第 1 章　高维积分

1.1 分部积分

定理 1.1 (流形上的 Stokes 公式)

对于 n-维定向带边流形 M, 以及任意的 $(n-1)$-形式 ω, 都有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

♡

引理 1.1

设 (M,g) 是 n-维定向带边 Riemann 流形. $\mathrm{d}V_g$ 和 $\mathrm{d}S_g$ 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$\mathrm{d}S_g = i_N \,\mathrm{d}V_g|_{\partial M}$$

具体地, 在给定局部标架 $x^1, \cdots, x^n$ 下, 设 $N = N^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\mathrm{d}V_g = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_g &= \sqrt{g}\left(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right)\left(N^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{g} N^i (-1)^{i-1}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

♡

引理 1.2

设 (M,g) 是 n-维定向带边 Riemann 流形. $\mathrm{d}V_g$ 和 $\mathrm{d}S_g$ 分别是 M 和 ∂M 的 Riemann 体积形式, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则对于任意 M 上的向量场 X, 在 ∂M 上有以下成立

$$i_X \,\mathrm{d}V_g = g(X,N)\,\mathrm{d}S_g$$

♡

Proof 令

$$X^{\top} = X - g(X,N)\,N$$

则 $X^\top$ 是 ∂M 上的一个切向量场. 设 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 是 ∂M 上的 $(n-1)$ 个向量场, 则

$$\begin{aligned} i_X \, \mathrm{d}V_g \left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right) &= \mathrm{d}V_g \left(X, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) \\ &= \mathrm{d}V_g \left(X^\top + g\left(X, N\right) N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) \\ &= g\left(X, N\right) \mathrm{d}V_g \left(N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) + \mathrm{d}V_g \left(X^\top, v_1, \cdots, v_{n-1}\right). \end{aligned}$$

其中

$$g\left(X, N\right) \mathrm{d}V_g \left(N, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g \left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right)$$

此外, $X^\top, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 是 $(n-1)$-流形 ∂M 上的 n 个光滑向量场, 其必 $C^\infty(\partial M)$-线性相关. 从而

$$\mathrm{d}V_g \left(X^\perp, v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = 0$$

于是

$$i_X \, \mathrm{d}V_g \left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right) = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g \left(v_1, \cdots, v_{n-1}\right)$$

即

$$i_X \, \mathrm{d}V_g = g\left(X, N\right) \mathrm{d}S_g$$

□

定义 1.1 (Lie 导数)

设 M 是光滑流形, 设 X 是 M 上的一个向量场, T 上 M 上的一个张量场. 按一以下方式定义 T 沿着 X 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X T$

1. 若 $T = f \in C^\infty(M)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X f = X(f)$$
2. 若 $T = Y \in \mathfrak{X}(M)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X Y := [X, Y]$$
3. 若 $T = \omega \in \Omega(M)$, 定义
$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X \omega = \mathrm{d}\left(i_X \omega\right) + i_X \, \mathrm{d}\omega$$
这个等式被称为是 Cartan 魔术公式.
4. 对于两个张量场 S, T ,
$$\mathcal{L}_X \left(S \otimes T\right) = \left(\mathcal{L}_X S\right) \otimes T + S \otimes \left(\mathcal{L}_X T\right)$$
因此递归地定义出任意 (k, l)-张量场沿着 X 的 Lie 导数.

♣

定义 1.2 (散度)

对于光滑流形 M. 设 X 是 M 上的光滑向量场, Ω 是 M 上的一个体积形式, 定义 X 关于 Ω 的散度, 为一个光滑函数 $\operatorname{div}_{\Omega}(X)$ 使得

$$\mathcal{L}_X \Omega=\left(\operatorname{div}_{\Omega}(X)\right) \Omega$$

特别地, 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$, 向量值函数 $\mathbf{F}=\left(F^1, \cdots, F^n\right)$ 关于标准体积形式 $\mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \mathrm{d} x^n$ 的散度为

$$\operatorname{div}(F)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^i}$$

♣

Remark

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{d} x)=\mathrm{d}\left(i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} x\right)+i_{\mathbf{F}} \mathrm{d}(\mathrm{d} x)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{j-1} F^j \mathrm{d} \hat{x}^j\right)=\sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^j} \mathrm{d} x$$

定理 1.2 (散度定理)

设 (M, g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, N 是 ∂M 上的单位外法向量场. 则

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \mathrm{d} V_g=\int_{\partial \Omega} g(\mathbf{F}, N) \mathrm{d} S_g$$

♡

Proof 由 Stokes 定理

$$\int_M \mathrm{d}\left(i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} V_g\right)=\int_{\partial M} i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} V_g$$

其中

$$i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} V_g=g(\mathbf{F}, N) \mathrm{d} S_g$$

且由 Cartan 魔术公式,

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) \mathrm{d} V_g=\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\left(\mathrm{d} V_g\right)=\mathrm{d}\left(i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} V_g\right)+i_{\mathbf{F}} \mathrm{d}\left(\mathrm{d} V_g\right)=\mathrm{d}\left(i_{\mathbf{F}} \mathrm{d} V_g\right)$$

带入即得

□

推论 1.1 (Gauss-Green)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ 是标准坐标, 则

$$\int_{\Omega} u_{x_i} \mathrm{d} x=\int_{\partial \Omega} u N^i \mathrm{d} S$$

其中 $\mathrm{d} x=\mathrm{d} x^1 \cdots \mathrm{d} x^n ; i=1, \cdots, n$.

♡

Proof 令 $\mathbf{F}=u\frac{\partial}{\partial x^i}$. 则

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})=u_{x^i}$$

$$\mathbf{F}\cdot N=uN^i$$

由散度定理立即得到. □

引理 1.3

设 (M,g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的函数, 则

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})\,v=\operatorname{div}(v\mathbf{F})-g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})$$

♡

Proof 由

$$\mathcal{L}_{v\mathbf{F}}(\mu)=\mathrm{d}(i_{v\mathbf{F}}\mu)=\mathrm{d}(vi_{\mathbf{F}}\mu)=\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu+v\,\mathrm{d}(i_{\mathbf{F}}\mu)$$

其中, 设 $\mu=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}x^n$, 则

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\mathrm{d}v)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\mu\left(\mathbf{F},\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}g\left(\operatorname{grad}\,v,\frac{\partial}{\partial x^j}\right)F^j=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})\end{aligned}$$

即 $(\mathrm{d}v\wedge i_{\mathbf{F}}\mu)=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})$. 此外 $v\,\mathrm{d}(i_F\mu)\,\mu=v\mathcal{L}_{\mathbf{F}}(\mu)$ 这表明

$$\operatorname{div}(v\mathbf{F})=g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})+v\operatorname{div}(\mathbf{F})$$

□

定理 1.3 (高维分部积分)

设 (M,g) 是光滑可定向黎曼流形. $\mathbf{F}$ 是 M 上的一个光滑向量场, v 是 M 上的一个光滑函数. 则

$$\int_M(\operatorname{div}\mathbf{F})\,v\,\mathrm{d}V_g=\int_{\partial M}vg(\mathbf{F},N)\,\mathrm{d}S_g-\int_M g(\operatorname{grad}\,v,\mathbf{F})\,\mathrm{d}V_g$$

♡

Proof 对引理的等式在 Ω 上积分, 并利用散度定理立即得到. □

推论 1.2 (某一方向上的分部积分)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个可定向嵌入 Riemann 超曲面, $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标.

设 u, v 是 Ω 上的光滑函数, $N = N^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量场. 则

$$\int_\Omega uv\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} uvN^i\,\mathrm{d}S - \int_\Omega uv_{x_i}\,\mathrm{d}V$$

♡

Proof 上面的分部积分公式令 $\mathbf{F} = u\frac{\partial}{\partial x^i}$ 即可.

□

定理 1.4 (Green 公式)

设 $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$,$\nu$ 是单位外法向量, 那么

1. $$\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$$
2. $$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u\,\mathrm{d}S$$
3. $$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S$$

   其中 2,3 分别称为格林第一, 二公式.

♡

Proof

1. 在欧氏空间上, $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$. 令 $F = \nabla u$, 由散度定理,
$$\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$$
2. 令 $\mathbf{F} = \nabla v$, 由高维分部积分
$$\int_\Omega u\,\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x$$
3. 由 2.
$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x$$
   交换 u, v 的地位
$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial O} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla_u \cdot \nabla_v\,\mathrm{d}x$$
   两式相减即可.

□

定理 1.5 (散度算子的乘积律)

$$\Delta\left(uv\right)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$$

♡

1.2 极坐标

定理 1.6 (球坐标下的 Laplace)

考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的球坐标 (r,θ,φ) 其上的 Laplace 算子表示为

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

特别地, 若 $f=f\left(r\right)$ 是只依赖于径向的函数, 则

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

♡