# 标题

作者：作者

组织：机构

时间：日期

版本：版本

自定义：信息

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

# 目录

# Week 1

# Week 2

# Week 3

# Week 4

# Week 5

# Week 6

# Week 7

# Week 8

# Week 9

# Week 10

# Week 11

# Week 12

# Week 13

# Week 14

✍ **练习 14.1** **计算第一型曲面积分**

$$(1)\int_\Sigma (x+y+z)\ d\sigma,\quad (2)\int_\Sigma z^2 d\sigma$$

**其中** $\Sigma$ **表示上半球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$**。**

**Solution** $\Sigma$ **由** $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^3$**，**$\varphi(\theta,\eta):=(a\sin\eta\cos\theta,a\sin\eta\sin\theta,a\cos\eta)$ **参数化，**
**其中** $\Omega:=\left\{(\theta,\eta)\in\mathbb{R}^2:\theta\in[0,2\pi],\eta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$**，我们有**

$$d\sigma=a^2\sin\eta\,d\eta\,d\theta$$

(1)

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (x+y+z)\,d\sigma&=\int_\Omega a\left(\sin\eta\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\eta\right)a^2\sin\eta\\&=a^3\int_0^{\pi/2}\sin\eta\,d\eta\int_0^{2\pi}\sin\eta\left(\cos\theta+\sin\theta\right)+\cos\eta\,d\theta\\&=\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin 2\eta\,d\eta\\&=\pi a^3\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_\Sigma z^2d\sigma&=\int_\Omega a^2\cos^2\eta\,a^2\sin\eta\\&=2\pi a^4\int_0^{\pi/2}\cos^2\eta\sin\eta\,d\eta\\&=2\pi a^4\int_{\pi/2}^0\cos^2\eta\,d\cos\eta\\&=\frac{2}{3}\pi a^4\end{aligned}$$

✍ **练习 14.2** **设** $B_r$ **是** $\mathbb{R}^3$ **中以原点为心，**$r$ **为半径的开球，**$f:B_1\to\mathbb{R}$ **连续可积，证明：**

$$\int_{B_1}dx=\int_0^1\left(\iint_{\partial B_r}d\sigma\right)dr$$

**Proof** **对于每个** $r\in[0,1]$**，**$\partial B_r$ **由**
$\varphi_r:\Omega\to\mathbb{R}^2$**，**$\Omega:=[0,2\pi]\times[0,\pi]$**，**$\varphi_r(\theta,\eta):=(r\sin\eta\cos\theta,r\sin\eta\sin\theta,r\cos\eta)$ **刻画。于是**

$$d\sigma=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\eta$$

**原式右侧积分化为三重积分**

$$\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f\circ\varphi_r)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\eta\right)dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f\circ\varphi_r)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\eta\,dr$$

**其中** $\varphi_r$ **可视为映射** $(r,\theta,\eta)\mapsto(r\sin\eta\cos\theta,r\sin\eta\sin\theta,r\cos\eta)$**，即球坐标变换，因此上式右**

侧积分即为

$$\int_{B_1} f(x)\ dx$$

✍ **练习 14.3** 设 $\Sigma$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数，$a,b,c$ 是三个不全为令的实数，证明 Poisson 公式：

$$\int_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,d\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\ dt$$

**Proof**

平面 $ax+by+cz=0$ 是单位球面上与过原点，且方向向量为 $(a,b,c)$ 的直线垂直的平面。其上存在两个向量 $u,v$，使得 $u,v,w$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一个定向与标准定向相同的标准正交基，其中 $w:=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$。$\varphi:[0,2\pi]\times[-1,1]\to\mathbb{R}^3$，$\varphi(\theta,w):=\left(\sqrt{1-w^2}\cos\theta,\sqrt{1-w^2}\sin\theta,w\right)$ 是单位球面的一个参数表示，在这个参数表示下

$$d\sigma = dwd\theta$$

因此

$$\int_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\omega\right)\ d\omega d\theta\ \ = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2 w}\,dw\right)$$

✍ **练习 14.4**

计算第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} ydz\wedge dx$$

其中曲面 $\Sigma$ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(z\geq 0)$，定向为上侧方向。

**Solution**

$r(v,u):=(a\sin v\cos u, b\sin v\sin u, c\cos v)$ 是 $\Sigma$ 的一个参数表示。此时

$$\begin{aligned} dz\wedge dx &= \frac{\partial(z,x)}{\partial(v,u)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \det\begin{pmatrix} -c\sin v & 0 \\ a\cos v\cos u & -a\sin v\sin u \end{pmatrix}\mathrm{d}\,\mathrm{d}v \\ &= ac\sin^2 v\sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} abc\sin^3 v\sin^2 u\,dudv \\ &= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\,dv\int_0^{2\pi}\sin^2 udu \\ &= \frac{2}{3}\pi abc \end{aligned}$$

✍ **练习 14.5** 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(z+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x+y)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(y+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是由 $x^2+y^2=1, z=1$ 及三个坐标平面围成的立体在第一卦限的部分的表面，取

外侧方向

Solution 设 $\Sigma_1$ 是侧面，$\Sigma_2$ 是顶面，分别记在 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 上的积分为 $I_1$、$I_2$

可取与 $\Sigma_1$ 相容的参数表示

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad z=t,\quad (\theta,t)\in[0,\pi/2]\times[0,1]$$

此时

$$dy\wedge dz=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\cos\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta,\quad dz\wedge dx=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}=\sin\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta,\quad dx\wedge dy=0$$

于是

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+t)\cos\theta+(\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta d\theta dt\\&=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+t\cos\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

取 $\Sigma_2$ 的参数表示

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=1,\quad (r,\theta)\in[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$$

相应地

$$dy\wedge dz=dx\wedge dz=0,\quad dx\wedge dy=r\,drd\theta$$

计算

$$I_2=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\sin\theta+r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\pi$$

于是

$$I=I_1+I_2=\frac{3}{4}\pi+\frac{11}{6}$$

练习 14.6 设 $I=[a,b]\times[c,d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中闭矩形，其边界 $\partial I$ 定向为逆时针方向，设 $f:I\to\mathbb{R}$ 为 $C^1$ 函数，证明

$$\oint_{\partial I}f\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,d)\,\mathrm{d}x=-\iint_I\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_{\partial I}f\,\mathrm{d}y=\int_c^d f(b,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d f(a,y)\,\mathrm{d}y=\iint_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意，这里等式中的三个积分从左往右分别是第二型曲线积分，定积分以及二重积分.

Proof 令 $\gamma:[0,4]\to\partial I$，

$$\gamma=\begin{cases}((1-t)\,a+tb,c)\,, & t\in[0,1]\\ (b,(2-t)\,c+(t-1))\,, & t\in[1,2]\\ ((3-t)\,b+(t-2)\,d,a)\,, & t\in[2,3]\\ (a,(4-t)\,d+(t+3)\,c)\,, & t\in[3,4]\end{cases}$$

那么 $\gamma$ 是逐段光滑曲线，像集是 $\partial I$，又 $f\,dx$ 是 $I$ 上的 $C^1$-1 形式。我们有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial I} f\,dx &= \sum_{k=1}^{4}\int_{[k-1,k]}\gamma^*(f\,dx)\\ &= \sum_{k=1}^{4}\int_{[k-1,k]}(f\circ\gamma)\;d(x\circ\gamma)\end{aligned}$$

其中在 $[1,2]$ 和 $[3,4]$ 上 $x\circ\gamma$ 是常值，故在其上 $d(x\circ\gamma)=0$ 因此

$$\begin{aligned}\oint_{\partial I} dx &= \int_{[0,1]}(f\circ\gamma)\,d(x\circ\gamma)+\int_{[2,3]}(f\circ\gamma)\,d(x\circ\gamma)\\ &= \int_{[0,1]} f\left((1-t)\,a+tb,c\right)\;d\left((1-t)\,a+tb\right)+\int_{[2,3]} f\left((3-t)\,b+(t-2)\,a,d\right)d\left((3-t)\,b+(t-2)\,a\right)\\ &= \int_a^b f(x,c)\;dx-\int_a^b f(x,d)\;dx\end{aligned}$$

同理可得

$$\oint_{\partial I} f\,dy=\int_c^d f(b,y)\,dy-\int_c^d f(a,y)\,dy$$

另一方面

$$\begin{aligned}-\iint_I\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_a^b dx\int_c^d\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\\ &= -\int_a^b f(x,d)-f(x,c)\;\mathrm{d}x \quad = \int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x,d)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\iint_I\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y)\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d dy\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y)\;\mathrm{d}x\\ &= \int_c^d f(b,y)-f(c,y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b f(b,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d f(a,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这就完成了说明

✍ **练习 14.7** 设 $I=[a,b]\times[c,d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭矩形，其边界 $\partial I$ 定向为逆时针方向，利用 Green 公式计算以下第二型曲线积分

$$\oint_{\partial I} e^x\sin y\,\mathrm{d}x+e^x\cos y\,\mathrm{d}y$$

**Solution** 由 Green 公式

$$\begin{aligned}&\int_{\partial I} e^x\sin y\,\mathrm{d}x+e^x\cos y\,\mathrm{d}y\\ =&\iint_I\left(\frac{\partial e^x\cos y}{\partial x}-\frac{\partial e^x\sin y}{\partial y}\right)\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_I\left(e^x\cos y-e^x\cos y\right)\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&0\end{aligned}$$

✍ **练习 14.8** 应用 Green 公式计算下列第二型曲线积分

$$(1)\ \oint_C \left(x^2+xy\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y \quad (2)\ \oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x\,(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\oint_C \left(x^2+xy\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x\,(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{y+1}{2+y}-\frac{1}{2+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{2+y}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=4-4\ln 3\end{aligned}$$

✍ **练习 14.9** 设 $C$ 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的弧段，求

$$I=\int_C \left(2xy^3-y^2\cos x\right)\,\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\,\mathrm{d}y$$

**Solution** 令 $I_1$ 为题中形式在线段 $\{\frac{\pi}{2}\}\times[0,1]$(从下到上) 上的积分，$I_2$ 为在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\{0\}$(从左到右) 上的积分，那么由 Green 公式，

$$\begin{aligned}I-I_1-I_2 &= \int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}y^2}\left(-2y\cos x+6xy^2-6xy^2+2y\cos x\right)\,\mathrm{d}x\\ &=0\end{aligned}$$

又

$$I_1=\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)dy=\frac{1}{4}\pi^2$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,\mathrm{d}x=0$$

因此

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{4}\pi^2$$

✍ **练习 14.10** 设 $\mathbb{S}^1$ 为平面上的单位圆周，定向为逆时针方向，计算第二型曲线积分

$$I=\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

**Solution** 记

$$I=\oint_{\mathbb{S}^1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

那么

$$Q_x=P_y=\frac{-x^2-8xy+4y^2}{x^2+4y^2}$$

对于充分小的 $\varepsilon>0$，令

$$\gamma_\varepsilon := x^2+4y^2=4\varepsilon^2$$

设定 $\gamma$ 在边界上沿逆时针为其定向，赋予内部区域 $D$ 以边界诱导的定向。

由 Green 公式

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{\mathbb{S}^1+\gamma_\varepsilon^{-1}} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) + \oint_{\gamma_\varepsilon} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) \\
&= \oint_{\gamma_\varepsilon} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

考虑变量替换 $x = 2\varepsilon\cos\theta,\quad y = \varepsilon\sin\theta$，我们有

$$
\begin{aligned}
\oint_{\gamma_\varepsilon} (Pdx + Qdy) &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\left(2\cos\theta - \sin\theta\right)\,\mathrm{d}\left(2\varepsilon\cos\theta\right) + \epsilon\left(2\cos\theta + 4\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\left(\varepsilon\sin\theta\right)}{4\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(-4\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

故 $I = \pi$

# Week 15

✍ **练习 15.1** 证明 $\mathbb{R}^2$ 上的 1 次形式 $(x+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-y)\,\mathrm{d}y$ 是恰当形式，并求出它的一个原函数。

**Proof** 记 $P(x,y):=x+2y$，$Q(x,y):=2x-y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

这表明 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个闭形式，且在星形域 $\mathbb{R}^2$ 上有定义，故由 Poincaré 引理，$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是恰当形式。对每个 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，定义曲线 $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$

$$\gamma_{(x,y)}(t):=\begin{cases}(tx,0) & t\in[0,1]\\ (x,(t-1)\,y) & t\in[1,2]\end{cases}$$

定义函数 $f$

$$f(x,y):=\int_{\gamma_{(x,y)}}(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$$

则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\int_0^1\left(P\circ\gamma_{(x,y)}\right)(t)\ \mathrm{d}\left(x\circ\gamma_{(x,y)}\right)+\int_1^2\left(Q\circ\gamma_{(x,y)}\right)(t)\ \mathrm{d}\left(y\circ\gamma_{(x,y)}\right)\\&=\int_0^1 x^2t\,\mathrm{d}t+\int_1^2(2x-(t-1)\,y)\,y\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2\end{aligned}$$

是 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数。

✍ **练习 15.2** 设 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 连续可微，$L$ 是平面上分段光滑的简单闭曲线，证明:

1. $\oint_L f(xy)\,(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=0$
2. $\oint_L f(x^2+y^2)\,(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0$

**Proof**

1. 令 $P(x,y):=f(xy)\,y$, $Q(x,y):=f(xy)\,x$ ，则积分写作 $\oint_L(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$, 又
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=f'(xy)\,xy+f(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$
故 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的闭形式，进而是恰当形式，由恰当形式的保守性，积分 $\oint_L(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)=0$
2. 令 $P(x,y):=f(x^2+y^2)\,x, Q(x,y):=f(x^2+y^2)\,y$, 积分写作 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，又
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2xyf'\left(x^2+y^2\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$
因此 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的闭形式，进而是恰当形式，由恰当形式的保守性，积分 $\oint_L(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)=0$

✍ **练习 15.3** 先证明以下曲线积分与路径无关，然后计算其积分值

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, \quad \text{沿不通过原点的分段光滑曲线}$$

**Proof** 令 $P(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$,$Q(x,y) := \frac{y}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

故曲线积分与路径无关，特别地

$$\begin{aligned}
&\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\
&= \int_{(1,0)}^{(6,0)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + \int_{(6,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\
&= \int_1^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^8 \frac{y}{36+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= [-\frac{1}{x^2}]_1^6 + \left[\frac{1}{2}\ln\left(36+y^2\right)\right]_0^8 \\
&= -\frac{1}{36} + 1 + \ln 10 - \ln 6 \\
&= \frac{35}{36} + \ln 5 - \ln 3
\end{aligned}$$

✍ **练习 15.4** 利用 Gauss 公式计算以下第二型曲面积分

$$\iint_S z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \cos y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

其中 $S$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧方向。

**Solution** 记 $\omega := z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \cos y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}\cos y) \wedge (\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) \\
&= -\sin y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

用 $B$ 表示单位闭球，则由 Gauss 公式，原积分为

$$\begin{aligned}
\int_S \omega &= \int_B d\omega \\
&= \int_B -\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

其中最后一个等号是因为 $B$ 关于 $y$ 对称，且 $\sin y$ 是奇函数。

✍ **练习 15.5** 通过添加适当的辅助面，利用 Gauss 公式计算以下第二型曲面积分

$$\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分，取上侧方向。

**Solution** 记 $\omega := x^3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= 3x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 3y^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 3z^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)
\end{aligned}$$

设 $\Sigma'$ 是外侧定向的单位球面的下半部分，设 $B$ 是单位球，则由 Gauss 公式和对称性

$$\begin{aligned}
2\int_{\Sigma}\omega &= \int_{\Sigma+\Sigma'}\omega \\
&= \int_{B}\mathrm{d}\omega \\
&= 3\int_{B}\left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 3\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{12}{5}\pi
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\Sigma}\omega = \frac{6}{5}\pi$$

✍ **练习 15.6** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中满足 Gauss 公式条件的区域，$\vec{n}=(\vec{n}_x,\vec{n}_y,\vec{n}_z)$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$\vec{l}\in\mathbb{R}^3$ 是任意给定的常值向量，证明

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{\ell}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

**Proof** 设 $\vec{\ell}=(a,b,c)$，其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$，视 $\vec{\ell}$ 为常值函数，则散度 $\operatorname{div}\vec{\ell}=0$, 因此由散度定理

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{\ell}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{\ell}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

✍ **练习 15.7** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中区域，$F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 为 $C^1$ 向量值函数，$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ 为 $C^1$ 标量函数，证明:

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi\operatorname{div}F + F\cdot\nabla\varphi$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\varphi F^i\right) &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\varphi F)^i}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}F^i+\varphi\frac{\partial F^i}{\partial x^i}\right) \\
&= \varphi\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F^i}{\partial x^i}+\sum_{i=1}^{3}F^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \\
&= \varphi\operatorname{div}F+F\cdot\nabla\varphi
\end{aligned}$$

✍ **练习 15.8** 设 $C$ 是 $\mathbb{R}^3$ 任一分段光滑的简单闭曲线，$f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $C^1$ 函数，证明:

$$\oint_C [f(x)-yz]\,\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\,\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\,\mathrm{d}z = 0$$

**Proof** 设 $P(x,y,z):=f(x)-yz$,$Q(x,y,z):=g(y)-xz$,$R(x,y,z):=h(z)-xy$ ,$\omega:=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-y=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-x=\frac{\partial R}{\partial y}$$

这表明 $\omega$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的闭形式，进而是恰当的，从而由恰当形式的保守性，$\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0$ 。

**练习 15.9** 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 $(0,0,0)$ 为起点，$(1,2,3)$ 为终点的两条光滑的简单曲线，证明：

$$\int_{\mathcal{C}_1} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_2} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$$

即上述 1 次形式的曲线积分与路径无关，并选取适当路径，计算

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$$

**Proof** 记 $(x,y,z) := (x^1,x^2,x^3)$，记 $\omega_i := x_1x_2x_3/x^i, i = 1,2,3$，并设 $\omega := \omega_i x^i$ (采用 Einstein 求和约定)。则

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{x^1x^2x^3}{x^ix^j}, \quad i,j = 1,2,3, \quad i \neq j$$

因此 $\omega$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的闭形式，进而由 Pocaré 引理，$\omega$ 是恰当的，而恰当形式在分段光滑曲线上的的积分只与起始点有关，而与路径无关，因此

$$\int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_2} \omega$$

令 $\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t,0,0), & t \in [0,1] \\ (1, 2(t-1), 0), & t \in [1,2] \\ (1,2,3(t-2)), & t \in [2,3] \end{cases}$$

则 $\gamma$ 是分段光滑的连续曲线，且始终点分别为 $(0,0,0)$ 和 $(1,2,3)$，因此

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \omega &= \int_\gamma \omega \\ &= \sum_{i=1}^{3} \int_{i-1}^{i} \gamma^*\omega \\ &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + + \int_1^2 0\,\mathrm{d}(t-1) + \int_2^3 6\,\mathrm{d}(t-2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

**练习 15.10** 记 $X = (P,Q,R)$ 为向量场，定义旋度 $\mathrm{rot}\ X$ 为

$$\mathrm{rot}\ X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

设 $f(x,y,z)$ 是光滑的三元函数，证明：$\mathrm{rot}\ (\nabla f) = 0$

**Proof**

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

由 $f$ 是光滑函数，$f_{xz} = f_{zx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yz} = f_{zy}$，于是

$$\mathrm{rot}\ (\nabla f) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0$$

✍ **练习 15.11** 利用 Feynman 积分技巧计算

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Solution** 令 $I(a)=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial a}=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{1+ax}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\pi a\right]\end{aligned}$$

积分得

$$\int_0^1 I'(a)\,\mathrm{d}a=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1)$$

又

$$\int_0^1 I'(a)\,\mathrm{d}a=I(1)-I(0)=I(1)$$

因此

$$I=I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

✍ **练习 15.12** 记

$$I(y)=\int_0^1\frac{x^y-x}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x,$$

1. 证明 $I(y)$ 在 $(0,\infty)$ 上可微；
2. 求出 $I(y)$

**Solution**

1. 令 $f(x,y):=\frac{x^y-x}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$，$x^y$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，$\sin(\ln x)$ 在 $(0,1]$ 上连续有界，则 $f_y(x,y)=x^y\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-x^y\sin(\ln x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积，故 $I(y)$ 在 $(0,\infty)$ 上可微。
2. 
$$\begin{aligned}I'(y)&=\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 -e^{y\ln x}\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 -e^{yu}\sin u\,\mathrm{d}e^u,\qquad u=\ln x\\&=-\int_{-\infty}^0 e^{(y+1)u}\sin u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{(y+1)^2+1}\end{aligned}$$

   因此

$$I(y)=\int I'(y)\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{(y+1)^2+1}\,\mathrm{d}y=\arctan(y+1)+C$$

   带入 $I(1)=0$，得 $C=-\arctan 2$，因此

$$I(y)=\arctan(y+1)-\arctan 2$$

✍ **练习 15.13** 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 中连续，记

$$H(s,t)=\int_a^s f(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad (s,t)\in[a,b]\times[c,d]$$

证明二元函数 $H(s,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 中连续。

**Proof** 任取 $\varepsilon>0$，由 $f(x,y)$ 在紧集 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则 $f(x,y)$ 在其上有界且一致连续，设 $|f|\le M$ 。存在 $\delta$，使得当 $|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta$ 时，$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ，令 $r=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{2M}\right\}$ ，任取 $(x,t)\in[a,b]\times[c,d]$ 则对于任意的 $(\delta_1,\delta_2)\in B_r(s,t)$

$$\begin{aligned}
&|H(s+\delta_1,t+\delta_2)-H(s,t)|\\
&\le\left|\int_a^{s+\delta_1}f(x,t+\delta_2)-\int_a^{s+\delta_1}f(x,t)\right|+\left|\int_a^{s+\delta_1}f(x,t)-\int_a^{s}f(x,t)\right|\\
&\le\int_a^b|f(x,t+\delta_2)-f(x,t)|\,\mathrm{d}x+\delta_1 M\\
&\le(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+rM\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $H(s,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续。

# Week 16

✍ **练习 16.1** 求下列函数的导数

1.
$$f(x)=\int_x^{x^2} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

2.
$$f(x)=\int_0^x (t+x)\,g(t)\,dt,\quad \text{其中}g\text{可微}$$

**Solution**

1. 记 $s=x, r=x^2, H(x,s,r)=\int_s^r e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$，则
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\\ &= \int_s^r \frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t - e^{-x^2s^2}+e^{-x^2r^2}2x\\ &= -2x\int_x^{x^2} t^2e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t - e^{-x^4}+2xe^{-x^6}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}[(t+x)\,g(t)]\,\mathrm{d}t+2xg(x)\\ &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+2xg(x)\end{aligned}$$

✍ **练习 16.2** 记
$$\eta(A)=\sup_{y\in D}\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|,\quad A>a$$

证明：$\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in D$ 一致收敛 $\iff \lim_{A\to\infty}\eta(A)=0$

**Proof** 若 $\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in D$ 一致收敛。则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0=A_0(\varepsilon)>a$，使得当 $A>A_0$ 时
$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall y\in D$$
有 $\eta(A)\le\varepsilon$ 对于任意的 $A>A_0(\varepsilon)$ 成立，这表明 $\lim_{A\to\infty}\eta(A)=0$。

反之，若 $\lim_{A\to\infty}\eta(A)=0$。任取 $\varepsilon>0$，存在 $A_0$，使得当 $A>A_0$ 时，$\eta(A)<\varepsilon$。此时
$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\le\eta(A)<\varepsilon,\quad \forall y\in D$$
这表明 $\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in D$ 一致收敛。

□

✍ **练习 16.3** 证明以下 Cauchy 收敛原理：积分 $\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in D$ 一致收敛，当且仅当任

给 $\varepsilon>0$，存在 $A_0=A_0(\varepsilon)>a$ ，当 $A'>A>A_0$ 时，成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall y\in D$$

**Proof** 若一致收敛，任取 $\varepsilon>0$，存在 $A_0=A_0(\varepsilon)>a$，使得

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall A>A_0, y\in Y$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\\&<\varepsilon,\quad \forall A'>A>A_0,\quad y\in D\end{aligned}$$

反之，若上述 Cauchy 条件成立。注意到它蕴含了逐点收敛的 Cauchy 条件，故

$$\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

对于任意的 $y\in D$ 成立。任取 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，使得当 $A'>A>A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall y\in D$$

此外，任取 $y\in D$，存在 $A_1:=A_1(y)>A_0$，使得对于任意的 $A\ge A_1$，都有

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

特别地，

$$\left|\int_{A_1(y)}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，对于任意的 $A>A_0$，我们有

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_{A_1(y)}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{A_1(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

□

✍ **练习 16.4** 证明积分

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}[\sin(xt)]^{2023}[\arctan(x^2t)]^{2024}\,\mathrm{d}t$$

关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛

**Proof** 注意到

$$[\sin(xt)]^{2023}[\arctan(x^2t)]^{2024}\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2024},\quad \forall x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}_{\ge 0}=:M$$

令 $F(t):=e^{-t^2}M$，则被积函数的绝对值函数始终小于等于 $F(t)$，此外

$$\int_0^{\infty}|F(t)|\,\mathrm{d}t\le\int_0^1 e^{-t^2}+\int_1^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t\le 1+1=2$$

因此 $\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法，原积分关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛。 $\square$

**练习 16.5** 证明积分

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(yx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. 关于 $y \in [\delta, \infty)$ 一致收敛，其中 $\delta > 0$；
2. 关于 $y \in (0, \infty)$ 不一致收敛。

Proof

1. 注意到
$$\int_0^A \sin(yx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{y}\cos(yx)\right]_{x=0}^A = \frac{1}{y}(1-\cos(Ay)) \le \frac{1}{\delta}, \quad \forall A > 0, \forall y \in [\delta, \infty)$$
即积分 $\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [\delta, \infty)$ 一致有界。又 $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，故 $\frac{x}{1+x^2}$ 在 $x > 1$ 时单调，又 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2} = 0$，特别地，可视其为关于 $y$ 一致收敛于 0 的函数。故由 A-D 判别法，积分关于 $y \in [\delta, \infty)$ 一致收敛。
2. 考虑积分
$$\begin{aligned}\int_k^{2k} \frac{x\sin\left(\frac{x}{k}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\int_k^{2k}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{x=k}^{x=2k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{1+4k^2}{1+k^2}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 3 \\ &\forall k \ge \sqrt{3}\end{aligned}$$
这违背了一致收敛的 Cauchy 准则，故积分关于 $y \in (0, \infty)$ 不一致收敛。

$\square$

**练习 16.6** 记

$$I(p) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x, \quad p > 0$$

证明

1. $I(p)$ 关于 $p \in (0, \infty)$ 不是一致收敛的；
2. 对于任意的 $\delta > 0$，$I(p)$ 关于 $p \in [\delta, \infty)$ 是一致收敛的。

Proof

1. 由于 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, 故存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所以的 $k > N$, 有 $(2k\pi+2)^{\frac{1}{2k\pi+2}} > \frac{1}{2}$ 。考虑积分
$$\int_{2k\pi+1}^{2k\pi+2} \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2k\pi+2}}}\,\mathrm{d}x \ge \int_{2k\pi+1}^{2k\pi+2} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(2k\pi+2)^{\frac{1}{2k\pi+2}}} \ge \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \forall k > N$$
这表明 $I(p)$ 不满足关于 $p$ 一致收敛的 Cauchy 条件，因此 $I(p)$ 关于 $p \in (0, \infty)$ 不是一致收敛的。
2. 注意到
$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| = |\cos 1 - \cos A| \le 2, \quad \forall A > 1$$
特别地，可以看做 $\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $A \to \infty$ 时关于 $p \in [\delta, \infty)$ 一致有界。

此外，易见 $\frac{1}{x^p}$ 关于 $x$ 单调，且

$$\frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{x^\delta}, \quad \forall x > 1, p \in [\delta, \infty]$$

而 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\delta} = 0$, 故当 $x \to \infty$ 时，$\frac{1}{x^p}$ 关于 $p \in [\delta, \infty)$ 一致地收敛于零。由 A-D 判别法，积分关于 $p \in [\delta, \infty)$ 一致收敛。

$\square$

✍ **练习 16.7** 设 $f(x, y)$,$g(x, y)$ 满足下列条件

1. $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in [a, \infty) \times D$；当 $A \to \infty$ 时，含参积分 $\int_a^A f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in D$ 一致有界，即存在常数 $K$ 以及 $A_0 > a$，使得当 $A \geq A_0$ 时，