# 目录

# 第 1 章 Fourier 变换

## 1.1 Fourier 变换

**定义 1.1 (内积)**

1. 定义 $[-L,L]$ 上分段连续的两个复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为
$$\langle f,g\rangle \equiv \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
2. 定义 $f$ 的范数 $\|f\|$ 为
$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

**Remark**

$$\langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L}[f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)]\,\mathrm{d}x + i\int_{-L}^{L}[f_2(x)g_1(x)-f_1(x)g_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

**定理 1.1**

记 $e_m(x)=e^{im\pi x/L}$，则

$$\begin{aligned}\langle e_m,e_n\rangle &= \int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}\overline{e^{in\pi x/L}}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} e^{i(m-n)\pi x/L}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + i\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n\\ 2L, & m=n\end{cases}\end{aligned}$$

**命题 1.1**

若 $f$ 连续，分段 $C^1$ 并且 $f(-L)=f(L)$，则

$$c_m = \frac{1}{2L}\langle f,e_m\rangle$$
$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im\pi x/L} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\langle f,\frac{e_m}{\sqrt{2L}}\right\rangle\frac{e_m}{\sqrt{2L}}$$

**定理 1.2 (Parseval)**

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}} e_m \right\rangle\right|^2 \\ &= 2L \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle\right|^2 = 2L\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2\end{aligned}$$

**定义 1.2 (Fourier 变换)**

设 $f(x)$ 是实变量的实值或复值函数. 定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 的函数 $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x,$$

若极限存在. 其中

$$\mathrm{d}'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x$$

**定义 1.3**

设 $m, n$ 是非负整数, 称定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 有衰减阶 $(m, n)$, 若 $f(x)$ 是 $C^m$ 的, 且存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $|x| \geq 1$

$$|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + \left|f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{K}{|x|^n}$$

**命题 1.2 (求导后变换)**

若 $f$ 具有衰减阶 $(1, 2)$, 则对于所有的 $\xi$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

**Proof** 若先只考虑足够好的函数 (光滑且急速衰减), 由分部积分可以得到等式

$$\begin{aligned}\hat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}' f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(-i\xi)\, e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \\ &= i\xi \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

□

**推论 1.1**

若 $f$ 有衰减阶 $(m,2)$, 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$\left|f^{(m)}(x)\right|^{\wedge}(\xi)=i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$$

**Proof** 反复利用上面的命题.

□

**命题 1.3 (变换后求导)**

若 $f$ 有衰减阶 $(0,3)$, 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)=[xf(x)]^{\wedge}(\xi)$$

**Proof** 对于足够好的函数, 积分下求导

$$\begin{aligned}i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)&=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x\\&=i\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'x\\&=[xf(x)]^{\wedge}(\xi)\end{aligned}$$

□

**推论 1.2**

若 $f$ 具有衰减阶 $(0,n+2)$ , 则对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}$

$$i^n\frac{\mathrm{d}^n\hat{f}}{\mathrm{d}\xi^n}(\xi)=[x^nf(x)]^{\wedge}(\xi)$$

**Proof** 反复利用上面的命题

□

| Fourier 变换把导数变成多项式, 把多项式变成导数. |
|---|

**定义 1.4 (卷积)**

定义 $f$ 和 $g$ 的卷积 $f*g$ 为

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

若每个积分存在.

**命题 1.4**

在 $\mathbb{R}^n$ 上,

$$f * g = g * f$$

**Idea** 从 $x$ 扩散按平移量 $-y$ 反向加权 $g(y)$

**定理 1.3 (卷积定理)**

设 $f, g$ 分段连续, 且对于 $|x| \geq 1$, 有 $|f(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)| \leq \frac{K}{|x|^2}$ , 则

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)^{\wedge}(\xi)$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \int_{-\infty} g(y) e^{-i\xi y} \,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) e^{-i\xi(x+y)} \,\mathrm{d}'x \,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \,\mathrm{d}'y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}'y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}'x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f*g)^{\wedge}(x)
\end{aligned}$$

□

## 1.2 Fourier 逆变换

**定理 1.4 (反演定理)**

设 $f$ 是分段 $C^1$ 且 $L^1$, 则对于每个 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \,\mathrm{d}\xi$$

**定义 1.5 (Fourier 逆变换)**

定义 $g(\xi)$ 的 Fourier 逆 $\check{g}(x)$ 为

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{i\xi x}\, \mathrm{d}'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\xi)\, e^{i\xi x}\, \mathrm{d}'\xi$$

若极限存在. 其中 $\mathrm{d}'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}\xi$

♣

**定理 1.5 (Parseval)**

若 $f, \hat{f}, g$ 绝对可积, 且 $f$ 分段 $C^1$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi$$

♡

**Proof** 由于两个函数逆变换后的权重通过共轭抵消, 通过不断交换次序可以得到恒等式.

□

## 1.3 重要例子

**Example 1.1** 设 $a > 0, x \in \mathbb{R}$ , $f(x) = e^{-a|x|}$ , 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

**Solution**

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}'x \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\, \mathrm{d}'x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\, \mathrm{d}'x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)} + \frac{e^{-(a-i\xi)x}}{-(a-i\xi)} \right]_{x=0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{-(a+i\xi)} + \frac{1}{-(a-i\xi)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2}
\end{aligned}$$

**Example 1.2** 令 $f(x) = e^{-ax^2}, a > 0, -\infty < x < \infty$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

## 1.4 无限域 PDE 的 Fourier 方法

**定义 1.6 (好核)**

称 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 称它为一族好核, 若它满足以下性质

1. **归一化**:
$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\ \mathrm{d}x = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$
2. **集中性**: 对于任意的 $\delta > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\ \mathrm{d}x = 0$$
3. **一致 $L^1$**: 存在常数 $M > 0$, 使得
$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\ \mathrm{d}x \le M, \quad \forall \varepsilon > 0$$

♣

**定理 1.6 (好核定理)**

若 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一族好核, 则对于 $L^1$ 或有界的函数 $f$ ,
$$\lim_{t\to 0^+} (K_\varepsilon * f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (f * K_\varepsilon)(x) = f(x)$$
对于所有 $f$ 的连续点 $x$ 成立.

特别地, 若 $f$ 处处连续, 则上面的极限是一致的.

♡

**Proof** 任取 $\delta > 0$, 由归一性
$$\begin{aligned}|(f * K_\varepsilon)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x-y)\ \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x)\right| \mathrm{d}y \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\ \mathrm{d}y\right|\end{aligned}$$
将积分区域分解, 若 $f$ 有界, 则
$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\ \mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{|x|>\delta} K_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\ \mathrm{d}y\right| + \left|\int_{|x|\le\delta} K_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\ \mathrm{d}y\right| \\ &\le 2\sup_{|x|>\delta} |f(x)| \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\ \mathrm{d}x + M \sup_{|x|<\delta} |f(x-y) - f(x)|\end{aligned}$$
令 $\varepsilon \to 0$, 得到
$$\mathrm{limsup}_{\varepsilon\to 0} \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\right| \le M \sup_{|x|<\delta} |f(x-y) - f(x)|$$

若 $x$ 是 $f$ 的连续点, 则

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{|x|<\delta}|f(x-y)-f(x)|=0$$

令 $\delta\to0$, 可知在 $f$ 的连续点 $x$ 上,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(y)\left[f(x-y)-f(x)\right]\right|=0$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to0}(f*K_\varepsilon)(x)=f(x)$$

特别地, 若 $f$ 处处连续

□

## 1.4.1 无限杆的热方程

### 1.4.1.1 形式推导

考虑以下一维无界域上热方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}, & x\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

对微分方程做 $x$ 的 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t+k\xi^2\hat{u}=0$$

解关于 $t$ 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi,t)=F(\xi)e^{-k\xi^2t}$$

其中 $F(\xi)$ 待定. 令 $t=0$, 得到

$$F(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2t}$$

令 $\hat{h}(\xi)=e^{-k\xi^2t}$ 则

$$h(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\xi^2t+ix\xi}\,\mathrm{d}'\xi$$

其中

$$-k\xi^2t+ix\xi=-kt\left(\xi-\frac{ix}{2kt}\right)^2-\frac{x^2}{4kt}$$

于是

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

由卷积定理,

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}h*f=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)\,\mathrm{d}y$$

### 1.4.1.2 解的有效性

**定义 1.7**

定义

$$H(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}},\quad (t>0)$$

称为热方程的热核.

♣

**引理 1.1**

热核 $H(x,t)$ 视为以 $t>0$ 为参数的热核族 $\{H(x,t)\}_{t>0}$ 是一族好核.

♡

**Proof**

1. 首先, 由 Gauss 积分, 易见
$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4kt}}}=1$$
故热核族是归一且一致 $L^1$ 的
2. 任取 $\delta>1$, 考虑积分
$$\begin{aligned}&\int_{|x|>\delta}|H(x,t)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{|x|>\delta}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{2}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{x>\delta}e^{\frac{-\delta x}{4kt}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sqrt{4\pi kt}}\frac{4kt}{\delta}e^{-\frac{\delta^2}{4kt}}\to0\left(t\to0^+\right)\end{aligned}$$
故热核族是集中的.

综上, 热核族是一族好核.

□

**命题 1.5**

设 $H(x,t)$ 是热核.

1. 对于 $\mathbb{R}$ 上的 Riemann 可积函数 $f$,

$$\lim_{t\to 0^+}(H*f)(x)=f(x)$$

对于 $f$ 的所有连续点 $x$ 成立.

2. 特别地, 取 $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. 可知当 $t\to 0$ 时, $H(x,t)$ 在分布意义下收敛于 Dirac 函数 $\delta(x)$, 进而可以将 $H(x,t)$ 视为分布, 在 $t=0$ 处补充定义 $H(x,0)=\delta(x)$ .

**定理 1.7**

令 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且有界或 $L^1$, 则

$$u(x,t):=(H(\cdot,t)*f)(x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$$

是以下初值问题

$$\begin{cases} u_t=ku_{xx}, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

在满足连续性条件: $u(x,t)\to f(x_0)\ ((x,t)\to(x_0,0^+))$ 下的解.

**Proof** 热核 $H(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 满足以下问题

$$\begin{cases} H_t=H_{xx}, & x\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_{>0}\\ H(x,0)=\delta(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

对于函数 $f$,

$$\begin{aligned}\Delta_x(H*f)=\Delta_x\int_{-\infty}^{\infty}H(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y&=\int_{-\infty}^{\infty}(\Delta_xH(x-y))f(y)\,\mathrm{d}y\\ &=(\Delta_xH)*f\end{aligned}$$

于是

$$u_t=H_t*f=k(\Delta_xH)*f=k\Delta_x(H*f)=ku_{xx}$$

此外,

$$u(x,0)=(\delta*f)(x)=f(x)$$

□

## 1.4.2 无限域波动方程

### 1.4.2.1 形式推导

考虑以下无限域上波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

对方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

两边做关于 $x$ 的 Fourier 变换，得到

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t) = -a^2\xi^2\hat{u}(\xi,t)$$

解方程，得到

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(a\xi t) + c_2(\xi)\sin(a\xi t)$$

以及

$$\hat{u}_t(\xi,t) = -a\xi c_1(\xi)\sin(a\xi t) + a\xi c_2(\xi)\cos(a\xi t)$$

对两个初值条件施行 Fourier 变换，得到

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(x,0) = c_1(\xi), \quad \hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(\xi,0) = a\xi c_2(\xi)$$

因此

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(a\xi t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

其中

$$\left(\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)\right)^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * (\cos(a\xi t))^{\vee}$$

其中

$$\cos(a\xi t)^{\vee} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(x+at) + \delta(x-at)\right)$$

于是

$$\left(\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)\right)^{\vee} = \frac{1}{2} f * \delta(x+at) + \frac{1}{2} f * \delta(x-at) = \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2} f(x-at)$$

由

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\frac{\xi}{2}}$$

其中

$$\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\frac{1}{2}\\ 0, & \texttt{otherwise}\end{cases}$$

结合 Fourier 变换的伸缩率, 得到

$$F\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right]=\frac{2at}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi at}{\xi at}=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi at}{a\xi}$$

于是

$$\left(\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)$$

由卷积定理,

$$\begin{aligned}\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g*\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\right)&=\frac{1}{2a}g(x)*\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2at}\right)\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\operatorname{rect}\left(\frac{x-y}{2at}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

最终, 在形式上我们得到

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)&=k*f+h*g\\&=\frac{1}{2}f(x-at)+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)\ \mathrm{d}y\\&\text{其中 }k(x,t)=\tfrac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]\\&,h(x,t)=\tfrac{1}{2a}\operatorname{rect}\left(\tfrac{x}{2at}\right)\end{aligned}}$$

## 1.4.3 半平面上的 Laplae

### 1.4.3.1 形式推导

考虑以下问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R},y>0\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

其中 $f$ 是在 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数. 希望寻求 $y\ge 0$ 的有界的连续解.

对

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

做关于 $x$ 的 Fourier 变换, 得到

$$(i\xi)^2\hat{u}+\hat{u}_{yy}=0$$

即

$$\hat{u}_{yy}-\xi^2\hat{u}=0$$

解关于 $y$ 的 ODE, 得到

$$\hat{u}(\xi,y)=c_1(\xi)e^{\xi y}+c_2(\xi)e^{-\xi y}$$

其中 $c_1(\xi),c_2(\xi)$ 由初值决定. 对初值条件 $u(x,0)=f(x)$ 做关于 $x$ 的 Fourier 变换, 得到

$$c_1(\xi)+c_2(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)$$

当 $\xi>0$ 时, 取 $c_2(\xi)=\hat{f}(\xi),c_1(\xi)=0$. 当 $\xi\le 0$ 时, 取 $c_1(\xi)=\hat{f}(\xi)$,$c_2(\xi)=0$. 易见这种取法使得 $\hat{u}(\xi,y)$ 连续. 于是这里

$$\hat{u}(\xi,y)=\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$$

由卷积定理,

$$u(\xi,y)=\sqrt{2\pi}f*\left(\left(e^{-|\xi|y}\right)^\vee\right)$$

其中

$$\begin{aligned}\left(e^{-|\xi|y}\right)^\vee&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\xi|y}e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}'\xi\\&=\int_0^{\infty}e^{-\xi y-i\xi x}\,\mathrm{d}'x+\int_{-\infty}^{0}e^{\xi y-i\xi x}\,\mathrm{d}'\xi\\&=\int_0^{\infty}e^{-\xi(y+ix)}\,\mathrm{d}'\xi+\int_0^{\infty}e^{-\xi(y-ix)}\,\mathrm{d}'\xi\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{y+ix}+\frac{1}{y-ix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2y}{y^2+x^2}\end{aligned}$$

于是

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}\,\mathrm{d}s$$

形式上, 我们得到

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}\,\mathrm{d}s$$

是以下问题的一个有界连续解:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}, y>0 \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $f$ 是在 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数.

# 第 1 章 练习

**Problem 1.1** 求解如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+cu=0, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\cos x, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $c>0, a\in\mathbb{R}$ 为常数

**Proof** 对方程

$$u_t-a^2u_{xx}+cu=0$$

做 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t+\left(a^2\xi^2+c\right)\hat{u}=0$$

得到

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)\,e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t}$$

其中 $A(\xi)$ 由初值决定. 对

$$u(x,0)=\cos x$$

视为缓增分布, 施行 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(\xi-1)+\delta(\xi+1)\right)$$

带入 $t=0$, 得到

$$A(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(x-1)+\delta(\xi+1)\right)$$

于是

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(\xi-1)+\delta(\xi+1)\right)e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t}$$

两边施行 Fourier 逆变换，得到

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(\xi-1) e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)t} e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(\xi+1) e^{-\left(a^2\xi^2+c\right)} e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2} e^{-\left(a^2+c\right)t} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-\left(a^2+c\right)t} e^{-ix} \\ &= e^{-\left(a^2+c\right)t} \cos x \end{aligned}$$

□

**Problem 1.2** 考虑

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

**Proof** 对于

$$u_{tt} = u_{xx} + 2x$$

两边做 Fourier 变换，得到

$$\hat{u}_{tt} = -\xi^2 \hat{u} + 2i\sqrt{2\pi}\delta'$$

解得

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(\xi t) + c_2(\xi)\sin(\xi t) + \frac{2i}{\xi^2}\sqrt{2\pi}\delta'(\xi)$$

对

$$u(x,0) = x^2$$

做 Fourier 变换，得到

$$c_1(\xi) + \frac{1}{\xi^2}\sqrt{2\pi} i\delta'(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = -\sqrt{2\pi}\delta''(\xi)$$

对

$$u_t(x,0) = 0$$

做 Fourier 变换，得到

$$c_2(\xi) = \hat{u}_t(\xi,0) = 0$$

于是

$$\hat{u}(\xi,t) = -\sqrt{2\pi}\left(\frac{2i}{\xi^2}\delta'(\xi) + \delta''(\xi)\right)\cos(\xi t) + \frac{2i}{\xi^2}\sqrt{2\pi}\delta'(\xi)$$

整理得到

$$\hat{u}(\xi,t) = 2i\sqrt{2\pi}\left(\frac{1-\cos(\xi t)}{\xi^2}\right)\delta'(\xi) - \sqrt{2\pi}\cos(\xi t)\delta''(\xi)$$

其中

$$\frac{1-\cos\xi t}{\xi^2}\delta'(\xi)=\left(\frac{1}{2}\xi^2+o\left(\xi^4\right)\right)\delta'(\xi)=\frac{1}{2}t^2\delta'(\xi)$$

这里用到了

$$\varphi(\xi)\,\delta'(\xi)=\varphi(0)\,\delta'(\xi)-\varphi'(0)\,\delta(\xi)$$

此外,

$$\cos(\xi t)\,\delta''(\xi)=\delta''(\xi)+t\sin(\xi t)\,\delta'(\xi)=\delta''(\xi)-t^2\cos(\xi t)\,\delta(\xi)=\delta''(\xi)-t^2\delta(\xi)$$

于是

$$\hat{u}(\xi,t)=i\sqrt{2\pi}t^2\delta'(\xi)-\sqrt{2\pi}\delta''(\xi)+\sqrt{2\pi}t^2\delta(\xi)$$

两边做 Fourier 逆变换, 得到

$$u(x,t)=t^2\mathcal{F}^{-1}[iD\mathcal{F}[1]]+\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[x^2]\right)+t^2\mathcal{F}[\mathcal{F}[1]]$$

于是

$$u(x,t)=xt^2+x^2+t^2$$

□

**Problem 1.3** 求三维半空间中波动方程的初边值问题;

$$\begin{cases}\partial_{tt}u-a^2\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}_+^3, t>0\\ u(x_1,x_2,0,t)=0, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\,,\partial_t u(x,0)=\psi(x)\,, & x\in\mathbb{R}_+^3\end{cases}$$