第 1 章　范畴论基础

1.1 范畴与态射

定义 1.1 (范畴)

一个范畴 $\mathcal{C}$ 是指以下资料

1. 集合 $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$，其元素称为 $\mathcal{C}$ 的对象
2. 集合 $\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C})$，其元素称为 $\mathcal{C}$ 的态射，配上一对映射

   $$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \xrightarrow[t]{s} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

   其中 s 和 t 分别给出态射的来源和目标。对于 $X, Y \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$，习惯记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, Y) = s^{-1}\,(X) \cap t^{-1}\,(Y)$ 或简记为 $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$，其中的元素称为 X 到 Y 的态射
3. 对于每个对象 X，给定元素 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, X)$，称为 X 到自身的恒等态射
4. 对于任意的 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$，给定态射之间的合成映射

   $$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, Z)$$
   $$(f, g) \mapsto f \circ g$$

   不致混淆时简记 $fg = f \circ g$。合成映射满足
   (a). 结合律：对于任意的态射 $f, g, h \in \mathrm{Mor}\,(\mathcal{C})$, 若合成 $f\,(gh)$ 和 $(fg)\,h$ 都有定义，则

   $$f\,(gh) = (fg)\,h$$

   于是两边可以同时写作 fgh 或 $f \circ g \circ h$;
   (b). 对于任意的态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, Y)$，都有

   $$f \circ \mathrm{id_X} = f = \mathrm{id_Y} \circ f$$

♣

1.2 函子与自然变换

定义 1.2 (函子)

设 $\mathcal{C}', \mathcal{C}$ 是范畴，一个函子 $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ 是指以下资料：

1. 对象间的映射 $F : \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}') \to \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$
2. 态射间的映射 $F : \mathrm{Mor}\,(\mathcal{C}') \to \mathrm{Mor}\,(\mathcal{C})$，使得
   - F 与来源和目标映射相交换（即 $sF = Fs$，$tF = Ft$）
   - $F\,(g \circ f) = F\,(g) \circ F\,(f)$，$F\,(\mathrm{id_X}) = \mathrm{id_{FX}}$

♣

定义 1.3 (自然变换)

函子 $F, G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ 之间的自然变换 $\theta : F \to G$ 是一族态射

$$\theta_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GX), \quad X \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}'\right)$$

使得下图对所有 $\mathcal{C}'$ 中的态射 f 交换,

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\theta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}$$

♣