第 1 章 基本群

1.1 同伦

定义 1.1

设 X,Y 是两个拓扑空间,$f,g:X\to Y$ 是两个连续映射. 称 f 同伦于 g, 记作 $(f\simeq g)$, 若存在连续映射 $F:X\times I\to Y$, 使得 $F(x,0)=f(x)$, $f(x,1)=g(x)$ 对于所有的 $x\in X$ 成立. 此时称映射 F 为 f 到 g 的同伦. ♣

Remark

1. 对于每个 $t\in I$, $i_t:X\to X\times I$, $i_t(x)=(x,t)$ 是嵌入映射. 故 $f_t=F\circ i_t:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的一组连续映射.
2. $f_0=f, f_1=g$.
3. 观察图 1.1, 每个 $t\in I$ 对应左侧一片圆, t 比较近的圆映到 Y 的图像是差不多的.

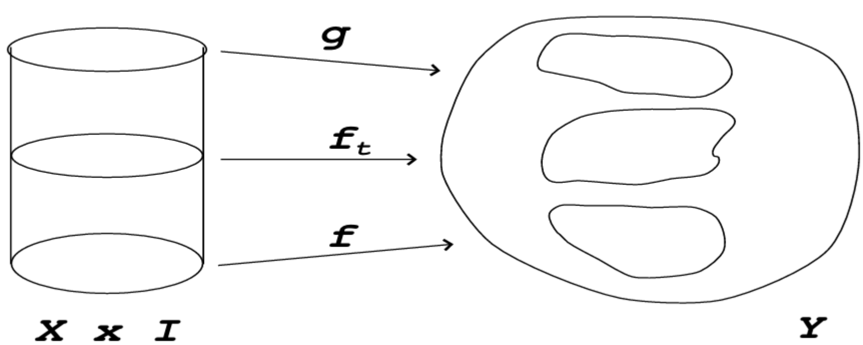

图 1.1: 从 f 到 g 的同伦

Example 1.1 设 X 是拓扑空间, Y 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸集. 令 $f,g:X\to Y$ 是连续映射. 则 f 同伦于 g. 具体地, $H:X\times I\to Y$

$$H(x,t)=tg(x)+(1-t)f(x)$$

是 f 到 g 的同伦. 此类同伦被称为是直线同伦.

Example 1.2 设 $\mathbb{S}^1=\{z\in C:|z|=1\}$ 是单位元. 也可以写作 $\mathbb{S}^1=\left\{e^{i\theta}:0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$. 定义两个映射 $f,g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$,$f(z)=z$, 和$g(z)=-z, z\in\mathbb{S}^1$. 则 f 同伦于 g. 具体地, 定

义 $F:\mathbb{S}^1\times I\to\mathbb{S}^1$

$$F\left(e^{i\theta},t\right)=e^{i(\theta+t\pi)}$$

注意到 F 是连续映射的复合

$$\mathbb{S}^1\times I\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$$
$$\left(e^{i\theta},t\right)\to\left(e^{i\theta},e^{it\pi}\right)\to e^{i(\theta+t\pi)}$$

其中第二个映射是复数的乘法, 故 F 是连续映射. 此外, 注意到映射族 $\{f_t:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1\}$ 是旋转 $t\pi,0\le t\le 1$ 的一族映射.

定理 1.1

设 X,Y 是拓扑空间, $C\left(X,Y\right)$ 表示 X 到 Y 的全体连续映射. 则同伦关系是 $C\left(X,Y\right)$ 上的一个等价关系.

Proof

对于连续映射 $f:X\to Y$, 定义 $H\left(x,t\right)=f\left(x\right)$ 可以说明自反性.

对于 $H:f\simeq g$, 定义 $H'\left(x,t\right)=H\left(x,\left(1-t\right)\right)$, 则 $H':g\simeq f$, 说明了对称性.

对于 $H_1:f\simeq g,H_2:g\simeq h$, 定义 H

$$H\left(x,t\right):=\begin{cases}H_1\left(x,2t\right), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ H_2\left(x,2t-1\right), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

则由粘合引理 H 是连续映射, 说明了传递性.

□

定义 1.2

$C\left(X,Y\right)$ 上关于同伦关系的一个等价类, 称为是一个同伦类. 同伦类的全体记作 $[X,Y]$.

定理 1.2

设 $f_1,g_1:X\to Y$ 是同伦的, 且 $f_2,g_2:Y\to Z$ 是同伦的. 则复合映射 $f_2\circ f_1,g_2\circ g_1:X\to Z$ 也是同伦的.

Proof

设 $H_1:f_1\simeq g_1$, $H_2:f_2\simeq g_2$. 则 $f_2\circ H_1:X\times I\to Z$ 是 $f_2\circ f_1$ 到 $f_2\circ g_1$ 的同伦. 接下来, 定义 $H:X\times I\to Z$, $H\left(x,t\right)=H_2\left(g_1\left(x\right),t\right)$. 则 H 是连续映射, 且 $H\left(x,0\right)=H_2\left(g_1\left(x\right),0\right)=f_2\circ g_1\left(x\right)$, $H\left(x,1\right)=H_2\left(g_1\left(x\right),1\right)=g_2\circ g_1\left(x\right)$. 现在 $f_2\circ f_1\simeq f_2\circ g_1,f_2\circ g_1\simeq g_2\circ g_1$, 因此 $f_2\circ f_1\simeq g_2\circ g_1$.

□

1.2 同伦型和可缩空间

对于常值映射 $f: X \to Y, f \equiv y_0$，记它为 C_{y_0}.

定义 1.3 (可缩)

称拓扑空间 X 是**可缩的**，若单位映射 $I_X: X \to X$ 同伦于某个常值映射 $C_x: X \to X$. 称 I_X 到 C_x 的同伦为空间到点 $x \in X$ 的**一个收缩**. ♣

Example 1.3 $\mathbb{R}^n$ 上的凸集 S 可以收缩到任意点 $x_0 \in S$.

定义 1.4 (星形集)

称 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X 是星形的，若存在 $x_0 \in X$，使得任意点到 x_0 的线段都落在 X 上. ♣

定义 1.5 (同伦等价, 同伦型)

设 $f: X \to Y$ 是连续映射. 称 f 是**一个同伦等价**，若存在连续映射 $g: Y \to X$，使得 $g \circ f$ 同伦于 X 上的单位映射 Id_X，且 $f \circ g$ 同伦于 Y 上的单位映射 Id_Y.
称两个拓扑空间 X, Y 是**同伦等价的**或**有相同的同伦型**，若存在其中一个空间到另一个空间的同伦等价. ♣

Remark

1. 同胚的空间有相同的同伦型，在下面的例子中可以看到，有相同同伦型的空间不一定同胚.

Example 1.4 考虑单位（开或闭）圆盘 $\mathbb{D}^2$，以及 $x_0 \in \mathbb{D}$. 令 $i: P = \{x_0\} \to \mathbb{D}^2$ 是含入映射，$C_{x_0}: \mathbb{D}^2 \to P$ 是常值映射. 则 $C_{x_0} \circ i = \mathrm{Id}_P$. 另一方面，考虑映射 $H: \mathbb{D}^2 \times I \to \mathbb{D}^2$，

$$H(x, t) = (1 - t) x + t x_0$$

是 $\mathrm{Id}_{\mathbb{D}^2}$ 到 $i \circ C_{x_0}$ 的同伦. 因此 $\mathbb{D}^2$ 与点空间 P 有相同的同伦型，而它们显然是不同胚的.

Remark

1. 也可以看到紧致性并非同伦不变的.
2. 类似地，很多拓扑不变量都不是同伦不变的，可见同伦分类是一种比较弱的分类.

接下来给出一些同伦不变量，那么它们显然也是拓扑不变的. 一但我们发现两个拓扑空间的某个同伦不变量是不同的，则它们是不同伦的，进而不是同胚的，这给出判断两

个空间不同胚的方式.

定理 1.3

一个拓扑空间 X 是可缩的, 当且仅当 X 与一个点空间 $P=\{p\}$ 具有相同的同伦型.

Proof

设拓扑空间 X 是可缩的, 设 $H: X\times I\to X$ 是 Id_X 到常值映射 $C_{x_0}: X\to X$ 的同伦. 定义 $i: P\to X$,$i(p)=x_0$,$C: X\to P$, $C(x)=p$. 则 $i\circ C=C_{x_0}\simeq \mathrm{Id}_X$, $C\circ i=\mathrm{Id}_P$. 因此 X 和 P 有相同的同伦型.

反之, 若设 X, P 有相同的同伦型, 则存在 $f: X\to P$, $g: P\to X$, 使得 $f\circ g=\mathrm{Id}_P$, $g\circ f\simeq \mathrm{Id}_X$. 设 $H: g\circ f\simeq \mathrm{Id}_X$. 设 $g(p)=x_0$, 又 $f(x)=p$, 故 $g\circ f\equiv x_0$ 是常值映射. 这表明 X 是可缩的.

□

命题 1.1

设 X 是可缩空间, 则 X 是道路连通的.

Proof

设 X 是可缩空间, $H: \mathrm{Id}_X\simeq C_{x_0}$.

任取 $x_1,x_2\in X$, 则 $f_{x_1}(t):=H(x_1,t)$ 和 $f_{x_2}(t):=H(x_2,t)$ 是连续映射, 使得 $f_{x_1}(0)=x_1, f_{x_1}(1)=x_0$, $f_{x_2}(0)=x_2, f_{x_2}(1)=x_0$. 定义 $g(t)$

$$g(t):=\begin{cases} f_{x_1}(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ f_{x_2}(2-2t), & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

则 $g(t)$ 是连续映射, 使得 $g(0)=x_1$, $g(1)=x_2$, 这表明 X 是道路连通的.

□

命题 1.2

拓扑空间 X 是可缩的, 当且仅当任意拓扑空间 T 到 X 的任意映射 $f: T\to X$ 是同伦于常值映射的.

Remark

1. 习题给出 $f: X\to T$ 的情况也成立.

Proof

若 X 是可缩的, 存在 $x_0\in X$, 以及 $H:\mathrm{Id}_X\simeq C_{x_0}$. 任取拓扑空间 T 和映射 $f: T\to X$, 则由定理 1.2, $f=\mathrm{Id}_X\circ f\simeq C_{x_0}\circ f$ 是常值映射.

反之，若任取拓扑空间 X，以及映射 $f: T \to X$，都有 f 同伦于常值映射，特别地取 $T = X$，$f = \mathrm{Id}_X$，则 $\mathrm{Id}_X \simeq C_{x_0}$ 对某个 $x_0 \in X$ 成立，故 X 是可缩的。

□

推论 1.1

设 X 是可缩空间，则单位映射 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ 同伦于常值映射 $C_x : X \to X$ 对于任意的 $x \in X$ 成立。特别地，X 可以收缩到 X 上的任意一点。

Proof

设 X 是可缩空间，上面命题的证明表示，若 $\mathrm{Id}_X \simeq C_{x_0} : X \to X$，则任意映射 $f: T \to X$ 都可以同伦到一个恒为 x_0 的常值映射。特别地取 $T = X$，$f = C_x : X \to X$，则 $C_x \simeq C_{x_0} \simeq \mathrm{Id}_X$.

□

定义 1.6 (相对同伦)

令 $A \subseteq X$ 是任意子集，$f, gX \to Y$ 是两个连续映射。称 f 是相对 A 同伦于 g 的，若存在连续映射 $F: X \times I \to Y$，使得

$$F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x), \forall x \in X$$

，并且

$$F(a,t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$$

Remark

1. 如果令 $A = \varnothing$，就得到了同伦的概念。
2. 特别地，如果 f, g 相对于 A 同伦，则在一开始时它们就在 A 上一致。
3. f 相对于 A 同伦于 g 是说，f 可以通过一族在 A 上保持相同的连续映射变动到 g.
4. 不难证明相对于 A 同伦是 $C(X,Y)$ 上的一个等价关系。

定理 1.4

若 X 是相对于 $\{a\}$ 可缩到点 $a \in X$ 的空间。则对于 a 在 X 中的任意邻域 U，存在 a 含于 U 的一个邻域 V，使得 V 上的任意一点都可以通过一个落在 U 上的道路连接到 a，即 X 是半-局部道路连通的。

Idea

1. 要求收缩是相对于 $\{a\}$ 的，保证了对于任意的 $t \in I$，都有 $F(a,t) \in U$，从而可以找到 a, t 的邻域使得像含于 U.

Proof

若 X 满足条件, 则存在连续映射 $F: X\times I\to X$, 使得 $F(x,1)=a,\forall x\in X$, 且 $F(a,t)=a,\forall t\in I$.

由 F 连续性, 对于任意的 $t\in I$, 存在 a,t 的开邻域 $V_t(a)$ 和 $W(t)$, 使得 $F(V_t(a)\times W(t))\subseteq U$.$\{W(t)\}_{t\in I}$ 构成 I 的一个开覆盖, 由 I 的紧性, 存在有限的子覆盖 $W(t_1),\cdots,W(t_n)$.

现在令 $V(a):=\bigcap_i V_{t_i}(a)$ 是 a 的一个开邻域, 则 $F\left(V(a)\times\bigcup_i W(t_i)\right)=F(V(a)\times I)\subseteq U$. 任取 $i=1,\cdots,n$ 和 $x\in V_{t_i}(a)$, 由于 $F(x,1)=a$,$F(x,0)=x$, 因此 $t\mapsto F(x,t),t\in I$ 使得落在 U 的连接 x 和 a 的道路. □

Example 1.5 (Comb Space) 考虑以下集合 C , 它由从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 的水平线段和所有 $\left(\frac{1}{n},0\right)$ 到 $\left(\frac{1}{n},1\right)$ 的垂直线段组成, 其中 $n=1,2,\cdots$.

1. C 是可缩的 . 投影映射 $p: C\to L$ 是同伦等价, 其中 L 是水平线, 事实上, $i: L\to C$ 是含入映射, 则 $p\circ i=\mathrm{Id}_L$. 另一方面, 定义 $F: C\times I\to C$,

$$F((x,y),t):=(x,(1-t)y)$$

, 则 $F:\mathrm{Id}_L\simeq i\circ p$. 而 L 同胚由单位开区间是可缩的, 又 C 于 L 有相同的同伦型, 因此 C 是可缩的.

2. C 不是相对于 $\{(0,1)\}$ 可缩的. 取 $(0,1)$ 的半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆盘邻域 D , 则任意含于 D 的邻域上, 都有无穷多个连通分支, 由上面的定理可知, C 不是相对于 $\{(0,1)\}$ 可缩的.

定义 1.7

令 $A\subseteq X$. 称 A 是 X 的一个收缩, 若存在连续映射 $r: X\to A$, 使得 $r(a)=a,\forall a\in A$. 此时称映射 r 为收缩映射. ♣

Remark

1. A 是 X 的一个收缩, 当且仅当含入映射 $i: A\to X$ 有连续的左逆.
2. 易见此时 A 的子空间也是 X 的一个收缩.
3. 任意拓扑空间 X 上的每个点 $x_0\in X$ 都是 X 的一个收缩, 收缩映射为 C_{x_0}.
4. 当 A 是 X 的收缩时, 若 X 连通, 则 A 亦然.

定义 1.8

称拓扑空间 X 是可以形变到子空间 $A\subseteq X$ 的, 若存在含入映射 $i: A\to X$ 的同伦右逆 $f: X\to A$, 即单位映射 Id_X 同伦于 $i\circ f: X\to X$. ♣

Remark

1. 也就是说, 存在同伦 $D : X \times I \to X$, 使得
$$D(x,0) = x, D(x,1) = i(f(x)) = f(x)$$
2. 称这样的同伦 D 为 X 到 A 的一个形变.
3. 直观地讲, 存在一个连续的形变 D, 将 X 上每一个点连续变形到 A 中的点.
4. 特别地, 取 $A = \{a\}, a \in X$, 就得到可缩的概念.

定义 1.9

称拓扑空间 X 是可以**强形变到子空间** A 的, 若含入映射 $i : A \to X$ 有相对于 A 的连续同伦右逆, 即单位映射 $I_X : X \to X$ 相对于 A 同伦于 $i \circ f : X \to X$ ♣

Remark

1. 设 D 是 Id_X 相对于 A 到 $i \circ f$ 的同伦. 则 $D(a,1) = f(a) = a, \forall a \in A$. 此时 $f : X \to A$ 自动是 X 到 A 的一个收缩. 即, 强形变的终映射是一个收缩.
2. 形变的终映射是收缩不一定导出形变是强形变.

定义 1.10

称拓扑空间 X 的子空间 A 是 X 的一个**形变收缩**, 若 X 可以形变到 A, 且形变的终映射是 X 到 A 的一个收缩. ♣

Remark

1. 形变收缩较强形变来说弱一点, 强形变是说让 X 上的点都能跑到 A 里面, 且一直保持 A 中的点不动, 形变收缩是指 A 中的点中间可以来回跑, 但是最后要回到自己的位置上.

为了做强调, 不妨也语意冗余地给出一个定义[1]

定义 1.11

设 X 是拓扑空间, A 是 X 的一个子空间. 称 A 是 X 的一个**强形变收缩**, 若 X 可以强形变到 A, 且形变的终映射是 X 到 A 的一个收缩. ♣

Remark

1. 此时, 含入映射 $i : A \to X$ 有双边的同伦逆, 进而是同伦等价.

Example 1.6 对于 $n \geq 1, \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} - \{(0,\cdots,0)\} = X$ 是 X 的一个强形变收缩.

Proof

[1]即便强形变的终映射已经是一个收缩了

定义

$$D(x,t)=(1-t)\,x+t\frac{x}{\|x\|}$$

则 $D:[\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}]\times I\to[\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}]$ 是连续映射. 始映射为 Id_X, 终映射为 $x\mapsto\frac{x}{\|x\|}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}$ 到 $\mathbb{S}^n$ 的一个收缩.

□

1.3 基本群及其性质

定义 1.12 (道路的等价)

设 X 是拓扑空间, α,β 是 X 上的两条有相同端点的道路, 即 $\alpha(0)=\beta(0)=x_0,\alpha(1)=\beta(1)=x_1$. 称 α 和 β 是等价的, 记作 $\alpha\sim_{(x_0,x_1)}\beta$, 若存在他们之间的保端点的同伦, 即存在相对于 α 和 β 之间相对于 $\{0,1\}\subseteq I$ 的同伦. ♣

Remark

1. 通常称这样的一个同伦为道路同伦.

定理 1.5

设 X 是拓扑空间,$x_0,x_1\in X$. 则道路的等价确实给出全体以 x_0 为起点, x_1 为终点的道路的一个等价关系. ♡

Proof

令 $\alpha:I\to X$ 是道路, 使得 $\alpha(0)=x_0$, $\alpha(1)=x_1$. 定义 $H(s,t):=\alpha(s)$, 则 H 是 α 到自身的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 说明了自反性.

接下来, 设 G 是 α 到 β 的道路同伦. 定义 $H(s,t)=G(s,1-t)$. 则 H 是 β 到 α 的道路同伦, 这就说明了传递性.

最后, 设 H 是 α 到 β 的道路同伦, G 是 β 到 γ 的道路同伦, 定义 $K:I\times I\to X$,

$$K=\begin{cases}H(s,2t)\,, & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ G(s,2t-1)\,, & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

则 G 是 α 到 γ 的道路同伦, 这就说明了传递性.

□

推论 1.2

道路的等价也给出 X 上所有以 $x_0 \in X$ 为基点的循环中的一个等价关系.

Remark

1. 以下记以 x_0 为基点的循环 α 和 β 等价, 为 $\alpha \sim_{x_0} \beta$.
2. 记 α 所在的循环的道路等价类为 $[\alpha]$, 也称作循环 α 的同伦类.
3. 令 $\pi_1(X, x_0)$ 表示 X 上以 x_0 为基点的循环的同伦类的全体. 即

$$\pi(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha\text{是}X\text{上以}x_0\text{为基点的循环}\}$$

命题 1.3

设 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 是 X 上以 x_0 为基点的循环, 并且 $\alpha \sim_{x_0} \alpha', \beta \sim_{x_0} \beta'$, 则 $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$

Proof

设 H_1, H_2 分别是 α 到 α' 和 β 到 β' 的同伦.

定义 $H : I \times I \to X$,

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s, t), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1, t), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

则 $H(s, 0) = (\alpha * \beta)(s)$, $H(s, 1) = (\alpha' * \beta')(s)$, 并且 $H(0, t) = x_0 = H(1, t)$. 因此 $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$

□

推论 1.3

设 α 和 α' 是 x_0 到 x_1 的同伦的道路, β 和 β' 是 x_1 到 x_2 的同伦的道路, 则 $\alpha * \beta$ 和 $\alpha' * \beta'$ 是从 x_0 到 x_2 的同伦的道路, 并且同伦可以被选取为使得 x_1 不变的.

Proof

仿照上个命题即可.

□

定义 1.13

若 α 是从 x_0 到 x_1 的道路, 则 $[\alpha]$ 通常表示为 α 所在的 x_0 到 x_1 的道路同伦类.
拓扑空间 X 上从 x_0 到 x_1 的全体道路同伦类记作 $\pi_1(X, x_0, x_1)$.

定义 1.14 (乘法运算)

定义 $\pi_1(X,x_0,x_1)$ 上的运算

$$\circ:\pi_1(X,x_0,x_1)\times\pi(X,x_1,x_2)\to\pi_1(X,x_0,x_2)$$

按以下方式

$$[\alpha]\circ[\beta]:=[\alpha*\beta]$$

♣

Remark

1. 上面的推论给出了良定义性.

定理 1.6

$\pi_1(X,x_0)$ 在运算 "$\circ$" 构成群.

♡

Remark 以下证明都可以稍作改变, 给出在非循环的道路中对应性质的证明:

1. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, β 是 x_1 到 x_2 的道路, γ 是 x_2 到 x_3 的道路, 则

$$([\alpha]\circ[\beta])\circ[\gamma]=[\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma])$$

2. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, 那么
   (a). $[C_{x_0}]\circ[\alpha]=[C_{x_0}*\alpha]=[\alpha]$
   (b). $[\alpha]\circ[C_{x_1}]=[\alpha*C_{x_1}]=[\alpha]$
3. 设 α 是 x_0 到 x_1 的道路, 那么
   (a). $[\alpha]\circ[\alpha^{-1}]=[C_{x_0}]$
   (b). $[\alpha^{-1}]\circ[\alpha]=[C_{x_1}]$

Proof

结合律: 只需要说明 $(\alpha*\beta)*\gamma\sim_{x_0}\alpha*(\beta*\gamma)$ 为此, 定义 $H:X\times I\to X$,

$$H(x,t):=\begin{cases}\alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right), & s\in[0,\frac{1}{4}(1+t)]\\ \beta(4s-1-t), & s\in[\frac{1}{4}(1+t),\frac{1}{4}(2+t)]\\ \gamma\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right), & s\in[\frac{1}{4}(2+t),1]\end{cases}$$

即可.

Idea

想法是随 t 的变换改变道路的比例, 因此分别改变 α,β,γ 的取值范围.

先分别确定各道路在 I_s 上分配到的两端点随时间的变化, 再依变化调整道路括号内的数, 对于后者可以通过线性函数 $f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 取 $f(b)=1$, $f(a)=0$,a,b 分别是道路在 I_s 上的两端点来构造, 例如对 α 就可以确定最后的一个分段为 $\alpha\circ f$.

接下来说明单位元的存在性: 我们说明 C_{x_0} 所在的等价类 $[C_{x_0}]$ 是单位元. 为此, 只

需要说明 $\alpha * C_{x_0} \sim_{x_0} \alpha$ 以及 $C_{x_0} * \alpha \sim_{x_0} \alpha$.

对于前者，定义 $H : X \times I \to X$

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right), & s \in [0, \frac{1}{2}(t+1)] \\ x_0, & s \in [\frac{1}{2}(t+1), 1] \end{cases}$$

后者是类似的.

最后说明 $\pi_1(X, x_0)$ **中任意元素皆可逆**：对于 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，定义 $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$，只需说明 $[\alpha']$ 与 α 的选取无关，并且 $[\alpha']$ 是 $[\alpha]$ 的逆. 对于第一个断言，设 $\beta \sim_{x_0} \alpha$，H 是对应的道路同伦. 定义 H'

$$H'(x,t) := H(1-s, t)$$

则显然 H' 是 β' 到 α' 的同伦，这就说明了 $[\alpha'] = [\beta']$，第一个断言成立. 接下来说明

$$[\alpha'] \circ [\alpha] = [C_{x_0}] = [\alpha] \circ [\alpha']$$

只说明后一个等式，前一个是类似的. 我们定义

$$H(s,t) := \begin{cases} x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}t] \\ \alpha(2s-t), & s \in [\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2-2s-t), & s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2-t)] \\ x_0, & s \in [\frac{1}{2}(2-t), 1] \end{cases}$$

Idea

几何上，相当于让沿 α 的运动随时间越来越提前折返.

□

定义 1.15

令 X 是拓扑空间，$x_0 \in X$. 称群 $\pi_1(X, x_0)$ 为 X 的以 x_0 为基点的 **基本群** 或 **Pincare´ 群**

定理 1.7

设 X 是道路连通空间，x_0, x_1 是 X 上任意两点. 那么 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 是同构的. 事实上，任意从 x_0 到 x_1 的道路都给出 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(X, x_1)$ 的一个同构.

Remark 据此，对于道路连通的 X，可以将 $\pi_1(X, x)$ 简记作 $\pi_1(X)$，称其为 X 的基本群.

Proof

设 ω 是从 x_0 到 x_1 的道路, 则它有逆道路 $\omega^{-1}(t)=\omega(1-t)$. 定义

$$P_\omega : \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$$
$$P_\omega[\alpha]=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]$$

首先需要说明映射是良定义的. 设 $\alpha\sim_{x_0}\beta$, 则 $\omega^{-1}*\alpha*\omega\sim_{x_0}\omega^{-1}*\beta*\omega$, 这就说明了良定义. 接下来说明 P_ω 是群同态, 计算

$$\begin{aligned}P_\omega([\alpha]\circ[\beta]) &= P_\omega[\alpha*\beta]\\ &=[\omega^{-1}*\alpha*\beta*\omega]\\ &=[\omega^{-1}*\alpha]\circ[\beta*\omega]\\ &=[\omega^{-1}*\alpha*C_{x_0}]\circ[\beta*\omega]\\ &=[\omega^{-1}*\alpha*\omega*\omega^{-1}]\circ[\beta*\omega]\\ &=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]\circ[\omega^{-1}*\beta*\omega]\\ &=P_\omega[\alpha]\circ P_\omega[\beta]\end{aligned}$$

这就说明了同态性. 最后, 以 ω^{-1} 代 ω, 不难得到 P_ω 有逆同态 $P_{\omega^{-1}}$. □

命题 1.4

设 X 是道路连通空间, $x_0,x_1\in X$, 则 $\pi_1(X,x_0)$ 是阿贝尔群, 当且仅当对于任意一对从 x_0 到 x_1 的道路 ω,ω', 都有 $P_\omega=P_{\omega'}$.

Idea

即道路连通空间的基本群交换, 当且仅当给定道路的共轭作用是唯一的.

Proof

设 $\pi_1(X,x_0)$ 是阿贝尔群.$\omega*(\omega')^{-1}$ 和 $\omega'*\omega^{-1}$ 是以 x_0 为基点的循环, 则对于任意的 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$, 交换性给出

$$[\alpha]\circ[\omega*(\omega')^{-1}]=[\omega*(\omega')^{-1}]\circ[\alpha]$$

两边分别依次左作用 $[\omega^{-1}]$ 再右作用 $[\omega']$, 得到

$$[\omega^{-1}*\alpha*\omega]=[(\omega')^{-1}*\alpha*\omega']$$

即 $P_\omega[\alpha]=P_{\omega'}[\alpha]$.

反之, 设 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 中的元素,ω 是 x_0 到 x_1 的道路. 则 $\beta*\omega$ 是 x_0 到 x_1 的道路. 由条件

$$[(\beta*\omega)^{-1}*\alpha*(\beta*\omega)]=[\omega^{-1}*\alpha*\omega]$$

由于 P_ω 是同构, 得到

$$[\beta * \alpha * \beta^{-1}] = [\alpha]$$

此即

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\beta] \circ [\alpha]$$

□

定理 1.8 (连续映射诱导的基本群同态)

每个带基点的拓扑空间间的连续映射 $f : (X, x) \to (Y, y)$ 都诱导出一个群同态 $f_\sharp : \pi_1 (X, x) \to \pi_1 (Y, y)$

Proof

设 α 是 X 上以 x 为基点的一个循环, 则 $f \circ \alpha$ 是 Y 上以 y 为基点的一个循环. 并且若 $\alpha \sim_x \beta$, 则 $f \circ \alpha \sim_y f \circ \beta$. 据此可以定义映射 $f_\sharp : \pi_1 (X, x) \to \pi_1 (Y, y)$

$$f_\sharp[\alpha] = [f \circ \alpha]$$

此外, 不难看出

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$$

因此

$$f_\sharp ([\alpha] \circ [\beta]) = (f_\sharp[\alpha]) \circ (f_\sharp[\beta])$$

因此 $f_\sharp$ 是群同态.

□

定理 1.9 ($\sharp$ 的函子性)

1. 若 $f : X \to X$ 是单位映射, 则对于任意的 $x \in X$, $f_\sharp : \pi_1 (X, x) \to \pi_1 (X, x)$ 也是单位映射.
2. 若 $f : (X, x) \to (Y, y)$ 和 $g : (Y, y) \to (Z, z)$ 是两个带基点空间之间的连续映射, 则

$$(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$$

Proof

1. 若 f 是单位映射, 则对于任意的 $x \in X$, 以及以 x 为基点的循环 α, 我们都有 $f \circ \alpha = \alpha$, 因此 $f_\sharp[\alpha] = [\alpha]$, 即 $f_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$.

2. 若 f,g 如题, 任取 α 是以 x 为基点的循环, 我们有

$$\begin{aligned}(g\circ f)_{\sharp}[\alpha] &= [(g\circ f)\circ\alpha] \\ &= [g\circ(f\circ\alpha)] \\ &= g_{\sharp}[f\circ\alpha] \\ &= g_{\sharp}(f_{\sharp}[\alpha]) \\ &= (g_{\sharp}\circ f_{\sharp})[\alpha]\end{aligned}$$

因此 $(g\circ f)_{\sharp} = g_{\sharp}\circ f_{\sharp}$

□

定理 1.10

若 X 和 Y 是同胚的道路连通空间, 则它们的基本群是同构的.

Remark 即基本群是道路连通空间的拓扑不变量.

Proof

若 X,Y 是同胚的, 则存在连续映射 $f:X\to Y$, 它有连续的逆映射 $f^{-1}:Y\to X$, 使得

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_X,\quad f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$$

由 $\sharp$ 的函子性, 我们有

$$\left(f^{-1}\right)_{\sharp}\circ f_{\sharp} = \left(f^{-1}\circ f\right)_{\sharp} = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$$

以及

$$f_{\sharp}\circ\left(f^{-1}\right)_{\sharp} = \left(f\circ f^{-1}\right)_{\sharp} = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y)}$$

其中 $y=f(x)$. 而 $f_{\sharp}$ 和 $(f^{-1})_{\sharp}$ 都是群同态, 因此 $\pi_1(X,x)$ 同构于 $\pi_1(Y,y)$

□

推论 1.4

令 $A\subseteq X$. 设 $r:X\to A$ 是一个收缩, $i:A\to X$ 是含入映射. 则对于每个 $a\in A$, $r_{\sharp}:\pi_1(X,a)\to\pi_1(A,a)$ 是满射, 且 $i_{\sharp}:\pi_1(A,a)\to\pi_1(X,a)$ 是单射.

Proof

对于每个 $a\in A$, 复合映射 $(A,a)\xrightarrow{i}(X,a)\xrightarrow{r}(A,a)$ 是单位映射. 由 $\sharp$ 的函子性, $\pi_1(A,a)\xrightarrow{i_{\sharp}}\pi_1(X,a)\xrightarrow{r_{\sharp}}\pi_1(A,a)$ 是单位映射, 由此易见 $i_{\sharp}$ 单而 $r_{\sharp}$ 满.

□

定理 1.11

若 $f, g : (X, x) \to (Y, y)$ 是相对于 $\{x\}$ 同伦的，则

$$f_\sharp = g_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$$

Proof

任取以 x 为基点的循环. 由于 f 相对于 $\{x\}$ 同伦于 g，不难得到 $f \circ \alpha \sim_y g \circ \alpha$，即 $f_\sharp[\alpha] = g_\sharp[\alpha]$

□

定理 1.12

若 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 是相对意义下的同伦等价，则 $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ 是群同构.

Idea

对于相对于点的同伦，可以直接视作带基点的空间上的同伦.

Proof

存在 g，使得 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{(Y, y_0)}$，$g \circ f \sim \mathrm{Id}_{(X, x_0)}$. 应用上面的定理，得到

$$f_\sharp \circ g_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(X, x_0)}, \quad g_\sharp \circ f_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y, y_0)}$$

给出了群同构. □

推论 1.5

若 A 是 X 的一个强形变收缩，则对于每个 $a \in A$,$\pi_1(A, a)$ 同构于 $\pi_1(X, a)$.

Remark 若 X 的子空间 A 是单点集 $A = \{a\}$，且 A 是 X 的一个强形变收缩，则 $\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(\{a\}, a)$. 通常记作 $\pi_1(a)$. 此外，此时 X 可缩到 $\{a\}$ 故而道路连通，我们有 $\pi_1(X) \sim \pi_1(P) = \{e\}$，其中 P 是点空间.

Proof

强形变收缩意味着终映射 $f : X \to A$，满足 $f \circ i = \mathrm{Id}_A$，并且 $i \circ f \sim \mathrm{Id}_X, \mathrm{rel}\ A$，特别地，对于任意的 $a \in A$，$f : (X, a) \to (A, a)$ 是相对意义下的同伦等价，由上面的定理，$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ 是群同构. □

定理 1.13

设 F 是 $f, g : X \to Y$ 间的同伦. 令 $x_0 \in X$，$\sigma : I \to Y$ 是通过 $\sigma(t) := F(x_0, t)$ 定

义的 $f(x_0)$ 到 $g(x_0)$ 的道路，则下图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[dr, "g_\sharp"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "P_\sigma"] \\
& \pi_1(Y,g(x_0))
\end{tikzcd}$$

Remark

1. 当 $f(x_0)=g(x_0)$ 时，P_σ 无非是内自同构.
2. 当 F 是相对于 x_0 时，$\sigma=C_{f(x_0)}$，进而 $f_\sharp=g_\sharp$，定理退化成定理1.11的情况.

Proof

任取 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$，只需证明 $P_\sigma\circ f_\sharp[\alpha]=g_\sharp[\alpha]$，即证明

$$[\sigma^{-1}*(f\circ\alpha)*\sigma]=[g\circ\alpha]$$

先来封装如何将 $f\circ\alpha$ 变做 $g\circ\alpha$，定义 $G:I\times I\to Y$，$G(x,t)=F(\alpha(x),t)$. G 是 $f\circ\alpha$ 到 $g\circ\alpha$ 的连续变化，且基点的变化与 σ 重合，我们要做的是对每个不同的时间 t，都让 $f\circ\alpha$ 连续变化了 t 时间的状态下，拼接 σ 上的一段，构成一个循环. 接下来构造 $H:I\times I\to X$ 将 $\sigma^{-1}*(f\circ\alpha)*\sigma$ 同伦到 $g\circ\alpha$.

$$H(s,t)=\begin{cases}\sigma^{-1}(2s), & s\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t]\\ G\left(\frac{4s+2t-2}{3t+1},t\right), & s\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t]\\ \sigma(4s-3), & s\in[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t,1]\end{cases}$$

这样就给出了所需的同伦.

□

推论 1.6

若 $f:X\to Y$ 同伦于常值映射 $C:X\to Y$，则诱导同态 $f_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 是零映射.

Proof

$C_\sharp:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,C(x_0))$ 是平凡同态. 由上面的交换图，

$$P_\sigma\circ f_\sharp=C_\sharp$$

两边左作用 $P_{\sigma^{-1}}$，得到

$$f_\sharp=P_{\sigma^{-1}}\circ C_\sharp$$

是零映射.

□

推论 1.7

设 X 是可缩空间. 则对于任意的 $x_0 \in X$, 每个以 x_0 为基点的循环 α 都等价于 C_{x_0}, 即 $\pi_1(X, x_0) = 0$

♡

Proof

由于 X 是可缩的, Id_X 通过一个同伦 F 同伦到常值映射 C_{x_0} . 因此, 若 σ 下述定义的 x_0 处的循环

$$\sigma(t) = F(x_0, t)$$

我们有

$$P_\sigma \circ \left(\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}\right) = C_{[C_{x_0}]}$$

为零映射, 两边左乘 $P_{\sigma^{-1}}$, 得到

$$\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)} = C_{[\sigma * C_{x_0} * \sigma^{-1}]} = C_{[C_{x_0}]}$$

断言成立. □

定理 1.14

设 X, Y 是有着相同同伦型的道路连通空间, 则它们的基本群同构.

♡

Proof 首先, 道路连通空间的基本群与基点的选取无关, 于是可以任意选取 X 上一点 x_0, 讨论 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(Y, f(x_0))$. 若条件成立, 存在 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, 以及同伦 F, G 使得

$$F: f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y, \quad G: g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$$

设 σ 是通过 $\sigma(t) := F(x_0, t)$ 给出的 x_0 到 $g \circ f(x_0)$ 的道路, 则由交换图

$$(g \circ f)_\sharp = P_\sigma \circ \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$$

因此 $g_\sharp \circ f_\sharp = P_\sigma$. 又 P_σ 是一个同构, 因此 $f_\sharp$ 单而 $g_\sharp$ 满. 对 G 类似的讨论可以得到 $f_\sharp$ 满而 $g_\sharp$ 单, 这样就得到了 $f_\sharp, g_\sharp$ 是双射.

□

推论 1.8

设 X, Y 是两个道路连通空间, $f: X \to Y$ 是一个同伦等价, 则 $f_\sharp: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 是一个同构.

♡

1.4 单连通空间

定义 1.16

称 X 是单连通的, 若 X 是道路连通的, 并且 $\pi_1(X) = 0$.

命题 1.5

道路连通空间 X 是单连通的, 当且仅当 X 上任意两条有相同端点的道路是道路同伦的.

Proof

充分性是显然的, 以下说明必要性. 任取 X 上从 x_0 到 x_1 的两条道路 α 和 β, 则 $\alpha * \beta^{-1}$ 是以 x_0 为基点的循环. 由于 X 是单连通的, 我们有

$$[\alpha * \beta^{-1}] = [C_{x_0}]$$

两边右作用 $[\beta]$, 得到

$$[\alpha] = [\alpha * \beta^{-1} * \beta] = [\alpha * \beta^{-1}] \circ [\beta] = [C_{x_0}] \circ [\beta] = [\beta]$$

□

定理 1.15

令 $\{V_i : i \in \Lambda\}$ 是 X 的一个开覆盖, 其中每个 V_i 都是单连通的. 则 X 是单连通的, 若以下两条成立:

1. $\bigcap V_i \neq \varnothing$;
2. 对于每个 $i \neq j$, $V_i \cap V_j$ 是道路连通的.

Proof

由于每个 V_i 都是道路连通的, 并且它们的交非空, 因此 X 是道路连通的. 只需要证明 $\pi_1(X, x) = 0$ 对某个 $x \in X$ 成立.

取一点 $x_0 \in \bigcup V_i$, 并取 X 上以 x_0 为基点的循环 α. 则 $\{\alpha^{-1}(V_i)\}$ 构成 I 的一个开覆盖. 由于 I 是紧集, 覆盖存在一个 Lebesgue 数 ε, 使得参数小于 ε 的覆盖

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

使得对于任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, 存在 j, 使得 $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \alpha^{-1}(V_j)$ 成立. 通过重新编号不妨设 $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \alpha^{-1}(V_k), k = 1, \cdots, n$. 定义道路

$$\alpha_k(s) := \alpha((1-s)t_{k-1} + st_k)$$

则 α_k 是 V_k 上的道路. 并且

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n]$$

由道路连通性, 对于每个 $k = 1, \cdots, n-1$, 存在 $V_k \cap V_{k+1}$ 上的 x_0 到 $\alpha(t_k)$ 的道路 ρ_k, 且注意到 $\alpha(t_n) = \alpha(t_0) = x_0$. 于是

$$\begin{aligned}[\alpha] &= [\alpha_1 * \rho_1^{-1} * \rho_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_{n-1} * \rho_{n-1}^{-1} * \rho_{n-1} * \alpha_n] \\ &= [\alpha_1 * \rho_1^{-1}] \circ [\rho_1 * \alpha_2 * \rho_2^{-1}] \circ \cdots \circ [\rho_{n-2} * \alpha_{n-1} * \rho_{n-1}^{-1}] \circ [\rho_{n-1} * \alpha_n]\end{aligned}$$

注意到 $\rho_{k-1} * \alpha_k * \rho_k^{-1}$ 是 V_k 上的以 x_0 为基点的循环, 而 $\pi_1(V_k, x_0) = 0$, 因此 $[\rho_{k-1} * \alpha_k * \rho_k^{-1}] = [C_{x_0}]$,$k = 2, \cdots, n-1$. 此外 $\alpha_1 * \rho_1^{-1}$ 和 $\rho_{n-1} * \alpha_n$ 分别是 V_1 和 V_n 上以 x_0 为基点的循环, 二者皆为 $[C_{x_0}]$. 综上, 我们有 $[\alpha] = [C_{x_0}]$. 这就表明 $\pi_1(X, x_0) = 0$, 进而 $\pi_1(X) = 0$. □

推论 1.9

设 X 是一些道路连通开集 A_α 的并, 且每个 A_α 都包含了基点 $x_0 \in X$. 若每个交集 $A_\alpha \cap A_\beta$ 都是道路连通的, 则每个 X 上以 x_0 为基点的循环都同伦于若干循环的连接, 其中每个循环都落在某一个 A_α 中. ♡

Proof —上面的证明实际上就是再说这件事情.

□

Example 1.7 标准 n 球面 $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ 是单连通的. 考虑分别挖掉北极点和南极点的两片开集 U,V. 它们分别可缩到南极点和北极点, 进而是单连通的. 并且 $U \cap V$ 作为 $\mathbb{S}^n$ 挖掉两个点[2], 仍然是道路连通的（即使挖掉可数多个点也是）.

1.5 基本群的计算

Example 1.8 令 $\mathbb{D}^n$ $(n \geq 1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的单位闭圆盘. 由于 $\mathbb{D}^n$ 是道路连通的, 我们可以在任何点上计算它的基本群, 方便起见, 考虑原点的基本群. 定义 $H : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$

$$H(x, t) := (1-t) X$$

则 $\mathbb{D}^n$ 收缩到原点, 因此 $\pi_1(\mathbb{D}^n) \simeq \pi_1(\{0\}) = 0$

Remark 凸集、星形集等可缩集的基本群都是平凡的.

[2] 同胚于 $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$

定理 1.16

令 X, Y 是分别带基点 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$ 的拓扑空间, 则

$$\pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0)\right) \simeq \pi_1\left(X, x_0\right) \times \pi_1\left(Y, y_0\right)$$

Remark 令 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族拓扑空间, 则对于每个 $\alpha \in \Lambda$, 令 $x_\alpha \in X_\alpha$ 是基点. 则以下证明容易推广出

$$\pi_1\left(\prod X_\alpha, (x_\alpha)\right) \simeq \prod \pi_1\left(X_\alpha, x_\alpha\right)$$

Proof

设 p_1, p_2 是标准投影, 显然可看做带基点拓扑空间的投影. 分别诱导出同态

$$p_{1\sharp} : \pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0)\right) \to \pi_1\left(X, x_0\right),$$

以及

$$p_{2\sharp} : \pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0\right) \to \pi_1\left(Y, y_0\right))$$

定义

$$\begin{aligned}\rho : \pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0)\right) &\to \pi\left(X, x_0\right) \times \pi_1\left(Y, y_0\right)\\ [\alpha] &\mapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha])\end{aligned}$$

反过来, 我们定义

$$\begin{aligned}\eta : \pi_1\left(X, x_0\right) \times \pi_1\left(Y, y_0\right) &\to \pi_1\left(X \times Y, (x_0, y_0)\right)\\ [\alpha] \times [\beta] &\mapsto [\alpha \times \beta]\end{aligned}$$

之前没有处理过良定义性相关的命题, 这里需要说明定义是良定义的. 设 $F_1 : \alpha_1 \sim_{x_0} \alpha_2, F_2 : \beta_1 \sim_{y_0} \beta_2$. 定义 $F : I \times I \to X \times Y$

$$F(s,t) = \left(F_1(s,t), F_2(s,t)\right)$$

则 $F(s,0) = (\alpha_1(s), \beta_1(s)), F(s,1) = (\alpha_2(s), \beta_2(s))$, 并且 $F(0,t) = F(1,t) = (x_0, y_0)$. 这就说明了良定义性. 最后, 容易看到 ρ 和 η 互为逆映射. □

1.5.1 圆的基本群

定义 1.17

指数映射 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$，被定义为 $p(t)=e^{2\pi it},t\in\mathbb{R}$，以下记 $p_0=(1,0)\in\mathbb{S}^1$.
映射 $p|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ 是开区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 到 $\mathbb{S}^1-\{e^{i\pi}\}$ 的同胚映射. 令 $\ln:\mathbb{S}^1-\{e^{i\pi}\}\to\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 是映射的逆. ♣

Remark

1. $p(t_1+t_2)=p(t_1)\cdot p(t_2)\,,t_1,t_2\in\mathbb{R}$；
2. $p(t_1)=p(t_2)$ 当且仅当 t_1-t_2 是整数；
3. $p^{-1}(p_0)=\mathbb{Z}$.

定义 1.18

设 $f:X\to\mathbb{S}^1$ 是连续映射. 称连续映射 $f':X\to\mathbb{R}$ 为 f 的一个提升或覆叠，若下图交换

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

，即 $p\circ f'=f$. ♣

引理 1.1

设 X 是道路连通空间，并且 $f',f'':X\to\mathbb{R}$ 是连续映射，使得 $p\circ f'=p\circ f''$. 若 f',f'' 在一点 $x_0\in X$ 处相等，则 $f'=f''$. ♡

Proof

定义 $g:X\to\mathbb{R}$, $g:=f'-f''$. 因为 $p\circ f'=p\circ f''$，我们有对于每个 $x\in X$,

$$\begin{aligned} p\circ g(x) &= e^{2\pi i g(x)} \\ &= e^{2\pi i(f'(x)-f''(x))} \\ &= \frac{e^{2\pi i f'(x)}}{e^{2\pi i f''(x)}} \\ &= \frac{p\circ f'(x)}{p\circ f''(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这表明 $g(x)\in p^{-1}(1)=\mathbb{Z},\forall x\in X$. 由于 X 连通，且 g 连续，$g(X)\subseteq\mathbb{Z}$ 只能是单点集.

但是 $g(x_0)=0$，因此 $g(x)=0,\forall x\in X$. 即 $f'(x)=f''(x)=0,\forall x\in X$.

$\square$

先来介绍两个结果

定理 1.17 (道路提升)

令 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 是指数映射, $\alpha:I\to\mathbb{S}^1$ 是任意满足 $\alpha(0)=p_0$ 的道路. 那么存在唯一的 α 的提升 α', 使得 $\alpha'(0)=0$.

定理 1.18 (同伦提升定理)

令 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 是指数映射. 设 $F:I\times I\to\mathbb{S}^1$ 是同伦, 使得 $F(0,0)=p_0$. 则存在唯一的 F 的提升 $F':I\times I\to\mathbb{R}$, 使得 $F'(0,0)=0$.

接下来证明一个更一般的命题, 上面两个定理是以下定理的推论.

定理 1.19

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个凸的紧集, $x_0\in X$. 任给连续映射 $f:X\to\mathbb{S}^1$ 以及任意 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得 $p(t_0)=f(x_0)$, 则存在唯一的连续映射 $f':X\to\mathbb{R}$, 使得 $f'(x_0)=t_0$ 并且 $p\circ f'=f$.

Idea

我们看到, 在局部上找到 f 在 p 下的逆映射是容易的, 但是整体上由于 $\mathbb{S}^1$ 上的像会叠在一块, 我们做不到这样的事情. 想法就是将 $f(x)$ 分解（怎样分解?）成若干可以取逆的函数. 利用 $\ln$ 的运算性质, 想到要将 $f(x)$ 分解成有限乘积, 提升就可以取成有限的 $\ln$ 和.

Proof

由于凸自动导出道路连通, 唯一性由上面的引理容易看出, 只需要说明存在性.

事实上可以不失一般性地假设 x_0 为 $\mathbb{R}^n$ 的原点, 为了看到这件事情, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平移变换 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, y\mapsto y-x_0$. 现在 $L(X)$ 是包含了 $\mathbb{R}^n$ 的原点. 若 $L(X)$ 上的提升存在, 任给连续映射 $f:X\to\mathbb{S}^1$, 定义 $k:=f\circ L^{-1}:L(X)\to\mathbb{S}^1$. 则 $k(0)=f(x_0)=p(t_0)$, 它存在同伦提升 $k':L(X)\to\mathbb{R}$, 使得 $p\circ k'=k$, 并且 $k'(0)=t_0$. 于是 $f':=k'\circ L:X\to\mathbb{S}^1$ 就是 f 满足条件的同伦提升.

因此, 我们不妨设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 包含原点的凸紧集. 由于 X 是紧集, 连续函数 f 在 X 上也是一致连续的. 存在 $\varepsilon>0$, 使得只要 $\|x\|<\varepsilon$, 就有 $|f(x)-f(x')|<2$. 取正整数 k,

使得 $\frac{\|x\|}{k} < \varepsilon$. 于是对于每个 $j = 0, 1, \cdots, n-1$

$$\left\| \frac{j}{k}x - \frac{j+1}{k}x \right\| < \varepsilon$$

进而

$$\left| f\left(\frac{j+1}{k}x\right) - f\left(\frac{j}{k}x\right) \right| < 2$$

令 $g_j(x) = f\left(\frac{j+1}{k}x\right) / f\left(\frac{j}{k}x\right)$, 则 $|g_j(x) - 1| < 2$, 从而 $g_j(x) \neq e^{i\pi}, \forall x \in X, 0 \leq j \leq k-1$. 现在,

$$f(x) = f(0) \cdot g_0(x) \cdot g_1(x) \cdot \cdots \cdot g_{k-1}(x)$$

取

$$f'(x) := t_0 + \ln g_0(x) + \ln g_1(x) + \cdots + \ln g_{k-1}(x)$$

则 f' 是 k 个连续函数之和, 从而是连续的. 并且 $f'(0) = t_0$, $p \circ f' = f$.

□

定义 1.19

令 $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上以 $p_0 = (1,0) \in \mathbb{S}^1$ 为基点的循环, 令 $\alpha' : I \to \mathbb{R}$ 是 α 的提升, 使得 $\alpha'(0) = 0$. 由于 $\alpha'(1) \in \mathbb{R}$ 在指数映射下的像为 $(1,0)$, 其必为整数. 我们称整数 $\alpha'(1)$ 为循环 α 的 **次数**.

定理 1.20

令 α, β 是 $\mathbb{S}^1$ 上等价的以 p_0 为基点的循环, 则

$$\deg \alpha = \deg \beta$$

Proof 设 $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$ 是 $\alpha \sim_{x_0} \beta$ 的同伦. 则由同伦提升定理, 存在唯一的同伦提升 $F' : I \times I \to \mathbb{R}$, 使得 $F'(0,0) = 0, p \circ F' = F$. 定义 $\alpha', \beta' : I \to \mathbb{R}$, $\alpha'(s) := F'(s,0)$, $\beta'(s) := F'(s,1)$, 则它们分别是 α 和 β 的唯一的提升, 使得 $\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$. 只需证明 $\alpha'(1) = \beta'(1)$, 它们都在线

$$\ell := \{(1,t) : t \in I\}$$

上. 注意到 F 映此线 ℓ 均为 p_0, 因此 F' 映线 ℓ 到 $\mathbb{Z}$ 的一个子集. F' 的连续性保证了线的像必须是道路连通的, 因此 F' 映线 ℓ 只能为单点集, 进而 $\alpha'(1) = \beta'(1)$.

□

这个定理说明我们可以定义一个次数的映射

定义 1.20

定义

$$\begin{aligned}\deg : \pi_1\left(\mathbb{S}^1, p_0\right) &\to \mathbb{Z}\\ [\alpha] &\mapsto \deg \alpha\end{aligned}$$

最后来说明主要的定理

定义 1.21

次数映射 $\deg : \pi_1\left(\mathbb{S}^1, p_0\right) \to \mathbb{Z}$ 是圆的基本群到 $(\mathbb{Z}, +)$ 的群同构.

Proof

群同态: 令 $[\alpha], [\beta]$ 是 $\pi_1\left(\mathbb{S}^1, p_0\right)$ 的两个元素, $\alpha', \beta' : I \to \mathbb{R}$ 是 α 和 β 以原点为起点的唯一的同伦提升. 我们先定义出 $\alpha * \beta$ 的同伦提升, 为此, 定义 $\omega : I \to \mathbb{R}$

$$\omega := \begin{cases} \alpha'(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha'(1) + \beta'(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

那么显然

$$\begin{aligned} p \circ \omega(t) &= \begin{cases} p \circ \alpha'(t) \\ p(\alpha'(1)) \cdot (p \circ \beta')(2t-1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(t) \\ \beta(2t-1) \end{cases} \\ &= (\alpha * \beta)(t) \end{aligned}$$

因此 ω 是 $\alpha * \beta$ 的以原点为起点的同伦提升, 我们有

$$\begin{aligned} \deg([\alpha] * [\beta]) &= \deg([\alpha * \beta]) \\ &= \omega(1) \\ &= \alpha'(1) + \beta'(1) \\ &= \deg([\alpha]) + \deg([\beta]) \end{aligned}$$

单射: 若 $\deg[\alpha] = \deg[\beta]$, 则 $\alpha'(1) = \beta'(1)$, 可以定义同伦 $H : I \times I \to \mathbb{R}$

$$H(s,t) := (1-t)\alpha'(s) + t\beta'(s), (s,t) \in I \times I$$

则 H 是 α' 到 β' 的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 进而 $p \circ H$ 是 α 到 β 的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 即 $[\alpha] = [\beta]$.

满射: 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 定义循环 $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$

$$\gamma(t) := e^{2\pi int}$$

易见 $\deg[\gamma] = n$.

□

Example 1.9 穿孔平面 考虑与形如 $\mathbb{R}^2 - \{p\}$ 同胚的空间 X, 被称为是穿孔平面. 易见 X 同胚于 $Y = \mathbb{R}^2 - (0,0)$. 我们指出 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 是 Y 的一个强形变收缩. 定义 $F : Y \times I \to Y$

$$F(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

因此 $\pi_1(X) = (\mathbb{Z}, +)$

Example 1.10 圆柱 设 X 是一个圆柱, 即与

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -k \le z \le k, k \in \mathbb{R}\right\}$$

同胚. 令 $C = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$. 则 C 是 X 在 $F((x,y,z),t) = (x,y,(1-t)z)$ 下的一个强形变收缩, 因此 $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.

第 1 章 练习

1. 设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq \mathbb{S}^2$ 是开上半球. 证明任意 $f, g : X \to Y$ 同伦.

   Proof

   考虑流形 $\mathbb{S}^2$ 上的球坐标 (θ, φ). 记 θ, φ 为坐标映射. 任取 $f, g : X \to Y$, 定义 $H : X \times I \to Y$, 坐标表示为

   $$H(x,t) = (t(\theta \circ g) + (1-t)(\theta \circ f), t(\varphi \circ g) + (1-t)(\varphi \circ f))$$

   则 H 是连续映射, 且 $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$.

   □

2. 设 $P = \{p\}$ 是一个点的拓扑空间,X 是拓扑空间. 说明 X 是道路连通的, 当且仅当 $[P, X]$ 是单元素集.

   Proof

   若 $[P, X]$ 只有一个元素. 任取 X 上两点 x_1, x_2, 定义 $f(p) = x_1, g(p) = x_2$. 则 $f, g \in [P, X]$, 从而存在 $H : P \times I \to X$, 使得 $H(p,1) = x_1, H(p,2) = x_2$. 则 $H \circ i_2$ 是连接 x_1 和 x_2 的连续映射, 其中 $i_2 : I \to P \times I$, $i_2(t) = (p,t)$ 是连续映射. 这表明 X 是道路连通的.

反之, 若 X 是道路连通的. 任取 P 到 X 的连续映射 f,g, 设 $f(p)=x_1, g(p)=x_2$. 则存在连续映射 $h: I \to X$, 使得 $h(0)=x_1$, $h(1)=x_2$. 定义 $H: P\times I \to X$, $H(p,t):=h(t)$, 则 $H=h\circ \pi_2$ 是连续映射. 并且 $H(p,1)=f(p), H(p,2)=g(p)$. 因此 $H: f\simeq g$.

□

3. 设 X 是离散空间. 证明若 $f: X\to X$ 同伦于单位映射 $I_X: X\to X$, 则 $f=I_X$. (提示: 存在 x 到 $f(x)$ 的道路.)

Proof

设 $H: f\simeq I_X$, 则 $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=x$. 于是 $h_x(t):=H\circ i_x(t)$ 是 $f(x)$ 到 x 的道路. 若 $x\neq f(x)$, 则 $I\setminus (h_x^{-1}(x))$ 是若干开集的并, 进而是非空开集. 从而 $h_x^{-1}(x)$ 是闭集. 但同时 $h_x^{-1}(x)$ 是开的, 而 I 是连通集, 只能有 $h_x^{-1}(x)=\varnothing$ 或 $h_x^{-1}(x)=I$. 又 $h_x^{-1}(x)\ni 1$ 非空, 因此 $h_x^{-1}(x)=I$. 进而 $f(x)=h_x(0)=x$, 矛盾. 这就表明了 $f(x)=x, \forall x\in X$, $f=I_X$. □

4. (?) 设 X 是连通空间, Y 是离散空间. 证明 $f,g: X\to Y$ 同伦, 当且仅当 $f=g$.

Proof

若 f,g 同伦, 设 $H: f\simeq g$. 任意固定 $x\in X$, 则 $h_x(t):=H(x,t)$ 是连接 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的道路. 若 $f(x)\neq g(x)$, 则 $I\setminus h_x^{-1}(f(x))$ 写作若干开集的并, 进而是非空开集. 故 $h_x^{-1}(f(x))$ 是 I 上的闭集, 又 $h_x^{-1}(f(x))$ 自身是一个非空开集, 由 I 的连通性, 只能有 $h_x^{-1}(f(x))=I$. 因此 $g(x)=h_x(1)=f(x)$.

反之, 若 $f=g$, 显然 f,g 同伦.

□

5. (我猜因为这东西不连续, 但是我对复变不熟, 之后再写) 设 $\mathbb{S}^1$ 是复平面上的单位元,$f,g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是两个映射, 定义 $f(z)=z, g(z)=z^2$. 为什么说以下表述是错误的: $F:\mathbb{S}^1\times I\to\mathbb{S}^1$, $F(z,t)=z^{t+1}$ 是 f 到 g 的同伦.
6. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $C(X,Y)$ 是所有从 X 到 Y 的连续映射, 其中 Y 被赋予了紧-开拓扑. 证明 $f,g\in C(X,Y)$ 同伦, 当且仅当它们被 $C(X,Y)$ 上的一个道路相连.
7. 令 $A\subseteq X$ 是 X 的一个收缩, 其中 X 是 Hausdorff 的. 证明 A 在 X 中是闭的.

Proof

若 $A\subseteq X$ 是 X 的一个收缩, 则 A 可以被刻画为 X 在某个连续映射下的像, 而 Haussdorff 空间的连续像是闭的, 故 A 是闭的.

□

8. 设 X 是连通的空间,$x_0,x_1\in X$ 是 X 上的两点, 且在 X 中有无交的开邻域. 说明

$A=\{x_0,x_1\}$ 不是 X 的收缩.

Proof

连通集的连续像是连通的. 若 A 是 X 的一个收缩, 则 A 位于 X 在某个连续函数的像集上. 但是 A 是 X 的收缩表明, 存在连续映射 $f:X\to A$, 使得 $i\circ f=\mathrm{Id}_A$, 从而 A 被刻画为 X 在连续映射 f 下的像, 表明 A 是连通的. 但是另一方面, 设 U_0,U_1 为 x_0,x_1 的无交开邻域, 则 $A=A\cap(U_0\cup U_1)=(A\cap U_0)\cup(A\cap U_1)$ 是两个非空开集的无交并, 是不连通的, 矛盾. □

9. 证明空间 X 是可缩的, 当且仅当对于任意的拓扑空间 T, 以及任意映射 $f:X\to T$, 都有 f 是零伦.

Proof

设 X 是可缩的, 则可设 $H:\mathrm{Id}_X\simeq C_{x_0}$ 对某个 $x_0\in X$ 成立. 考虑连续映射 $G:=f\circ H$, 则 $G(x,0)=f(x)$, $G(x,1)=C_{f(x_0)}$ 是常值映射, 故 f 是零伦. 或者我们直接利用复合映射对同伦的保持, 得到 $f=f\circ\mathrm{Id}_X\simeq f\circ C_{x_0}=C_{f(x_0)}$

反正, 若任取 $f:X\to T$, 都有 f 是零伦, 特别地有 $\mathrm{Id}_X:X\to X$ 是零伦, 即同伦与常值映射, 表明 X 是可缩的.

□

10. 说明若 A 是 X 的一个强形变收缩, B 是 A 的一个强形变收缩, 则 B 是 X 的一个强形变收缩.

Proof 存在连续映射 $f:X\to A$, 使得 $\mathrm{Id}_X\simeq i_1\circ f,\mathrm{rel}\ A$, 并且 $f\circ i_1=\mathrm{Id}_A$. 存在连续映射 $g:A\to B$, 使得 $\mathrm{Id}_A\simeq i_2\circ g,\mathrm{rel}\ B$, 并且 $g\circ i_2=\mathrm{Id}_B$. 其中 $i_1:A\to X$ 和 $i_2:B\to A$ 是含入映射. 由同伦对复合映射的保持, 我们有 $\mathrm{Id}_X\simeq i_1\circ f=i_1\circ\mathrm{Id}_A\circ f\simeq i_1\circ i_2\circ g\circ f,\mathrm{rel}\ B$, 注意到 $i_1\circ i_2:B\to X$ 也是含入映射, 因此 B 是 X 的一个强形变, 又 $g\circ f\circ i_1\circ i_2=g\circ\mathrm{Id}_A\circ i_2=g\circ i_2=\mathrm{Id}_B$, 因此 B 是 X 的一个强形变收缩.

□

11. 令 $I^2=[0,1]\times[0,1]$ 是单位正方形, $C\subseteq I^2$ 是 comb 空间. 证明 C 不是 I^2 的一个收缩.

Proof

令 $U:=B\left(\left(0,\frac{1}{2}\right),\frac{1}{4}\right)\cap C$ 是 C 中的开集, 则 U 是 C 的一个开子空间. 设 r 是 I^2 到 C 的一个收缩, 则 $\mathrm{pr}\circ r$ 是 I^2 到 U 的一个收缩. 其中 $\mathrm{pr}:C\to U$ 是投影映射. 由于 I^2 是连通的, 故 U 是连通的, 矛盾!

□

12. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 X. X 由所有原点与 $\left(1,\frac{1}{n}\right)$ 的线段, 以及 $\{(x,0):0\le x\le 1\}$ 组

成. 证明 X 是可缩的, 但是任一一点 $(x,0)$ 都不是 X 的强形变收缩.

Proof

定义 $H: X\times I\to X$,

$$H\left(\left(x,y\right),t\right) := \left(\left(1-t\right)x, \left(1-t\right)y\right)$$

则 $H: \mathrm{Id}_X \simeq C_0$, 故而 X 可缩.

□

13. 说明即使有非空道路连通交集, 两个可缩空间的并也不一定是可缩的.

14. 若 P 是 X 的一个道路分支, $x_0\in P$, 则含入映射 $i: P\to X$ 可以视为带基点空间的映射 $(P,x_0)\to(X,x_0)$, 证明

$$i_\sharp : \pi_1\left(P,x_0\right)\to\pi_1\left(X,x_0\right)$$

是同构.

Proof

任取 X 是以 x_0 为基点的循环 α, 断言 α 是 P 上的道路, 若不然, 存在 $x_1\in(X\setminus P)\cap\alpha\left(I\right)$, 此时存在 x_0 到 x_1 的道路, 只能有 $x_1\in P$, 矛盾. 因此对于任意 X 上以 x_0 为基点的循环 α, $i\circ \mathrm{pr}\circ\alpha=\alpha$. 作用函子 $\sharp$, 得到

$$\left(i_\sharp\circ \mathrm{pr}_\sharp\right)[\alpha]=[\alpha]$$

即

$$i_\sharp\circ \mathrm{pr}_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$$

此外, 对于任意 P 上以 x_0 为基点的循环 β, 容易得到 $\mathrm{pr}\circ i\circ\beta=\beta$. 同理可得

$$\mathrm{pr}_\sharp\circ i_\sharp=\mathrm{Id}_{\pi_1(P,x_0)}$$

, 故 $i_\sharp$ 是同构.

□

15. 证明拓扑空间 X 上的锥 $C\left(X\right)$ 是单连通的.

Proof 只需注意到 $C\left(X\right)$ 是可缩到顶点的, 可缩空间的同伦型与点空间相同, 基本群是平凡的.

□

16. 令 α,β 是 X 上的 x_1 到 x_2 的两条道路. 证明 $\alpha\sim\beta, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$ 当且仅当 $\alpha\beta^{-1}\sim C_{x_1}, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$

Proof

若 $\alpha\sim\beta, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$, 则 $\alpha*\beta^{-1}\sim\beta*\beta^{-1}, \mathrm{rel}\left(\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]\right)$. 而 $\beta*\beta^{-1}\sim C_{x_1}, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$, 因此 $\alpha*\beta^{-1}\sim C_{x_1}, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$.

反之，若 $\alpha\beta^{-1} \sim C_{x_1}, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$. 则 $\alpha\beta^{-1} * \beta \sim C_{x_1} * \beta, \mathrm{rel}\ (\{0,1\})$. 由于 $\beta^{-1} * \beta \sim C_{x_1}, \mathrm{rel}\ \{1\}$，不难看出 $\alpha\beta^{-1} * \beta \sim (\alpha * C_{x_1}) * C_{x_1} \sim \alpha, \mathrm{rel}\ (\{0,1\})$. 此外 $C_{x_1} * \beta \sim \beta, \mathrm{rel}\ \{0,1\}$ ，命题成立. □

17. 设 $A \subseteq X$ 是一个形变收缩. 说明对于每个 $a \in A$，含入映射 $i : A \to X$ 诱导出同构

$$i_\sharp : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$$

Proof 任取 $a \in A$，我们视 i 为带基点拓扑空间的含入映射. 存在映射 $f : X \to A$，使得 $\mathrm{Id}_X \simeq i \circ f$，并且 $f(a) = a, \forall a \in A$. 可以视 $f : (X,a) \to (A,a)$ ，$i : (A,a) \to (X,a)$ 则 $i \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(x,a)}$，我们有 $i_\sharp \circ f_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,a)}$. 此外，$f \circ i = \mathrm{Id}_{(A,a)}$，我们有 $f_\sharp \circ i_\sharp = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}$. 这就说明了 $i_\sharp$ 是同构.

□

18. 考虑两个球面 $\mathbb{S}^m$ 和 $\mathbb{S}^n$,$m,n \geq 2$，嵌入到某个欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 中，其中 k 充分大. 若 $\mathbb{S}^m$ 与 $\mathbb{S}^n$ 相切地交于一点，说明它们的并是单连通的.
19. 若连续映射 $f : X \to \mathbb{S}^n$ 不是满射，则 f 是零伦.

Proof

不妨设 $e^{i\pi} \notin f(X)$，则定义 $H : X \times I \to \mathbb{S}^n \setminus \{e^{i\pi t}\}$

$$H(x,t) = e^{(1-t)\ln f(x)}$$

□

1.6 van Kampen

引理 1.2

设 X 分解为一些道路连通集 A_α 的并，且每个 A_α 包含了基点 $x_0 \in X$. 则所有含入映射 $A_\alpha \hookrightarrow X$ 的诱导同态 $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ 扩张为同态 $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. ♡

命题 1.6

令 $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ 表示含入映射 $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ 诱导的同态，则 $j_\alpha i_{\alpha\beta} = j_\beta i_{\beta\alpha}$. 所以 $\ker\Phi$ 包含所有形如 $i_{\alpha\beta}(\omega)\, i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}, \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ 的元素. ♠

Idea 即 Φ 将 $A_\alpha \cap A_\beta$ 落在 A_α 和 A_β 中部分的像等同.

定理 1.21 (van Kampen)

设 X 分解为包含了基点 $x_0 \in X$ 的道路连通开集 A_α 的并. 且每个交集 $A_\alpha \cap A_\beta$ 是道路连通的, 则同态 $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ 是满射. 此外, 若每个 $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ 也是道路连通的, 则 Φ 的核 N 由全体形如 $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}, \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ 的元素生成, 从而 Φ 诱导出同构

$$\pi_1(X) \simeq *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/(i_{\alpha\beta}(\omega) = i_{\beta\alpha}(\omega))$$

♡

Example 1.11 设 $\{X_\alpha\}$ 是一族道路连通的空间, $x_\alpha \in X_\alpha$ 是基点, 考虑它们的楔和 $\bigvee_\alpha X_\alpha$. 对于每个 x_α, 它在 X_α 中都存在形变收缩到自身的开邻域 U_α. 令 $A_\alpha = X_\alpha \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$, 则 A_α 形变收缩到 X_α. 此外, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ 形变收缩到点 x_α. 由 van Kampen 定理, $\Phi : \pi_1(X) \to *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \simeq *_\alpha \pi_1(X_\alpha)$ 是同构.