第 1 章　基础同调代数

1.1 链复形范畴

定义 1.1 (分次模)

- 考虑一个 R-模直和
$$C_{\cdot} := C_* := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$$
通常称 C_* 是第 n 个分次分量为 C_n 的一个分次 R-模.
- C_n 中的每个成员都被称为是 C_* 的一个 n 次齐次元.

定义 1.2 (分次同态)

设 C_* 和 C'_* 是两个分次 R-模. 称一个 R-模同态 $f : C_* \to C'_*$ 为一个分次同态, 若存在 d, 使得 $f(C_r) \subseteq C'_{r+d}$ 对所有 r 成立. 此时称 d 为 f 的次数. 通常记 $f|_{C_r}$ 为 f_r.

定义 1.3 (R-模链复形)

一个 R-模链复形是指一对 (C_*, ∂), 其中 C_* 是一个分次 R-模, $\partial := \partial_* : C_* \to C_*$ 是一个次数为 -1 的分次自同态, 且满足 $\partial \circ \partial = 0$.

Remark

1. ∂ 由一列 R-模同态 $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}$ 组成, 对所有 n 满足 $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$.
2. 称 ∂ 为链复形的微分或边缘算子.
3. 通常不提及 ∂ 而只说 C_* 是一个链复形.

定义 1.4 (链映射)

设 C_* 和 C'_* 是两个链复形. 一个链映射 $f = f_* : C_* \to C'_*$, 是指一个次数为 0 的分次模同态, 且满足 $f \circ \partial = \partial \circ f$. 即一列 R-模同态 $f_n : C_n \to C'_n$, 使得 $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ 对于所有的 n 成立.

命题 1.1

存在 R-模链复形和链映射的范畴, 记作 Ch_{R} .

Remark

1. $\mathbf{Ch} := \mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}$

定义 1.5

对于一族链复形 $\{(C_*^\alpha, \partial^\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$，可以自然地定义它们的直和：取分次模为直和 $\bigoplus_\alpha C^\alpha$，边缘算子为 $\partial = \bigoplus_\alpha \partial^\alpha$.

Example 1.1 例如对于 (C_*^1, ∂^1) 和 (C_*^2, ∂^2)，它们的直和 (C, ∂) 被定义为

$$C_n = C_n^1 \oplus C_n^2, \forall n; \quad \partial\left(c^1 \oplus c^2\right) = \partial^1\left(c^1\right) \oplus \partial^2\left(c^2\right)$$

容易看出 $\partial \circ \partial = 0$.

1.2 正合列和同调群

定义 1.6 (R-模正合列)

- 称一 R-模列

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

在 M 处正合，若 $\ker\beta = \mathrm{Im}\ \alpha$.

- 称一列

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

是正合的，若对于每个 n 它都在 M_n 处正和.

- 一个短正合列是指形如下的 R-模列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

定义 1.7 (链复形正合列)

称一个链复形和链映射的列

$$0 \longrightarrow C'_{\cdot} \xrightarrow{f_\cdot} C_{\cdot} \xrightarrow{g_\cdot} C''_{\cdot} \longrightarrow 0$$

是正合的，若对于每个 n，对应的模列

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$$

是正合的.

定义 1.8 (同调群)

给定 R-模链复形 C_*, 定义 C_* 的同调群为分次 R-模

$$H_*(C_*) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_*)$$

其中

$$H_n(C_*) := \ker\,\partial_n / \operatorname{Im}\,\partial_{n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

命题 1.2

若 $f: C_* \to C'_*$ 是链映射, 则 f 诱导出自然的分次同态 $H_*(f): H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$. 此外 H_* 是从链复形范畴到分次模范畴上的共变函子.

Proof

设 $f: C_* \to C'_*$ 和 $g: C'_* \to C''_*$ 是链映射, 分别由 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 组成, 则 $g\circ f$ 是由 $\{g_n\circ f_n\}$ 组成的链映射.

定义

$$H_*(f)(h+\operatorname{Im}\,\partial_{n+1}) := f_n(h) + \operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}, \quad h\in\ker\,\partial_n$$

由于 $\partial'_n\circ f_n(h) = f_{n-1}\circ\partial_n(h) = f_{n-1}(0) = 0$, 因此 $f_n(h)\in\ker\,\partial'_n$. 并且对于 $h_1, h_2\in\ker\,\partial_n$, $(h_1-h_2)\in\operatorname{Im}\,\partial_{n+1}$, 我们有 $f_n(h_1)-f_n(h_2) = f_n(h_1-h_2)\in\operatorname{Im}\,(f_n\circ\partial_{n+1}) = \operatorname{Im}\,(\partial'_{n+1}\circ f_{n+1})\subseteq\operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}$ 从而映射良定义, 以上给出了 $H_*(f): H_*(C_*)\to H_*(C'_*)$.

接下来说明函子性, 对于 $f: C_*\to C'_*$ 和 $g: C'_*\to C''_*$, 任取 $h\in\ker\,\partial_n$, 我们有

$$H_*(g\circ f)(h+\operatorname{Im}\,\partial_{n+1}) = g_n\circ f_n(h) + \operatorname{Im}\,\partial''_{n+1} = H_*(g)\left(f_n(h)+\operatorname{Im}\,\partial'_{n+1}\right) = H_*(g)\circ H_*(f)$$

□

引理 1.1 (蛇引理)

对于给定的 R-模同态的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\alpha'} & N & \xrightarrow{\beta'} & N'' & &
\end{array}$$

其中两个水平列是正合的, 存在 R-模同态 $\delta: \ker\,f''\to\operatorname{Coker}\,f'$, 被称为是连接同态, 使得列

$$\operatorname{Ker}\,f' \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Ker}\,f \xrightarrow{\beta} \operatorname{Ker}\,f'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\,f' \xrightarrow{\alpha'} \operatorname{Coker}\,f \longrightarrow \operatorname{Coker}\,f''$$

正合. 此外, 连接同态 δ 具有函子性, 从而可以定义从 “蛇” 到对应的 “六项正合

列”的共变函子.

Proof

1. $\ker\ f$ 处正合：$\ker\ \beta|_{\ker\ f} = \ker\ f \cap \ker\ \beta = \ker\ f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，任取 $x \in \ker\ f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，设 $x = \alpha(y)$，则 $\alpha' \circ f'(y) = f \circ \alpha(y) = f(x) = 0$，由于 α' 是单射，$f'(y) = 0, y \in \ker\ f'$，这表明 $x \in \alpha(\ker\ f')$，从而 $\ker\ \beta|_{\ker\ f} \subseteq \alpha(\ker\ f')$. 反之，任取 $x' \in \alpha(\ker\ f')$，设 $x' = \alpha(y')$，使得 $f'(y) = 0$，则 $f(x') = f \circ \alpha(y') = \alpha' \circ f'(y') = \alpha'(0) = 0$，从而 $x' \in \ker\ f$，又显然 $x' \in \mathrm{Im}\ \alpha$，因此 $x' \in \ker\ f \cap \mathrm{Im}\ \alpha$，$\alpha(\ker\ f') \subseteq \ker\ f \cap \mathrm{Im}\ \alpha = \ker\ \beta|_{\ker\ f}$，综上，列在 $\ker\ f$ 处正合.
2. $\mathrm{Coker}\ f$ 处正合：留作练习.
3. δ 的构造：$\mathrm{Coker}\ f' = N'/\mathrm{Im}\ f'$，对于 $h \in \ker\ f''$，注意到 $\mathrm{Im}\ \beta = M''$，存在 $k \in M$，使得 $h = \beta(k)$. 因此 $0 = f''(h) = f'' \circ \beta(b) = \beta' \circ f(k)$，从而 $f(k) \in \ker\ \beta' = \mathrm{Im}\ \alpha'$，存在 $l \in N'$，使得 $\alpha'(l) = f(k)$. 定义 $\delta(h) := l + \mathrm{Im}\ f'$.
   为了说明良定义性，只需要说明上述方式定义出的 $\delta(0)$ 一定是 $0 + \mathrm{Im}\ f'$，事实上，若 $h = 0$，则任取 $\beta^{-1}(h) = \ker\ \beta = \mathrm{Im}\ \alpha$ 中一 k，任取 l 使得 $\alpha'(l) = f(k)$，都有 $f(k) \in \mathrm{Im}\ (f \circ \alpha) = \mathrm{Im}\ (\alpha' \circ f')$，即 $\alpha'(l) \in \mathrm{Im}\ (\alpha' \circ f')$，由于 α' 是单射，$l \in \mathrm{Im}\ f'$，表明 $\delta(h) = 0 + \mathrm{Im}\ f'$.
4. $\ker\ f''$ 处正合：首先说明 $\mathrm{Im}\ \beta|_{\ker\ f} \subseteq \ker\ \delta$，即 $\delta \circ \beta|_{\ker\ f} = 0$. 任取 $x \in \ker\ f$，置 $x'' = \beta(x)$，可以让 x 称为定义 $\delta(x'')$ 过程中引入的 k，则由于 $f(x) = 0$，引入的 l 满足 $\alpha'(l) = f(k) = 0$，又 α' 是单射，$l = 0$，从而 $\delta \circ \beta(x) = \delta(x'') = 0$. 再来说明另一边，取 $x'' \in \ker\ f''$，使得 $\delta(x'') = 0$. 则存在 $l \in \mathrm{Im}\ f'$，$k \in M$，使得 $x'' = \beta(k)$ ，$f(k) = \alpha'(l)$，设 $l = f'(s)$，其中 $s \in M'$. $f(k) = \alpha' \circ f'(s) = f \circ \alpha(s)$，$k - \alpha(s) \in \ker\ f$. 又 $\beta(k - \alpha(s)) = \beta(k) - \beta \circ \alpha(s) = \beta(k) = x''$，因此 $x'' \in \beta(\ker\ f)$，表明 $\ker\ \delta \subseteq \mathrm{Im}\ \beta|_{\ker\ f}$
5. $\mathrm{Coker}\ f'$ 处正合：留作练习.

□

定理 1.1

给定链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{\alpha} C_* \xrightarrow{\beta} C''_* \longrightarrow 0$$

存在一个同调群的长正合列

$$\longrightarrow H_n(C'_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow$$

，并且这种对应具有函子性.

Proof 由于链映射与边缘算子的交换性, α 和 β 分别诱导出良定义的商映射

$$\bar{\alpha}: C'_*/\operatorname{Im}\partial' \to C'_*/\operatorname{Im}\partial, \quad \bar{\beta}: C_*/\operatorname{Im}\partial \to C''_*/\operatorname{Im}\partial''$$

并且分别限制在 $\ker\partial'$ 和 $\ker\partial$ 上, 得到

$$\alpha': \ker\partial' \to \ker\partial, \quad \beta': \ker\partial \to \ker\partial''$$

我们得到蛇形交换图

$$\begin{tikzcd}
 & C'_n/\operatorname{Im}\partial'_{n+1} \arrow[r, "\bar{\alpha}_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \arrow[r, "\bar{\beta}_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C''_n/\operatorname{Im}\partial''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_n"] & 0 \\
0 & \ker\partial'_{n-1} \arrow[l] \arrow[r, "\alpha'_{n-1}"'] & \ker\partial_{n-1} \arrow[r, "\beta'_{n-1}"'] & \ker\partial''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

注意到由于 $\operatorname{Im}\partial'_{n+1} \subseteq \ker\partial'_n$, 映射 $[\partial'_n : C'_n/\operatorname{Im}\partial'_{n+1} \to \ker\partial'_{n-1}]$ 的核同构于 $\ker\partial'_n/\operatorname{Im}\partial'_{n+1} = H_n(C'_*)$, 类似地有映射的 Coker 同构于 $H_{n-1}(C'_*)$, 类似地结论对 ∂_n 和 ∂''_n 也成立. 于是由蛇引理, 得到正合列

$$H_n(C'_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\beta)} H_{n-1}(C''_*)$$

□

推论 1.1

考虑 R-模交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中两行正合. 那么若 f_1, f_3 是同构, 则 f_2 亦然. ♡

Proof

由蛇引理, 可得

$$\operatorname{Ker} f_1 \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Ker} f_2 \xrightarrow{\alpha_2} \operatorname{Ker} f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\beta_2} \operatorname{Coker} f_3$$

此外, 由 f_1 和 f_3 是同构, 可得 $\ker f_1 = \ker f_3 = \operatorname{coker} f_1 = \operatorname{coker} f_3 = 0$ 从而正合列化为

$$0 \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Ker} f_2 \xrightarrow{\alpha_2} 0 \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\beta_2} 0$$

且由交换图可知正合列上的限制映射 α_1, β_1 是单射, α_2, β_2 是满射. 因此由正合性

$$\ker\ f_2 = \ker\ \alpha_2 = \alpha_1(0), \quad \operatorname{coker}\ f_2 = \ker\ \beta_2 = \beta_1(0) = 0$$

这表明 f_2 是同构.

□

推论 1.2 (四引理)

考虑下方的 R-模交换图, 其中两行正合. 若 f_1 是满射, f_4 是单射, 则

1. f_2 是单射 $\implies$ f_3 是单射;
2. f_3 是满射 $\implies$ f_2 是满射.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[d, "f_4"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"] & N_4
\end{tikzcd}$$

♡

推论 1.3 (五引理)

考虑下面的 R-模交换图, 其中两行正合. 若 f_1, f_2, f_4 和 f_5 均为同构, 则 f_3 亦然;

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

♡

Proof

□