第 1 章　绪论

教师：任金波

邮箱：jren@xmu.edu.cn

作业每周二上课交

参考书：

1. E.stein Complex Analysis
2. L.Ahlfors Complex Analysis

内容：余书前六章

成绩占比：出勤 10，作业 20，期中 30，期末 40。

1.1　一些断言

Example 1.1 设 $m, n \in \mathbb{N}$ 均为二整数平方和，则 mn 也是二整数的平方和。

Proof

Fake: 令 $m = a_1^2 + b_1^2, n = a_2^2 + b_2^2, a_i, b_j \in \mathbb{Z}$，观察到

$$mn = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$$

□

Real: 设

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, m = |z_1|^2, n = |z_2|^2$$

则

$$mn = |z_1z_2|^2 = |(a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)|^2$$

Example 1.2 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 可导，考虑 $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

并且

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Example 1.3 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是可导的，则 f 有任意阶导数。

Example 1.4 设 $0 < r_1 < r_2$，令 $D_{r_1} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_1\}$，$D_{r_2} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_2\}$。考虑 $f, g : D_{r_2} \to \mathbb{C}$ 可导，那么若 $f(z) = g(z)$ 对于任意的 $z \in D_{r_1}$ 成立，则 $f(z) = g(z)$ 对于任意的 $z \in D_{r_2}$ 成立。

Example 1.5 (Liouville) 设 $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 可导，若 g 在 $\mathbb{C}$ 上有界，则 g 是常值函数。

1.2 复数的引入

$$\text{自然界} \xrightarrow{\text{数数}} \mathbb{N} \xrightarrow{x+2=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{5x=3} \mathbb{Q} \xrightarrow{x^2-2=0} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2+1} \mathbb{C}$$

为什么要求解 x^2+1?

Example 1.6 考虑 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R}$，$f(x)=0$ 一定有实根。问题是如何给出方程实根的根式解?

Solution 令 $x+\frac{a}{3}=y$，则方程化为

$$y^3+py+q=0,\quad p,q\in\mathbb{R}$$

我们令 $y=u+v$，其中 u,v 待定，带入方程得到

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$
$$\Longleftrightarrow u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$$

可以考虑

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\frac{p}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

由韦达定理，u^3 和 v^3 是方程

$$z^3+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

的两个根，从而

$$u^3,v^3=\frac{q}{2}+-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

因此

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Example 1.7 对于

$$x^3-15x+4=0$$

在形式上，我们有

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=11\sqrt{-1}$$

则

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4$$

1.3 复数的定义

以下给出复数的三种定义，此三种方式定义出的环是同构的。

1.3.1 通过定义乘法

设 $(\mathbb{R},+)$ 是加法群，则 $\left(\mathbb{R}^2,+\right):=(\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$ 是一个加法群。

$\mathbb{R}$ 上还具有环结构，但若取环的直积，则 $(1,0)\times(0,1)=(0,0)$，得到的环结构具有零因子，不是整环。

事实上，我们定义 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2):=\left(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1\right)$，此时 $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ 成为一个交换环，加法单位元是 $(0,0)$，乘法单位元是 $(1,0)$ 。

记 $i=(0,1)$，断言 $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ 是一个域、事实上，取 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，a,b 不全为 0，则 $(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$，故 (a,b) 可逆。

称这个域 $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ 为复数域，记作 $\mathbb{C}$。

通过将 $\mathbb{R}\ni r\mapsto(r,0)$ 将 $\mathbb{R}$ 嵌入到 $\mathbb{C}$ 中。

1.3.2 通过商去 x^2+1

考虑以 x 为未定元的实系数多项式 $\mathbb{R}[x]$ ，它是 PID 且是 UFD。考虑环上的一个理想

$$I=\left(x^2+1\right)$$

我们知道 x^2+1 在 $\mathbb{R}[x]$ 上是不可约的，又 $\mathbb{R}[x]$ 是 UFD，因此 I 是一个极大理想，故而

$$\mathbb{R}[x]/\left(x^2+1\right)$$

是一个域，称为复数域，记作 $\mathbb{C}$，记 $i=\bar{x}$ 为单项式 x 所在的代表元。

通过将 $\mathbb{R}\ni r\mapsto\bar{r}$ 将 $\mathbb{R}$ 嵌入到 $\mathbb{C}$ 中。

1.3.3 矩阵环的子环

考虑 $M_{2\times2}(\mathbb{R}):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ 是 2×2 方阵环。

考虑它的子环 $A=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$ 是一个交换环，定义 $i:=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这个子环 A 中的元素称为复数，A 也记作 $\mathbb{C}$。

通过将 $r \ni \mathbb{R} \mapsto rE$ 将 $\mathbb{R}$ 嵌入到 $\mathbb{C}$ 中。

1.4 复数的三种表述方式

1. 代数形式：$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$，其中 x 记作 $\operatorname{Re} z$，y 记作 $\operatorname{Im} z$。称 z 是纯虚数，若 $\operatorname{Re} z = 0$，且 $\operatorname{Im} z \neq 0$。
2. 三角形式：$z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \theta \in \mathbb{R}$，称 ρ 为 z 的模长，$\theta = \operatorname{Arg} z$ 为 z 的辐角（当 $z \neq 0$ 时）。
   对于任意的 $z \neq 0$，存在唯一的 $\theta \in \operatorname{Arg} z$，使得 $-\pi < \theta \leq \pi$，此 θ 称为 z 的辐角主值，记作 $\arg z$。以后每个确定的 $\operatorname{Arg} z$ 中的值也记作 $\arg z$。
3. 指数形式：$z = \rho \cdot e^{i\theta}, \rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \theta \in \mathbb{R}$，我们有
   $$z^n = \rho^n\left(\cos n\theta + i\sin\theta\right) = \rho^n e^{in\theta}$$

1.5 复数的开方

设 $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \rho \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$，定义

$$\omega = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$$

当 $n \geq 2$ 时，ω 为多值函数（不是函数）。

回去读 3-8 页，预习 p9-p13, 作业是第一章的 7,9,12,13

1.6 复球面

考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的坐标系 (x, y, u)，将 xOy 平面 $\{u = 0\}$ 等同于 $\mathbb{C}$，即 $(x, y) \leftrightarrow x + iy$。

设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 上的的球面

$$S := S^2 := \left\{(x, y, u) : x^2 + y^2 + u^2 = 1\right\}$$

设 $N = (0, 0, 1)$ 是北极点，任取 xOy 平面上一点 $A = (x, y, 0)$，则直线 NA 与与球面交于一点 $A' : NA \cap S = \{N, A'\}$。

设 $A'=(x',y',u')$，则 $\vec{NA}=(x,y,-1)$，$\vec{NA'}=(x',y',u'-1)$，由于 N,A,A' 共线，可得 $x:y:-1=x':y':u'-1$，我们有

$$y'=y\left(1-u'\right),x'=x\left(1-u'\right),x'^2+y'^2+u'^2=1$$

写成

$$x^2\left(1-u'\right)^2+y^2\left(1-u'\right)^2+u'^2=1$$

得到

$$\left(x^2+y^2\right)\left(1-u'\right)^2=1-u'^2$$

由于 $N\neq A'$，可知 $u'\neq 1$，于是

$$\left(x^2+y^2\right)\left(1-u'\right)=1+u'$$

解出 u'，得到

$$u'=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

进而

$$x'=\left(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)x=\frac{2x}{|z|^2+1}=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}$$

类似地有

$$y'=\frac{2y}{|z|^2+1}=\frac{z-\bar{z}}{i\left(|z|^2+1\right)}$$

以上表明存在 $\mathbb{C}$ 到 $S\setminus N$ 的双射 $\varphi:\mathbb{C}\to S\setminus\{N\}$

$$\varphi\left(x,y\right)=\left(x',y',u'\right)$$

注意到当 $|x+iy|\to\infty$ 时，即 $|OA|\to\infty$ 时，我们有 $A'\to N$。可以自然地约定一 $\infty\notin\mathbb{C}$,$\mathbb{C}_\infty:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为扩充复数系或扩充复平面，记作 $\mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)$，并约定 $\varphi\left(\infty\right):=N$ 将 φ 扩张到 $\mathbb{C}_\infty$ 上。

命题 1.1 (扩充复平面的性质)

对于扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$，以及它与复球面的对应 $\varphi:\mathbb{C}_\infty\to S$，我们有

1. φ 在 $\{|z|>1\}$ 上的限制，是其到 $\{$北半球$\}\setminus\{N\}$ 的一一对应；φ 在 $\{|z|>0\}\cup\{\infty\}$ 上的限制与北半球一一对应。
2. φ 在 $\{|z|<1\}$ 上的限制，是其到南半球的一一对应。
3. 对于直线 $L\subseteq\mathbb{C}$，φ 在 L 上的限制，是其到"S 中过 N 的圆 $\setminus\{N\}$"的一个一一对应。
4. φ 在 S 上的一个圆的限制，是其到 $\mathbb{C}$ 中某个圆，或"$\mathbb{C}$ 中某直线 $\cup\{\infty\}$"的一个一一对应。

Remark 也成上述的 S 是 Riemann 球面。

定义 1.1

对于 $\infty \in \mathbb{C}_\infty$，定义 $|\infty| := \infty := +\infty$

Remark 不定义 ∞ 的 $\mathrm{Re}\,, \mathrm{Im}\,, \mathrm{Arg}, \arg$ 。

定义 1.2

对于 $\infty \in \mathbb{C}_\infty$，做以下约定

1. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$，$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty$，$\frac{\alpha}{\infty} = 0$;
2. $\forall \in \mathbb{C}^*$，$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty$

Remark 不定义两个无穷间的运算。