目录

第 1 章acobi 场 **1**

1.1 Jacobi 方程 1

1.2 Jacobi 场的基本计算 3

1.3 一点处退化的 Jacobi 场 4

1.3.1 常曲率空间的 Jacobi 场 6

第 1 章 Jacobi 场

1.1 Jacobi 方程

每条主曲线都是测地线的变分, 称为是测地变分. 测地变分的变分场 $J(t)$ 满足一个二阶线性方程, 称为是 Jacobi 方程. $(J, D_t J)$ 的初值给出了方程的解空间到两份切空间的对应. 称解空间的一个元素为一个 Jacobi 场.

既然测地变分的变分场是 Jacobi 场, 反过来问,Jacobi 场合适是测地变分的变分场? 当 M 测地完备或 I 是紧区间是, 可以这样构造: 以 $J(0)$ 为初速度确定一条初始的横截曲线, 可以沿着它给出一个初值为 v, 初始加速度待定的向量场 V . 这样 σ 上每一点, 都可以依据 V 长出一条测地线, 得到了一个测地变分. 前面的假设保证了充分小的邻域上, 测地线延伸到 I 上. 取适当的 $D_s V(0)$ 就可以构造出所需的测地变分.

定义 1.1 (测地变分)

设 (M, g) 是 n 维 (伪)-Riemann 流形. 设 $I, K \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $\gamma : I \to M$ 是测地线, Γ 是 γ 的一个变分. 称 Γ 为一个**测地变分**, 若 $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ 对于每个 $s \in K$ 也是一个测地线.

♣

定理 1.1 (Jacobi 方程)

设 (M, g) 是伪 Riemann 流形, γ 是一个测地线, J 是沿 γ 的一个向量场. 若 J 是一个测地变分的变分场, 则它满足以下 **Jacobi 方程**

$$D_t^2 J + R(J, \gamma')\gamma' = 0$$

♡

Proof 设 Γ 是以 J 为变分场的测地变分, 令 $T(s,t) = \partial_t \Gamma(s,t)$,$S(s,t) = \partial_s \Gamma(t,s)$. 则测地线方程给出

$$D_t T \equiv 0$$

沿着横街曲线求导, 得到

$$D_s D_t T \equiv 0$$

由命题??以及对称引理??

$$\begin{aligned} 0 &= D_s D_t T \\ &= D_t D_s T + R(S,T)T \\ &= D_t^2 S + R(S,T)T \end{aligned}$$

由于 $T(0,t)=\gamma'(t)$,$S(0,t)=J$, 带入即可得 Jacobi 方程成立.

□

定义 1.2

沿测地线的光滑向量场若满足 Jacobi 方程, 则称为 Jacobi 场. ♣

定理 1.2 (Jaocbi 场的存在唯一性)

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形, $I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间, $\gamma: I\to M$ 是测地线. 设 $a\in I$, $p=\gamma(a)$, 任取 $v,w\in T_pM$, 存在唯一的满足以下条件的沿 γ 的 Jacobi 场:

$$J(a)=v,\quad D_tJ(a)=w$$

♡

Proof 取正交的沿 γ 的平行标价 (E_i), 设 $v=v^iE_i(a)$, $w=w^iE_i(p)$, $\gamma(t)=\gamma^i(t)E_i(t)$. 则 $\gamma'(t)=\dot\gamma^i(t)E_i(t)$. 设 $J(t)=J^i(t)E_i(t)$, 则 Jacobi 方程写作

$$\ddot J^i(t)+R^i_{jkl}(\gamma(t))J^j(t)\dot\gamma^k(t)\dot\gamma^l(t)=0,\quad i=1,\cdots,n$$

是一个二阶线性方程组, 令 $W^i(t)=\dot J^i(t)$, 则方程组化为

$$\begin{aligned} \dot J^i(t) &= W^i(t) \\ \dot W^i(t) &= -R^i_{jkl}(\gamma(t))J^j(t)\dot\gamma^k(t)\dot\gamma^l(t) \\ &,\quad i=1,\cdots,n \end{aligned}$$

一个 2n 个方程的一阶线性 ODE, 取定初值 $J^i(a)=v^i$,$W^i(t)=w^i$ 下, 方程组存在唯一的光滑解, 由于 $D_tJ(a)=\dot J^i(t)E_i(t)=W^i(t)E_i(t)=w^iE_i(t)=w$, 故方程的解 J 即为所需要的 Jacobi 场. □

定义 1.3

给定测地线 γ, 令 $\mathscr{J}(\gamma)\subseteq\mathfrak{X}(\gamma)$ 表示全体沿 γ 的 Jacobi 场. ♣

推论 1.1

设 (M,g) 是 n 维 (伪)Riemann 流形, γ 是一个测地线. 则 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是 $\mathfrak{X}(\gamma)$ 的一个 $2n$ 维线性子空间.

♡

Proof 由于 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是线性方程 (Jaocbi) 方程的解空间, 故 $\mathscr{J}(\gamma)$ 是一个线性空间. 定

义 $\mathscr{J}(\gamma)$ 到 $T_pM \oplus T_pM$ 的映射 $J \mapsto (J(a), D_tJ(a))$, 由上面的定理是一个双射, 故 $\dim (\gamma) = \dim (T_pM \oplus T_pM) = 2n$.

□

1.2 Jacobi 场的基本计算

如果一个变分场不将初始的测地线像侧边拖拽, 而只做沿着测地线切向上的改变, 那么它将不包含任何除了初始测地线以外的信息. 始终沿着 γ 切向的 Jacobi 场是”平凡的”, 始终沿着 γ 法向的 Jacobi 场包含了主要的信息. 我们要区分出这些 Jacobi 场.

事实上, 切 Jacobi 场是 2 维的, 由平移变换和尺度变换张成. 剩下的 $(2n-2)$ 维都是法向的.

定义 1.4

给定正则曲线 $\gamma : I \to M$

1. 记 $T^{\top}_{\gamma(t)}M \subseteq T_{\gamma(t)}M$ 为 $\gamma'(t)$ 在 $T_{\gamma(t)}M$ 中张成的子空间.
2. 记 $T^{\perp}_{\gamma(t)}M$ 为 $T^{\top}_{\gamma(t)}M$ 的正交补空间.
3. 若 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 使得 $V(t) \in T^{\top}_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$, 则称 V 为一个沿 γ 的切向量场.
4. 若 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 使得 $V(t) \in T^{\perp}_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$, 则称 V 为沿 γ 的一个法向量场.
5. 令 $\mathfrak{X}^{\top}(\gamma)$ 和 $\mathfrak{X}^{\perp}(\gamma)$ 分别表示沿 γ 的切向量场和法向量场空间.
6. 若 γ 是测地线, 可以类似地定义 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 和 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 分别为沿 γ 的切 Jacobi 场和法 Jacobi 场.

♣

命题 1.1

令 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形, γ 是一个测地线,J 是 γ 的一个 Jacobi 场. 则以下几条等价:

1. J 是一个法 Jacobi 场.
2. J 与 γ' 在两个不同的点处正交.
3. 在某一点处, D_tJ 与 J 均与 γ' 正交.
4. D_tJ 和 J 与 γ' 处处正交.

♠

Proof 令 $f(t) = \langle J, \gamma' \rangle$, 由 $D_t\gamma' = 0$ 和联络的度量性, 可得

$$f'(t) = \langle D_tJ, \gamma' \rangle$$

再求一次导，得到

$$f''(t) = \left\langle D_t^2 J, \gamma' \right\rangle$$

由 Jacobi 方程

$$\begin{aligned}\left\langle D_t^2 J, \gamma' \right\rangle &= \left\langle -R(J, \gamma')\gamma', \gamma' \right\rangle \\ &= -Rm(J, \gamma', \gamma', \gamma') \\ &= 0\end{aligned}$$

故 $f''(t) \equiv 0$，从而 $f(t)$ 形如 $at + b$ 是 t 的一个仿射.

根据定义，J 与 γ' 在 t 处正交，当且仅当 f 在 t 处退化，$D_t J$ 与 γ' 正交，当且仅当 f' 在 t 处退化. 而 f' 在两点处退化，当且仅当 $f \equiv 0$; f, f' 一点处均退化，也当且仅当 $f \equiv 0$. 故 1. $\iff$ 2., 3. $\iff$ 4.,1. $\iff$ 4.，命题得证.

$\square$

推论 1.2

设 (M, g) 是 (伪)Riemann 流形，$\gamma : I \to M$ 是非常值的测地线. 则 $\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 是 $\mathscr{J}(\gamma)$ 的 $2n-2$ 维子空间，$\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 是 $\mathscr{J}(\gamma)$ 的 2 维子空间. 并且每个 γ 的 Jacobi 场都可以唯一地写作一个切 Jacobi 场和法 Jacobi 场的和.

♡

Proof 对于每个 $a \in I$，映射 $J \mapsto (J(a), D_t J(a))$ 给出 $\mathscr{J}(\gamma)$ 到 $T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ 的一个同构. 又由上面的命题，$\mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ 无非就是由满足 $\langle w, \gamma'(a) \rangle = \langle v, \gamma'(a) \rangle = 0$ 的全体 $(w, v) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ 构成的子空间下的原像. 故 $\dim \mathscr{J}^{\perp}(\gamma) = 2n - 2$.

由于 $J_0(t) = \gamma'(t)$ 和 $J_1(t) = t\gamma'(t)$ 都位于 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$. 又 $\gamma'(t)$ 无处退化，故 J_0 与 J_1 线性无关，$\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 是至少 2 维的. 又 $J^{\perp}(\gamma) \cap J^{\top}(\gamma) = \{0\}$，故 $\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ 只能是 2 维的. 于是有正交分解

$$\mathscr{J}(\gamma) = \mathscr{J}^{\top}(\gamma) \oplus \mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$$

即 γ 唯一地写作一个切 Jacobi 场和一个法 Jacobi 场之和.

$\square$

1.3 一点处退化的 Jacobi 场

对于一点处消失的 Jacobi 场，它可以通过保持起点的变分来实现，具有某种特殊性. 在测地坐标下，他可以看成是两条过原点直线 (测地线) 中间方向相同 $(D_t J(0))$ 的一堆" 连接两条直线箭头" .

借由此，在法坐标上，每个切向量都可以实现为在原点消失的沿径向测地线的 Jacobi 场的某个取值.

引理 1.1

设 (M,g) 是 (伪)Riemann 流形, $I\subseteq\mathbb{R}$ 是包含了 0 的一个区间, $\gamma:I\to M$ 是测地线. 设 $J:I\to M$ 是 γ 的一个 Jacobi 场, 使得 $J(0)=0$. 若 M 是完备或 I 是紧区间成立其一, 则 J 是以下 γ 的测地变分的变分场

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

其中 $p=\gamma(0), v=\gamma'(0), w=D_tJ(0)$.

Proof 若 $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是光滑曲线, V 是沿 σ 的向量场, 使得

$$\sigma(0)=p,\quad \sigma'(0)=J(0),\quad V(0)=v,\quad D_sV(0)=D_tJ(0)$$

则 J 是以下 γ 的测地变分的变分场

$$\Gamma(s,t)=\exp_{\sigma(s)}(tV(s))$$

本题中, 取 $\sigma(s)\equiv p$, 则 $\sigma'(0)=0=J(0)$. 取 $V(s)=sw+v$, 则

$$V(0)=v,\quad D_sV(0)=w$$

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

□

命题 1.2 (一点退化的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是 n 维 (伪)Riemann 流形, $I\subseteq\mathbb{R}$ 是包含了 0 的一个区间. $\gamma:I\to M$ 是测地线, 使得 $\gamma(0)=p$. $J:I\to M$ 是 γ 的一个 Jacobi 场, 使得 $J(0)=0$,$D_tJ(0)=w$. 则 J 有以下表示

$$J(t)=\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_{tv}(tw)\tag{1.1}$$

其中 $v=\gamma'(0)$, tw 在标准同构 $T_{tv}(T_pM)\simeq T_pM$ 下视作 $T_{tv}(T_pM)$ 中的向量. 若 (x^i) 是 p 的包含了 γ 的像法邻域上的一个法坐标, 则

$$J(t)=tw^i\,\partial_i|_{\gamma(t)}$$

其中 $w^i\,\partial_i|_0$ 是 w 的法坐标表示.

Proof 任取 $t\in I$, t 落在 I 的某个包含了 0 的紧子区间上, 由上面的引理可知, J 在这个紧子区间上表为

$$\Gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$$

由链式法则,

$$J(t)=\partial_s\Gamma(0,t)=\mathrm{d}\left(\exp_p\right)_{tv}(tw)$$

在 t 附近成立, 我们在每个 t 的附近都能得到这个等式.

在法坐标下, 指数映射的坐标表示为单位映射, 故 $\Gamma(s,t)$ 显示地写作

$$\Gamma(s,t)=\left(t\left(v^1+sw^1\right),\cdots,t\left(v^n+sw^n\right)\right)$$

关于 s 求导并取 $s=0$, 即可得

$$J(t)=\left(tw^1,\cdots,tw^n\right)=tw^i\,\partial_i|_{\gamma(t)}$$

□

1.3.1 常曲率空间的 Jacobi 场

引理 1.2

方程

$$u''(t)+cu(t)=0,\quad u(0)=0$$

的解空间是函数

$$s_c(t)=\begin{cases}t, & c=0\\ R\sin\frac{t}{R}, & c=\frac{1}{R^2}>0\\ R\sinh\frac{t}{R}, & c=-\frac{1}{R^2}<0\end{cases}$$

张成的一维线性子空间. ♡

命题 1.3 (常曲率空间的 Jacobi 场)

设 (M,g) 是有常曲率 c 的 Riemann 流形, γ 是 M 上的单位速度测地线. 则沿 γ 法向, 且在 $t=0$ 处消失的 Jacobi 场具有以下形式:

$$J(t)=ks_c(t)E(t)$$

其中 E 是任意沿 γ 平行的单位法向量场, k 是任意常数. 这样的 Jacobi 场的初值是

$$D_tJ(0)=kE(0)$$

范数为

$$|J(t)|=|s_c(t)|\,|D_tJ(0)|$$

♠

Proof 常曲率空间的曲率自同态的计算公式, 连同 Jacobi 方程, 给出了 D_t^2J 与 J 相

差常数 $-c$ 倍的事实. 由此, 给定单位法向量场 $E(t)$ 的情况下, 常数变易法给出这样的 Jacobi 方程的解与方程

$$u''(t) + cu(t) = 0$$

的解 $ks_c(t)$ 一一对应. 于是 J 对应于 $E(t)$ 的所以解就是 $ks_c(t)E(t)$. 又 $E(t)$ 是任意单位法向量场, 由此测到了 J 的全部形式.

最后,

$$D_tJ(0) = ks_c'(0)E(0) = kE(0) \implies |D_tJ(0)| = |k|$$

$$|J(t)| = k|s_c(t)||E(t)| = |s_c(t)||D_tJ(0)|$$

□