目录

第 1 章 Levi-Civita 联络

1.1 切联络

定义 1.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形, $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, V 是沿 γ 的在 TM 中取值的向量场, 则 V 既可以视作 M 的关于切向联络的沿 γ 的向量场, 又可以视作 $\mathbb{R}^n$ 的关于欧式联络的沿 γ 的向量场. 令 $\overline{D}_t V$ 表示 V 关于欧式联络 $\overline{\nabla}$ 的协变导数, $D_t^{\top} V$ 表示 V 关于切向联络 $\nabla^{\top}$ 的协变导数.

命题 1.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形, $\gamma : I \to M$ 是 M 上的光滑曲线, V 是取值在 TM 的沿 γ 的光滑向量场. 则对于每个 $t \in I$,

$$D_t^{\top} V(t) = \pi^{\top}\left(\overline{D}_t V(t)\right)$$

Idea 能直接使用的是两种联络的关系, 建立两种曲线协变导数的联系需要通过曲线导数与联络的关系, 间接使用两种联络间的关系. 曲线协变导数与联络的关系是通过坐标表示实现的, 而两者联络的关系是通过正交投影实现的, 因此我们需要找到与正交投影相容的坐标表示, 即我们需要适配于 M 的正交标架. M 的嵌入性给出了这样的正交标架（命题??）.

Proof 任取 $t_0 \in I$, 存在 $\gamma(t_0)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的邻域 U, 使得 U 上存在 $\mathbb{R}^n$ 的适配于 TM 的正交标架 $(E_1, \cdots, E_n)$, 这组标架的前 k 个 $(E_1, \cdots, E_k)$ 在 $M \cap U$ 上的限制构成 TM 的一个正交标架, 其中 $k = \dim M$. 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subseteq U$, 则 V 在 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 可以被分解为

$$V(t) = V^1(t)\, E_1|_{\gamma(t)} + \cdots + V^k(t)\, E_k|_{\gamma(t)}$$

此时有

$$
\begin{aligned}
\pi^{\top}\left(\overline{D}_t V(t)\right) &= \pi^{\top}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\,\overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\,\pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\dot{V}^i(t)\, E_i|_{\gamma(t)} + V^i(t)\,\nabla^{\top}_{\gamma'(t)}\, E_i|_{\gamma(t)}\right) \\
&= D_t^{\top} V(t)
\end{aligned}
$$

□

推论 1.1

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形. 一个光滑曲线 $\gamma: I \to M$ 是关于 M 上切联络的测地线, 当且仅当对于所有的 $t \in I$ 它的加速度 $\gamma''(t)$ 与 $T_{\gamma(t)}M$ 正交. ♡

Proof 由于 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式联络的联络系数均为 0, 于是 γ' 沿 γ 的欧式协变导数就是加速度: $\overline{D}_t\gamma'(t) = \gamma''(t)$. 故 γ 是测地线, 当且仅当 $\bar{D}_t\gamma'(t) = \gamma''(t) \equiv 0$, 当且仅当 $\pi^{\top}(\gamma''(t)) \equiv 0$, 即 $\gamma''(t)$ 与 $T_{\gamma(t)}M$ 正交对于所有的 $t \in I$ 成立.

□

1.2 抽象 Riemann 流形上的联络

1.2.1 度量联络

定义 1.2

设 g 是光滑（带边）流形 M 上的联络或伪联络. 称 TM 上的联络 ∇ 是与 g 相容的, 或为一个度量联络, 若它对于所有的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 满足以下乘积律:

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

♣

命题 1.2 (度量联络的等价刻画)

令 (M, g) 是（带边）Riemann 流形或伪-Riemann 流形, ∇ 是 TM 上的一个联络, 则以下几条等价:

1. ∇ 与 g 相容: $\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.
2. g 关于 ∇ 平行: $\nabla g \equiv 0$ [a].

3. 在任意光滑局部标架 (E_i) 下, ∇ 的联络系数满足
$$\Gamma_{ki}^{l} g_{lj}+\Gamma_{kj}^{l} g_{il}=E_k\left(g_{ij}\right).^{b}$$
4. 若 V, W 是沿任意光滑曲线 γ 的光滑向量场, 则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle=\left\langle D_t V, W\right\rangle+\left\langle V, D_t W\right\rangle$$
5. 若 V, W 是沿 M 上的光滑曲线 γ 平行的向量场, 则 $\langle V, W\rangle$ 沿 γ 是常值的.
6. 任给 M 上的光滑曲线 γ, 每个沿 γ 的平行移动都是线性的等距同构.
7. 给定 M 上的任意光滑曲线 γ, 每个在 γ 一点处的正交基, 都可以延拓成沿 γ 平行的正交标架.

---

[a] ∇g 可以看成是平行移动偏离刚性的程度

[b] Γ 的左下指标是作用在 g_{ij} 的标架,Γ 的右下指标表示 g_{ij} 中跑动的指标, 指标随着 Γ 的上标跑动.

Proof 首先证明 1. $\Longleftrightarrow$ 2. , 由命题??, 对称 2-张量 g 的全协变导数由以下给出
$$(\nabla g)(Y, Z, X)=\left(\nabla_X g\right)(Y, Z)=X(g(Y, Z))-g\left(\nabla_X Y, Z\right)-g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$
其中 $X(g(Y, Z))=\nabla_X\langle Y, Z\rangle$.

为了说明 2. $\Longleftrightarrow$ 3., 考虑 ∇_g 在光滑局部标架 (E_i) 下的分量
$$g_{ij;k}=E_k\left(g_{ij}\right)-g_{lj}\Gamma_{ki}^{l}-g_{il}\Gamma_{kj}^{l}$$
$\nabla g\equiv 0$ 当且仅当这些分量全为零.

现在来说明 1. $\Longleftrightarrow$ 4.. 设 V, W 是沿光滑曲线 $\gamma: I\rightarrow M$ 的光滑向量场. 给定 $t_0\in I$, 在 $\gamma\left(t_0\right)$ 的一个邻域上选择坐标系 $\left(x^i\right)$, 并设 $V=V^i\partial_i, W=W^j\partial_j$, 对于某些光滑函数 $V^i, W^j:\left(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon\right)\rightarrow\mathbb{R}$ 成立. 由 ∂_i, ∂_j 的可扩张性, 我们得到
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V^i W^j\left\langle\partial_i, \partial_j\right\rangle\right)\\&=\left(\dot{V}^i W^j+V^i\dot{W}^j\right)\left\langle\partial_i, \partial_j\right\rangle+V^i W^j\nabla_{\gamma'(t)}\left\langle\partial_i, \partial_j\right\rangle\end{aligned}$$
若 1. 成立, 则
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle&=\left[\left(\dot{V}^i W^j\left\langle\partial_i, \partial_j\right\rangle+V^i W^j\left\langle\nabla_{\gamma'(t)}\partial_i, \partial_j\right\rangle\right)\right]+\left[\left(V^i\dot{W}^j\left\langle\partial_i, \partial_j\right\rangle\right)+V^i W^j\left\langle\partial_i, \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j\right\rangle\right]\\&=\left\langle D_t V, W\right\rangle+\left\langle V, D_t W\right\rangle\end{aligned}$$
在 t_0 附近成立. 反之, 若 4. 成立, 则对于任意的 X, 选取 $\gamma:(-1,1)\rightarrow M$, 使得

$(\gamma(0), \gamma'(0)) = (p, X_p)$，则

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_p} \langle Y_p, Z_p \rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t)) \rangle \\
&= \langle D_t Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t)) \rangle + \langle Y(\gamma(t)), D_t Z(\gamma(t)) \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_p} Y_p, Z_p \right\rangle + \left\langle Y_p, \nabla_{X_p} Z_p \right\rangle
\end{aligned}
$$

故

$$
\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle
$$

在 p 附近成立.

现在来说明 $4. \implies 5. \implies 6. \implies 7. \implies 4.$.

若 4. 成立，设 V, W 是沿 γ 平行的，有 $D_t V, D_t W = 0$，从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle V, W \rangle = 0$，故 $\langle V, W \rangle$ 是常值的.

若 5. 成立，任取 $T_{\gamma(t_0)} M$ 上的两个向量 v_0, w_0，设 V, W 是它们沿 γ 平行的向量场，使得 $V(t_0) = v_0, W(t_0) = w_0, P^{\gamma}_{t_0 t_1} = V(t_1), P^{\gamma}_{t_0 t_1} = W(t_1)$．因为 $\langle V, W \rangle$ 是沿 γ 常值的，立即有 $\left\langle P^{\gamma}_{t_0 t_1} v_0, P^{\gamma}_{t_0 t_1} w_0 \right\rangle = \langle V(t_1), W(t_1) \rangle = \langle V(t_0), W(t_0) \rangle = \langle v_0, w_0 \rangle$，个 $P^{\gamma}_{t_0 t_1}$ 是一个线性的等距同构.

若 6. 成立，设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线，(b_i) 是 $T_{\gamma(t_0)} M$ 的一个正交基，$t_0 \in I$．可以将每个 b_i 通过平行移动扩展为沿 γ 平行的一个光滑向量场 E_i，由于对于任意的 $t_1 \in I$,$P^{\gamma}_{t_0 t_1}$ 是线性同构，故 (E_i) 在 γ 的每个点是都是标准正交基.

若 7. 成立，设 V, W 是沿光滑曲线 γ 的光滑向量场，则存在沿 γ 平行的正交标架 (E_i). 我们设 $V = V^i E_i, W = W^j E_j$，则正交性意味着 $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$，沿 γ 取常值（± 1 或 0）．平行性给出 $D_t V = D_t (V^i E_i) = \dot{V}^i E_i + V^i D_t E_i = \dot{V}^i E_i$，类似地 $D_t W = \dot{W}^i E_i$，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle V, W \rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i V^i W^i \right) \\
&= \sum_i \left(\dot{V}^i W^i + \dot{W}^i V^i \right) \\
&= \dot{V}^i W^j \langle E_i, E_j \rangle + V^i \dot{W}^j \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle
\end{aligned}
$$

□

推论 1.2

设 (M, g) 是（带边）Riemann-流形或伪-Riemann 流形，∇ 是 M 上的度量联络，$\gamma : I \to M$ 是一个光滑曲线.

1. $|\gamma'(t)|$ 是常值，当且仅当对于任意的 $t \in I$，都有 $D_t\gamma'(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 正交；
2. 若 γ 是测地线，则 $|\gamma'(t)|$ 是常值.

Proof

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle = 2\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$$
   故 $|\gamma'(t)|$ 是常值，当且仅当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle \equiv 0$，当且仅当 $\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle \equiv 0$，即 $D_t\gamma'(t)$ 恒与 $\gamma'(t)$ 正交.
2. 若 γ 是测地线，则 $\gamma'(t)$ 沿 $\gamma(t)$ 平行，即 $D_t\gamma'(t) = 0$，故 $\langle D_t\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle = 0$，$D_t\gamma'(t)$ 与 $\gamma'(t)$ 正交，由 1. 可知 $|\gamma'(t)|$ 是常值.

□

命题 1.3

u 设 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{r,s}$ 的嵌入 Riemann 子流形或伪 Riemann 子流形，则 M 上的切联络与诱导度量或伪度量相容.

Proof 设 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$，$\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ 是它们在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{r,s}$ 上的一个开子集的光滑延拓. 对于 M 上的点，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla^{\top}_X(Y,Z) &= X\langle Y,Z\rangle = \tilde{X}\left\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\left\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle + \left\langle\tilde{Y},\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle\pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y},\tilde{Z}\right)\right\rangle + \left\langle\tilde{Y},\pi^{\top}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}\right)\right\rangle [1] \\
&= \left\langle\nabla^{\top}_X, Z\right\rangle + \left\langle Y, \nabla^{\top}_X Z\right\rangle
\end{aligned}$$

□

[1] 因为 $\tilde{Z},\tilde{Y}$ 都与 M 相切

1.3 对称联络

定义 1.3 (对称联络)

称光滑流形 M 的切丛上的一个联络 ∇ 是对称的, 若

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

♣

定义 1.4 (联络的挠张量)

设 M 是光滑流形, ∇ 是 M 的切丛上的联络, 定义联络的挠张量为一个 $(1,2)$-张量场 $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

♣

Proof 由于 $\nabla_X Y$ 和 $\nabla_Y X$ 分别不具有关于 Y 的 $C^\infty(M)$-线性和关于 X 的 $C^\infty(M)$-线性, 因此需要说明 τ 关于这两个分量的 $C^\infty(M)$-线性, 从而得到 τ 确实给出一个 $(1,2)$-张量场,

$$\nabla_X Y = \left(X(Y_k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$

$$\nabla_Y X = \left(Y(X_k) + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k$$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \left(X^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k$$

任取 $f \in C^\infty(M)$, 我们有

$$\tau(fX, Y) = \left((fX)^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k = f\left(X^i Y^j\right)\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k$$

故 τ 关于 X 是 $C^\infty(M)$-线性的, 由对称性可知关于 Y 的 $C^\infty(M)$-线性.

□

由上面的论证过程, 可以立即得到以下对称联络的等价刻画:

命题 1.4

设 M 是光滑流形,∇ 是其切丛上的一个联络, 则以下几条等价

1. ∇ 是对称的;
2. ∇ 的挠张量 $\tau \equiv 0$;
3. 在任意一组局部坐标标架下, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k$.

♠

命题 1.5

设 M (伪) 欧氏空间的一个嵌入 (伪) Riemann 子流形, 则 M 的切联络是对称的. ♠

Proof 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的嵌入 Riemann 子流形或伪-Riemann 子流形，其中 $\mathbb{R}^n$ 配备了欧式度量或伪欧式度量 $\bar{q}^{(r,s)}, r+s=n$. 令 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，令 $\tilde{X},\tilde{Y}$ 是 X,Y 在分为空间上的一个开子集的扩张. $\iota: M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ 是含入映射. 立即有 X,Y 是 ι-相关于 $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 的，由李括号的自然性，$[X,Y]$ 是 ι-相关于 $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 的. 特别地，$\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ 与 M 相切，且在 M 上的限制等于 $[X,Y]$. 因此

$$\begin{aligned}\nabla_X^\top Y-\nabla_Y^\top X&=\pi^\top\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M-\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X}|_M\right)\\&=\pi^\top\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]|_M\right)\\&=\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]|_M\\&=[X,Y]\end{aligned}$$

□

定理 1.1 (Riemann 几何基本定理)

设 (M,g) 是（带边）（伪）Riemann 流形. 则存在唯一的 TM 上的联络 ∇，使得 ∇ 与 g 相容且是对称的. 此联络称为是 g 的 **Levi-Civita 联络**（若 g 正定，则也称为 Riemann 联络）.

Idea 证明唯一性的想法以联络的度量性为基础考察 $\langle\nabla_XY,Z\rangle$，说明它是无关于联络选取的. 为此，利用对称性，将形式 $\langle\nabla_XY,Z\rangle$ 的项适当填上与 ∇ 无关的项写成统一的一个.

对于存在性，由于唯一性的证明给出了联络和向量场度量的公式，借由此公式以及度量，给出局部上的一个坐标表示，唯一性允许我们将每个局部上的联络拼成总体上的联络.

Proof 通过给 ∇ 一个无关于联络选取的公式来给出唯一性. 设 ∇ 是满足性质的联络，$X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$. 由联络对度量的相容性

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle&=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle\\Y\langle Z,X\rangle&=\langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_YX\rangle\\Z\langle X,Y\rangle&=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle\end{aligned}$$

利用对称性替换每个式子的最后一项，得到

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle&=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_ZX\rangle+\langle X,[X,Z]\rangle\\Y\langle Z,X\rangle&=\langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_XY\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle\\Z\langle X,Y\rangle&=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_YZ\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle\end{aligned}$$

前两项相加减去后一项，得到

$$X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle=2\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle X,[Y,Z]\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle-\langle X,[Z,Y]\rangle$$

解出 $\langle\nabla_X Y,Z\rangle$ 得到

$$\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle+\langle X,[Z,Y]\rangle\right)$$

现在设 ∇^1 和 ∇^2 是 TM 上的两个与 g 相容的对称联络. 由于右侧不依赖于联络的选取, 因此 $\langle\nabla^1_X Y-\nabla^2_X Y,Z\rangle=0$ 对于所有的 X,Y,Z 成立. 从而 $\nabla^1_X Y=\nabla^2_X Y$ 对于所有的 X,Y 成立, $\nabla^1=\nabla^2$.

接下来说明存在性, 设 $(U,(x^i))$ 是任意一个局部光滑坐标卡. 按上面的公式定义 $\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle$, 其中每个李括号都是零, 我们得到

$$\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle=\frac{1}{2}\left(\partial_i\langle\partial_j,\partial_l\rangle+\partial_j\langle\partial_l,\partial_i\rangle-\partial_l\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right)\tag{1.1}$$

利用以下记号

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle,\quad\nabla_{\partial_j}\partial_j=\Gamma_{ij}^m\partial_m$$

得到

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml}=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{li}-\partial_l g_{ij}\right)$$

设 g^{kl} 是逆度量, 按 l 与上式加权求和, 并利用 $g_{ml}g^{kl}=\delta_m^k$, 得到

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ij}^m\delta_m^k=\Gamma_{ij}^m g_{ml}g^{kl}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{li}-\partial_l g_{ij}\right)\tag{1.2}$$

由此足够定义出局部上的联络 ∇, 按照

$$\nabla_X Y=\left(X\left(Y^k\right)+X^iY^j\Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$$

注意到公式

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{li}-\partial_l g_{ij}\right)\tag{1.3}$$

右侧关于 i,j 对称. 因此 $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$, 这表明我们在局部上定义出的联络是对称的. 计算

$$\begin{aligned}\Gamma_{ki}^l g_{lj}+\Gamma_{kj}^l g_{il}&=\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{kj}-\partial_j g_{ki}\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ji}+\partial_j g_{ki}-\partial_i g_{kj}\right)\\&=\partial_k g_{ij}\end{aligned}$$

由度量联络的第三条等价刻画 (1.2), ∇ 与 g 相容. □

该证明的过程给出了计算 Levi-Civita 联络的一些公式

命题 1.6

设 (M,g) 是 (带边) (伪) Riemann 流形, 令 ∇ 是它的 Levi-Civita 联络.

1. 设 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 则

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle\Big) \tag{1.4}$$

(**Koszul's formula**)

2. 在任意 M 的光滑坐标卡下,Levi-Civita 联络的联络系数由以下给出

$$\Gamma_{ij}^{k}\,{}^{a} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$

3. 设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部标架, 令 $c_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ 是按以下方式定义的 n^3 个光滑函数:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$$

则 Levi-Civita 联络在这组标架下的联络系数为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^m - g_{lm}c_{ji}^m + g_{im}c_{lj}^m\right)$$

4. 若 g 是 Riemann 度量, (E_i) 是光滑局部正交标架, 则

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i\right)$$

[a] 称为 Christoffel 符号

Proof 前两条在上面的定理中的证明过程中已经给出了. 将 E_i, E_j, E_l 带入方程 1.4中, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^q g_{ql} &= \langle \nabla_{E_i} E_j, E_l\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - \langle E_j, c_{il}^m E_m\rangle - \big\langle E_l, c_{ji}^m E_m\big\rangle + \big\langle E_i, c_{lj}^m E_m\big\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^m - g_{lm}c_{ji}^m + g_{im}c_{lj}^m\right)\end{aligned}$$

两边作用一个逆度量 g^{kl} , 得到

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm}c_{il}^m - g_{lm}c_{ji}^m + g_{im}c_{lj}^m\right)$$

若 (E_i) 正交, 我们有 $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\left(E_i\delta_{jk} + E_j\delta_{ik} - E_k\delta_{ij} - c_{ik}^j - c_{ji}^k + c_{kj}^i\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i\right), \quad (i, j, k\text{两两不同})\end{aligned}$$

□

命题 1.7

1. (伪) -欧氏空间上的 Levi-Civita 联络就是欧式联络;
2. 若 M 是 (伪) 欧氏空间上的嵌入 (伪) 黎曼子流形, 则 M 上的 Levi-联络就是切联络 $\nabla^{\top}$

Proof 欧式联络是度量的且是对称的,Levi-Civita 联络的唯一性表明 Levi-Civita 联络就是欧式联络. 第二条由命题1.5, 和命题 1.3给出.

□

命题 1.8 (联络的自然性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (带边) (伪) Riemann 流形, ∇ 是 g 的 Levi-Civita 联络,$\tilde{\nabla}$ 是 $\tilde{g}$ 的 Levi-Civita 联络. 若 $\varphi: M\to\tilde{M}$ 是等距同构, 则 $\varphi^*\tilde{\nabla}=\nabla$.

Proof 由 Levi-Civita 联络的唯一性, 只需要证明拉回联络 $\varphi^*\tilde{\nabla}$ 是对称且与 g 相容的. 对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 和 $p\in M$, 我们有

$$\langle Y_p, Z_p\rangle=\langle \mathrm{d}\varphi_p\left(Y_p\right), \mathrm{d}\varphi_p\left(Z_p\right)\rangle=\left\langle \left(\varphi_*Y\right)_{\varphi(p)}, \left(\varphi_*Z\right)_{\varphi(p)}\right\rangle$$

换言之,

$$\langle Y,Z\rangle=\langle\varphi_*Y,\varphi_*Z\rangle\circ\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle&=X\left(\langle\varphi_*Y,\varphi_*Z\rangle\circ\varphi\right)\\
&=\left(\left(\varphi_*X\right)\langle\varphi_*Y,\varphi_*Z\rangle\right)\circ\varphi\\
&=\left(\left\langle\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}\left(\varphi_*Y\right),\varphi_*Z\right\rangle+\left\langle\varphi_*Y,\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}\left(\varphi_*Z\right)\right\rangle\right)\circ\varphi\\
&=\left\langle\left(\varphi^{-1}\right)_*\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}\left(\varphi_*Y\right),Z\right\rangle+\left\langle Y,\left(\varphi^{-1}\right)_*\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}\left(\varphi_*Z\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\left(\varphi^*\tilde{\nabla}\right)_X Y,Z\right\rangle+\left\langle Y,\left(\varphi^*\tilde{\nabla}\right)_X Z\right\rangle
\end{aligned}$$

这表明拉回联络与 g 相容. 接下来考虑对称性, 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^*\tilde{\nabla}\right)_X Y-\left(\varphi^*\tilde{\nabla}\right)_Y X&=\left(\varphi^{-1}\right)_*\left(\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}\left(\varphi_*Y\right)-\tilde{\nabla}_{\varphi_*Y}\left(\varphi_*X\right)\right)\\
&=\left(\varphi^{-1}\right)_*\left(\left[\varphi_*X,\varphi_*Y\right]\right)^{2}\\
&=[X,Y]
\end{aligned}$$

□

[2]因为 $\tilde{\nabla}$ 是无挠的

推论 1.3 (测地线的自然性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是（带边）（伪）Riemann 流形,$\varphi:M\to\tilde{M}$ 是局部等距同构. 若 γ 是 M 上的测地线, 则 $\varphi\circ\gamma$ 是 M 上的测地线.

Proof 测地线是局部的, 并且在微分同胚的拉回下是保持的[3].

□

1.4 指数映射

在本节中, 我们假设 (M,g) 是（伪）黎曼 n-流形, 且配备 Levi-Civita 联络. 对于每一点 $p\in M$ 和 $v\in T_pM$, 它们决定了唯一的一个极大测地线, 记作 γ_v.

引理 1.1 (尺度变换引理)

对于每个 $p\in M, v\in T_pM$,$c,t\in\mathbb{R}$,

$$\gamma_{cv}\left(t\right)=\gamma_v\left(ct\right)^{a}$$

只要上面两边其一有定义.

[a]速度越大, 参数集越小

Proof 若 $c=0$, 则对于所有的 $t\in\mathbb{R}$, 两边等于 p, 故不妨设 $c\neq0$. 此时只需要证明若 $\gamma_v\left(ct\right)$ 存在, 则 $\gamma_{cv}\left(t\right)$ 也存在且二者相等（通过乘以 $\frac{1}{c}$）.

设 γ_v 的最大区间是 $I\subseteq\mathbb{R}$, 方便起见, 记 $\gamma=\gamma_v$, 定义新的曲线 $\tilde{\gamma}:c^{-1}I:\to M,\tilde{\gamma}\left(v\right)=\gamma\left(ct\right)$.

接下来说明 $\tilde{\gamma}$ 是以 p 为起点, cv 为初速度的测地线. 由定义易见 $\tilde{\gamma}\left(0\right)=\gamma\left(0\right)=p$, 又 $\dot{\tilde{\gamma}}^i\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma^i\left(ct\right)=c\dot{\gamma}^i\left(ct\right)$, 故 $\tilde{\gamma}'\left(0\right)=c\gamma'\left(0\right)=cv$, 故 $\tilde{\gamma}$ 以 p 为起点, cv 为初速度. 现在设 D_t 和 $\tilde{D}_t$ 分别是沿 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 的协变导数, 则

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t\tilde{\gamma}'\left(t\right)&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\tilde{\gamma}}^k\left(t\right)+\dot{\tilde{\gamma}}^i\left(t\right)\dot{\tilde{\gamma}}^j\left(t\right)\Gamma_{ij}^k\left(\tilde{\gamma}\left(t\right)\right)\right)\partial_k\\&=\left(c^2\ddot{\gamma}^i\left(ct\right)+c^2\ddot{\gamma}^i\left(ct\right)\ddot{\gamma}^j\left(ct\right)\Gamma_{ij}^k\left(\gamma\left(ct\right)\right)\right)\partial_k\\&=c^2D_t\gamma'\left(ct\right)=0\end{aligned}$$

因此 $\tilde{\gamma}$ 是测地线. 最后, 若 $\tilde{\gamma}$ 不是极大的, 则容易得到覆盖了 γ 的测地线, 与它的极大性矛盾, 故 $\tilde{\gamma}$ 是极大的.

综上可得 $\gamma_{cv}\left(t\right)=\gamma_v\left(ct\right)$

[3]相对于同一个微分同胚拉回的联络

□

定义 1.5 (指数映射)

1. 定义一个子集 $\mathscr{E} \subseteq TM$, 称为指数映射域

$$\mathscr{E} = \{v \in TM : \gamma_v \text{定义在包含了 } [0,1] \text{ 的一个区间上}\}^a$$

2. 在 $\mathscr{E}$ 上定义指数映射 $\exp : \mathscr{E} \to M$

$$\exp(v) = \gamma_v(1)^b$$

3. 对于每个 $p \in M$, 指数映射在 p 上的限制, 记作 $\exp_p$, 为 $\exp$ 在 $\mathscr{E}_p := \mathscr{E} \cap T_pM$ 上的限制.

[a] 初速度不能太大, 需要允许物体可以自然地跑动单位时间

[b] 以 p 为起点, 初速度为 v, 自然地跑动单位时间后, 在 M 上所处的位置.

♣

命题 1.9 (指数映射的性质)

令 (M, g) 是（伪）-Riemann 流形, $\exp : \mathscr{E} \to M$ 是它的指数映射, 则

1. $\mathscr{E}$ 是 TM 上包含了零截面的一个开集, 并且每个 $\mathscr{E}_p \subseteq T_pM$ 都是关于 0 呈星形的[a].
2. 对于每个 $v \in TM$, 测地线 γ_v 由以下给出

$$\gamma_v(t) = \exp(tv)$$

若 t 使得两边中的一个有定义.

3. 指数映射是光滑的.
4. 对于每个 $p \in M$, 微分 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0 : T_0(T_pM) \simeq T_pM \to T_pM$ 在 $T_0(T_pM)$ 和 T_pM 的通常同构下是 T_pM 上的单位映射,

[a] 对于任意的 $y \in \mathscr{E}_p$ 从 0 到 y 的线段落在 $\mathscr{E}_p$ 上

♠

Proof [4] 对于 2., 由尺度变换引理,

$$\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

若 t 使得上述其中一个有定义.

任取 $v \in \mathscr{E}_p$, 则 γ_v 至少在 $[0,1]$ 上有定义. 因此对于任意的 $t \in [0,1]$, 尺度变换引理给出

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

[4] 未完成

是有定义的, 从而 $tv \in \mathscr{E}_p$, $\mathscr{E}_p$ 关于 0 是星形集.

为了计算 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0(v)$, $v \in T_pM$, 选择 T_pM 上以 0 为起点, v 为初速度的曲线 τ, 并计算 $\exp_p \circ \tau$ 的初速度即可. 这里我们取 $\tau(t) = tv$, 则

$$\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\exp_p \circ \tau\right)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma_v(t) = v$$

□

命题 1.10 (指数映射的自然性)

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (伪) -Riemann 流形, $\varphi: M \to M$ 是局部等距同构. 则对于每个 $p \in M$, 下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}_p \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi_p"] \arrow[d, "\exp_p"'] & \tilde{\mathscr{E}}_{\varphi(p)} \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

Proof 任取 $v \in \mathscr{E}_p$, 则 M 在的以 p 为起点, v 为初速度的极大测地线 γ_v 至少在 $[0,1]$ 上有定义. 由于 φ 是局部的等距同构, $\varphi \circ \gamma_v$ 也是一个极大测地线, 它的起点为 $\varphi\circ\gamma_v(0) = \varphi(p)$, 初速度为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi\circ\gamma_v)(0) = \mathrm{d}\varphi_p\gamma_v'(0) = \mathrm{d}\varphi_p(v)$, 我们有 $\varphi\circ\gamma_v = \gamma_{\mathrm{d}\varphi_p(v)}$

$$\varphi\left(\exp_p(v)\right) = \varphi\left(\gamma_v(1)\right) = \gamma_{\mathrm{d}\phi_p(v)}(1) = \exp_{\varphi(p)} \circ \left(\mathrm{d}\varphi_p\right)(v)$$

这就说明了图表的交换性. □

命题 1.11

设 (M,g) 和 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 是 (伪) -Riemann 流形, M 是连通的. 设 $\varphi,\psi: M \to \tilde{M}$ 是局部等距同构, 使得对于某个 $p \in M$, $\varphi(p) = \psi(p)$, 且 $\mathrm{d}\varphi_p = \mathrm{d}\psi_p$, 则 $\varphi \equiv \psi$.

Proof 令

$$S = \{q \in M : \varphi(q) = \psi(q),\ \mathrm{d}\varphi_q = \mathrm{d}\psi_q\}$$

任取 $p \in S$, 由自然性,

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{\varphi(p)} \circ \mathrm{d}\varphi_p = \exp_{\psi(p)} \circ \mathrm{d}\psi_p = \psi \circ \exp_p$$

由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 是单位映射, 存在包含了原点的开邻域 $U_0 \subseteq T_pM$, 和包含了 p 的开邻域 $V \subseteq M$, 使得 $\exp_p$ 成为它们之间的微分同胚, 故 φ 和 ψ 在 p 的一个邻域上相等, 微分的局部性又给出在其上 $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\psi$, 故 S 是一个开集.

此外，任取 $q \in S^c$，若 $\varphi(q) \neq \psi(q)$，由 $\varphi - \psi$ 的连续性，存在 q 使得 $\varphi \neq \psi$ 在其上成立；若 $\varphi(q) = \psi(q)$ 但 $\mathrm{d}\varphi_q \neq \mathrm{d}\psi_q$，由 $\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}\psi$ 的连续性，存在 q 的邻域使得 $\mathrm{d}\varphi \neq \mathrm{d}\psi$ 在其上成立，故 S^c 是开集，S 是闭集.

最后，连通性要求 $S = M$. □

定义 1.6

称（伪）Riemann 流形 (M, g) 是测地完备的，若每个极大测地线对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有定义，或者等价地说指数映射的定义域是整个 TM . ♣

1.5 法邻域和法坐标

定义 1.7

设 (M, g) 是（伪）Riemann 流形，$p \in M$. 若 p 的邻域 U 是 $0 \in T_pM$ 的某个星形邻域在 $\exp_p$ 下的微分同胚像，则称 U 为 p 的一个法邻域 . ♣

Proof 法邻域的存在性：指数映射 $\exp_p$ 将开集 $\mathscr{E}_p \subseteq T_pM$ 光滑地映到 M 上，由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 可逆，知存在 $0 \in T_pM$ 的一个邻域 V，以及 $p \in M$ 的一个邻域 U，使得 $\exp_p$ 成为 V 到 U 的一个微分同胚.

□

定义 1.8 (法坐标)

对于每个 T_pM 的正交基 (b_i)，它决定了一个基同构 $B : \mathbb{R}^n \to T_pM$，$B\left(x^1, \cdots, x^n\right) = x^i b_i$. 若 $U = \exp_p(V)$ 是 p 的法邻域，可以将指数映射与同构复合，得到光滑坐标映射 $\varphi = B^{-1} \circ \left(\exp_p|_V\right)^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "B^{-1}"] & \mathbb{R}^n \\ U \arrow[u, "\left(\exp_p|_V\right)^{-1}"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

称这样的坐标为以 p 为中心的法坐标[a].

[a]将邻域按指数映射的对应线性化为切空间，切空间上可以轻松地找到正交坐标，给出了 U 上的正交坐标（下个命题中证明）. ♣

命题 1.12 (法坐标的唯一性)

设 (M,g) 是（伪）Riemann n- 流形, $\pi \in M$, U 是以 p 为中心的一个法邻域. 对于每个以 p 中心的 U 上的法坐标卡, 坐标基在 p 点处正交; 并且对于每个 T_pM 的正交基 (b_i), 存在唯一的 U 上的法坐标 (x^i), 使得 $\partial_i|_p = b_i, i = 1, \cdots, n$. 当 g 正定时, 对于任意两个法坐标卡 (x^i) 和 $(\tilde{x}^j)$ 都有

$$\tilde{x}^j = A_i^j x^i$$

对于某个（常值）正交矩阵 $\left(A_i^j\right) \in O(n)$ 成立.

Proof 设 φ 是 U 上以 p 为中心的法坐标, 坐标函数为 (x^i). 则由定义有 $\varphi = B^{-1} \circ \exp_p^{-1}$, 其中 $B : \mathbb{R}^n \to T_pM$ 是由 T_pM 的一组正交基 (b_i) 决定的. 由于 $\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_0$ 是单位映射且 B 是线性的, 故 $\partial_i|_p = \left(\mathrm{d}\varphi_p\right)^{-1}(\partial_i|_0) = B(\partial_i|_0) = b_i$, 故坐标基就是它的定义依赖的坐标基, 故在 p 点处正交.

对于每个 T_pM 的正交基 (b_i), 上面的计算表明它给出的法坐标就是满足条件的法坐标, 故存在性得证.

若 $\tilde{\varphi} = \tilde{B}^{-1} \circ \exp_p^{-1}$ 是另一个法坐标, 则

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \tilde{B}^{-1} \circ \exp_v^{-1} \circ \exp_v \circ B = \tilde{B}^{-1} \circ B =: A$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上两个正交基的变换. 若 $\tilde{\varphi}$ 的坐标向量场与 b_i 相同, 则它是被 (b_i) 所决定的坐标, 我们有 $\tilde{B} = B$, 从而 $\tilde{\varphi} = \varphi$, 这就说明了唯一性.

最后, 若 g 正定, 则 A 是正交矩阵, 最后一个断言成立.

□

命题 1.13 (法坐标的性质)

设 (M,g) 是（伪）Riemann 流形, $(U,(x^i))$ 是任意以 $p \in M$ 为中心的法坐标, 则

1. p 的坐标是 $(0, \cdots, 0)$;
2. 若 g 是 Riemann 度量, 则 p 处的度量分量为 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 否则为 $g_{ij} = \pm\delta_{ij}$.
3. 对于每个 $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$, 以 p 为起点, v 为初速度的测地线 γ_v 在法坐标下表示为线

$$\gamma_v(t) = (tv_1, \cdots, tv^n)$$

只要 t 落在某个包含了 0 且满足 $\gamma_v(I) \subseteq U$ 的区间 I 上

4. 在这组坐标下的 Christoffel 符号在 p 点处退化;
5. g_{ij} 在这组坐标下的所有一阶偏导数在 p 点处退化.

Proof 1. 由法坐标的定义直接得到,2. 由法坐标的正交性得到.3. 由

$$\gamma_v(t) = \exp_p(vt) = B^{-1}(vt) = \left(tv^1, \cdots, tv^n\right)$$

任取 $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$, $\gamma_v(t) = (tv^1, \cdots, tv^n)$, $\dot{\gamma}_v(t) = (v^1, \cdots, v^n)$, $\ddot{\gamma}_v(t) = 0$, 测地线方程化为

$$v^i v^j \Gamma^k_{ij}(tv) = 0$$

取 $t = 0$, 得到 $\Gamma^k_{ij}(0) v^i v^j = 0$ 对于所有的 k, v 成立. 特别地, 对于固定的 a 取 $v = \partial_a$, 得到 $\Gamma^k_{aa} = 0$. 分别做替换 $v = \partial_a + \partial_b$ 和 $v = \partial_b - \partial_a$ 并相减后得到 $\Gamma^k_{ab} = 0$, 在 p 处对于所有的 a, b, k 成立. 故 4. 得证. 最后 5. 由命题1.2的 3. 将 E_k 替换为 ∂_k 并结合本命题的 4. 可以得到,

□