# 目录

# 第 1 章　基本概念

**定义 1.1 (多重指标)**

1. 称 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ 为一个多重指标, 其中 $\alpha_k$ 是非负整数.
2. 设 $\alpha, \beta \in Z_+^N$, 定义

$$\alpha \geq \beta : \Longleftrightarrow \ \alpha_k \geq \beta_k, \forall k = 1, \cdots, N$$

3. 定义 $\alpha, \beta$ 的加法和减法为逐分量的加法和减法.
4. 定义 $|\alpha| := \sum_{k=1}^N \alpha_k$

**定义 1.2 (微分算子)**

设 $\alpha \in Z_+^N, |\alpha| = m$, 称

$$D^m := D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

为一个 $m$ 阶微分算子.

**定义 1.3 (线性微分算子)**

若微分算子 $L$ 满足

1. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$, 都有 $L[cu] = cL[u]$;
2. 对于任意的 $u_1, u_2$, 都有 $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$

则称 $L$ 为一个线性微分算子.

**定义 1.4**

线性微分算在 $L$ 作用在位置函数 $u(x)$ 上形成的方程称为线性偏微分方程

$$L[u] = \sum_{|\alpha| \leq m} \alpha_\alpha(x) D^\alpha u$$

**命题 1.1**

设 $L, M, N$ 是线性微分算子, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则

1. $L + M = M + L$
2. $(L + M) + N = L + (M + N)$
3. $(LM)N = L(MN)$
4. $L(c_1 M + c_2 N) = c_1 LM + c_2 LM$
5. 若 $L, M$ 具有常系数, 则 $LM = ML$

**定义 1.5**

一个偏微分方程（组）中最高阶微商的阶数称为方程的阶数.

**定义 1.6 (半线性 PDE)**

若 PDE 的最高阶微商项是线性的, 则称 PDE 是半线性的.

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u = D^\alpha u + a_0\left(D^{m-1}u, D^{m-2}u, \cdots, Du, u, x\right) = 0$$

**定义 1.7 (拟线性)**

若 PDE 的最高阶微商项是线性的, 且系数依赖与自变量, 位置函数以及它的低阶微商项, 即

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\left(D^{m-1}u, D^{m-2}u, \cdots, Du, u, x\right) D^\alpha u + a_0\left(D^{m-1}u, D^{m-2}u, \cdots, Du, u, x\right) = 0$$

**定义 1.8 (完全非线性)**

称 PDE 是完全非线性的, 若它关于最高阶微商是非线性的.

## 1.1 二阶 PDE 的分类

在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, 考虑以下形式的二阶 PDE

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

若 $F$ 形如

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = F_1(x,y)u + F_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F_4(x,y)$$

则二阶 PDE 是线性的. 设 $A, B, C$ 连续可微, $F$ 是 $\Omega \times \mathbb{R}^3$ 上的连续函数.

**定义 1.9 (判别式)**

定义

$$D(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$

对于二阶线性 PDE, 设 $(x_0, y_0) \in \Omega$

1. 若 $D(x_0,y_0) > 0$, 称方程在 $(x_0,y_0)$ 处是双曲型的.
2. 若 $D(x_0,y_0) = 0$, 称方程在 $(x_0,y_0)$ 处是抛物型的.
3. 若 $D(x_0,y_0) < 0$, 称方程在 $(x_0,y_0)$ 处是椭圆型的.

**定理 1.1**

非奇异变换不改变方程的类型. 考虑非奇异变换

$$T:\Omega\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(\xi,\eta)$$

使得 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}$$

在 $\Omega$ 上处处非零. 令

$$v(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

得到关于 $v$ 的方程

$$A^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+2B^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+C^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=F^*\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$$

其中

1.
$$A^*(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

2.
$$B^*(\xi,\eta)=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

3.
$$C^*(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

若令

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

则

(a). $A^*=(\xi_x,\xi_y)\,M\begin{pmatrix}\xi_x\\ \xi_y\end{pmatrix}$

(b). $B^*=(\xi_x,\xi_y)\,M\begin{pmatrix}\eta_x\\ \eta_y\end{pmatrix}$

(c). $C^*=(\eta_x,\eta_y)\,M\begin{pmatrix}\eta_x\\ \eta_y\end{pmatrix}$

判别式的关系为

$$D(x,y)=B^{*2}-A^*(\xi,\eta)C^*(\xi,\eta)=J^2\left(B^2(x,y)-A(x,y)C(x,y)\right)$$

**定义 1.10**

考虑方程

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+C=0$$

它的根是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

这些方程被称为是 **??**的特征方程. 是 Oxy 平面上沿着 $\xi,\eta$ 为常数的曲线族的常微分方程. ♣

**命题 1.2**

设特征方程的解为

$$\varphi_1(x,y)=c_1,\quad \varphi_2(x,y)=c_2$$

其中 $c_1,c_2$ 为常数, 在变换

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y)$$

下, 方程**??**转化为标准方程. ♠

**Proof** 方程化为标准形式, 当且仅当

$$A^*(\xi,\eta)=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=0$$
$$C^*(\xi,\eta)=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2=0$$

当且仅当

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2+2B\frac{\zeta_x}{\zeta_y}+C=0$$

对于 $\zeta=\xi,\eta$ 成立. 用 $\varphi$ 代替 $\varphi_1,\varphi_2$, 则

$$0=\mathrm{d}\varphi(x,y)=\varphi_x\,\mathrm{d}x+\varphi_y\,\mathrm{d}y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

带入特征方程, 得到

$$A\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2B\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+C=0$$

故 $\zeta=\varphi$ 的替换, 使得方程化为标准形式. □

**命题 1.3 (双曲型)**

1. 若 $D(x,y) > 0$, 特征方程的积分曲线产生两个产生两个实的不同的特征族, 使得 $A^*, C^*$ 为 0, 原方程化为
$$u_{\xi\eta} = \phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$
其中 $\phi_1 = \frac{F^*}{2B^*}$. 称为双曲型方程的第一典型形式.
2. 引入新变量
$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta$$
则
$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}$$
原方程化为
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$
称为双曲型方程的第二典型形式.

**命题 1.4 (抛物型)**

设 $D(x,y) = 0$, 则存在一个实特征族, 考虑 $\xi = \varphi(x,y) = c$. 任取与 $\xi$ 无关的 $\eta$, 方程化为
$$u_{\eta\eta} = \phi_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$
称为抛物型方程的典型形式, 其中 $\phi_3 = \frac{F^*}{C^*}$. 若取 $\eta = c$ 并任选无关的 $\xi$, 方程化为
$$u_{\xi\xi} = \phi_3^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

**Proof** 考虑 $\xi = c$, 由于 $B^2 = AC$ 且 $A^* = 0$
$$A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0$$
从而
$$\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y = 0$$
于是
$$\begin{aligned} B^* &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0 \end{aligned}$$
因此 $A^* = B^* = 0$, 任选 $\eta$ 与 $\xi$ 无关, 方程两边除以 $C$ 就得到

□

**命题 1.5 (椭圆型)**

若 $D(x,y) < 0$, 设特征曲线为
$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta$$

其中 $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ 是实函数, 考虑坐标变换

$$\alpha(x,y) = \mathrm{Re}\,\xi(x,y) = \frac{1}{2}(\xi+\eta), \quad \beta(x,y) = \mathrm{Im}\,\xi(x,y) = \frac{1}{2\pi}(\xi-\eta)$$

方程化为

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \phi_5(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$$

称为椭圆型方程的典型形式.

**Remark** 二阶线性 PDE 的标准型:

1. 找处 $A,B,C$, 判断 $B^2-AC$ 在每一点处的符号, 确定方程类型.
2. 解两个特征方程, 得到特征曲线;
3. 引入变量 $\xi,\eta$, 计算 $u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}$.
4. 带入原方程计算得到标准方程.

## 1.2 定解问题

**定义 1.11 (适定性)**

称一个 PDE 的定解问题在某个函数类 $C$ 中是适定的, 如果

1. 在 $C$ 中存在解.
2. $C$ 中的解是唯一的.
3. 解连续依赖于给定的数据, 如初值, 边值和系数等.