $g:=f'-f''$. 因为 $p\circ f'=p\circ f''$，我们有对于每个 $x\in X$,

$$\begin{aligned} p\circ g(x) &= e^{2\pi ig(x)} \\ &= e^{2\pi i(f'(x)-f''(x))} \\ &= \frac{e^{2\pi if'(x)}}{e^{2\pi if''(x)}} \\ &= \frac{p\circ f'(x)}{p\circ f''(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这表明 $g(x)\in p^{-1}(1)=\mathbb{Z}, \forall x\in X$. 由于 X 连通，且 g 连续，$g(X)\subseteq\mathbb{Z}$ 只能是单点集.

但是 $g(x_0)=0$，因此 $g(x)=0, \forall x \in X$. 即 $f'(x)=f''(x)=0, \forall x \in X$.

$\square$

先来介绍两个结果

定理 20.17 (道路提升)

令 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 是指数映射, $\alpha: I\to\mathbb{S}^1$ 是任意满足 $\alpha(0)=p_0$ 的道路. 那么存在唯一的 α 的提升 α', 使得 $\alpha'(0)=0$.

定理 20.18 (同伦提升定理)

令 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 是指数映射. 设 $F: I\times I\to\mathbb{S}^1$ 是同伦, 使得 $F(0,0)=p_0$. 则存在唯一的 F 的提升 $F': I\times I\to\mathbb{R}$, 使得 $F'(0,0)=0$.

接下来证明一个更一般的命题, 上面两个定理是以下定理的推论.

定理 20.19

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个凸的紧集, $x_0\in X$. 任给连续映射 $f: X\to\mathbb{S}^1$ 以及任意 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得 $p(t_0)=f(x_0)$, 则存在唯一的连续映射 $f': X\to\mathbb{R}$, 使得 $f'(x_0)=t_0$ 并且 $p\circ f'=f$.

Idea

我们看到, 在局部上找到 f 在 p 下的逆映射是容易的, 但是整体上由于 $\mathbb{S}^1$ 上的像会叠在一块, 我们做不到这样的事情. 想法就是将 $f(x)$ 分解（怎样分解?）成若干可以取逆的函数. 利用 $\ln$ 的运算性质, 想到要将 $f(x)$ 分解成有限乘积, 提升就可以取成有限的 $\ln$ 和.

Proof

由于凸自动导出道路连通, 唯一性由上面的引理容易看出, 只需要说明存在性.

事实上可以不失一般性地假设 x_0 为 $\mathbb{R}^n$ 的原点, 为了看到这件事情, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平移变换 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, y\mapsto y-x_0$. 现在 $L(X)$ 是包含了 $\mathbb{R}^n$ 的原点. 若 $L(X)$ 上的提升存在, 任给连续映射 $f: X\to\mathbb{S}^1$, 定义 $k:=f\circ L^{-1}: L(X)\to\mathbb{S}^1$. 则 $k(0)=f(x_0)=p(t_0)$, 它存在同伦提升 $k': L(X)\to\mathbb{R}$, 使得 $p\circ k'=k$, 并且 $k'(0)=t_0$. 于是 $f':=k'\circ L: X\to\mathbb{S}^1$ 就是 f 满足条件的同伦提升.

因此, 我们不妨设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 包含原点的凸紧集. 由于 X 是紧集, 连续函数 f 在 X 上也是一致连续的. 存在 $\varepsilon>0$, 使得只要 $\|x\|<\varepsilon$, 就有 $|f(x)-f(x')|<2$. 取正整数 k,

使得 $\frac{\|x\|}{k} < \varepsilon$. 于是对于每个 $j = 0, 1, \cdots, n-1$

$$\left\| \frac{j}{k}x - \frac{j+1}{k}x \right\| < \varepsilon$$

进而

$$\left| f\left(\frac{j+1}{k}x\right) - f\left(\frac{j}{k}x\right) \right| < 2$$

令 $g_j(x) = f\left(\frac{j+1}{k}x\right) / f\left(\frac{j}{k}x\right)$, 则 $|g_j(x) - 1| < 2$, 从而 $g_j(x) \neq e^{i\pi}, \forall x \in X, 0 \leq j \leq k-1$. 现在,

$$f(x) = f(0) \cdot g_0(x) \cdot g_1(x) \cdot \cdots \cdot g_{k-1}(x)$$

取

$$f'(x) := t_0 + \ln g_0(x) + \ln g_1(x) + \cdots + \ln g_{k-1}(x)$$

则 f' 是 k 个连续函数之和, 从而是连续的. 并且 $f'(0) = t_0$, $p \circ f' = f$.

□

定义 20.19

令 $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上以 $p_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ 为基点的循环, 令 $\alpha' : I \to \mathbb{R}$ 是 α 的提升, 使得 $\alpha'(0) = 0$. 由于 $\alpha'(1) \in \mathbb{R}$ 在指数映射下的像为 $(1, 0)$, 其必为整数. 我们称整数 $\alpha'(1)$ 为循环 α 的 **次数**.

♣

定理 20.20

令 α, β 是 $\mathbb{S}^1$ 上等价的以 p_0 为基点的循环, 则

$$\deg\ \alpha = \deg\ \beta$$

♡

Proof 设 $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$ 是 $\alpha \sim_{x_0} \beta$ 的同伦. 则由同伦提升定理, 存在唯一的同伦提升 $F' : I \times I \to \mathbb{R}$, 使得 $F'(0, 0) = 0, p \circ F' = F$. 定义 $\alpha', \beta' : I \to \mathbb{R}$, $\alpha'(s) := F'(s, 0)$, $\beta'(s) := F'(s, 1)$, 则它们分别是 α 和 β 的唯一的提升, 使得 $\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$. 只需证明 $\alpha'(1) = \beta'(1)$, 它们都在线

$$\ell := \{(1, t) : t \in I\}$$

上. 注意到 F 映此线 ℓ 均为 p_0, 因此 F' 映线 ℓ 到 $\mathbb{Z}$ 的一个子集. F' 的连续性保证了线的像必须是道路连通的, 因此 F' 映线 ℓ 只能为单点集, 进而 $\alpha'(1) = \beta'(1)$.

□

这个定理说明我们可以定义一个次数的映射

定义 20.20

定义

$$\begin{aligned}\deg\ :\pi_1\left(\mathbb{S}^1,p_0\right)&\to\mathbb{Z}\\ [\alpha]&\mapsto\deg\ \alpha\end{aligned}$$

最后来说明主要的定理

定义 20.21

次数映射 $\deg\ :\pi_1\left(\mathbb{S}^1,p_0\right)\to\mathbb{Z}$ 是圆的基本群到 $(\mathbb{Z},+)$ 的群同构.

Proof

群同态: 令 $[\alpha],[\beta]$ 是 $\pi_1\left(\mathbb{S}^1,p_0\right)$ 的两个元素, $\alpha',\beta':I\to\mathbb{R}$ 是 α 和 β 以原点为起点的唯一的同伦提升. 我们先定义出 $\alpha*\beta$ 的同伦提升, 为此, 定义 $\omega:I\to\mathbb{R}$

$$\omega:=\begin{cases}\alpha'\left(2t\right), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ \alpha'\left(1\right)+\beta'\left(2t-1\right), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

那么显然

$$\begin{aligned}p\circ\omega\left(t\right)&=\begin{cases}p\circ\alpha'\left(t\right)\\ p\left(\alpha'\left(1\right)\right)\cdot\left(p\circ\beta'\right)\left(2t-1\right)\end{cases}\\ &=\begin{cases}\alpha\left(t\right)\\ \beta\left(2t-1\right)\end{cases}\\ &=\left(\alpha*\beta\right)\left(t\right)\end{aligned}$$

因此 ω 是 $\alpha*\beta$ 的以原点为起点的同伦提升, 我们有

$$\begin{aligned}\deg\ \left([\alpha]*[\beta]\right)&=\deg\ \left([\alpha*\beta]\right)\\ &=\omega\left(1\right)\\ &=\alpha'\left(1\right)+\beta'\left(1\right)\\ &=\deg\ \left([\alpha]\right)+\deg\ \left([\beta]\right)\end{aligned}$$

单射: 若 $\deg\,[\alpha]=\deg\,[\beta]$, 则 $\alpha'\left(1\right)=\beta'\left(1\right)$, 可以定义同伦 $H:I\times I\to\mathbb{R}$

$$H\left(s,t\right):=\left(1-t\right)\alpha'\left(s\right)+t\beta'\left(s\right),\left(s,t\right)\in I\times I$$

则 H 是 α' 到 β' 的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 进而 $p\circ H$ 是 α 到 β 的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 即 $[\alpha]=[\beta]$.

满射: 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 定义循环 $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$

$$\gamma(t) := e^{2\pi int}$$

易见 $\deg[\gamma] = n$.

□

Example 20.9 穿孔平面 考虑与形如 $\mathbb{R}^2 - \{p\}$ 同胚的空间 X, 被称为是穿孔平面. 易见 X 同胚于 $Y = \mathbb{R}^2 - (0,0)$. 我们指出 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 是 Y 的一个强形变收缩. 定义 $F : Y \times I \to Y$

$$F(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

因此 $\pi_1(X) = (\mathbb{Z}, +)$

Example 20.10 圆柱 设 X 是一个圆柱, 即与

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -k \leq z \leq k, k \in \mathbb{R}\right\}$$

同胚. 令 $C = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$. 则 C 是 X 在 $F((x,y,z),t) = (x,y,(1-t)z)$ 下的一个强形变收缩, 因此 $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.

第 20 章 练习

1. 设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq \mathbb{S}^2$ 是开上半球. 证明任意 $f, g : X \to Y$ 同伦.

   Proof

   考虑流形 $\mathbb{S}^2$ 上的球坐标 (θ, φ). 记 θ, φ 为坐标映射. 任取 $f, g : X \to Y$, 定义 $H : X \times I \to Y$, 坐标表示为

   $$H(x,t) = (t(\theta \circ g) + (1-t)(\theta \circ f), t(\varphi \circ g) + (1-t)(\varphi \circ f))$$

   则 H 是连续映射, 且 $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$.

   □

2. 设 $P = \{p\}$ 是一个点的拓扑空间,X 是拓扑空间. 说明 X 是道路连通的, 当且仅当 $[P,X]$ 是单元素集.

   Proof

   若 $[P,X]$ 只有一个元素. 任取 X 上两点 x_1, x_2, 定义 $f(p) = x_1, g(p) = x_2$. 则 $f, g \in [P,X]$, 从而存在 $H : P \times I \to X$, 使得 $H(p,1) = x_1, H(p,2) = x_2$. 则 $H \circ i_2$ 是连接 x_1 和 x_2 的连续映射, 其中 $i_2 : I \to P \times I$, $i_2(t) = (p,t)$ 是连续映射. 这表明 X 是道路连通的.

反之, 若 X 是道路连通的. 任取 P 到 X 的连续映射 f,g, 设 $f(p)=x_1, g(p)=x_2$. 则存在连续映射 $h:I\to X$, 使得 $h(0)=x_1$, $h(1)=x_2$. 定义 $H:P\times I\to X$, $H(p,t):=h(t)$, 则 $H=h\circ\pi_2$ 是连续映射. 并且 $H(p,1)=f(p), H(p,2)=g(p)$. 因此 $H:f\simeq g$.

□

3. 设 X 是离散空间. 证明若 $f:X\to X$ 同伦于单位映射 $I_X:X\to X$, 则 $f=I_X$. (提示: 存在 x 到 $f(x)$ 的道路.)

Proof

设 $H:f\simeq I_X$, 则 $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=x$. 于是 $h_x(t):=H\circ i_x(t)$ 是 $f(x)$ 到 x 的道路. 若 $x\neq f(x)$, 则 $I\setminus(h_x^{-1}(x))$ 是若干开集的并, 进而是非空开集. 从而 $h_x^{-1}(x)$ 是闭集. 但同时 $h_x^{-1}(x)$ 是开的, 而 I 是连通集, 只能有 $h_x^{-1}(x)=\varnothing$ 或 $h_x^{-1}(x)=I$. 又 $h_x^{-1}(x)\ni 1$ 非空, 因此 $h_x^{-1}(x)=I$. 进而 $f(x)=h_x(0)=x$, 矛盾. 这就表明了 $f(x)=x,\forall x\in X$, $f=I_X$. □

4. (?) 设 X 是连通空间, Y 是离散空间. 证明 $f,g:X\to Y$ 同伦, 当且仅当 $f=g$.

Proof

若 f,g 同伦, 设 $H:f\simeq g$. 任意固定 $x\in X$, 则 $h_x(t):=H(x,t)$ 是连接 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的道路. 若 $f(x)\neq g(x)$, 则 $I\setminus h_x^{-1}(f(x))$ 写作若干开集的并, 进而是非空开集. 故 $h_x^{-1}(f(x))$ 是 I 上的闭集, 又 $h_x^{-1}(f(x))$ 自身是一个非空开集, 由 I 的连通性, 只能有 $h_x^{-1}(f(x))=I$. 因此 $g(x)=h_x(1)=f(x)$.

反之, 若 $f=g$, 显然 f,g 同伦.

□

5. (我猜因为这东西不连续, 但是我对复变不熟, 之后再写) 设 $\mathbb{S}^1$ 是复平面上的单位元,$f,g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是两个映射, 定义 $f(z)=z, g(z)=z^2$. 为什么说以下表述是错误的: $F:\mathbb{S}^1\times I\to\mathbb{S}^1$, $F(z,t)=z^{t+1}$ 是 f 到 g 的同伦.
6. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $C(X,Y)$ 是所有从 X 到 Y 的连续映射, 其中 Y 被赋予了紧-开拓扑. 证明 $f,g\in C(X,Y)$ 同伦, 当且仅当它们被 $C(X,Y)$ 上的一个道路相连.
7. 令 $A\subseteq X$ 是 X 的一个收缩, 其中 X 是 Hausdorff 的. 证明 A 在 X 中是闭的.

Proof

若 $A\subseteq X$ 是 X 的一个收缩, 则 A 可以被刻画为 X 在某个连续映射下的像, 而 Haussdorff 空间的连续像是闭的, 故 A 是闭的.

□

8. 设 X 是连通的空间,$x_0,x_1\in X$ 是 X 上的两点, 且在 X 中有无交的开邻域. 说明

$A=\{x_0,x_1\}$ 不是 X 的收缩.

Proof

连通集的连续像是连通的. 若 A 是 X 的一个收缩, 则 A 位于 X 在某个连续函数的像集上. 但是 A 是 X 的收缩表明, 存在连续映射 $f: X \to A$, 使得 $i \circ f = \mathrm{Id}_A$, 从而 A 被刻画为 X 在连续映射 f 下的像, 表明 A 是连通的. 但是另一方面, 设 U_0, U_1 为 x_0, x_1 的无交开邻域, 则 $A = A \cap (U_0 \cup U_1) = (A \cap U_0) \cup (A \cap U_1)$ 是两个非空开集的无交并, 是不连通的, 矛盾. □

9. 证明空间 X 是可缩的, 当且仅当对于任意的拓扑空间 T, 以及任意映射 $f: X \to T$, 都有 f 是零伦.

Proof

设 X 是可缩的, 则可设 $H: \mathrm{Id}_X \simeq C_{x_0}$ 对某个 $x_0 \in X$ 成立. 考虑连续映射 $G := f \circ H$, 则 $G(x,0) = f(x)$, $G(x,1) = C_{f(x_0)}$ 是常值映射, 故 f 是零伦. 或者我们直接利用复合映射对同伦的保持, 得到 $f = f \circ \mathrm{Id}_X \simeq f \circ C_{x_0} = C_{f(x_0)}$
反正, 若任取 $f: X \to T$, 都有 f 是零伦, 特别地有 $\mathrm{Id}_X: X \to X$ 是零伦, 即同伦与常值映射, 表明 X 是可缩的.

□

10. 说明若 A 是 X 的一个强形变收缩, B 是 A 的一个强形变收缩, 则 B 是 X 的一个强形变收缩.

Proof 存在连续映射 $f: X \to A$, 使得 $\mathrm{Id}_X \simeq i_1 \circ f, \mathrm{rel}\ A$, 并且 $f \circ i_1 = \mathrm{Id}_A$. 存在连续映射 $g: A \to B$, 使得 $\mathrm{Id}_A \simeq i_2 \circ g, \mathrm{rel}\ B$, 并且 $g \circ i_2 = \mathrm{Id}_B$. 其中 $i_1: A \to X$ 和 $i_2: B \to A$ 是含入映射. 由同伦对复合映射的保持, 我们有 $\mathrm{Id}_X \simeq i_1 \circ f = i_1 \circ \mathrm{Id}_A \circ f \simeq i_1 \circ i_2 \circ g \circ f, \mathrm{rel}\ B$, 注意到 $i_1 \circ i_2: B \to X$ 也是含入映射, 因此 B 是 X 的一个强形变, 又 $g \circ f \circ i_1 \circ i_2 = g \circ \mathrm{Id}_A \circ i_2 = g \circ i_2 = \mathrm{Id}_B$, 因此 B 是 X 的一个强形变收缩.

□

11. 令 $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ 是单位正方形, $C \subseteq I^2$ 是 comb 空间. 证明 C 不是 I^2 的一个收缩.

Proof

令 $U := B\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\right) \cap C$ 是 C 中的开集, 则 U 是 C 的一个开子空间. 设 r 是 I^2 到 C 的一个收缩, 则 $\mathrm{pr} \circ r$ 是 I^2 到 U 的一个收缩. 其中 $\mathrm{pr}: C \to U$ 是投影映射. 由于 I^2 是连通的, 故 U 是连通的, 矛盾！

□

12. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 X. X 由所有原点与 $\left(1, \frac{1}{n}\right)$ 的线段, 以及 $\{(x,0): 0 \le x \le 1\}$ 组

成. 证明 X 是可缩的, 但是任一一点 $(x,0)$ 都不是 X 的强形变收缩.

Proof

定义 $H: X\times I\to X$,

$$H\left(\left(x,y\right),t\right):=\left(\left(1-t\right)x,\left(1-t\right)y\right)$$

则 $H:\mathrm{Id}_X\simeq C_0$, 故而 X 可缩.

□

13. 说明即使有非空道路连通交集, 两个可缩空间的并也不一定是可缩的.

14. 若 P 是 X 的一个道路分支, $x_0\in P$, 则含入映射 $i:P\to X$ 可以视为带基点空间的映射 $(P,x_0)\to(X,x_0)$, 证明

$$i_\sharp:\pi_1\left(P,x_0\right)\to\pi_1\left(X,x_0\right)$$

是同构.

Proof

任取 X 是以 x_0 为基点的循环 α, 断言 α 是 P 上的道路, 若不然, 存在 $x_1\in(X\setminus P)\cap\alpha\left(I\right)$, 此时存在 x_0 到 x_1 的道路, 只能有 $x_1\in P$, 矛盾. 因此对于任意 X 上以 x_0 为基点的循环 α, $i\circ\mathrm{pr}\circ\alpha=\alpha$. 作用函子 $\sharp$, 得到

$$\left(i_\sharp\circ\mathrm{pr}_\sharp\right)[\alpha]=[\alpha]$$

即

$$i_\sharp\circ\mathrm{pr}_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$$

此外, 对于任意 P 上以 x_0 为基点的循环 β, 容易得到 $\mathrm{pr}\circ i\circ\beta=\beta$. 同理可得

$$\mathrm{pr}_\sharp\circ i_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(P,x_0)}$$

, 故 $i_\sharp$ 是同构.

□

15. 证明拓扑空间 X 上的锥 $C\left(X\right)$ 是单连通的.

Proof 只需注意到 $C\left(X\right)$ 是可缩到顶点的, 可缩空间的同伦型与点空间相同, 基本群是平凡的.

□

16. 令 α,β 是 X 上的 x_1 到 x_2 的两条道路. 证明 $\alpha\sim\beta,\mathrm{rel}\ \{0,1\}$ 当且仅当 $\alpha\beta^{-1}\sim C_{x_1},\mathrm{rel}\ \{0,1\}$

Proof

若 $\alpha\sim\beta,\mathrm{rel}\ \{0,1\}$, 则 $\alpha*\beta^{-1}\sim\beta*\beta^{-1},\mathrm{rel}\left(\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]\right)$. 而 $\beta*\beta^{-1}\sim C_{x_1},\mathrm{rel}\ \{0,1\}$, 因此 $\alpha*\beta^{-1}\sim C_{x_1},\mathrm{rel}\ \{0,1\}$.

反之，若 $\alpha\beta^{-1} \sim C_{x_1}, \text{rel}\{0,1\}$. 则 $\alpha\beta^{-1} * \beta \sim C_{x_1} * \beta, \text{rel}(\{0,1\})$. 由于 $\beta^{-1} * \beta \sim C_{x_1}, \text{rel}\{1\}$，不难看出 $\alpha\beta^{-1} * \beta \sim (\alpha * C_{x_1}) * C_{x_1} \sim \alpha, \text{rel}(\{0,1\})$. 此外 $C_{x_1} * \beta \sim \beta, \text{rel}\{0,1\}$ ，命题成立. □

17. 设 $A \subseteq X$ 是一个形变收缩. 说明对于每个 $a \in A$，含入映射 $i : A \to X$ 诱导出同构

$$i_\sharp : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$$

Proof 任取 $a \in A$，我们视 i 为带基点拓扑空间的含入映射. 存在映射 $f : X \to A$，使得 $\text{Id}_X \simeq i \circ f$，并且 $f(a) = a, \forall a \in A$. 可以视 $f : (X,a) \to (A,a)$ ，$i : (A,a) \to (X,a)$ 则 $i \circ f \simeq \text{Id}_{(x,a)}$，我们有 $i_\sharp \circ f_\sharp = \text{Id}_{\pi_1(X,a)}$. 此外，$f \circ i = \text{Id}_{(A,a)}$，我们有 $f_\sharp \circ i_\sharp = \text{Id}_{\pi_1(A,a)}$. 这就说明了 $i_\sharp$ 是同构.

□

18. 考虑两个球面 $\mathbb{S}^m$ 和 $\mathbb{S}^n$,$m,n \geq 2$，嵌入到某个欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 中，其中 k 充分大. 若 $\mathbb{S}^m$ 与 $\mathbb{S}^n$ 相切地交于一点，说明它们的并是单连通的.
19. 若连续映射 $f : X \to \mathbb{S}^n$ 不是满射，则 f 是零伦.

Proof

不妨设 $e^{i\pi} \notin f(X)$，则定义 $H : X \times I \to \mathbb{S}^n \setminus \{e^{i\pi t}\}$

$$H(x,t) = e^{(1-t)\ln f(x)}$$

□

20.6 van Kampen

引理 20.2

设 X 分解为一些道路连通集 A_α 的并，且每个 A_α 包含了基点 $x_0 \in X$. 则所有含入映射 $A_\alpha \hookrightarrow X$ 的诱导同态 $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ 扩张为同态 $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. ♡

命题 20.6

令 $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ 表示含入映射 $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ 诱导的同态，则 $j_\alpha i_{\alpha\beta} = j_\beta i_{\beta\alpha}$. 所以 $\ker\Phi$ 包含所有形如 $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}, \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ 的元素. ♠

Idea 即 Φ 将 $A_\alpha \cap A_\beta$ 落在 A_α 和 A_β 中部分的像等同.

定理 20.21 (van Kampen)

设 X 分解为包含了基点 $x_0 \in X$ 的道路连通开集 A_α 的并. 且每个交集 $A_\alpha \cap A_\beta$ 是道路连通的, 则同态 $\Phi : *_\alpha \pi_1 (A_\alpha) \to \pi_1 (X)$ 是满射. 此外, 若每个 $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ 也是道路连通的, 则 Φ 的核 N 由全体形如 $i_{\alpha\beta} (\omega) i_{\beta\alpha} (\omega)^{-1}, \omega \in \pi_1 (A_\alpha \cap A_\beta)$ 的元素生成, 从而 Φ 诱导出同构

$$\pi_1 (X) \simeq *_\alpha \pi_1 (A_\alpha) / N = *_\alpha \pi_1 (A_\alpha) / (i_{\alpha\beta} (\omega) = i_{\beta\alpha} (\omega))$$

♡

Example 20.11 设 $\{X_\alpha\}$ 是一族道路连通的空间, $x_\alpha \in X_\alpha$ 是基点, 考虑它们的楔和 $\bigvee_\alpha X_\alpha$. 对于每个 x_α , 它在 X_α 中都存在形变收缩到自身的开邻域 U_α. 令 $A_\alpha = X_\alpha \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$, 则 A_α 形变收缩到 X_α . 此外, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ 形变收缩到点 x_α. 由 van Kampen 定理, $\Phi : \pi_1 (X) \to *_\alpha \pi_1 (A_\alpha) \simeq *_\alpha \pi_1 (X_\alpha)$ 是同构.

第 21 章 基础同调代数

21.1 链复形范畴

定义 21.1 (分次模)

- 考虑一个 R-模直和
$$C_. := C_* := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$$
通常称 C_* 是第 n 个分次分量为 C_n 的一个分次 R-模.
- C_n 中的每个成员都被称为是 C_* 的一个 n 次齐次元.

定义 21.2 (分次同态)

设 C_* 和 C'_* 是两个分次 R-模. 称一个 R-模同态 $f : C_* \to C'_*$ 为一个分次同态, 若存在 d, 使得 $f(C_r) \subseteq C'_{r+d}$ 对所有 r 成立. 此时称 d 为 f 的次数. 通常记 $f|_{C_r}$ 为 f_r.

定义 21.3 (R-模链复形)

一个 R-模链复形是指一对 (C_*, ∂), 其中 C_* 是一个分次 R-模, $\partial := \partial_* : C_* \to C_*$ 是一个次数为 -1 的分次自同态, 且满足 $\partial \circ \partial = 0$.

Remark

1. ∂ 由一列 R-模同态 $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}$ 组成, 对所有 n 满足 $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$.
2. 称 ∂ 为链复形的微分或边缘算子.
3. 通常不提及 ∂ 而只说 C_* 是一个链复形.

定义 21.4 (链映射)

设 C_* 和 C'_* 是两个链复形. 一个链映射 $f = f_* : C_* \to C'_*$, 是指一个次数为 0 的分次模同态, 且满足 $f \circ \partial = \partial \circ f$. 即一列 R-模同态 $f_n : C_n \to C'_n$, 使得 $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ 对于所有的 n 成立.

命题 21.1

存在 R-模链复形和链映射的范畴, 记作 Ch_{R} .

Remark

1. $\mathrm{Ch} := \mathrm{Ch}_{\mathbb{Z}}$

定义 21.5

对于一族链复形 $\{(C_*^\alpha, \partial^\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$，可以自然地定义它们的直和：取分次模为直和 $\bigoplus_\alpha C^\alpha$，边缘算子为 $\partial = \bigoplus_\alpha \partial^\alpha$.

Example 21.1 例如对于 (C_*^1, ∂^1) 和 (C_*^2, ∂^2)，它们的直和 (C, ∂) 被定义为

$$C_n = C_n^1 \oplus C_n^2, \forall n; \quad \partial\left(c^1 \oplus c^2\right) = \partial^1\left(c^1\right) \oplus \partial^2\left(c^2\right)$$

容易看出 $\partial \circ \partial = 0$.

21.2 正合列和同调群

定义 21.6 (R-模正合列)

- 称一 R-模列

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

在 M 处正合，若 $\ker \beta = \mathrm{Im}\ \alpha$.

- 称一列

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

是正合的，若对于每个 n 它都在 M_n 处正和.

- 一个短正合列是指形如下的 R-模列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

定义 21.7 (链复形正合列)

称一个链复形和链映射的列

$$0 \longrightarrow C'_. \xrightarrow{f_.} C_. \xrightarrow{g_.} C''_. \longrightarrow 0$$

是正合的，若对于每个 n，对应的模列

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$$

是正合的.

定义 21.8 (同调群)

给定 R-模链复形 C_*, 定义 C_* 的同调群为分次 R-模

$$H_*(C_*) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_*)$$

其中

$$H_n(C_*) := \ker\,\partial_n / \operatorname{Im}\,\partial_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

命题 21.2

若 $f: C_* \to C'_*$ 是链映射, 则 f 诱导出自然的分次同态 $H_*(f): H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$. 此外 H_* 是从链复形范畴到分次模范畴上的共变函子.

Proof

设 $f: C_* \to C'_*$ 和 $g: C'_* \to C''_*$ 是链映射, 分别由 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 组成, 则 $g \circ f$ 是由 $\{g_n \circ f_n\}$ 组成的链映射.

定义

$$H_*(f)(h + \operatorname{Im}\,\partial_{n+1}) := f_n(h) + \operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}, \quad h \in \ker\,\partial_n$$

由于 $\partial'_n \circ f_n(h) = f_{n-1} \circ \partial_n(h) = f_{n-1}(0) = 0$, 因此 $f_n(h) \in \ker\,\partial'_n$. 并且对于 $h_1, h_2 \in \ker\,\partial_n$, $(h_1 - h_2) \in \operatorname{Im}\,\partial_{n+1}$, 我们有 $f_n(h_1) - f_n(h_2) = f_n(h_1 - h_2) \in \operatorname{Im}\,(f_n \circ \partial_{n+1}) = \operatorname{Im}\,(\partial'_{n+1} \circ f_{n+1}) \subseteq \operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}$ 从而映射良定义, 以上给出了 $H_*(f): H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$.

接下来说明函子性, 对于 $f: C_* \to C'_*$ 和 $g: C'_* \to C''_*$, 任取 $h \in \ker\,\partial_n$, 我们有

$$H_*(g\circ f)(h + \operatorname{Im}\,\partial_{n+1}) = g_n \circ f_n(h) + \operatorname{Im}\,\partial''_{n+1} = H_*(g)\left(f_n(h) + \operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}\right) = H_*(g) \circ H_*(f)$$

□

引理 21.1 (蛇引理)

对于给定的 R-模同态的交换图:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha'"] & N \arrow[r, "\beta'"] & N'' & \end{tikzcd}$$

其中两个水平列是正合的, 存在 R-模同态 $\delta: \ker\, f'' \to \operatorname{Coker}\, f'$, 被称为是连接同态, 使得列

$$\operatorname{Ker}\, f' \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Ker}\, f \xrightarrow{\beta} \operatorname{Ker}\, f'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\, f' \xrightarrow{\alpha'} \operatorname{Coker}\, f \longrightarrow \operatorname{Coker}\, f''$$

正合. 此外, 连接同态 δ 具有函子性, 从而可以定义从“蛇”到对应的“六项正合

列”的共变函子.

Proof

1. $\ker f$ 处正合：$\ker \beta|_{\ker f} = \ker f \cap \ker \beta = \ker f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，任取 $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，设 $x = \alpha(y)$，则 $\alpha' \circ f'(y) = f \circ \alpha(y) = f(x) = 0$，由于 α' 是单射，$f'(y) = 0, y \in \ker f'$，这表明 $x \in \alpha(\ker f')$，从而 $\ker \beta|_{\ker f} \subseteq \alpha(\ker f')$. 反之，任取 $x' \in \alpha(\ker f')$，设 $x' = \alpha(y')$，使得 $f'(y) = 0$，则 $f(x') = f \circ \alpha(y') = \alpha' \circ f'(y') = \alpha'(0) = 0$，从而 $x' \in \ker f$，又显然 $x' \in \mathrm{Im}\ \alpha$，因此 $x' \in \ker f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，$\alpha(\ker f') \subseteq \ker f \cap \mathrm{Im}\ \alpha = \ker \beta|_{\ker f}$，综上，列在 $\ker f$ 处正合.
2. $\mathrm{Coker}\ f$ 处正合：留作练习.
3. δ 的构造：$\mathrm{Coker}\ f' = N' / \mathrm{Im}\ f'$，对于 $h \in \ker f''$，注意到 $\mathrm{Im}\ \beta = M''$，存在 $k \in M$，使得 $h = \beta(k)$. 因此 $0 = f''(h) = f'' \circ \beta(b) = \beta' \circ f(k)$，从而 $f(k) \in \ker \beta' = \mathrm{Im}\ \alpha'$，存在 $l \in N'$，使得 $\alpha'(l) = f(k)$. 定义 $\delta(h) := l + \mathrm{Im}\ f'$.
   为了说明良定义性，只需要说明上述方式定义出的 $\delta(0)$ 一定是 $0 + \mathrm{Im}\ f'$，事实上，若 $h = 0$，则任取 $\beta^{-1}(h) = \ker \beta = \mathrm{Im}\ \alpha$ 中一 k，任取 l 使得 $\alpha'(l) = f(k)$，都有 $f(k) \in \mathrm{Im}\ (f \circ \alpha) = \mathrm{Im}\ (\alpha' \circ f')$，即 $\alpha'(l) \in \mathrm{Im}\ (\alpha' \circ f')$，由于 α' 是单射，$l \in \mathrm{Im}\ f'$，表明 $\delta(h) = 0 + \mathrm{Im}\ f'$.
4. $\ker f''$ 处正合：首先说明 $\mathrm{Im}\ \beta|_{\ker f} \subseteq \ker \delta$，即 $\delta \circ \beta|_{\ker f} = 0$. 任取 $x \in \ker f$，置 $x'' = \beta(x)$，可以让 x 称为定义 $\delta(x'')$ 过程中引入的 k，则由于 $f(x) = 0$，引入的 l 满足 $\alpha'(l) = f(k) = 0$，又 α' 是单射，$l = 0$，从而 $\delta \circ \beta(x) = \delta(x'') = 0$. 再来说明另一边，取 $x'' \in \ker f''$，使得 $\delta(x'') = 0$. 则存在 $l \in \mathrm{Im}\ f'$，$k \in M$，使得 $x'' = \beta(k)$,$f(k) = \alpha'(l)$，设 $l = f'(s)$，其中 $s \in M'$. $f(k) = \alpha' \circ f'(s) = f \circ \alpha(s)$，$k - \alpha(s) \in \ker f$. 又 $\beta(k - \alpha(s)) = \beta(k) - \beta \circ \alpha(s) = \beta(k) = x''$，因此 $x'' \in \beta(\ker f)$，表明 $\ker \delta \subseteq \mathrm{Im}\ \beta|_{\ker f}$
5. $\mathrm{Coker}\ f'$ 处正合：留作练习.

□

定理 21.1

给定链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{\alpha} C_* \xrightarrow{\beta} C''_* \longrightarrow 0$$

存在一个同调群的长正合列

$$\longrightarrow H_n(C'_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow$$

，并且这种对应具有函子性.

Proof 由于链映射与边缘算子的交换性, α 和 β 分别诱导出良定义的商映射

$$\bar{\alpha}: C'_*/\operatorname{Im}\,\partial' \to C'_*/\operatorname{Im}\,\partial, \quad \bar{\beta}: C_*/\operatorname{Im}\,\partial \to C''_*/\operatorname{Im}\,\partial''$$

并且分别限制在 $\ker\,\partial'$ 和 $\ker\,\partial$ 上, 得到

$$\alpha': \ker\,\partial' \to \ker\,\partial, \quad \beta': \ker\,\partial \to \ker\,\partial''$$

我们得到蛇形交换图

$$\begin{tikzcd}
 & C'_n/\operatorname{Im}\partial'_{n+1} \arrow[r, "\bar{\alpha}_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \arrow[r, "\bar{\beta}_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C''_n/\operatorname{Im}\partial''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 & \ker\partial'_{n-1} \arrow[l] \arrow[r, "\alpha'_{n-1}"'] & \ker\partial_{n-1} \arrow[r, "\beta'_{n-1}"'] & \ker\partial''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

注意到由于 $\operatorname{Im}\,\partial'_{n+1} \subseteq \ker\,\partial'_n$, 映射 $[\partial'_n : C'_n/\operatorname{Im}\,\partial'_{n+1} \to \ker\,\partial'_{n-1}]$ 的核同构于 $\ker\,\partial'_n/\operatorname{Im}\,\partial'_{n+1} = H_n(C'_*)$, 类似地有映射的 Coker 同构于 $H_{n-1}(C'_*)$, 类似地结论对 ∂_n 和 ∂''_n 也成立. 于是由蛇引理, 得到正合列

$$H_n(C'_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\beta)} H_{n-1}(C''_*)$$

□

推论 21.1

考虑 R-模交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中两行正合. 那么若 f_1, f_3 是同构, 则 f_2 亦然.

♡

Proof

由蛇引理, 可得

$$\operatorname{Ker}\,f_1 \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Ker}\,f_2 \xrightarrow{\alpha_2} \operatorname{Ker}\,f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\,f_1 \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Coker}\,f_2 \xrightarrow{\beta_2} \operatorname{Coker}\,f_3$$

此外, 由 f_1 和 f_3 是同构, 可得 $\ker\,f_1 = \ker\,f_3 = \operatorname{coker}\,f_1 = \operatorname{coker}\,f_3 = 0$ 从而正合列化为

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Ker}\,f_2 \xrightarrow{\alpha_2} 0 \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Coker}\,f_2 \xrightarrow{\beta_2} 0$$

且由交换图可知正合列上的限制映射 α_1, β_1 是单射, α_2, β_2 是满射. 因此由正合性

$$\ker\ f_2 = \ker\ \alpha_2 = \alpha_1(0), \quad \mathrm{coker}\ f_2 = \ker\ \beta_2 = \beta_1(0) = 0$$

这表明 f_2 是同构.

□

推论 21.2 (四引理)

考虑下方的 R-模交换图, 其中两行正合. 若 f_1 是满射, f_4 是单射, 则

1. f_2 是单射 $\implies$ f_3 是单射;
2. f_3 是满射 $\implies$ f_2 是满射.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[d, "f_4"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"] & N_4
\end{tikzcd}$$

推论 21.3 (五引理)

考虑下面的 R-模交换图, 其中两行正合. 若 f_1, f_2, f_4 和 f_5 均为同构, 则 f_3 亦然;

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Proof

□

第 22 章 奇异同调

22.1 奇异同调群

定义 22.1 (单形、链、链群)

设 X 是任意拓扑空间, $n \geq 0$ 是整数;

1. X 上的一个奇异 n-单形, 是指一个连续映射 $\sigma : |\Delta_n| \to X$.
2. X 上的一个奇异 n-链, 是指一个有限和 $\sum_i n_i\sigma_i$, 其中 $n_i \in \mathbb{Z}$,σ_i 是 X 上的奇异 n-单形.
3. X 的全体奇异 n-链上可以定义出自然的加法,X 的全体奇异 n-单形作为一组基, 生成出一个自由阿贝尔群, 记作 $S_n(X)$.
4. 对于 $n < 0$ 定义 $S_n(X) = 0$, 则全体 n-链群的直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n(X)$ 构成一个分次阿贝尔群, 记作 $S.(X)$.

♣

推论 22.1

设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的映射, 则 $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ 扩张出分次群同态 $f. : S.(X) \to S.(Y)$. 此外, . 满足函子性, 从而可以定义出一个函子 $X \rightsquigarrow S.(X)$.

♡

定义 22.2

若 A 是 X 的子空间, 且 σ 是 A 上的一个奇异单形, 则通过含入映射 $A \hookrightarrow X$, σ 可视为 X 上的一个单形. 此时 $S_n(A)$ 可看做 $S_n(X)$ 的一个子群. 记商群 $S_n(X)/S_n(A)$ 为 $S_n(X,A)$. X 上全体不含于 A 的奇异 n-单形作为一组基生成出自由阿贝尔群 $S_n(X,A)$. 可以类似地定义 $S\cdot(X,A)$.

♣

Remark 当 $A = \varnothing$ 时, $S_n(X,A) = S_n(X)$, 因此对 $S_n(X,A)$ 的研究适用于 $S_n(X)$.

定义 22.3 (面算子)

对于每个整数 $r \geq 0$, 定义面算子 $F^r : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ 按

$$F^r(\mathbf{e}_s) := \begin{cases} \mathbf{e}_s, & s < r \\ \mathbf{e}_{s+1}, & s \geq r \end{cases}$$

并做线性扩张.

♣

引理 22.1

$F^r \circ F^s = F^{s-1} \circ F^r, r < s.$

定义 22.4 (边缘算子)

对于 $n \geq 1$, 以及 X 的任意奇异 n-单形 σ, 定义

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma \circ F^r$$

并做线性扩张, 得到同态 $\partial_n : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$. 对于 $n \leq 0$ 定义 $\partial_n := 0$.

命题 22.1

$(S_.(X, A), \partial_.) := \{S_n(X, A), \partial_n\}$ 构成一个链复形, 且存在函子 $(X, A) \rightsquigarrow (S_.(X, A), \partial)$

Proof 首先说明 $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$ 对于任意的奇异 n-单形 ($n \geq 2$) 成立.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \partial(\sigma) &= \partial\left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma \circ F^r\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= \sum_{r<s} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= \sum_{r \leq s-1} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^{s-1} \circ F^r + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= -\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ F^i \circ F^j + \sum_{s \leq r} (-1)^{r+s} \sigma \circ F^r \circ F^s \\
&= 0
\end{aligned}$$

给定映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$，可以定义 $f_.(\sigma):=f\circ\sigma:S_n(X,A)\to S_n(Y,B)$. 我们有

$$\begin{aligned}
f_.\circ\partial(\sigma)&=f_.\left(\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma\circ F^r\right)\\
&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r f_.\circ\sigma\circ F^r\\
&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(f\circ\sigma)\circ F^r\\
&=\partial(f\circ\sigma)\\
&=\partial\circ f_.(\sigma)
\end{aligned}$$

于是 $f_.$ 给出 $S_n(X,A)\to S_n(Y,B)$ 的链映射. 此外，若 $g:(Y,B)\to(Z,C)$，则

$$(g\circ f)_.(\sigma)=(g\circ f)\circ\sigma=g\circ(f\circ\sigma)=g_.(f\circ\sigma)=(g_.\circ f_.)(\sigma)$$

这就说明了函子性. 综上，我们给出了 (X,A) 到链复形 $(S_.(X,A),\partial)$ 的函子.

□

定义 22.5 (相对同调)

(X,A) 是一对拓扑空间，使得 $A\subseteq X$. 称 $H_*(X,A):=H_*(S_.(X,A))$ 为 (X,A) 的相对同调群. 取 $A=\varnothing$，得到同调群 $H_*(X)$.

命题 22.2

存在函子 $X\rightsquigarrow S_.(X,A)$，以及函子 $S_.(X,A)\rightsquigarrow H_*(X,A)$，进而存在函子 $X\rightsquigarrow H_*(X,A)$.

Proof 对于满足 $f(A)\subseteq B$ 的映射 $f:X\to Y$，或者说映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$. 由于 $f_\sharp:C_n(X)\to C_n(Y)$ 将 $C_n(A)$ 中的元素映到 $C_n(B)$，商关系诱导出良定义的 $f_\sharp:C_n(X,A)\to C_n(Y,B)$. 并且由于 $f_\sharp\partial=\partial f_\sharp$ 对绝对链是成立的，它对相对链也是成立的.

□

定义 22.6 (R-系数同调)

对于给定的交换环 R，我们可以完全类似地构造 X 的 R-系数奇异 n-链的自由模 $S_n(X;R)$. 同之前一样，可以得到链复形 $S_.(X;R)$，子链复形 $S_.(A;R)$，以及商复形 $S_.(X,A;R)$. 对应的同调群 $H_*(X;R)$ 称为 X 的 R-系数同调群，显然是一个分次 R-模. $R=\mathbb{Z}$ 时通常略去记号 R 为 $H_*(X)$.

22.2 同伦不变性

定义 22.7

称 P 是链映射 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 的一个链同伦，若

$$\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$$

Remark

1. 若 α 是循环 P 是链同伦，则 $(g_\sharp - f_\sharp)(\alpha) = \partial P(\alpha)$ 是一个边界，这表明 $g_* = f_*$.

定理 22.1

若 $f, g: X \to Y$ 同伦，则 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 是链同伦的，进而在 $H_*(X)$ 上，$f_* = g_*$

Proof 将同伦的时间变化，用 prism operator 表现为分解为若干单形的棱柱. 构造 prism operator P，使得它称为 $f_\sharp$ 和 $g_\sharp$ 之间的链同伦.

□

定理 22.2

若 $f, g: (X, A) \to (Y, B)$ 彼此同伦，则在 $H_*(X, A)$ 上 $f_* = g_*$.

Remark

1. 即同伦的映射诱导出链同伦的链映射.
2. 在 reduced homology 上上的诱导同态也相等.

Proof prism operator P 将 $C_n(A)$ 映到 $C_{n+1}(B)$，从而诱导出良定义的 relative prism operator $P: S_n(X, A) \to S_{n+1}(Y, B)$，满足 $\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$，即相对链同伦也是成立的.

□

推论 22.2

同伦等价的拓扑空间有同构的同调群；特别地，可缩空间有点空间的同调群.

Proof 由同伦不变性立即得到.

□

22.3 奇异同调的其它性质和例子

命题 22.3 (点空间的同调群)

设 X 是一个点, 则 $H_n(X) = 0, \forall n > 0$, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$

Proof 对于每个 n, 奇异 n-单形有且仅有一个 $\sigma_n : \Delta^n \to X$. 边缘算子的像 $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$, 当 n 奇数时为 σ_{n-1}, 偶数时为 0. 相邻两个边缘算子, 一个是 0, 一个是同构, 从而 $\ker$ 和 Im, 要么前者是 0, 要么后者全空间. 正数阶的同调群总是平凡的.

□

命题 22.4 (道路分支的同调)

设 $\{X_j : j \in J\}$ 是 X 的连通分支, 使得 $X = \sqcup_{j\in J} X_j$. 由于 $|\delta_n|$ 道路连通, 因此每个奇异 n-单形都完整地落在某一个道路分支 X_j 上. 这表明 $S.(X)$ 可以分解为 $S.(X_j)$ 的直和. 进而 $H_*(X)$ 也分解为 $H_*(X_j)$ 的直和.

Remark 因此, 总可以只处理道路连通空间.

命题 22.5

若 X 非空且道路连通, 则 $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Proof $H_0(X) = C_0(X) / \operatorname{Im} \partial_1$. 断言, 一些 0-单形是边缘, 当且仅当符号和为 0. 首先, 奇异 1-单形的边缘一正一负, 符号和为 0, 是普遍成立的. 关键在于, 道路可以视为其一 1-单形, 道路连通空间上, 一些点的符号和若为 0, 每个点的用一个符号相反 σ_0 配对, 使得它们称为连接两点道路的边缘, 这样我们用来配对的 σ_0 一共有 0 个, 这样就把它们写成了奇异 1-链的边缘.

□

Example 22.1(reduced homology) 定义 ε 为将 0-链映为系数和的同态. 称同态 ε 为增广同态, 可以按以下方式扩张出链复形 $\tilde{S}(X)$

$$\tilde{S}_n(X) = \begin{cases} S_n(X), & \text{if } n \geq 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{if } n = -1, \\ (0), & \text{if } n < -1; \end{cases} \quad \text{and} \quad \tilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, & n \geq 1, \\ \varepsilon, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

相应的同调群记作 $\tilde{H}_*(X)$, 称为约化同调群. 显然 $\tilde{H}_i(X) = (0), i < 0; \tilde{H}_i(X) \simeq H_i(X), i > 1; \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(X)$. 特别地, 对于道路连通空间 X, $\tilde{H}_0(X) = 0$.

Remark

1. 约化同调的引入使得点空间的同调得以完全消失.

2. 对于非空的 $A \subseteq X$, 我们有 $\tilde{H}_*(X, A) = H_*(X, A)$, 并且命题22.6对于 $\tilde{H}$ 有完全相同的形式.

命题 22.6 ((X, A) 的同调长正合列)

由 $S(X, A)$ 的定义, 我们有正合列

$$0 \to S_.(A) \to S_.(X) \to S_.(X, A) \to 0^{a}$$

由定理21.1, 可以得到长正合列

$$\left.\begin{array}{l} \cdots \to H_i(A) \to H_i(X) \to H_i(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \to \cdots \\ \cdots \to H_1(X, A) \xrightarrow{\delta} H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X, A), \end{array}\right\}$$

并且对应关系满足函子性.

[a] 只是把定义用正合列的说法写一遍

Idea $x \in H_n(X, A)$ 上的一个元素是被 X 上的一个链 α 代表, 它满足 $\partial\alpha \in S_{n-1}(A)$

Remark

1. 同样的正合列适用于 reduced homology $\tilde{H}$.
2. 连接同态 δ 几乎就是边缘同态 ∂[1] , $\partial[\alpha]$ 被映到 $\partial\alpha$ 在 $H_{n-1}(A)$ 上的等价类.
3. $H_n(X, A)$ 被用来衡量 $H_n(X)$ 和 $H_n(A)$ 之间的差距. $H_n(X, A) = 0$ 当且仅当 $H_n(A) \simeq H_n(X)$.
4. 对于 (X, A),$A \neq \varnothing$ 的 reduced homology：相同非负维数的链复形的短正合列, 拼上一个 -1 维的短正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$, 得到完全相同的长正合列. 特别地, 对于任意的 n, $\tilde{H}_n(X, A)$ 和 $H_n(X, A)$ 在 $A \neq \varnothing$ 时一样. [2]

Example 22.2

1. 截取自同调长正合列的

$$H_i(D^n, \partial D^n) \to \tilde{H}_{i-1}\left(S^{n-1}\right)$$

对于所有的 i 都是一个同构. 从而

$$H_i(D^n, \partial D^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. 对于 $x_0 \in X$, (X, x_0) 给出同构 $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X), \forall n$.

[1] 故用 ∂ 代替它的记号

[2] 0 阶处的差异, 因为做商的原因, 被抵消掉了

22.3.1 同调切除

定理 22.3

给定子空间 $Z \subseteq A \subseteq X$, 使得 $\overline{Z} \subseteq A^{\circ}$, 则含入映射 $(X-Z, A-Z) \hookrightarrow (X, A)$, 对于所有 n, 诱导出同构 $H_n(X-Z, A-Z) \to H_n(X, A)$. 等价地说, 对于所有的子空间 $A, B \subseteq X$, 使得它们的内部覆盖了 X, 含入映射 $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ 对于所有的 n 诱导出群同构 $H_n(B, A\cap B) \to H_n(X, A)$.

引理 22.2

给定拓扑空间 X, 和它的两个子空间 X_1, X_2. 记 X_i 到 X 的含入映射为 $\eta_i, i=1,2$, 并记它们在链复形上的诱导也为 $\eta_i : S_.(X_i) \to S_.(X), i=1,2$. 考虑链映射

$$(\eta_1, -\eta_2) : S_.(X_1) \oplus S_.(X_2) \to S_.(X).$$

此映射连同嵌入 $i : S_.(X_1 \cap X_2) \to S_.(X_1) \oplus S_.(X_2), i(a) := (a, a), a \in X_1 \cap X_2$ 给出一个链复形的短正合列

$$0 \to S_.(X_1 \cap X_2) \to S_.(X_1) \oplus S_.(X_2) \to S_.(X_1) + S_.(X_2) \to 0$$

Proof 对于 $(a, b) \in S_.(X_1) \oplus S_.(X_2)$,

$$(\eta_1, -\eta_2)(a, b) = 0 \iff \eta_1(a) = \eta_2(b) \iff a = b \in S_.(X_1 \cap X_2)$$

这表明

$$\ker(\eta_1, -\eta_2) = \operatorname{Im} i$$

又易见 i 单, $(\eta_1, -\eta_2)$ 满, 因此短正合列存在.

□

引理 22.3

令 $X = A \cup B$, 则以下表述等价

1. $S_.(A) + S_.(B) \to S_.(X)$ 诱导出同调群的同构;
2. $[S_.(A) + S_.(B)]/S_.(B) \to S_.(X)/S_.(B)$ 诱导出同调群的同构;
3. $S_.(A)/S_.(A\cap B) \to S_.(X)/S_.(B)$ 诱导出同调群上的同构.

Proof 对于前两条的等价性，考虑以下短正合列间的态射在定理21.1中函子下的作用

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_.(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_.(A)+S_.(B) \arrow[r] \arrow[d] & {[S_.(A)+S_.(B)]/S_.(B)} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & S_.(B) \arrow[r] & S_.(X) \arrow[r] & S_.(X)/S_.(B) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

作用的结果是同调群间的梯形长正合列，等价性由五引理21.3立即得到.

后两条的等价性由同构定理 $[S_.(A)+S_.(B)]/S_.(B) \simeq S_.(A)/S_.(A\cap B)$ 立即得到.

□

定义 22.8 (切除对)

令 X 是拓扑空间，A, B 是 X 的两个子空间，使得 $X = A\cup B$. 则称含入映射 $(A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$ 是一个切除映射. 在此之上，称子空间对 $\{A, B\}$ 是 X 的奇异同调的一个切除对，若含入映射

$$S_.(A)+S_.(B) \hookrightarrow S_.(A\cup B)$$

诱导出同调群的同构. ♣

Remark 上方的引理给出切除对的若干等价条件.

定理 22.4 (同调切除)

设 $\{A, B\}$ 是 X 的一个切除对，则含入映射 $(A, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B, B)$ 诱导出同调群的同构 $H_*(A, A\cap B) \simeq H_*(A\cup B, B)$. ♡

Remark 由上面的引理立即得到.

定理 22.5

若 $X = X_1\cup X_2 = \mathrm{int}_X(X_1)\cup \mathrm{int}_X(X_2)$，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 X 的奇异同调的一个切除对. ♡

定义 22.9 (Mayer-Vietoris)

设 $\{X_1, X_2\}$ 是一个切除对，考虑短正合列

$$0\to S_.(X_1\cap X_2) \xrightarrow{i} S_.(X_1)\oplus S_.(X_2) \xrightarrow{j} S_.(X_1)+S_.(X_2)\to 0$$

通过定理 21.1诱导出的同调长正合列，其中 $i(z) = (i_1 z, -i_2 z)$，$j(z_1, z_2) = (j_1 z_1, j_2 z_2)$,i_1, i_2, j_1, j_2 均为含入映射. 由于 $H_*(S_.(X_1)+S_.(X_2))$ 与 $H_*(X_1\cup X_2)$

同构, 可以将前者用后者替换, 得到长正合列

$$\cdots \to H_{i+1}(X_1\cup X_2)\xrightarrow{\partial}H_i(X_1\cap X_2)\xrightarrow{i_*}H_i(X_1)\oplus H_i(X_2)\xrightarrow{j_*}H_i(X_1\cup X_2)\to\cdots$$

$$\cdots \to H_1(X_1\cup X_2)\xrightarrow{\partial}H_0(X_1\cap X_2)\to H_0(X_1)\oplus H_0(X_2)\to H_0(X_1\cup X_2)$$

称为 Mayer-Vietoris 列.

第 22 章 练习

Problem 22.1

1. 证明 $H_0(X,A)=0$, 当且仅当 A 达到 X 的每个道路分支.

Proof A 达到 X 的每个道路分支, 当且仅当对于任意的 $x\in X$, 都存在 $a\in A$, 使得 x,a 成为 X 上一个道路的端点. 由于道路上奇异 1-单形, 这相当说, 当视 x 为 X 上的 0-单形, a 为 A 上的 0-单形时, $x-i_\sharp(a)\in \operatorname{Im}\partial_1$, 即同调类 $[x]=[i_\sharp(a)]=i_*([a])$, 其中 $i:A\hookrightarrow X$ 是含入映射. 断言上述成立, 当且仅当 i_* 是满射: 由于 X,A 上的点与它们上的 0-单形的一组基对应, 由于 i_* 线性,X 上的任意 0-单形写成这这组 X 上 0-单形基的线性组合, 进而这组 A 的 0-单形基的线性组合的含入像, 这表明 i_* 是满射. 反之若 i_* 是满射, $x\in X$, 存在 $a=\sum m_ka_k$, 其中 $a_k\in A\subseteq X$, 使得 $[x]=i_*([a])=\sum m_ki_*([a_k])$. 这表明 $x-\sum m_ka_k$ 上的一个闭链, 故 $\sum m_k=1$.

另一方面, 根据 X,A 相对同调的长正合列, $H_0(X,A)=0$ 当且仅当 $i_*:H_0(A)\to H_0(X)$ 是满射, 这当且仅当对于任意的 $[x]\in H_0(X)$, 存在 $[a]\in H_0(A)$, 使得 $[x]-i_*([a])=0$. □

第 23 章 覆叠空间

23.1 基本定义

定义 23.1

令 $p:\overline{X}\to X$ 是满射. 称 X 的一个开子集 V 是由 p 均匀覆叠的, 若 $\pi^{-1}(V)$ 写作 $\overline{X}$ 开子集的无交并:

$$p^{-1}(V)=\coprod_i U_i$$

其中 U_i 在 p 下同胚地映到 V. 此时, 称每个 U_i 为 p 在 V 上的一个层. 若 X 被由 p 均匀覆叠的开子集所覆盖, 则称 p 为一个覆叠投影, $\overline{X}$ 为 X 的覆叠空间. ♣

Remark

1. 简称 $\overline{X}$ 是 X 的复叠空间. 称 $\overline{X}$ 覆叠投影 p 的全空间, X 是 p 基空间.
2. 每个复叠投影都是局部同胚映射. 因此 $\overline{X}$ 和 X 有相同的局部拓扑性质.
3. 每个局部同胚都是开映射, 故复叠投影亦然.
4. 一般而言, 给定映射 $f:X\to Y$ 和 $y\in Y$, 称 $f^{-1}(y)$ 为 f 在 y 上的纤维, 若 f 是局部同胚, 则 f 的每个纤维都是离散的. 特别的, 复叠投影的每个纤维也都是离散的.
5. 当 x 在一个被均匀复叠的开集上移动时, $p^{-1}(x)$ 的基数不变. 若 X 是连通的, 则任意两个被均匀复叠的开集相交, 从而 $p^{-1}(x)$ 的基数与 $x\in X$ 的选取无关, 成为 p **的层数**. 若 p 的层数有限, 则称 p 是**一个有限复叠**. 例如 $z\mapsto z^n$ 是 S^1 到 S^1 的有限复叠.

Example 23.1 覆叠空间

1. 每个同胚都是一个覆叠投影;
2. 考虑 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$, 任意固定 $\theta:0\leq\theta<2\pi$, 考虑 $U=\mathbb{S}^1\setminus\{e^{i\theta}\}$, $(\exp)^{-1}(U)$ 是一些区间 $\theta+2n\pi<t<\theta+(2n+2)\pi$ 的无交并. 每个区间都在 $\exp$ 下与 U 同胚.
3. 映射 $z\mapsto z^n$ 给出 $\mathbb{C}^*$ 到自身的一个覆叠投影, 其中 n 是正整数, $\mathbb{C}^*$ 是非零复数集. 映射在 $\mathbb{S}^1$ 上的限制给出 $\mathbb{S}^1$ 到自身的覆叠投影.
4. 设 Y 是 X 的子空间, p 是 X 的覆叠投影, 则 p 在 $p^{-1}(Y)$ 上的限制给出到 Y 的覆叠投影.
5. 容易构造不是覆叠投影的局部同胚: 对于覆叠投影 $\overline{X}\to X$, 和 $\overline{X}$ 上的开集 U, 限

制映射仍是局部同胚，但是若取 $U=\overline{X}\setminus\bar{x}$，则限制映射不再是一个覆叠投影.

定理 23.1

令 $p:\overline{X}\to X$ 是连续映射，其中 X 是局部道路连通的.

1. 映射 p 是覆叠投影，当且仅当对于每个 X 的分支[a] C，限制映射 $p:p^{-1}(C)\to C$ 是覆叠投影.[b]
2. 若 p 是一个覆叠投影，则对于每个 $\overline{X}$ 的分支 $\overline{C}$，映射 $p:\overline{C}\to p\left(\overline{C}\right)$ 是一个覆叠投影[c]，且 $p\left(\overline{C}\right)$ 是 X 的一个分支.

[a] 局部道路连通空间中，道路分支和连通分支等价，故我们统称分支

[b] 局部道路连通性给出道路的分析形成的对 $\overline{X}$ 的分析也是合适的.

[c] 主要是因为对 $\overline{X}$ 的连通分析不会破坏层的完整性. 由此，我们可以单独考虑一个分支上的层.

Remark

1. 定理指出，我们可以一次性只研究全空间的一个分支上的覆叠投影. 进而可以合理地做以下约定: **若无特别指出，我们以下总不妨设基空间和全空间都是局部道路连通且连通的**

Proof

1. 23.1已经指出 $p^{-1}(C)\to C$ 是覆叠投影; 对于反方向，最关键的点在于局部道路连通性给出每个 C 也是开集. 因此，对于任意的 $x\in X$，考虑包含了 x 的道路分支 C，$p|_{p^{-1}(C)}$ 的均匀覆叠性给出 x 的被 $p:p^{-1}(C)\to C$ 均匀覆盖了的开邻域 $U\subseteq C$. 从而 U 也是 x 在 X 中的被 $p:\overline{X}\to C$ 均匀覆盖了的开邻域.
2. 首先 $p\left(\overline{C}\right)=:C$ 是开集. 给定 $x\in C$，令 V 是被 p 均匀覆叠的连通开邻域. 令 $p^{-1}(V)=\coprod U_i$，则由于覆叠的性质，每个 U_i 也是连通的. 于是要么 $U_i\bar{\subseteq}C$，要么 $U_i\cap\overline{C}=\varnothing$. 由此可知 V 是被 $p|_{\overline{C}}$ 均匀覆叠的.
   最后说明 C 是分支，令 x 是 C 的闭包上的一点，V 是同上面一样的 x 的开邻域. 则至少其中一个 U_i 与 $\overline{C}$ 相交，进而完全地落在 $\overline{C}$ 上，因此 $V\subseteq C$，$x\in C$. 这表明 C 是既开又闭的.

□

第 24 章 单纯复形

24.1 有限单纯复形

定义 24.1

称 $\mathbb{R}^n$ 上的一个点集 $A=\{a_0,\cdots,a_k\},k\geq 1$ 是集合无关的, 若 $\mathbb{R}^n$ 上的向量集 $S=\{a_1-a_0,a_2-a_0,\cdots,a_k-a_0\}$ 是线性无关的.

约定单点集是几何无关的.

定义 24.2

设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 其中 n 充分大. 称 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k-维超平面, 若存在 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维积空间 V^k, 以及向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$H=x+V^k$$

你好呀

命题 24.1

$\mathbb{R}^n$ 上的点集 $A=\{a_0,\cdots,a_k\},k\geq 1$ 是几何无关的, 当且仅当 A 上的点不落在同一个 $(k-1)$ 维超平面上.

Proof

若 A 中的点几何无关, 反过来假设 A 中的点落在 $(k-1)$ 维超平面 $H=x+V^{k-1}$ 上, 则 $a_0-x,a_1-x,\cdots,a_k-x\in V^{k-1}$. 此时

$$a_1-a_0,\cdots,a_k-a_0\in V^{k-1}$$

矛盾, 因为 $k-1$ 维线性空间中不可能有 k 个线性无关的向量.

另一方面, 若 $\{a_1-a_0,\cdots,a_k-a_0\}$ 线性相关, 则由这些向量张成的线性空间是 $k-1$ 维的, 设为 V^{k-1}, 我们有

$$a_0,a_1,\cdots,a_k\in\left(a_0+V^{k-1}\right)$$

落在同一个 $(k-1)$ 维超平面上. □

命题 24.2

$\mathbb{R}^n$ 的子集 $S=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是几何无关，当且仅当对于任意满足以下两条的 t_i

1. $\sum_{i=0}^k t_i a_i=0$;
2. $\sum_{i=0}^k t_i=0$；

都有 $t_i=0, i=0,1,\cdots,k$.

命题 24.3

令 $A=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上几何无关的点集. 则存在唯一过 A 中所有点的 k 维超平面.

Proof

先说明存在性, 设 V^k 是 $\{a_1-a_0,\cdots,a_k-a_0\}$ 张成的 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间, 则 a_0+V^k 是过 A 中所有点的 k 维超平面.

接下来说明唯一性, 设有两个超平面过这些点, 分别是

$$H^k=x+V^k$$

$$F^k=y+W^k$$

通过做减法不难发现 $a_1-a_0,\cdots,a_k-a_0$ 同时在 V^k 和 W^k 里, 它们都是这些向量张成的空间, 并且是唯一的, 因此 $V^k=W^k$. H^k 和 F^k 是同一个空间的两个陪集, 它们要么相等, 要么无交, 因此只能有 $H^k=F^k$. □

命题 24.4

设 $A=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上集合无关的点集. 则通过 A 的唯一的 k 维超平面上的点, 可以被唯一地写作

$$h=\sum_{i=0}^k t_i a_i,\quad \sum_{i=0}^k t_i=1$$

Remark 若 $\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上集合无关的点集, 可以建立 $\mathbb{R}^k$ 到过 $a_0,\cdots,a_k$ 的超平面 H^k 间的一一对应. 将 $\mathbb{R}^k$ 上坐标 $(t_1,\cdots,t_k)$ 上的点映为 H^k 中的点 $\left(1-\sum_{i=1}^k t_k\right)a_0+\sum_{i=1}^k t_i a_i$

定义 24.3 (重心坐标)

令 $A=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上集合无关的点集, h 是过 $a_0,\cdots,a_k$ 的唯一 k 维超平

面上的任意一点, 将 h 写作

$$h=\sum_{i=0}^{k}t_ia_i,\quad \sum_{i=0}^{k}t_i=1$$

称 $t_0,t_1,\cdots,t_k$ 维 h 关于集合 A 的重心坐标.

定义 24.4

设 $A=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上集合无关的点集, $n\geq k$. 则由集合 A 张成的 **k-维几何单形或 k-单形**, 记作 σ^k, 为所有点 $x\in\mathbb{R}^n$ 的构成的集合, 其中

$$x=\sum_{i=0}^{k}t_ia_i,\quad \sum_{i=0}^{k}t_i=1,\quad t_i\geq 0,i=0,1,\cdots,k$$

Remark

1. $a_0,\cdots,a_k$ 称为 σ^k 的顶点;
2. 通常记 $\sigma^k=\langle a_0,\cdots,a_k\rangle$.

定义 24.5 (凸包)

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, A 的凸包被定义为包含了 A 的最小的凸集, 即

$$\bigcap_{\Omega\text{是包含了}A\text{的一个凸集}}\Omega$$

命题 24.5

设 $A=\{a_0,\cdots,a_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上几何无关的点集. 则 $\sigma^k\langle a_0,\cdots,a_k\rangle$ 是 A 的凸包.

Proof 设 H^k 是过 A 的唯一 k 维超平面. 对于 $i=0,1,\cdots,k$, 定义

$$H_i=\left\{(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})\in H^k:\alpha_i\geq 0\right\}$$

则 $\sigma^k=H_0\cap H_1\cap\cdots\cap H_k$. 由于凸集的交是凸集, 只需证明每个 H_i 是凸的, $i=0,1,\cdots,k$. 事实上, 任取 H_i 上两点 $x_1=(\alpha_0,\cdots,\alpha_k),x_2=(\beta_0,\cdots,\beta_k)$ 按重心坐标表示, 我们有 $\alpha_i,\beta_i\geq 0$. 因此 $tx_1+(1-t)x_2,0\leq t\leq 1$ 的重心坐标的第 i 个分量为 $t\alpha_i+(1-t)\beta_i$ 也 ≥ 0, 这表明 $tx_1+(1-t)x_2\in H_i$, H_i 是凸的. 上述讨论对于 $i=0,1,\cdots,k$ 均成立, 因此 σ^k 是凸的.

现在任取 $\mathbb{R}^n$ 上包含了 A 的凸集 B, 我们来证明 $\sigma^k\subseteq B$. 对 k 归纳, $k=0$ 时结论平凡地成立, 假设 $k-1$ 时结论成立, 则 $\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$ 在 B 里. 接下来尝试把 σ^k 中任意

一点写作 $ta_0+(1-t)x_1$, 其中 $x_1\in\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$. 设

$$x=\sum_{i=0}^{k}t_ia_i,\quad t_i\geq 0,\sum_{i=0}^{k}t_i=1$$

当 $t_0=1$ 时, 显然 $x\in\sigma^k$, 以下设 $t_0<1$, 则此时 $s:=\sum_{i=1}^{k}t_k>0$ 定义

$$x_1:=\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{s}a_k$$

则 $x_1\in\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$, 注意到

$$x=t_0a_0+sx_1,\quad s+t_0=1$$

由于 B 是凸的, 因此 $x\in B$. 这就说明了 $\sigma^k\subseteq B$. □

定义 24.6

令 $\sigma^k=\langle a_0,\cdots,a_k\rangle$ 是一个 k-单形. 称 σ^k 上所有重心坐标都严格正的点的集合为**开 k-单形** σ^k .

定义 24.7

令 $\sigma^p,\sigma^q,p\leq q\leq n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个单形. 称 σ^p 是 σ^q 的一个 p **维面**，若 σ^p 的每个顶点也都是 σ^q 的顶点.

若 σ^p 是 σ^q 的一个面, 且 $p<q$, 则称 σ^p 是 σ^q 的一个**真面**.

Remark

1. 任意 k-单形 σ^k 都可以写作它的所有开单形的无交并（顶点自身也是开单形）.
2. 设 x 是 σ^k 上的一点, 重心坐标为 $(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)$
   (a). 如果 x 的坐标均大于零, 则它在 σ^k 的内部;
   (b). 如果 x 的坐标有且仅有一个 α_i 等于零, 则它位于与顶点 v_i 相对的面的内部;
   (c). 若 x 的坐标有且仅有两个 α_i,α_j 等于零 $(i\neq j)$, 则 x 位于 σ^k 的一个 $k-2$ 维面的内部.
3. 闭单形 $\left|\sigma^k\right|$ 上的所有点都可以通过唯一的非负重心坐标表示 $x=(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)$, $\alpha_i\geq 0,\sum\alpha_i=1$.

命题 24.6

投影映射 $p_i:\left|\sigma^k\right|\to[0,1]$，$p_i\left(\alpha_0,\cdots,\alpha_k\right)=\alpha_k$ 是连续的.

Proof

考虑 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的单位向量 $e_0,\cdots,e_k$ 存在闭单形 $\langle v_0,\cdots,v_k\rangle$ 到闭单形 $\langle e_0,\cdots,e_k\rangle$ 的

线性同胚 h, $h(t_0v_0+t_1v_1+\cdots+t_kv_k)=t_0e_0+t_1e_1+\cdots+t_ke_k$. 令 $q_i:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}$ 是第 i 个分量的标准投影, 则 $q_i\circ h=p_i$, 因此 p_i 连续.

□

定义 24.8

一个 **单纯复形**或者 **几何复形** K 由 $\mathbb{R}^m$ 上的满足以下两条的有限多个单形构成, 其中 m 充分大

1. 若 $\sigma\in K$, 则 σ 所有的面也在 K 中;
2. 若 σ 和 τ 均在 K 中, 则要么 $\sigma\cap\tau=\varnothing$, 要么 $\sigma\cap\tau$ 是 σ 和 τ 的公共面.

定义 K 的 **维数**, 记作 $\dim K$, 当 $K=\varnothing$ 时为 -1, 当 K 具有的最大维数的单形为 k-单形时为 k.

♣

Remark

1. 称第二个条件, 为 σ 和 τ 是良好连接的.

定义 24.9

设 σ^k 是 k-单形, 全体 σ^k 的面记作 $\mathrm{Cl}\left(\sigma^k\right)$, 称为 σ^k 的闭包.

♣

Example 24.1 $\sigma^2=\langle a_0,a_1,a_2\rangle$ 的闭包是 K

$$K=\{\langle a_0\rangle,\langle a_1\rangle,\langle a_2\rangle,\langle a_0,a_1\rangle,\langle a_0,a_2\rangle,\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_0,a_1,a_2\rangle\}$$

24.2 多面体和三角剖分

在处理复杂的几何体时, 最常用的一个方法是用 “直” 的几何体取近似代替它. 对于那些可以被这样代替的几何体, 也就是说拓扑性质与某个 “直” 的几何体一样 (同胚) 的那些, 我们叫他**多面体**. 研究这一类几何体, 只需要研究其对应的 “直” 的几何体, 即单纯复形.

单纯复形的定义是一系列从具体的几何体抽象出来的结构, 我们称对应的具体的几何体为它的几何载体.

为了研究单纯复形, 自然地想要考虑不同单纯复形之间的关系, 因此我们需要考虑保持单纯复形结构的映射, 即单纯映射. 单纯映射可以看成是点对点、面对面、体对体的映射, 这样的映射就已经能复刻出几何体的完全对应, 它自然地给出一个从几何载体到几何载体的映射, 我们称之为单纯映射诱导出的映射. 即我们找到单纯复形范畴到拓扑范畴的一个函子.

内容提要

- 单纯复形的几何载体、多面体
- 有界凸开集的同胚定理
- 抽象单纯复形
- 单纯映射及其在几何载体上的诱导
- 单纯复形的连通性

定义 24.10

令 K 是一个单纯复形. 令 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ 是 K 的所有单形的并. 对于某个 n, $|K|$ 成为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 并且具有 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑. 此时称 $|K|$ 为 K 的几何载体. 若 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间也是某个单纯复形的**几何载体**, 则该子空间也被称为是一个**直线多面体**. ♣

定义 24.11

称拓扑空间 X 为一个**多面体**, 若存在单纯复形 K, 使得 $|K|$ 与 X 同胚. 此时, X 被称为是可三角剖分的, K 被称为是 X 的三角剖分. ♣

命题 24.7

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界凸开集, $n \geq 1$, 并且 $\omega \in U$, 则

1. 每个从 ω 射出的射线 L 都与 U 的边界相交于一点.
2. 存在 $\overline{U}$ 到单位闭圆盘 $\mathbb{D}^n$ 的同胚, 使得 U 的边界映为单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$. ♠

Proof

1. 固定 L 是从 ω 发出的射线, 考虑 L 与 U 的交, 则显然交集为 L 的开、凸、有界子集. 考虑到 L 形如
$$\{\omega + t \cdot p : t \in [0, \infty)\}$$
其中 p 是沿 L 的单位向量. 交集形如
$$\{\omega + t \cdot p : t \in A\}$$
其中 A 是 $[0, \infty)$ 的子集, 它和上述集合是同胚的, 因此 A 也是 $[0, \infty)$ 的开、凸、有界子集, 只能形如 $[0, a)$. 因此交集就是
$$\{\omega + t \cdot p : t \in [0, a)\}$$
显然 L 与 $\overline{U}$ 相交与点 $x = \omega + a \cdot p$. 为了说明唯一性, 设 $y = \omega + b \cdot p$ 是另一个与边界的交点, 且 $b > a$, 则 x 落在 L 上的 ω 与 y 之间, 即存在 $t \in (0, 1)$, 使

得 $x=(1-t)\,\omega+ty$, 从而 $\omega=(x-ty)\,/\,(1-t)$. 选择 U 中的一列收敛与 y 的点 $\{y_n\}$, 置 $\omega_n=(x-ty_n)\,(1-t)$, 则 ω_n 收敛到 ω, 并且 $x=(1-t)\,\omega_n+ty_n$. 当 n 充分大时, ω_n 落在 U 中, 而 y_n 本身都落在 U 中, 由于 U 的凸性, x 落在 U 中, 矛盾.

2. 不失一般性, 不妨设 ω 是原点. 映射 $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{S}^{n-1}$, $f\,(x)=\frac{x}{\|x\|}$ 是满的连续映射. 由 1., f 早 $\mathrm{Bd}\,(U)$ 上的限制是 $\mathrm{Bd}\,(U)$ 到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的双射. 由于 $\mathrm{Bd}\,(U)$ 是紧集, 且 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 Hausdorff 的, 所以 f 是它们之间的同胚映射. 令 g 是逆映射, 将 g 延拓到 $G:\mathbb{D}^n\to\overline{U}$

$$G\,(x):=\begin{cases}\|x\|\,g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

事实上, G 将 $\mathbb{D}^n$ 连接原点到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一点 u 的线段, 映到 U 上连接原点和 $g\,(u)$ 的线段. G 是连续的双射, 且从紧集 $\mathbb{D}^n$ 映到 Hausdorffd 空间 $\overline{U}$ 上, 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制为 g.

□

命题 24.8

$\mathrm{Cl}\,(\sigma^k)$ 是 $\mathbb{D}^k$ 的一个三角剖分, 故 $\mathbb{D}^k$ 是一个多面体. 进而欧氏空间上任意紧的凸子集都是多面体.

定义 24.12

设 K 是 k-维单纯复形. 对于每个 $r, 0\leq r\leq k$, 令 K^r 表示 K 的所有维数 $\leq r$ 的单形的集合. K^r 是一个 r-为单纯复形, 被称为是 K 的 r-维骨架.

Remark

1. 此时空间 $|K^r|$ 是 $|K|$ 的一个直线子多面体.

Example 24.2 (球面) 令 σ^k 是 k-单形, $k\geq 1$. $K=\mathrm{Cl}\,(\sigma^k)$ 是由 σ^k 的所有面构成的单纯复形. 令 K^{k-1} 是 K 的 $(k-1)$ 维骨架, 则 K^{k-1} 由 σ^k 的所有真面组成. $\left|K^{k-1}\right|$ 同胚于

$$\mathbb{S}^{k-1}=\left\{(x_0,\cdots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^k:\sum_{0}^{k-1}x_i^2=1\right\}$$

这表明每个 k-球面 $\mathbb{S}^k$ 都是一个多面体, 并且 $(k+1)$-单形的全体真面构成 $\mathbb{S}^k$ 的一个三角剖分.

命题 24.9

若 K 是单纯复形, 则 $|K|$ 是紧的度量空间, 进而任意多面体都是紧的.

Proof

$|K|$ 是有限个单形（紧空间）的并, 从而是紧的. 多面体都与某个单纯复形同胚.

□

定义 24.13 (边界)

设 K 是单纯复形, K 的 **边界**, 记作 ∂K, 被定义为

$$\partial K = \{\tau : \tau \text{是属于唯一的} k \text{的} (k+1) \text{-单形的一个} k \text{-单形的一个面}\}$$

换言之, ∂K 由 K 的所有极大单形的真面, 以及该真面的所有面组成.

Remark

1. ∂K 是维数为 $\dim K - 1$ 的 K 的子复形.

定义 24.14 (单纯映射)

设 K 和 L 是两个单纯复形. 称映射 $f : K \to L$ 是一个单纯映射, 若 $\langle a_0, \cdots, a_k \rangle$ 是 K 的一个单形蕴含 $\langle f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_k) \rangle$ 是 L 的一个单形（消去重复下）.

定义 24.15 (单纯同构)

称单纯映射 $f : K \to L$ 是一个单纯同构, 若 f 可逆且逆映射也为单纯映射.

Remark

1. f 是单纯同构每当且仅当以下成立:

$$\langle v_0, \cdots, v_k \rangle \text{是} K \text{的一个单形} \iff \langle f(v_0), f(v_1), \cdots, f(v_k) \rangle \text{是 } L \text{ 的一个单形}$$

命题 24.10 (诱导映射)

令 $f : K \to L$ 是一个单纯映射. 则存在连续的诱导映射 $|f| : |K| \to |L|$, 按以下方式定义: 若 $x \in |K|$, 则 x 属于唯一的单形 $\langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ 的内部. 记 $x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i$, 则定义 $|f|(x) := \sum_{i=0}^{k} t_i f(v_i)$

定义 24.16

称单纯复形 K 是连通的, 若对于 K 的任意一对顶点 a, b, 存在一列 K 上的 1-单形 $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$, $i = 0, 1, \cdots, p-1$, 使得 $a = a_0, b = a_p$

24.3 单纯估计

单纯复形几何载体间的连续映射，一般来说都不是单纯的（只有有限个）. 我们试图寻找一种估计，找到与连续映射同伦的单纯映射. 我们定义一种映射单纯映射与连续映射的关系，叫 **单纯估计**，这种关系通过 **顶点的开星**来表述. 单纯估计可以直接导出**同伦**. 本节处理一种最简单的情况，在已知单纯形是 **星-相关**的情况下处理. 过程中，需要用到当顶点的 ost 有怎样的行为时，K 中的顶点构成单形.

内容提要

- 顶点的星、开星
- 单纯估计
- 单纯估计导出同伦
- 星-相关
- 顶点构作子单形的条件
- 星-相关时的单纯估计定理

定义 24.17

设 K 是单纯复形，v 是 K 的一个顶点. 定义 v 的**星**，记作 $\mathrm{st}\,(v)$，为

$$\mathrm{st}\,(v) := \left\{\sigma \in K : v\text{是}\sigma\text{的一个顶点}\right\}$$

定义 v 的 **开星**，记作 $\mathrm{ost}\,(v)$，为

$$\mathrm{ost}\,(v) := \bigcup \left\{\mathrm{int}\,(\sigma) \subseteq K : v\text{是}\sigma\text{的一个顶点}\right\}$$

♣

Remark

1. $\mathrm{ost}\,(v)$ 是 K 的开子集.
2. $f_v^{-1}(0,1] = \mathrm{ost}\,(v)$，其中 f_v 是重心坐标关于顶点 v 的投影.

定义 24.18 (单纯估计)

令 $h : |K| \to |L|$ 是连续映射. 称单纯映射 $g : K \to L$ 是 h 的一个单纯估计，若对于每个 K 的顶点 v，都有 $h\,(\mathrm{ost}\,(v)) \subseteq \mathrm{ost}\,(g\,(v))$.

♣

命题 24.11

若 $g_1 : K \to L$ 是 $f_1 : |K| \to |L|$ 的单纯估计，并且 $g_2 : L \to M$ 是 $f_2 : |L| \to |M|$ 的单纯估计. 则 $g_2 \circ g_1 : K \to M$ 是 $f_2 \circ f_1$ 的一个单纯估计.

♠

定义 24.19 (星相关)

设 K 和 L 是单纯复形, $f:|K|\to|L|$ 是连续映射. 称 K 关于 f **星相关**于 L，若对于每个 K 的顶点 v, 存在 L 的顶点 v', 使得

$$f\left(\operatorname{ost}(v)\right)\subseteq\operatorname{ost}\left(v'\right)$$

命题 24.12

单纯复形 K 的一个顶点集 $\{v_0,\cdots,v_n\}$ 构成 K 的一个单形, 当且仅当 $\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}(v_i)$ 非空.

Proof

若 $\sigma^n=\langle v_0,\cdots,v_n\rangle$ 是 K 的一个单形, 则 $\operatorname{int}(\sigma^n)\subseteq\operatorname{ost}(v_i),i=0,1,\cdots,n$, 从而 $\varnothing\neq\operatorname{int}(\sigma^n)\subseteq\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}(v_i)$.

反之, 若 $\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}(v_i)\neq\varnothing$，取其中一点 x. 对于每个 $i=0,1,\cdots,n$, 存在 K 的单形 σ_i, 使得 $x\in\operatorname{int}\sigma_i$, 并且 v_i 是 σ_i 的一个顶点. 注意到任意 K 的两个开单形的交要么相等, 要么为空. 因此 $\operatorname{int}(\sigma_0)=\cdots=\operatorname{int}(\sigma_n)$. $v_0,\cdots,v_n$ 均为 σ_0 的顶点, 进而 $\langle v_0,\cdots,v_n\rangle\in K$. □

定理 24.1

令 $f:|K|\to|L|$ 是连续映射. 设 K 关于 f 星相关于 L. 则存在单纯映射 $g:K\to L$, 使得 g 是 f 的一个单纯估计. 特别地, $|g|:|K|\to|L|$ 同伦于 f.

Proof 由于 K 是关于 f 星相关于 L 的, 我们可以采取以下方式定义一个从 K 的顶点到 L 顶点的映射 $g:K\to L$, 对于每个 K 的顶点 v, 令 $g(v)$ 是 L 的顶点, 使得

$$f\left(\operatorname{ost}(v)\right)\subseteq\operatorname{ost}\left(g(v)\right)$$

接下来说明 g 是单纯映射. 若 $v_0,\cdots,v_n$ 是 K 的顶点, 使得 $\langle v_0,\cdots,v_n\rangle$ 是 K 的一个单形, 则

$$\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}(v_i)\neq\varnothing$$

我们有

$$\varnothing\neq f\left(\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}(v_i)\right)\subseteq\bigcap_{i=0}^{n}f\left(\operatorname{ost}(v_i)\right)\subseteq\bigcap_{i=0}^{n}\operatorname{ost}\left(g(v_i)\right)$$

由上面的命题, $g(v_0),\cdots,g(v_n)$ 构成 L 的一个单形.

接下来说明 $|g|$ 和 f 同伦. 任取 $x\in|K|$, 令 $\sigma=\langle v_0,\cdots,v_n\rangle$ 是内部包含了 x 的唯一的 K 的单形, 则 σ 也是包含了 x 的维数最小的 K 的单形. 则 $x\in\operatorname{ost}(v_i),i=0,1,\cdots,n$.

我们有，

$$f(x) \in f(\operatorname{ost}(v_i)) \subseteq \operatorname{ost}(g(v_i)), i = 0, 1, \cdots, n$$

这表明存在 L 的单形 τ_x，使得 $f(x) \in \operatorname{int}(\tau_x)$，并且 $g(v_0), \cdots, g(v_n)$ 都是 τ_x 的顶点。另一方面，设

$$x = t_0 v_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

则由 $x \in \operatorname{int}(\sigma)$，可知 $t_i > 0, i = 0, 1, \cdots, n$. 根据构造，

$$|g|(x) = t_0 g(v_0) + t_1 g(t_1) + \cdots + t_n g(v_n)$$

其中 $g(v_0), \cdots, g(v_n)$ 可能有重复项，但是无论如何，$g(x)$ 的各分量均为正，这表明 $g(x)$ 位于 $g(v_0), \cdots, g(v_n)$ 构成的单形的内部. 综上，$g(x)$ 和 $f(x)$ 总落在同一个单形 τ_x 上. 可以定义映射 $H : |K| \times I \to |L|$，

$$H(x, t) := (1 - t) f(x) + t|g|(x)$$

则由于 f 和 $|g|$ 均连续，且 $|L|$ 是欧氏空间的子集，因此 H 也连续. 因此 H 是 $f(x)$ 到 $g(x)$ 的同伦.

□

24.4 重心细分-单纯估计定理

我们希望对于一般的单纯复形的几何载体间的连续映射，找到对应的单纯估计，但是固定的单纯复形间的单纯映射只有有限多个，通常来说找不到足够精细的单纯映射来估计连续映射. 不过，我们可以对单纯复形做更精细的划分，并且保证几何载体不变，使得我们可以对单纯复形的几何载体做更细致的操作，以得到连续映射的单纯逼近. 这样做更精细的划分的操作，我们称之为 **重心细分**.

此外，为了可以逼近任意连续映射，我们希望可以让细分的粒度任意小，于是考察是否可以无限细分单纯复形，使得得到的复形中同一个单形上的点的距离可以任意的小.

最后，利用单形的边界（凸开集的边界）与球面的同胚，我们可以借助单纯估计研究球面上的同伦问题.

内容提要

- 重心细分
- 网径
- 重心细分的网径任意小
- 单纯估计定理
- 单纯估计在球面上的应用

定义 24.20 (重心)

令 $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 k-单形. 则 σ 的重心, 记作 $\dot{\sigma}$, 被定义为

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} v_i$$

即中心坐标分量皆相等的点. ♣

定义 24.21

令 K 是单纯复形. $K^{(1)}$ 是另一个单纯复形, 它的顶点是 K 的所有单形的重心, 并且对于 K 的不同的单形 $\sigma_0, \cdots, \sigma_n$, $\langle \dot{\sigma_0}, \cdots, \dot{\sigma_n} \rangle$ 是 $K^{(1)}$ 的单形, 当且仅当对于每个 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, σ_i 是 σ_{i+1} 的一个面. 这样的 $K^{(1)}$ 被称为是 K 的第一重心细分.

我们归纳地定义 K 的第 n 重心细分 $K^{(n)}$, 为 $K^{(n-1)}$ 的第一重心细分, $n > 1$. 此外, 约定 $K^{(0)} = K$. ♣

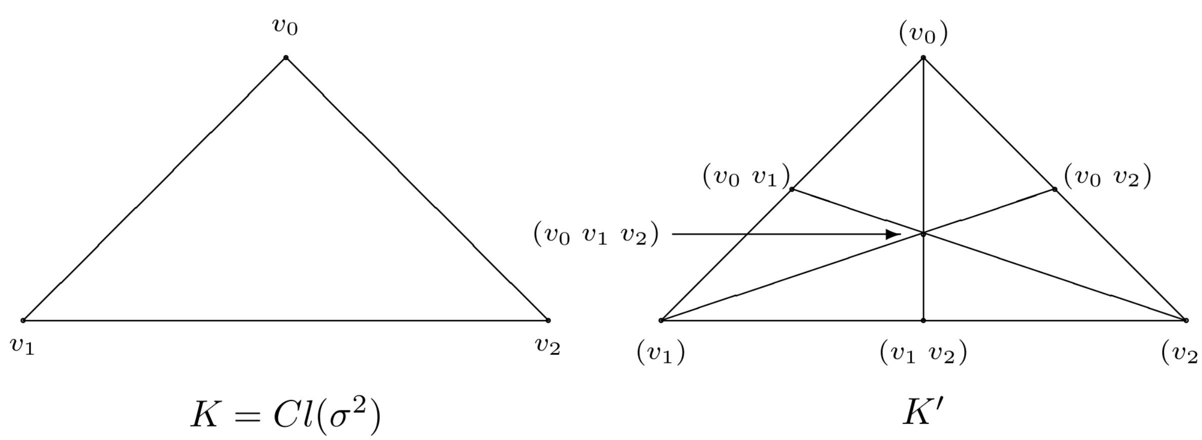

图 24.1: 重心细分

定义 24.22

令 K 是单纯复形. 定义 K 的网径, 记作 $\mathrm{mesh}\,(K)$, 为

$$\mathrm{mesh}\,(K) = \max\left\{\mathrm{diam}\,(\sigma) : \sigma\text{是}K\text{的一个单形}\right\}$$ ♣

引理 24.1

令 σ 是正维数的单形. 则存在 σ 的顶点 v, w, 使得 $\mathrm{diam}\,(\sigma) = \|v - w\|$. ♡

Proof 只需要证明同一单形上任意两点的距离都小于等于某两个顶点的距离即可.

令 $\sigma=\langle v_0,\cdots,v_q\rangle$, $x,y\in\sigma$. 令 $y=\sum_{i=0}^{q}t_iv_i$. 则

$$\begin{aligned}\|x-y\|&=\left\|\sum_{i=0}^{q}t_ix-\sum_{i=0}^{q}t_iv_i\right\|\\&\le\sum_{i=0}^{q}t_i\left\|x-v_i\right\|\\&=\max_{i=0,1,\cdots,q}\left\|x-v_i\right\|\end{aligned}$$

对于每个 $i=0,1,\cdots,q$, 用 v_i 代替 x, 用 x 代替 y, 得到

$$\|v_i-x\|\le\max_{j=0,1,\cdots,q}\|v_j-v_i\|$$

综合以上两式, 我们得到对于任意的 $x,y\in\sigma$,

$$\|x-y\|\le\max_{i,j=0,1,\cdots,q}\|v_j-v_i\|$$

另一方面, 对于任意的 $i,j=0,1,\cdots,q$, $\|v_j-v_i\|\le\operatorname{diam}(\sigma)$, 因此

$$\max_{i,j=0,1,\cdots,q}\|v_j-v_i\|=\operatorname{diam}(\sigma)$$

特别地, 由于 K 中只有有限个单形, 我们可以令 σ 是 diam 最大的 K 的单形, 并取 v,w 为 σ 的距离最大的两个顶点, 于是就有

$$\|v-w\|=\operatorname{diam}(\sigma)=\operatorname{mesh}(K)$$

□

定理 24.2

令 K 是正维数的单纯复形, 则 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{mesh}\left(K^{(n)}\right)=0$

♡

Proof 设 K 是正维数的单纯复形, $\dim K=m$. 设 $K^{(n)}$ 是 K 的第 n 重心细分. 考察 $K^{(n+1)}$ 的网径, 由引理知存在 $K^{(n+1)}$ 的两个顶点 $\dot{\tau},\dot{\sigma}$, 使得

$$\operatorname{mesh}\left(K^{(n+1)}\right)=\|\dot{\tau}-\dot{\sigma}\|$$

并且 τ,σ 是 $K^{(n)}$ 的两个单形, 使得 σ 是 τ 的一个面, $\dot{\sigma}$ 和 $\dot{\tau}$ 分别是对应的重心. 设

$\tau=\langle v_0,\cdots,v_q\rangle, q\leq m$. 则 $\dot{\tau}=\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{q+1}v_i$, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{mesh}\left(K^{(n+1)}\right)&=\|\dot{\tau}-\dot{\sigma}\|\\&=\left\|\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{1}{q+1}v_i-\frac{1}{q+1}\dot{\sigma}\right)\right\|\\&\leq\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{q+1}\|v_i-\dot{\sigma}\|\\&\leq\frac{q}{q+1}\operatorname{mesh}\left(K^{(n)}\right)\\&\leq\frac{m}{m+1}\operatorname{mesh}\left(K^{(n)}\right)\end{aligned}$$

因此

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\operatorname{mesh}\left(K^{(n)}\right)\leq\operatorname{mesh}(K)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n=0$$

□

定理 24.3 (单纯估计定理)

令 $f:|K|\to|L|$ 是连续映射. 则存在 K 的重心细分 $K^{(k)}$, 以及单纯映射 $g:K^{(k)}\to L$, 使得 g 是 f 的一个单纯估计. 特别地, $|g|:\left|K^{(k)}\right|=|K|\to|L|$ 同伦于 f. ♡

Proof $\{\operatorname{ost}(v):v\text{是}L\text{的一个顶点}\}$ 构成 $|L|$ 的一个开覆盖, 由于 $|L|$ 是紧的度量空间, 它存在 Lebesgue 数 η, 使得 $|L|$ 上任意半径小于 η 的开球都含于某个 $\operatorname{ost}(v_0)$, 其中 v_0 是 L 的一个顶点. 又 $|K|$ 是紧的度量空间, f 是连续映射, 因此 f 在 $|K|$ 上一致连续, 从而存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $x_1,x_2\in|K|$, 只要 $\|x_1-x_2\|<\delta$, 就有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|<\eta$. 由 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{mesh}\left(K^{(n)}\right)=0$, 可知存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\operatorname{mesh}\left(K^{(k)}\right)<\frac{1}{2}\delta$. 现在, 任取 $K^{(k)}$ 的顶点 v, 则 $\operatorname{ost}(v)$ 含于 $|K|$ 上以 v 为原点, $\frac{1}{2}\delta$ 为半径的开球, 进而 $f(\operatorname{ost}(v))$ 含于以 $f(v)$ 为原点, η 为半径的开球, 进而存在 $|L|$ 的顶点 v', 使得

$$f(\operatorname{ost}(v))\subseteq\operatorname{ost}(v')$$

这表明 $K^{(k)}$ 是关于 f 星相关于 L 的, 由星相关情况的单纯估计定理24.1, 此定理成立.

□

定义 24.23 (n-连通)

称拓扑空间 X 是 $n-1$-连通的 ($n\geq0$) , 若对于每个 $k\leq n$, 任意从 $\mathbb{S}^k$ 到 X 的连续映射都是零伦. ♣

定理 24.4

对于每个 $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ 是 $(n-1)$-连通的.

Proof 任取 $k \leq n$, 设 σ^{k+1} 和 σ^{n+1} 是单形, K, L 分别表示对应的 k,n 骨架. 则 K 和 $\mathbb{S}^k$ 同胚, L 和 $\mathbb{S}^n$ 同胚. 设 h 和 h' 分别设 K 到 $\mathbb{S}^k$, L 到 $\mathbb{S}^n$ 的同胚映射, 任取 $\mathbb{S}^k$ 到 $\mathbb{S}^n$ 的连续映射 f, 我们有交换图

$$\begin{tikzcd} |K| \arrow[r, "g=h\circ f\circ(h')^{-1}"] \arrow[d, "h"'] & |L| \arrow[d, "h'"] \\ \mathbb{S}^k \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$

由同伦对复合映射的保持, 我们知道 f 是零伦当且仅当 g 是零伦. 由单纯估计定理, 存在单纯映射 $g' : K \to L$, 使得 g' 是 g 的一个单纯估计, 我们也记 g' 的诱导映射为 $g' : |K| \to |L|$, 则 g' 和 g 同伦. 注意到从低维单纯复形到高维单纯复形的单纯映射一定是非满的, 因此存在 $p \in |L|$, 使得 $g' : |K| \to |L| - \{p\}$. 又 $|L| - \{p\}$ 同胚于 $\mathbb{S}^n \setminus \{h'(p)\}$, 进而通过球极投影同胚于可缩空间 $\mathbb{R}^n$. 我们发现 $|L| - \{p\}$ 是可缩的, 因此 g' 是零伦, 进而 g, f 均是零伦. 这表明 $\mathbb{S}^n$ 是 $(k-1)$-连通的, 由 k 的任意性可知命题成立. $\square$

推论 24.1

n-球面 $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ 是单连通的.

24.5 广义单纯复形

观察单形和单纯复形的形式, 我们可以将顶点抽象成点单集,2-单形抽象成二元集, 以此类推, k-单形抽象成 k 元素集. 对面的封闭性, 就可以看是对元素的非空子集的封闭性, 例如若要使 $\{\{a,b\}\}$ 对取子集封闭, 需要添加 $\{a\}$ 和 $\{b\}$, 得到集合 $\{\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$. 这样就可以抽象出单纯复形的概念.

对于抽象的单形的实现, 可以先看成是顶点的形式和空间的一个系数和为 1 的子集, 再将其对偶地嵌入到欧氏空间当中去. 由于我们可以直接将单形嵌入到无穷维实对偶空间上去, 可以放宽单纯复形的条件, 允许定义任意由任意多个单形组合在一起, 得到广义单纯复形的概念, 它的几何对象可以在无穷维欧氏空间上得到实现.

单纯复形的几何实现上可以自然地赋予两种拓扑, 一种是相干拓扑, 一种是无穷维欧氏空间的子空间拓扑. 考虑到将单纯复形视为单形的组合的观点, 我们通常赋予几何实现以前者的拓扑.

内容提要

- 抽象单纯复形
- 抽象单纯复形的几何实现
- 多面体及其拓扑-相干拓扑

定义 24.24

一个抽象单纯复形是指有限个非空子集构成的集合 K, 使得若 A 是 K 中的元素, 则 A 的任意非空子集亦然.

称 K 中的每一个元素为一个单形. ♣

定义 24.25

设 $\mathcal{K}$ 是抽象单纯复形, $\{v_\alpha : \alpha \in J\}$ 是 $\mathcal{K}$ 的顶点集, 其中 J 是指标集. 考虑集合

$$\mathbb{R}^J = \{f : J \to \mathbb{R} : f(v_\alpha) = 0 \text{对于除有限个}\alpha\text{外成立}\}$$

则显然 $\mathbb{R}^J$ 是 $\mathbb{R}$-线性空间, 可以分解为 J 的基数多个 $\mathbb{R}$ 的直和. ♣

Remark

1. $\mathbb{R}^J$ 上有自然的基 $\{\varepsilon_\alpha : \alpha \in J\}$, 其中

$$\varepsilon_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

2. $\mathbb{R}^J$ 上可以定义度量

$$d(f, g) = \sqrt{\sum_{\alpha \in J} (f(v_\alpha) - g(v_\alpha))^2}$$

定义 24.26 (几何实现)

设 $\mathcal{K}$ 是单纯复形, $(v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_k})$ 是 $\mathcal{K}$ 的一个 k-单形. 称集合

$$\left\{ f \in \mathbb{R}^J : \sum_0^k f(v_{\alpha_i}) = 1, 0 \leq f(v_{\alpha_i}) \leq 1 \right\} = \left\{ \sum_0^k t_i \varepsilon_{\alpha_i} : \sum_0^k t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

为 $(v_{\alpha_0}, v_{\alpha_1}, \cdots, v_{\alpha_k})$ 对应的几何单形. $\mathcal{K}$ 的全体集合单形的并被称为是 $\mathcal{K}$ 的几何实现, 记作 $|K|$. ♣

1. $|K|$ 上存在 $\mathbb{R}^J$ 的子空间拓扑, 并且有继承的度量, 对应的拓扑空间记作 $|K|_d$.

定义 24.27

设 $\mathcal{K}$ 是抽象单纯复形, $|K|$ 是它的几何实现. $|K|$ 的每个几何单形都位于一个有限为欧氏空间上, 在取对应的子空间拓扑下为紧的空间. 定义 $|K|$ 上的相干拓扑, 为使得所有含入映射 $i:(\varepsilon_{\alpha_0},\varepsilon_{\alpha_1},\cdots,\varepsilon_{\alpha_k})\to|K|$ 连续的最精细的拓扑, 其中 $(\varepsilon_{\alpha_0},\cdots,\varepsilon_{\alpha_k})$ 是 $\mathcal{K}$ 的任意几何单形. 对应的拓扑空间就记作 $|K|$, 称为是广义单纯复形或多面体. 换言之, F 是 $|K|$ 上的开集, 当且仅当对于任意的 $|K|$ 的几何单形 σ, $F\cap\sigma$ 是闭集.

定义 24.28

称拓扑空间 X 是可三角剖分的, 若存在抽象单纯复形 K, 以及同胚映射 $f:|K|\to X$, 其中 $|K|$ 被赋予相干拓扑.

定理 24.5

令 X 是拓扑空间, $f:|K|\to X$ 是映射. 则 f 连续当且仅当对于每个 K 的单形 σ, $f|_\sigma$ 连续.

Proof 连续映射的限制映射也是连续的, 只需要证明反方向.

若对于任意的单形 $\sigma\in K$, $f|_\sigma$ 连续, 令 F 是 X 的闭集, 则对于每个 σ,

$$(f|_\sigma)^{-1}(F)=f^{-1}(F)\cap\sigma$$

是 σ 上的闭集, 因此 $f^{-1}(F)$ 在 $|K|$ 上是闭的. 这表明 f 连续.

□

命题 24.13

令 L 是 K 的子单形, 则 $|L|$ 是 $|K|$ 的闭子空间.

定理 24.6

多面体 $|K|$ 是 Hausdorff 的.

第 24 章 练习

1. 令 $\sigma^n=\langle v_0,\cdots,v_n\rangle$ 是 n-单形, 给出 σ^n 的面数的公式.

   Proof 面数即为 $\mathrm{Cl}(\sigma)$ 的元素个数一一对应, 而 $\mathrm{Cl}(\sigma)$ 与 $\{a_0,\cdots,a_n\}$ 的全体非空子集一一对应, 个数为 2^n-1.

   □

2. 证明 $\mathbb{R}^n$ 的每个紧的凸子集都是可三角剖分的.

Proof

$\mathbb{R}^n$ 上的紧凸子集是否是流形?

$\square$

第 25 章　单纯同调

25.1　单纯复形的定向

定义 25.1 (单形的定向)

若在 $v_0, \cdots, v_n$ 上规定一个顺序，使得 $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$. 称以 $v_0, \cdots, v_n$ 为顶点的单形是正定向的，记作 $+\sigma^n$，若存在 $0, \cdots, n$ 的一个偶置换 τ，使得

$$+\sigma^n = \left\langle v_{\tau(0)}, v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(n)} \right\rangle$$

类似地可以定义负定向的单形 $-\sigma^n$.

定义 25.2 (单纯复形的定向)

称单纯复形 K 是定向的，若它的每个单形都被规定了一种定向.

Remark

1. 这里不看单形的定向和它的面的定向的关系，仅仅是把每个单形单独拿出来考虑定向.

定义 25.3 (关联数)

设 K 是定向的单纯复形，σ^p 和 σ^{p+1} 是 K 的两个维数相差 1 的单形. 对于每对这样的 (σ^{p+1}, σ^p)，定义它们的关联数，记作 $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$，按以下方式：若 σ^p 不是 σ^{p+1} 的一个面，则令 $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. 若 σ^p 是 σ^{p+1} 的一个面，我们标记 σ^p 的顶点，使得 $+\sigma^p = \langle v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle$. 令 v 是 σ^{p+1} 额外的顶点，则定义

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] := \begin{cases} 1, & \langle v, v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle = +\sigma^{p+1} \\ -1, & \langle v, v_0, v_1, \cdots, v_p \rangle = -\sigma^{p+1} \end{cases}$$

定理 25.1

令 K 是定向的单纯复形. 若 σ^{p-2} 是 K 的单形 σ^p 的一个 $(p-2)$-面，则

$$\sum [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^p] = 0$$

其中和式为对所有 K 的 $(p-1)$-单形 σ^{p-1} 的求和.

Proof

令 $v_0, v_1, \cdots, v_{p-2}$ 是 σ^{p-2} 的顶点，使得 $+\sigma^{p-2} = \langle v_0, v_1, \cdots, v_{p-2} \rangle$，令 a, b 是 σ^p 的

另外两个顶点. 不妨设 $+\sigma^p = \langle a, b, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2}\rangle$. 则使得上述和式的项非零的 $(p-1)$ 单形只有两个, 分别是

$$\sigma_1^{(p-1)} = \langle a, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2}\rangle, \quad \sigma_2^{(p-1)} = \langle b, v_0, v_1, \cdots, v_{p-2}\rangle$$

这两个 $(p-1)$ 单形都可能各自带有正、负的定向, 一共四种情况, 通过枚举可以验证定理成立.

□

25.2 单纯复形和同调

想象我们是一个任意 q 维数的生物, 在一个单纯复形 K 上来回乱窜, 每次都“通过”K 上的一个 q-单形. 为每个单形规定一个方向, 则沿着单形的方向通过, 我们就记作 $+1$, 沿相反方向通过, 就记作 -1. 在一系列乱窜之后, K 的每个 q- 单形都被标记了一个整数, 这就是我们按特定方向通过的“次数”(相反方向的通过可以被抵消), 这样一个一系列通过的行为就可以看成是一个 q- 链.

这样的乱窜行为是可以相加的, 并且我们还能原路返回 (逆元), 此外由于我们只关心通过的次数, 加法也是可以交换的, 于是全体的 q-链就构成了一个阿贝尔群 $C_q(K)$.

当然, 我们可以把“通过的次数”换是别的什么阿贝尔群 G. 我们的一个 q-链的行为, 可以看成是在每个 q-单形的某个 G 的行为, 它们组合在一起, 得到了 K 上的一个一堆 G 的行为, 这就是说 $C_q(K)$ 同构于 K 的 q-单形份的 G 的直和.

总结一下就是说, 对于单纯复形 K, 可以有一个函子 C_q , 把 K 的每个 q-单形打到一个群 G, 函子就把 K 打到若干份 G 的直和 $C_q(K)$ 上去.

到这里可以发现, 虽然我们规定了定向, 但是最后的群结构 $C_q(K)$ 本质上跟定向没什么关系, 无非是某些 G 差个了“-”, 但这不影响群的结构. 那么我们上一节研究了半天的定向还有意义吗? 通过一个单形时, 也可以认为顺便按特定方向通过了它的边界, 我们在 K 上乱窜的行为也在边界上留下了记号, 而这个记号是跟方向有关的. 当连续地通过若干 q-单形并回到原位时, 一路上顺带通过的 $(q-1)$-边界正好正负抵消归零, 或者说通过边界的指标和是否归零, 判定了我们是否走过了一个“循环”, 这样就得到了 q-循环的定义, 放在一起构成群 $Z_q(K)$.

沿着 q-单形的边界走, 我们会走出一个 $(q-1)$-循环, 但是一个 $(q-1)$-循环可能往往无法做成某个一些 q-单形的边界, 一个循环离成为边界远的程度, 就是同调群 $H_q(K)$ 所描述的对象, 后续可以看到它是拓扑不变的, 是我们这里研究的最重要的对象, 提供了探测拓扑空间的“洞”的一种手段.

内容提要

- q-链, 链群, 系数群
- 边界映射
- q-循环群和 q-边界群
- 同调群
- 同调群的定向无关性

定义 25.4

设 K 是一个单纯复形, 它的顶点都规定了顺序. 令 $\tilde{S}_q$ 表示 K 的全体定向的 q-单形. 对于 $q \geq 1$, 由于每个 q- 单形有两种定向, $\tilde{S}_q$ 的元素个数就是 K 的 q-单形数的两倍.

另外, 记 S_q 为 K 的全体正定向的 q-单形.

定义 25.5 (q-链)

设 K 是单纯复形, 令 $0 \leq q \leq \dim K$, $\mathbb{Z}$ 是整数加群. 对于 $q \geq 1$, K 的一个 q-链是指, 一个映射 $f : \tilde{S}_q \to \mathbb{Z}$, 使得 $f\left(-\sigma^q\right) = -f\left(\sigma^q\right)$. $q = 0$ 时, 0-链无非是把每个 K 的顶点映到一个整数.

定义 25.6 (链群)

沿用上述记号, 易见 K 的全体 q-链构成的集合, 记作 $C_q\left(K\right)$, 构成一个阿贝尔群, 称为是 K 的 q-维链群. 对于 $q < 0$ 或 $q > \dim K$, 定义 $C_q\left(K\right) = 0$.

定义 25.7

对于 K 中正定向的 q-单形 σ^q, 定义 q-链 $\bar{\sigma}^q$

$$\bar{\sigma}^q\left(\tau^q\right) = \begin{cases} +1, & \tau^q = \sigma^q \\ -1, & \tau^q = -\sigma^q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

称为是 K 的一个基础 q-链.

命题 25.1

对于每个 $q \geq 0$, $C_q\left(K\right) = \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\sigma}^q, \sigma^q \in S_q$

Remark

1. 可以把 $\bar{\sigma}^q$ 视同 $\sigma^p = 1_{\mathbb{Z}} \cdot \sigma^p$, 认为 $C_q\left(K\right) \simeq \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} \mathbb{Z} \cdot \sigma^q$

定义 25.8

上述一切定义和命题，都可以将 $\mathbb{Z}$ 替换成任意阿贝尔群 G，得到 G-系数 q-链的概念. 相应的链群就记作 $C_q(K;G)$，G 称为是系数群. 我们有同构 $C_q(K;G) \simeq \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} G \cdot \sigma^q$

Remark

1. 一开始的 $C_q(K)$ 就相当于是 $C_q(K;\mathbb{Z})$.

定义 25.9 (边界同态)

对于每个 q，$0 \leq q \leq \dim K$，定义同态 $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$，称为是边界同态，按以下方式定义：

先对于 $C_q(K)$ 的生成元 σ^q，定义

$$\partial_q(\sigma^q) := \sum_{i=0}^{q} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] \sigma_i^{q-1}$$

其中 σ_i^{q-1} 跑遍 σ^q 的 $(q-1)$ 个面，然后我们将 ∂_q 线性扩张到 $C_q(K)$ 上，即定义

$$\partial_q\left(\sum n_q \sigma^q\right) := \sum n_q \partial_q(\sigma^q)$$

对于 $q \leq 0$ 以及 $q > \dim K$，定义 ∂_q 为零同态（唯一可能存在的映射）.

Remark

1. 由于当 σ_i^{q-1} 不是 σ^q 的边界时，$[\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] = 0$，因此我们也可以在定义 $\partial_q(\sigma^q)$ 时让 σ_i^{q-1} 跑遍 K 的所有 $(q-1)$-单形，得到的结果没有区别.
2. 可以让 $C_q(K)$ 表示任意的 $C_q(K;G)$，其中 G 是系数群.

命题 25.2

若 $\sigma^q = \langle v_0, v_1, \cdots, v_q \rangle$，且 $v_0 < v_1 < \cdots < v_q$，则

$$\partial_q \langle v_0, v_1, \cdots, v_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots v_q \rangle$$

Remark

1. 可以避免引入关联数，直接用上面的式子作为边界算子的定义，只需要检查良定义性，即上式是否在一个偶置换下不变.

引理 25.1

对于每个 q，复合同态 $\partial_{q-1} \circ \partial_q : C_q(K) \to C_{q-2}(K)$ 是零映射.

Remark

1. 可以看出 $\mathrm{Im}\left(\partial_q\right) \subseteq \ker\left(\partial_{q-1}\right)$.

Idea

按定义展开，利用定理25.1计算关联数即可.

定义 25.10

设 K 是定向的复形.

1. 称一个 q-链 $z_q \in C_q(K)$ 是 K 的一个 q-循环，若 $\partial_q(z_q) = 0$. 记 $Z_q(K)$ 为 K 的全体 q-循环，它就是 $\ker \partial_q$.
2. 称一个 q-链 $b_q \in C_q(K)$ 是 K 的一个 q-边界，若存在 $c' \in C_{q+1}(K)$，使得 $\partial_{q+1}(c') = b_q$. 全体 K 的 q-边界记作 $B_q(K)$，它就是 $\mathrm{Im}\ \partial_{q+1}$

Remark

1. 易见 $B_q(K) \subseteq Z_{q-1}(K)$
2. 可以类似地定义 $Z_q(K;G)$ 和 $B_q(K;G)$,G 为系数群.

定义 25.11

若 $\dim K = n$，则存在自由阿尔贝群列

$$C(K): \quad \ldots 0 \to C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \to C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K)$$
$$\to \ldots \to C_0(K) \to 0 \to \ldots$$

成为 K 的定向单纯链复形.

Remark

1. 可以类似地定义 $C(K;G)$

定义 25.12

设 K 是定向单纯复形. 定义 K 的 q-维同调群为 $H_q(K)$

$$H_q(K) := Z_q(K) / B_q(K)$$

若考虑链复形 $C_*(K;G)$，则可以定义

$$H_q(K;G) := Z_q(K;G) / B_q(K;G)$$

成为 K 的 G 系数同调群.

Remark

1. 称 $H_q(K)$ 中的一个元素为一个同调类.
2. 若两个 q-链 z_q 和 z'_q 商去 $B_q(K)$ 相等，则称 z_q 和 z'_q 是同源的.

3. 一个 q-循环是一个 q-边界, 当且仅当它与 0 同源.

定理 25.2

令 K_1 和 K_2 是 K 通过配备两个定向得到的的单纯复形. 则 $H_q\left(K_1\right) \simeq H_q\left(K_2\right), \forall q \geq 0$.

♡

第 26 章 知识点总结

性质组合	$H^n(M;\mathbb{Z})$	$H^n(M;R)$ (R 是域, $R\neq\mathbb{Z}_2$)	$H^n(M;\mathbb{Z}_2)$
紧致且可定向	$\mathbb{Z}$	R	$\mathbb{Z}_2$
紧致且不可定向	0	0	$\mathbb{Z}_2$
非紧致且可定向	0	0	0
非紧致且不可定向	0	0	0

定理 26.1 (Kunneth 公式)

对于同调

$$H_k(X\times Y;R)\cong\left(\bigoplus_{i+j=k}(H_i(X;R)\otimes_R H_j(Y;R))\right)\oplus\left(\bigoplus_{i+j=k-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_i(X;R),H_j(Y;R))\right)$$

对于上同调

$$H^k(X\times Y;R)\cong\left(\bigoplus_{i+j=k}(H^i(X;R)\otimes_R H^j(Y;R))\right)\oplus\left(\bigoplus_{i+j=k+1}\mathrm{Ext}_R^1(H^i(X;R),H^j(Y;R))\right)$$

♡

特别地, 域上的 Kunneth 公式有简洁的形式

定理 26.2 (域上的 Kunneth 公式)

设 F 上一个域

对于同调

$$H_k(X\times Y;F)\cong\bigoplus_{i+j=k}(H_i(X;F)\otimes_F H_j(Y;F))$$

对于上同调

$$H^k(X\times Y;F)\cong\bigoplus_{i+j=k}(H^i(X;F)\otimes_F H^j(Y;F))$$

♡

Remark

1. 由此导出维数的计算公式, 从而可以方便地计算 Betti 数,Euler 示性式.
2. 在张量积环中, 乘积的定义为

$$(\alpha_1\otimes\beta_1)\cdot(\alpha_2\otimes\beta_2)=(-1)^{|\beta_1||\alpha_2|}(\alpha_1\cup\alpha_2)\otimes(\beta_1\otimes\beta_2)$$