第 1 章　分布理论初步

1.1 基本概念

定义 1.1 (测试函数空间)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集. 定义测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 为全体紧支光滑的复值函数 $\varphi:\Omega\to\mathbb{C}$ 的集合, 即满足:

1. $$\varphi\in C^{\infty}(\Omega)$$

2. $$\operatorname{supp}(\varphi)=\overline{\{x\in\Omega:\varphi(x)\neq 0\}}\text{是}\Omega\text{的一个紧子集}$$

♣

定义 1.2 (测试函数空间上的收敛)

给定序列 $\{\varphi_p\}_{p\geq 1}\subseteq\mathcal{D}(\Omega)$. 称该序列收敛到 $0\in\mathcal{D}(\Omega)$, 若以下两条成立:

1. 存在紧集 $K\subseteq\Omega$, 使得对于每个 $p\geq 1$,$\operatorname{supp}(\varphi_p)\subseteq K$
2. 对于每个多重指标 α, $\{\partial^{\alpha}\varphi_p\}_{p\geq 1}$ 在 K 上一致收敛到 0, 即
$$\lim_{p\to\infty}\|\partial^{\alpha}\varphi_p\|_{L^{\infty}(K)}=0$$

♣

定义 1.3 (分布)

一个分布 (或广义函数) T, 被定义为从测试函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个线性泛函
$$T:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C},\quad \varphi\mapsto\langle u,\varphi\rangle$$
满足以下两个条件

1. 对于任意的 $\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\Omega)$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 我们有
$$\langle u,\alpha\varphi+\beta\psi\rangle=\alpha\langle u,\varphi\rangle+\beta(u,\psi)$$
2. 对于任意的紧集 $K\subseteq\Omega$, 存在非负整数 p 和正常数 C, 使得对于任意的 $\varphi\in C_K^{\infty}(\Omega)$, 都有
$$|\langle u,\varphi\rangle|\leq C\sup_{|\alpha|\leq p}\|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L^{\infty}(K)}$$

全体 Ω 上的分布记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$.

♣

定义 1.4 (分布意义下的收敛) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空开集. 考虑一个分布序列 $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, $T_k \in \mathcal{D}^{i(\Omega)}$. 称 $\{T_k\}$ 在分布意义下收敛到分布 $T \in \mathcal{D}^{i(\Omega)}$, 若对于任意的测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 都有

$$\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

♣

定义 1.5 (分布的导数) 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空开集. 对于分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义它的导数 T', 为满足以下关系的分布 $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

由此, 可以递归地定义高阶导数 $T^{(n)}$:

$$\left\langle T^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \varphi^{(n)} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

♣

Remark

1. 这是我们从边界项退化 (紧支性) 的分部积分公式抽象出来的定义
2. 需要说明良定义性.

Example 1.1 Dirac 函数 对于任意的 $a \in \Omega$, 定义分布 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 其中

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

可以验证这是一个分布.

对于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Dirac 函数 δ_0, 简记作 δ.

Example 1.2 正则分布 对于一个局部可积的函数 $f(x)$, 可以定义出分布 T_f , 成为 f 对应的正则分布

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

尽管 δ 不是一个函数, 在应用的过程中, 方便起见, 约定

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, \mathrm{d}x = f(a)$$

Example 1.3

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$H'(t) = \delta(t)$$

命题 1.1

$$f(x)\delta'(x)=f(0)\delta'(x)-f'(x)\delta(x)$$

1.2 Schwartz 空间与 Fourier 变换

定义 1.6 (Schwartz 空间)

Schwartz 空间, 记作 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 为全体 $\mathbb{R}^n$ 上的复值光滑速降函数, 确切地说, 称 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 属于 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若:

1. $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. 对于任意的多重指标 α 和 β,

$$\left\|x^\beta D^\alpha f(x)\right\|_{L^\infty}<\infty$$

定义 1.7 (Schwartz 空间上的 Fourier 变换与逆变换)

对于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其中 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$(或记作 $\mathcal{F}f(\xi)$), 被定义为

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

其逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

定理 1.1 (Fourier 变换的性质)

1. 对于任意的 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $a,b\in\mathbb{C}$, 都有

$$\mathcal{F}(af+bg)=a\mathcal{F}(f)+b\mathcal{F}(g)$$

2.

$$\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

是一个同胚映射.

3.

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)=f(-x)$$

4. 对于多重指标 α,

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$$

5. 对于多重指标 β,
$$\mathcal{F}\left(x^{\beta} f(x)\right)(\xi)=(i)^{|\beta|} D^{\beta} \hat{f}(\xi)$$
6. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$,
$$\mathcal{F}(f(\cdot-a))(\xi)=e^{-ia\cdot\xi} \hat{f}(\xi)$$
7. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$
$$\mathcal{F}\left(e^{ia\cdot(\cdot)} f\right)(\xi)=\hat{f}(\xi-a)$$
8. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$,
$$\mathcal{F}(f(a\cdot))(\xi)=\frac{1}{|a|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$
9. 对于 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$$\mathcal{F}(f * g)(\xi)=(2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$
10. 对于任意的 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
$$\mathcal{F}(fg)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\xi)$$
11. 对于 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi$$
这表明 $Fourier$ 变换在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是等距同构.

♡

定义 1.8 (缓增分布)

一个缓增分布 T 是指一个从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathbb{C}$ 的线性泛函 $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. 满足

1. $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$,
$$T(af+bg)=aT(f)+bT(g)$$
2. 存在常数 $C>0$ 和有限个多重指标对 $(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_m, \beta_m)$, 使得对于所有的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 都有
$$|T(f)| \leq C \sum_{j=1}^{m}\left\|x^{\beta_j} D^{\alpha_j} f(x)\right\|_{L^{\infty}}$$
全体缓增分布构成的空间记作 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

♣

Example 1.4 缓增函数诱导的缓增分布 对于" 缓增的" $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, 即它的增长速度

不超过某个多项式，g 可以定义出缓增分布 T_g：

$$T_g(f)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

由于 f 速降而 g 增长不快于多项式，右侧积分绝对收敛且良定义.

Example 1.5 Dirac 分布 $\delta_a(f)=f(a)\,,\quad\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个缓增分布.

定义 1.9 (缓增分布上的 Fourier 变换)

对于一个缓增分布 $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，定义其 Fourier 变换 $\hat{T}$(或记作 $\mathcal{F}T$)，为满足以下的分布

$$\hat{T}(f)=T\left(\hat{f}\right),\quad\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

♣

定理 1.2 (缓增分布上的 Fourier 变换的性质)

对于 $T,T_1,T_2\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，

1. 对于任意的 $a,b\in\mathbb{C}$，
$$\mathcal{F}(aT_1+bT_2)=a\mathcal{F}T_1+b\mathcal{F}T_2$$
2. Fourier 变换是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同胚.

♡

命题 1.2

在分布的意义下，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(k)$$

其中，左侧不是真正的积分，它代表一个分布，按以下方式定义

$$\left\langle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}x,\varphi(x)\right\rangle:=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}x\right)\varphi(k)\,\mathrm{d}k$$

♠

Proof 一方面

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varphi(k)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)\,e^{-i(-x)k}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(-x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(x)\,e^{i\cdot 0\cdot x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\pi\varphi(0)
\end{aligned}$$

另一方面

$$\langle 2\pi\delta(k), \varphi(k)\rangle = 2\pi\langle\delta(k), \varphi(k)\rangle = 2\pi\varphi(0)$$

这表明在分布的意义下

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$$

□

命题 1.3 (常用 Fourier(逆) 变换)

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 上,
$$\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta, \quad \mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$
2.
$$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi a}$$
3.
$$\mathcal{F}[e^{-iax}](\xi) = \sqrt{2\pi}\delta(\xi+a)$$
4. 记
$$\operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
则
$$\mathcal{F}[\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)](\xi) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}(\xi T/2) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\xi T/2)}{\xi T/2}$$
特别地
$$\mathcal{F}[\operatorname{rect}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$
5. 一维的情况
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+x^2}\right](\xi) = e^{-|\xi|a}$$
6. 三维空间上,
$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4\pi c^2}\partial_t\left(\frac{\delta(|x|-ct)}{t}\right)] = \cos(c|k|t)$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4\pi c^2 t}\delta(|x|-ct)] = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$$

7.

$$\mathcal{F}[H(x)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi) + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\xi}$$

8.

$$\mathcal{F}\{\Delta f(x)\}(\xi) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$