第 1 章　能量方法

定理 1.1

设 $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$，则以下边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

最多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Proof 设 $\bar{u}$ 是另一个解, 令 $w = \bar{u} - u$. 则

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由 Green 公式, 能量

$$E = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} w \Delta w + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0 + 0 = 0$$

于是

$$\nabla w \equiv 0$$

表面 w 是常值的, 又 w 在边界上为零, 故 w 在 $\bar{\Omega}$ 上恒为零. 这表明解是唯一的.

□

引理 1.1 (微分 Gronwall)

设 $u, k, h \in C([a,b])$, 且 u 非负可微, 满足

$$u'(t) \le k(t)\, u(t) + h(t)$$

则

$$u(t) \le e^{\int_a^t k(s)\,\mathrm{d}s} \left(u(a) + \int_a^t h(s)\, e^{\int_s^a k(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}s \right)$$

引理 1.2 (积分 Gronwall)

设 u, k, h 是 $I = [a,b]$ 上的非负连续函数, 若

$$u(t) \le k(t) + \int_a^t h(s)\, u(s) \, \mathrm{d}s, \forall t \in [a,b]$$

则

$$u(t) \le k(t)\, e^{\int_a^t h(s)\,\mathrm{d}s}, \quad \forall t \in [a,b]$$

定义 1.1 (Sobolev 空间)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界开区域, $k \in \mathbb{N}$, $D^\alpha u, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 表示多重弱导数, $L^2(\Omega)$ 为平方可积空间. 定义

$$H^k(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\right\}$$

♣

定义 1.2 (零边值 Sobolev 空间)

Ω, $K, D^\alpha u$ 同前. 定义

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

♣

引理 1.3 (Poincare 不等式)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 且有 Lipschitz 边界. 则存在仅依赖与 Ω 的常数 C, 使得对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

♡

1.1 热方程的能量估计

定理 1.2 (Dirichlet 边界条件)

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$, $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\Omega_T)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

设解 u 的一个能量泛函 E 为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x$$

那么存在常数 C, 使得

$$E(t) \leq C\left(E(0) + \int_0^t \|f\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s\right)$$

♡

Proof

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega u_t \cdot u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta u \cdot u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f \cdot u \,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = -\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_{\Omega} f \cdot u \,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

合并不等式, 得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le -\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

由 Poincare 不等式, 存在常数 C_P, 使得

$$C_p \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

由不等式 $ab \le \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$, 得到

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{2E} \|f\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{E}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2C_p\right) E + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{C_p}$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le -C_p E + \frac{C_p}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

由 Gronwall 不等式,

$$E(t) \le e^{-C_p t} \left(E(0) + \frac{C_p}{2} \int_0^t \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 e^{-C_p(t-s)} \,\mathrm{d}s \right)$$

取 $C > \max\left\{ e^{-C_p t}, \frac{C_p}{2} \right\}$ 即可.

□

推论 1.1 (唯一性)

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域. $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} - \Omega_T$, $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(\Omega_T)$. 考虑带 Dirichlet 边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = \psi(x,t), & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

该问题的解是唯一的.

♡

Proof 若 $u, \bar{u}$ 是两个解, 令 $w = u - \bar{u}$ 则方程是以下问题的解

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & (x,t) \in \Omega_T \\ w(x,0) = 0, & x \in \Omega \\ w(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

由上面的能量估计, 存在常数 C, 使得

$$E(t) \leq CE(0)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |w(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x, \quad E(0) = 0$$

于是

$$w(x,t) \equiv 0$$

这表明解唯一. □

1.2 波动方程的能量估计

定理 1.3

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域,$\Omega_T := \Omega \times [0,T]$, $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 是以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

的解. 定义能量

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}a^2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

则存在常数 M, 使得

$$E(t) \leq M\left(E(0) + \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \, \mathrm{d}t\right)$$

♡

Proof

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega} \left(u_t u_{tt} + a^2\nabla u \nabla u_t\right) \mathrm{d}x$$

其中

$$a^2\int_\Omega \nabla u\nabla u_t = a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S - a^2\int_\Omega u_t\Delta u\,\mathrm{d}x$$
$$= a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega u_{tt}u_t\,\mathrm{d}u + \int_\Omega f(x,t)\,u_t\,\mathrm{d}x$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式,

$$\int_\Omega fu_t\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{2E}$$

再由不等式 $ab\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, 得到

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{2E} \le E + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le E + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

由微分形式的 Gronwall 不等式,

$$E(t) \le e^t\left(E(0) + \int_0^T \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \le e^T\left(E(0) + \int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right)$$

取 $M=e^T$ 即可. □

推论 1.2 (唯一性)

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域,$\Omega_T := \Omega\times[0,T]$, $u\in C^2(\Omega_T)\cap C^1\left(\overline{\Omega_T}\right)$ 则以下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & (x,t)\in\Omega_T, \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x\in\Omega \end{cases}$$

的解是唯一性的. ♡

Proof 设 $\bar u, u$ 是两个解, $w=\bar u - u$, 则

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2\Delta w = 0, & (x,t)\in\Omega_T \\ w(x,t) = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,t) = 0, & x\in\Omega \end{cases}$$

令

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|w_t|^2+|\nabla w|^2\right)\,\mathrm{d}x$$

则存在常数 M, 使得

$$E(t)\le ME(0)$$

其中

$$E(0)=0$$

故

$$E(t)\equiv 0\implies w_t\equiv 0,\nabla w\equiv 0$$

这表明 $w(x,t)$ 是常值的, 又 $w(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0$, 故 $w\equiv 0$. 这表明解是唯一的.

$\square$