目录

第 1 章 Fourier 变换

1.1 Fourier 变换

定义 1.1 (内积)

1. 定义 $[-L, L]$ 上分段连续的两个复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为
$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
2. 定义 f 的范数 $\|f\|$ 为
$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Remark

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)]\,\mathrm{d}x + i\int_{-L}^{L} [f_2(x) g_1(x) - f_1(x) g_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

定理 1.1

记 $e_m(x) = e^{im\pi x/L}$，则
$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n\rangle &= \int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}\overline{e^{in\pi x/L}}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} e^{i(m-n)\pi x/L}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + i\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2L, & m = n\end{cases}\end{aligned}$$

命题 1.1

若 f 连续, 分段 C^1 并且 $f(-L) = f(L)$，则
$$c_m = \frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle$$
$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im\pi x/L} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\langle f, \frac{e_m}{\sqrt{2L}}\right\rangle\frac{e_m}{\sqrt{2L}}$$

定理 1.2 (Parseval)

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}} e_m \right\rangle\right|^2 \\
&= 2L \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle\right|^2 = 2L \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2
\end{aligned}
$$

定义 1.2 (Fourier 变换)

设 $f(x)$ 是实变量的实值或复值函数. 定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 的函数 $\hat{f}(x)$

$$
\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}' x,
$$

若极限存在. 其中

$$
\mathrm{d}' x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x
$$

定义 1.3

设 m, n 是非负整数, 称定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 有衰减阶 (m, n), 若 $f(x)$ 是 C^m 的, 且存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $|x| \geq 1$

$$
|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + \left|f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{K}{|x|^n}
$$

命题 1.2 (求导后变换)

若 f 具有衰减阶 $(1, 2)$, 则对于所有的 ξ,

$$
\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{\wedge} (\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)
$$

Proof 若先只考虑足够好的函数 (光滑且急速衰减), 由分部积分可以得到等式

$$
\begin{aligned}
\hat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}' x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}' f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}' x \\
&= i\xi \hat{f}(\xi)
\end{aligned}
$$

□

推论 1.1

若 f 有衰减阶 $(m,2)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left|f^{(m)}(x)\right|^{\wedge}(\xi)=i^{m}\xi^{m}\hat{f}(\xi)$$

♡

Proof 反复利用上面的命题.

□

命题 1.3 (变换后求导)

若 f 有衰减阶 $(0,3)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)=[xf(x)]^{\wedge}(\xi)$$

♠

Proof 对于足够好的函数, 积分下求导

$$\begin{aligned} i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)\,f(x)\,e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x \\ &= [xf(x)]^{\wedge}(\xi) \end{aligned}$$

□

推论 1.2

若 f 具有衰减阶 $(0,n+2)$, 则对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}$

$$i^{n}\frac{\mathrm{d}^{n}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi^{n}}(\xi)=[x^{n}f(x)]^{\wedge}(\xi)$$

♡

Proof 反复利用上面的命题

□

定义 1.4 (卷积)

定义 f 和 g 的卷积 $f*g$ 为

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y$$

若每个积分存在.

♣

Idea 从 x 扩散按平移量 $-y$ 反向加权 $g(y)$

定理 1.3 (卷积定理)

设 f, g 分段连续, 且对于 $|x| \geq 1$, 有 $|f(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$, 则

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^\wedge(\xi)$$

Proof

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x \int_{-\infty} g(y) e^{-i\xi y}\, \mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) e^{-i\xi(x+y)}\, \mathrm{d}'x\, \mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x\, \mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}'y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f*g)^\wedge(x)
\end{aligned}$$

□

1.2 Fourier 逆变换

定理 1.4 (反演定理)

设 f 是分段 C^1 且 L^1, 则对于每个 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi$$

定义 1.5 (Fourier 逆变换)

定义 $g(\xi)$ 的 Fourier 逆 $\check{g}(x)$ 为

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}'\xi$$

若极限存在. 其中 $\mathrm{d}'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}\xi$

定理 1.5 (Parseval)

若 $f, \hat{f}, g$ 绝对可积，且 f 分段 C^1，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

Proof 由于两个函数逆变换后的权重通过共轭抵消，通过不断交换次序可以得到恒等式。

□