标题

作者：Autin

目录

第 1 章 高阶线性微分方程

1.1 一般理论

1.1.1 齐次方程与 Wronsky

定义 1.1 (Wronsky)

设 $u_1, \cdots, u_n$ 都是区间 I 上的 $n-1$ 次可微函数. 称行列式

$$W\left(u_1, \cdots, u_n\right)(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

为 $u_1, \cdots, u_n$ 的 Wronsky 函数.

考虑齐次方程, 其中 $p_0, \cdots, p_{n-1}$ 在 I 上连续.

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0 \tag{1.1}$$

再此之上, 若对于给定的 $a_1, \cdots, a_n$, 要求上述方程满足初值

$$y\left(x_0\right) = a_1, \quad y'\left(x_0\right) = a_2, \quad y^{(n-1)}\left(x_0\right) = a_n \tag{1.2}$$

则称以上为一个初值问题.

命题 1.1

设 $p_0, \cdots, p_{n-1}$ 是 I 上的连续函数. $1, \cdots, un$ 是方程1.1在区间 I 上的 n 个解, 令 $x_0 \in I$. 则 $u_1, \cdots, u_n$ 构成方程1.1的解空间 E, 当且仅当 $W\left(u_1, \cdots, u_n\right)\left(x_0\right) \neq 0$

Proof 定义一个映射 $\kappa : E \to \mathbb{R}^n$, 将方程的每个解映到它对应的初值问题的初值向量, 则 $\kappa : E \simeq \mathbb{R}^n$, $u_1, \cdots, u_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 当且仅当 $\kappa\left(u_1\right), \cdots, \kappa\left(u_n\right)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 注意到 $W\left(u_1, \cdots, u_n\right)\left(x_0\right)$ 就是 $\kappa\left(u_1\right), \cdots, \kappa\left(u_n\right)$ 的行列式即可.

□

命题 1.2

设系数函数 $p_0, \cdots, p_{n-1}$ 在 I 是连续,$u_1, \cdots, u_n$ 是齐次方程 1.1在 I 上的 n 个解. 则要么 $W\left(u_1, \cdots, u_n\right)(x)$ 在 $x \in I$ 上每一点非零, 要么 $W\left(u_1, \cdots, u_n\right)(x)$ 在 I 上每一点处处为 0.

Proof 对于每一点 x, 建立解空间 E 与 x 点处初值的双射 $\kappa_x : E \to \mathbb{R}^n$ 即可.

□

命题 1.3

设系数函数 $p_0, \cdots, p_{n-1}$ 在开区间 I 上连续. $x_0 \in I$. 设 $u_1, \cdots, u_n$ 是齐次方程 1.1在 I 上的 n 个解, 则

$$W(u_1, \cdots, u_n)(x) = W(u_1, \cdots, u_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t}, \quad x \in I$$

Proof 只需证明 $W(x) := W(u_1, \cdots, u_n)(x)$ 满足一阶齐次方程

$$W' = -p_{n-1}(x) W$$

即可.

$$\begin{aligned}
W'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \det \begin{bmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k)}(x) & \cdots & u_n^{(k)}(x) \\ u_1^{(k)}(x) & \cdots & u_n^{(k)}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \\
&+ \det \begin{bmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(x) & \cdots & u_n^{(n-2)}(x) \\ u_1^{(n)}(x) & \cdots & u_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(x) & \cdots & u_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) u_1^{(k)}(x) & \cdots & -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) u_n^{(k)}(x) \end{bmatrix} \\
&= -p_{n-1} W(x)
\end{aligned}$$

□

1.1.2 非齐次方程

定义 1.2 (线性非齐次方程)

一个 n-阶线性非齐次微分方程是指

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = g(x) \tag{1.3}$$

其中 $p_0, \cdots, p_{n-1}, g$ 是开区间 I 上的连续函数.

命题 1.4

设 $u_1, \cdots, u_n$ 是齐次方程的一个解,$v(x)$ 是非齐次方程的一个解, 则非齐次方程的通解可以写成

$$y(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) + v(x)$$

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 是任意常数.

Proof 带入方程立即得到形如上的 $y(x)$ 是非齐次方程的一个解.

任取非齐次方程的解 $z(x)$, 则 $z(x) - v(x)$ 是齐次方程的解, 从而存在 $c_1, \cdots, c_n$, 使得 $z(x) - v(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x)$.

□

常数变易法:

命题 1.5

设 $p_0, \cdots, p_{n-1}, g$ 是开区间 I 上的连续函数. 设 $u_1, \cdots, u_n$ 是齐次方程的一组基解. 考虑线性组合

$$v(x) = c_1(x) u_1(x) + \cdots + c_n(x) u_n(x)$$

$v(x)$ 称为非齐次方程解的一个充分条件是 $c_1(x), \cdots, c_n(x)$ 满足以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix}$$

Proof 逐次数求导, 并利用上述矩阵方程, 得到

$$\begin{aligned} v(x) &= c_1(x) u_1(x) + \cdots + c_n(x) u_n(x) + 0 \\ v'(x) &= c_1(x) u_1'(x) + \cdots + c_n(x) u_n'(x) + 0 \\ &\vdots \\ v^{(n-1)}(x) &= c_1(x) u_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n u_n^{(n-1)}(x) + 0 \\ v^{(n)}(x) &= c_1(x) u_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n u_n^{n}(x) + g(x) \end{aligned}$$

现在, 对第一行乘以 $p_0(x)$, 第二行乘以 $p_1(x)$, 依次类推, 直到对最后一行乘以一, 之后将每一行相加, 由于 $u_1, \cdots, u_n$ 满足非齐次方程, 我们得到

$$v^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) v^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x) v'(x) + p_0(x) v(x) = g(x)$$

□

Example 1.1 特别地, 对于二次的情况

$$y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = g(x)$$

导出问题

$$\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

由 Cramer 法则得到

$$c_1'(x) = -W(x)^{-1} u_2(x) g(x), \quad c_2'(x) = W(x)^{-1} u_1(x) g(x)$$

给出一个特解

$$v(x) = -u_1(x) \int W(x)^{-1} u_2(x) g(x) \, \mathrm{d}x + u_2(x) \int W(x)^{-1} u_1(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

同时，我们可以配合

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} -p_{n-1}(s) \, \mathrm{d}s}$$

来计算

命题 1.6

初值问题

$$\begin{gathered} y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = g(x) \\ y(x_0) = a_1, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_0 \end{gathered}$$

在 I 上有唯一解.

Proof 非齐次方程有通解

$$y(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) + v(x)$$

. 带入初值，得到系数 c_k 必须满足

$$\begin{aligned} c_1 u_1(x_0) + \cdots + c_n u_n(x_0) &= a_1 - v(x_0) \\ c_1 u_1'(x_0) + \cdots + c_n u_n'(x_0) &= a_2 - v'(x_0) \\ &\vdots \\ c_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n u_n^{(n-1)}(x_0) &= a_n - v^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

这是一个系数矩阵为可逆矩阵（$u_1, \cdots, u_n$ 的 Wronsky）的线性方程组，解 $c_1, \cdots, c_k$ 唯一. □

1.2 常系数齐次线性方程

本节讨论方程

$$p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \tag{1.4}$$

定义 1.3 (特征方程)

微分方程对应到特征多项式

$$P(x) := p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \cdots + p_1 X + p_0$$

方程

$$P(X) = 0$$

被称为是特征方程.

命题 1.7

1. 函数 $e^{\lambda x}$ 是方程1.4的解, 当且仅当 λ 是特征方程的一个根.
2. 若特征方程有 n 个不同的 (复) 根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则
$$e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$$
构成一组基解.

Proof

1. 若 $e^{\lambda x}$ 是方程的解, 当且仅当
$$p_n \lambda^n e^{\lambda x} + p_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_0 e^{\lambda x} = 0, \quad \forall x \in I$$
又 $e^{\lambda x} > 0, \forall x \in I$, 故上式当且仅当
$$p_n \lambda^n + \cdots + p_0 = 0$$
即 $P(\lambda) = 0$.
2. 由 1, 它们构成一组解, 又 $x = 0$ 处的 Wronsky 行列式为
$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$
大于零, 故为基解.

□

命题 1.8

若特征方程有复根 $\lambda = \alpha + i\beta$, 则得到复解

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

若方程的系数都是实数, 则特征根共轭地出现, 得到另一个解

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

它们共同张成了一个方程的复值解的二维空间. 实值函数解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

在 $\mathbb{C}$ 上张成了相同的解空间, 进而张成了方程的实值解空间的一个二维子空间.

Example 1.2 寻求 $y^{(4)}-y=0$ 的一组基解.

Solution 特征方程 $\lambda^4-1=0$ 有根 $1,-1,i,-i$, 以下是三组基解的例子

$$e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}$$

$$e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x$$

$$\cosh x, \sinh x, \cos x, \sin x$$

1.2.1 处理重根

定义 1.4 (微分算子环)

设 D 是微分算子, 递归地定义 $D^k := D\circ D^{k-1}, k\in\mathbb{N}^+$. 对于给定的多项式

$$P(x)=p_nX^n+p_{n-1}X^{n-1}+\cdots+p_1X+p_0$$

可以自然地定义算子

$$P(D)=p_nD^n+p_{n-1}D^{n-1}+\cdots+p_1D+p_0$$

规定它在函数 $y(x)$ 上的作用为

$$P(D)y(x):=p_ny^{(n)}(x)+p_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_1y'(x)+p_0y(x)$$

Remark 将 X 的多项式 $P(X)$ 与微分算子 $P(D)$ 一一对应, 得到一个微分算子的环.

命题 1.9

$$P(D)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}$$

Proof 注意到 $D^ke^{\lambda x}=\lambda^ke^{\lambda x}$, 再由对加法的相容性即可. □

之前讨论过的一个事实可以转述为

命题 1.10

$e^{\lambda x}$ 是微分方程 $P(D)y=0$ 的一个解, 当且仅当 λ 是特征方程 $P(X)=0$ 的一个根.

式

$$P(D)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}$$

对 λ 求导, 由对 x 微分和对 λ 微分的交换性得到

$$P(D)xe^{\lambda x}=P(\lambda)xe^{\lambda x}+P'(x)e^{\lambda x}$$

因此, 一旦 $P(\lambda_1)=P'(\lambda_1)=0$, 即 λ_1 是 $P(X)=0$ 的至少二重的根, 就有 $xe^{\lambda_1 x}$ 是微分方程的一个解.

由对式

$$P(D)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}$$

关于 λ 做 k 次求导的 Leibniz 律, 得到

$$P(D)\left(x^ke^{\lambda x}\right)=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}P^{(j)}(\lambda)x^{k-j}e^{\lambda x}$$

因此若 λ_1 是特征方程的至少 $k+1$ 重根, 则由 $P(\lambda_1),P'(\lambda_1),\cdots,P^{(k)}(\lambda_1)$ 全为 0, 可得 $x^ke^{\lambda x}$ 是方程的一个解.

定理 1.1

考虑方程 $P(D)y=0$. 由代数学基本定理, 存在唯一的分解

$$P(X)=p_n(X-\lambda_1)^{r_1}(X-\lambda_2)^{r_2}\cdots(X-\lambda_m)^{r_m}$$

其中 λ_i 是 $P(X)$ 的 r_k 重根, $k=1,\cdots,m$. 则微分方程的解由下表给出

Root	Solutions	Number
λ_1	$e^{\lambda_1x},xe^{\lambda_1x},\cdots,x^{r_1-1}e^{\lambda_1x}$	r_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_m	$e^{\lambda_mx},xe^{\lambda_mx},\cdots,x^{r_m-1}e^{\lambda_mx}$	r_m

♡

命题 1.11

上面这些解线性无关

♠

Proof 设上面这些解的给出一个零线性组合, 整理得到

$$f_1(x)e^{\lambda_1x}+\cdots+f_m(x)e^{\lambda_mx}=0$$

其中 $f_1,\cdots,f_m$ 是多项式. 我们希望通过对 m 归纳, 说明对于两两不同的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$, $f_1,\cdots,f_m$ 全为零.

当 $m=1$ 时显然成立, 若 m 时成立, 考虑

$$f_1(x)e^{\lambda_1x}+\cdots+f_m(x)e^{\lambda_mx}+f_{m+1}(x)e^{\lambda_{m+1}x}=0$$

乘以 $e^{-\lambda_{m+1}x}$, 得到

$$f_1(x)e^{u_1(x)}+\cdots+f_m(x)e^{u_mx}+f_{m+1}(x)=0$$

其中 $u_k=\lambda_k-\lambda_{m+1}(k=1,\cdots,m)$. 则 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 两两不同且均不为零. 现在重复对上式求导, 直到 $f_{m+1}(x)=0$, 得到

$$g_1(x)e^{\mu_1x}+\cdots+g_m(x)e^{\mu_mx}=0$$

对于某些多项式 $g_1,\cdots,g_m$ 成立, 由归纳假设 $g_1=\cdots=g_m=0$. 不难发现, 由于 $\mu_k\neq0$,f_k 与 g_k 的次数相同, 因此 $f_k=0$, 紧接着也有 $f_{m+1}=0$.

□

1.3 常系数非齐次方程

我们已经看到，齐次常系数方程

$$p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$$

的解形如

$$y(x) = f_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + f_m(x) e^{\lambda_m x}$$

其中 $f_1, \cdots, f_m$ 是复系数多项式,$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是两两不同的复特征值.

定义 1.5

形如 $f_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + f_m(x) e^{\lambda_m x}$ 的函数被称为是一个指数多项式，其中 $f_1, \cdots, f_m$ 是复系数多项式，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是两两不同的复数. ♣

Remark

- 设 f 是 p 次复系数多项式，则称 $f(x) e^{\lambda x}$ 为一个指数为 λ 的 p 次纯指数多项式.
- 小于 p 次的指数为 λ 的全体纯指数多项式构成 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间，记作 V_m^λ . 定义 $m \le 0$ 时,V_m^λ 为零向量空间.
- $$e^{\lambda x}, \quad \frac{x}{1!} e^{\lambda x}, \cdots, \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda x}$$
  构成 V_m^λ 的一组常用的基.
- 若 $y \in V_m^\lambda$，则 Dy 亦然，由此对于每个 m, λ，我们都有线性算子 $D : V_m^\lambda \to V_m^\lambda$

命题 1.12

线性算子 $D : V_m^\lambda \to V_m^\lambda$ 在上述 Remark 中提到的基下有矩阵表示

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

♠

Proof 注意到

$$D\left(\frac{x^k}{k!} e^{\lambda x}\right) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda x} + \lambda \frac{x^k}{k! e^{\lambda x}}, \quad k = 1, \cdots, n-1$$

以及

$$D e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

即可.

□

命题 1.13

若 $\lambda \neq 0$, 则 $D: V_m^\lambda \to V_m^\lambda$ 是线性的双射. 而当 $\lambda = 0$ 时, $DV_m^0 = V_{m-1}^0$

Proof 第一个结论只需注意到当 $\lambda \neq 0$ 时, D 是可逆矩阵. 对于第二个结论, 注意到当 $\lambda = 0$ 时, D 将通常基的前一个映到相邻的后一个, 最后一个映为 0.

□

命题 1.14

设 $P(X)$ 是多项式, 使得 $P(\lambda) \neq 0$. 则 $P(D): V_m^\lambda \to V_m^\lambda$ 是线性双射.

Proof 考虑 $P(D)$ 的矩阵表示, 由于 D 只有特征值 λ, 故 $P(D)$ 的特征值只有 $P(\lambda)$. 又 $P(\lambda) \neq 0$, 我们有 $P(D)$ 的矩阵表示是可逆的, 进而 $P(D)$ 是双射.

□

命题 1.15 (转移律)

设 f 是 C^∞ 函数,$P(X)$ 是多项式, 则

$$P(D)\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = e^{\lambda x} P(D+\lambda) f(x)$$

Proof 当 $P(X) = 1$ 时显然, 当 $P(X) = X$ 时由 Lebniz 律立即得到. 若对于 k

$$D^k\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k f(x)$$

则

$$\begin{aligned}
D^{k+1}\left(e^{\lambda x} f(x)\right) &= D\left(e^{\lambda x}(D+\lambda)^k f(x)\right) \\
&= \lambda e^{\lambda x}(D+\lambda)^k + e^{\lambda x} D(D+\lambda)^k f(x) \\
&= e^{\lambda x}(D+\lambda)^{k+1} f(x)
\end{aligned}$$

于是归纳地得到 $P(X) = X^k$ 的情况, 再通过取线性组合, 得到一般多项式的情况. □

命题 1.16

设 λ 是 $P(X) = 0$ 的根, 重数为 r, 则

$$P(D) V_m^\lambda = V_{m-r}^\lambda$$

Proof 设 $P(X) = Q(X)(X-\lambda)^\lambda$, 其中 $Q(x)$ 是多项式, 使得 $Q(\lambda) \neq 0$. 令 $e^{\lambda x} f(x)$ 是 V_m^λ 中的元素, 即 $f(x)$ 是次数小于 m 的多项式. 则

$$P(D)\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = Q(D)(D-r)^r\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = Q(D)\left(e^{\lambda x} D^r f(x)\right)$$

注意到 $D^r V_m^0 = V_{m-r}^0$ 以及 $Q(D) V_{m-1}^\lambda = V_{m-r}^\lambda$, $e^{\lambda x} V_{m-r}^0 = V_{m-r}^\lambda$ 故让 $f(x)$ 取遍 V_m^0, 得到

$$P(D) V_m^r = Q(D)\left(e^{\lambda x} V_{m-r}^0\right) = Q(D) V_{m-1}^\lambda = V_{m-r}^\lambda$$

□

命题 1.17

设 λ 是 $P(X)=0$ 的根, 重数为 r, 若 $g\in V_m^\lambda$, 则方程 $P(D)y=g(x)$ 在 V_{m+r}^λ 中有解, 但是不唯一.

Remark

- 解在忽略形如 $ax^je^{\lambda x}, j<r$ 的项, 即商去 V_r^λ 的意义下唯一. 这是因为两个特解的差是齐次方程的解, 且是指数为 λ 的纯指数多项式, 故只能在 V_r^λ 中.

Proof 有上面的命题,

$$P(D)\,V_{m+r}^\lambda=V_m^\lambda\ni g(x)$$

故存在 $f(x)\in V_{m+r}^\lambda$, 使得 $P(D)\,f(x)=g(x)$.

不唯一是因为 V_r^λ 是齐次方程解空间的一个子空间, 其上的任意元素加上方程的一个特解, 都能得到方程的一个新的解. □

命题 1.18

若 $g(x)$ 是指数多项式, 则常系数方程

$$p_ny^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=g(x)$$

的所有解都是指数多项式.

1.3.1 计算特解

将介绍两种纯代数的方法, 来找出方程

$$P(D)\,y:=p_ny^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=g(x)$$

的特解, 其中 $g(x)$ 是一个指数多项式.

首先处理 g 是纯指数多项式的情况, 例如 $g\in V_m^\lambda$. 我们视微分方程为向量空间 V_m^λ 上的线性问题, 并用一组基来求解, 最常用的一组基是

$$e^{\lambda x},\quad xe^{\lambda x},\quad \cdots,\quad x^{m-1}e^{\lambda x}$$

下面给出求解的第一种方法

设 $g\in V_m^\lambda$, 问题分为两种情况:

- 若 λ 不是 $P(X)$ 的根. 则由命题1.14 V_m^λ 中存在唯一的解. 此时可以待定系数

$$y(x)=\left(a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_0\right)e^{\lambda x}$$

之后通过解一个线性方程来确定.

- 若 λ 是 $P(X)$ 重数为 r 的根. 存在 V_{m+r}^λ 中的一个特解, 在丢掉所有次数小于 r 的项后唯一. 因此可以待定系数

$$y(x)=x^r\left(a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_0\right)e^{\lambda x}$$

之后通过解一个线性方程求解.

第二种方法往往更为快速, 不需要解线性方程, 但是需要一些篇幅来解释. 这种方法基于 (D) 作为 V_m^λ 上线性算子的矩阵的特殊性质.

设 λ 是 $P(X)$ 的 r 重根,$f(x)$ 是一个次数小于 m 的多项式. 则方程 $P(D)y = e^{\lambda x} f(x)$ 已知有形如 $e^{\lambda x} g(x)$ 的特解, 其中 g 是此时小于 $m+r$ 的多项式. 通过允许 $r=0$ 来囊括 λ 不是根的情况. 由转移律

$$P(D) e^{\lambda x} g(x) = e^{\lambda x} P(D+\lambda) g(x)$$

因此我们需要找到满足

$$P(D+\lambda) g(x) = f(x)$$

的次数小于 $m+r$ 的多项式 $g(x)$. 记

$$P(X) = Q(X)(X-\lambda)^r$$

其中 Q 是多项式, 使得 $Q(\lambda) \neq 0$. 因此 $g(x)$ 满足

$$Q(D+\lambda) D^r g(x) = f(x)$$

现在令 $R(X) = Q(X+\lambda)$. 因为 $R(0) \neq 0$, 于是存在唯一的次数小于 m 的多项式 $h(x)$, 使得 $R(D) h(x) = f(x)$. 可以通过对 $h(x)$ 积分 r 次得到 $g(x)$. 接下来的问题是: 如何找到 $h(x)$? 换言之, 我们需要给出算子 $R(D): V_m^0 \to V_m^0$ 的逆.

命题 1.19

设 $R(X)$ 是多项式, 使得 $R(0) \neq 0$. 将 $\frac{1}{R(X)}$ 展开为幂级数

$$\frac{1}{R(X)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

则 $R(D)$ 的逆就是算子 $\sum_{k=0}^{m-1} a_k D^k$

Remark 通常, 利用级数 $(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + \cdots$ 就足够了.

Proof 我们有

$$\frac{1}{R(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} X^k \right) X^m$$

其中级数在某个圆盘 $|X| < \rho$ 上收敛. 得到

$$1 = R(X) \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k + X^m S(X)$$

其中

$$S(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} X^k$$

由于 $R(X)$ 是多项式, 上面一串关系表明 $S(X)$ 也是一个多项式. 于是 $S(D)$ 可以看成是一个

线性算子. 将 X 带入 D, 得到

$$I = R(D)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k D^k\right) + D^m S(D) = R(D)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k D^k\right)$$

最后一个等号是因为 $D^m = 0$ 在 V_m^0 上成立.

□

结论 对于寻找等式右侧为指数多项式的特解, 归为先求纯多项式 $e^{\lambda x} f(x)$ 的特解, 再相加, 其中求纯指数多项式分为以下几个步骤:

- 将 $P(X)$ 写成 $P(X) = Q(X)(X-\lambda)^r$, 令 $R(X) = Q(X+\lambda)$.
- 设等式右侧是小于 m 次的指数多项式, 将 $\frac{1}{R(X)}$ 按幂级数展开到 $m-1$ 次, 代入得到 $R(D)$ 的逆 $\sum_{k=0}^{m-1} a_k D^k$.
- 令 $h(x) = (R(D))^{-1} f(x)$, 并对 h 积分 r 次, 得到 $g(x)$.
- $e^{\lambda x} g(x)$ 是一个特解.

Example 1.3 找到

$$y'' - y' - y = x^3 e^{-x}$$

的一个特解.

Solution 设 D 是微分算子, 则 D 可视为多项式空间和指数多项式空间上的线性算子. 若方程有形如 $e^{-x} g(x)$ 的解, 其中 g 为多项式, 则

$$\begin{aligned}
&\left(D^2 - D - E\right) e^{-x} g(x) = x^3 e^{-x} \\
&\Longrightarrow\ e^{-x}\left((D-E)^2 - (D-E) - E\right) g(x) = x^3 e^{-x} \\
&\Longrightarrow\ \left(D^2 - 3D + E\right) g(x) = x^3 \\
&\Longrightarrow\ g(x) = \left(D^2 - 3D + E\right)^{-1} x^3
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\left(D^2 - 3D + E\right)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(D^2 - 3D\right)^k \\
&= E - \left(D^2 - 3D\right) + \left(D^2 - 3D\right)^2 - \left(D^2 - 3D\right)^3, \quad \left(D^k = 0, \quad k \geq 4\right) \\
&= 21D^3 + 8D^2 + 3D + E
\end{aligned}$$

因此

$$g(x) = x^3 + 9x^2 + 48x + 126$$

于是

$$y = e^{-x}\left(x^3 + 9x^2 + 48x + 126\right)$$

是一个特解.

1.3.2 处理正弦和余弦

由于 $\sin \omega x = \frac{1}{2i} e^{i\omega x} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega x}$, 且 $\cos \omega x = \frac{1}{2} e^{i\omega x} + \frac{1}{2} e^{-i\omega x}$, 故方程

$$P(D)\, y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

可以用指数多项式的方法去做. 不过对这样的方程, 我们有更特殊的技巧去处理.
我们设:

- $P(X)$ 是实系数的;
- $i\omega$ 不是 $P(X)$ 的根, 且 $\omega \neq 0$

考虑由 $e^{i\omega x}$ 和 $e^{-i\omega x}$ 在 $\mathbb{C}$ 上张成的二维向量空间 T_ω, 它的另一组基是 $\cos \omega x, \sin \omega x$.
此时 D 映 T_ω 到它自身. 事实上 D 可以视作 T_ω 上满足以下关系的线性算子

$$D^2 = -\omega^2 E$$

现在设 $g \in T_\omega$, 考虑问题

$$P(D)\, y = g$$

视为 2 维空间 T_ω 上的线性问题. 可以将 $P(D)$ 中所有的 D^2 替换为 $-\omega^2$, 由此得到形如以下的问题

$$(aD + b)\, y = g$$

Remark 由于 $i\omega$ 不是 $P(X)$ 的根, 故 $P(D)$ 视作 T_ω 上的线性算子不为零, 因此 a, b 不全为零.
Example 1.4 化简求以下方程的特解

$$y^{(10)} - y^{(7)} + y^{(4)} - y = \cos 2x$$

为一个 2 维的 $\mathbb{C}$- 线性问题
Solution 在 T_2 上寻找 y, 令 $D : T_2 \to T_2$ 是微分算子, 则

$$\begin{aligned}
& y^{(10)} - y^{(7)} + y^{(4)} - y = \cos 2x, \quad y \in T_2 \\
\iff & \left(D^{10} - D^7 + D^4 - E\right) y = \cos 2x, \quad y \in T_2 \\
\iff & (64D - 1009E)\, y = \cos 2x, \quad y \in T_2 \\
\iff & 64y' - 1009y = \cos 2x, \quad y \in T_2
\end{aligned}$$

当然可以通过解一阶线性方程得到特解, 不过这里还可以利用以下命题计算

命题 1.20

设 a, b 是不全为零的实数, 令 $\omega \neq 0$. 则算子

$$aD + b : T_\omega \to T_\omega$$

可逆. 它的逆是算子

$$-\frac{a}{a^2\omega^2 + b^2} D + \frac{b}{\omega^2 a^2 + b^2}$$

Example 1.5 继续上面的 Example 1.4, 设 $a=64, b=-1009,\omega=2$ 则一个特解是

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{a^2\omega^2+b^2}D\cos 2x+\frac{b}{a^2\omega^2+b^2}\cos 2x \\ &= \frac{1}{(128)^2+(1009)^2}\left(128\sin x-1009\cos 2x\right) \end{aligned}$$

另一种方法是当 $P(X)$ 为是系数时, 我们将方程

$$P(D)\,y=A\cos\omega x$$

改为解

$$P(D)\,y=A^{i\omega}$$

再取实部即可. 另一边类似.

第 1 章 练习

1.

第 2 章 线性微分方程组

2.1 一般理论

定义 2.1

考虑标准形式的 n 阶线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)y^j+f_i\left(x\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.1}$$

其中系数函数 $a_{ij}\left(x\right)$ 和 $f_i\left(x\right)$ 在区间 $a<x<b$ 上连续.

可以写作矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}\left(x\right)\mathbf{y} \tag{2.2}$$

当 $\mathbf{f}\left(x\right)\equiv 0$ 时, 方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}\left(x\right)\mathbf{y} \tag{2.3}$$

被称为是齐次线性方程组 ♣

定理 2.1 (存在唯一性)

线性微分方程组 (2.1)满足初值条件

$$\mathbf{y}\left(x_0\right)=\mathbf{y}_0 \tag{2.4}$$

的解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}\left(x\right)$ 在区间 $a<x<b$ 上是存在且唯一的, 其中初值 $x_0\in\left(a,b\right)$ 和 $\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^n$ 是任意给定的. ♡

2.1.1 齐次线性微分方程组

引理 2.1

设 $\mathbf{y}=\mathbf{y}_1\left(x\right)$ 和 $\mathbf{y}=\mathbf{y}_2\left(x\right)$ 是齐次微分方程组(2.1)的解, 则它们的线性组合

$$y=C_1\mathbf{y}_1\left(x\right)+C_2\mathbf{y}_2\left(x\right) \tag{2.5}$$

也是方程(2.1)的解. ♡

Remark 齐次方程组(2.1)的解空间是线性空间.

引理 2.2

齐次线性微分方程组(2.1)的解空间 S 是 n-维的（n 是微分方程的阶数）. ♡

Remark 解与 $\mathbb{R}^n$ 上的点（初值）一一对应.

Proof 任取 $x_0 \in (a,b)$，那么对于每个 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，齐次方程(2.1)的初值问题 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ 存在唯一的解 $\mathbf{y}(x)$. 由此得到映射

$$H : \mathbb{R}^n \to S$$
$$\mathbf{y}_0 \mapsto \text{齐次方程的解}\mathbf{y}(x)\,,\text{使得}\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0$$

显然对于固定的 x_0，不同的初值问题的解不相同，故 H 是单射. 又对于任意的齐次方程组(2.1)的解 $\mathbf{y}(x)$，$\mathbf{y}(x_0) \in \mathbb{R}^n$，从而由单射 $H(\mathbf{y}(x_0)) = \mathbf{y}(x_0)$，因此 H 也是满的. 因此 H 是 $\mathbb{R}^n$ 到 S 的线性同构，$\dim S = n$.

定理 2.2

齐次线性微分方程(2.1)在区间 $a < x < b$ 上有 n 个线性无关的解

$$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \tag{2.6}$$

且它的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) \tag{2.7}$$

♡

Proof 由线性空间的性质.

命题 2.1

设 $\mathbf{y}_1(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x)$ 是齐次线性方程的 n 个解，则对于任意的 $x_0 \in (a,b)$，$\{\mathbf{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ 在 S 中线性无关，当且仅当 $\{\mathbf{y}_k(x_0)\}_{k=1}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关.

♠

Proof 由 $\mathbb{R}^n \simeq S$ 立即得到.

□

定义 2.2 (Wronsky)

设 $\mathbf{y}_1(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x)$ 是齐次微分方程的 n 个解，设它们的分量形式

$$\mathbf{y}_1(x) = \left(y_1^k(x)\right)^{\mathsf{T}}, \cdots, \mathbf{y}_n(x) = \left(y_n^k(x)\right)^{\mathsf{T}}$$

定义它们的 Wronsky 行列式为

$$W(x) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \cdots & y_n^2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

♣

引理 2.3 (刘维尔公式)

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}[A(x)]\,\mathrm{d}x}, \quad a < x < b$$

♡

Remark 由此见对每个 $x_0 \in (a,b)$，$W(x) = 0, \forall x \in (a,b) \iff W(x_0) = 0$，因此 $W(x)$ 恒为零或恒不为零.

Proof

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x)=\sum_{i=1}^{n}\det\begin{pmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ & \cdots & \\ \dot{y}_1^i(x) & \cdots & \dot{y}_n^i(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

又

$$\dot{y}_k^i(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\,y_k^j(x)\,,\quad k=1,2,\cdots,n$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\det\begin{pmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ & \cdots & \\ y_1^j(x) & \cdots & y_n^j(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix},\quad y_k^j(x)\text{ 位于第 i 行} \\ &=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}W(x) \\ &=\operatorname{tr}[A(x)]W(x)\end{aligned}$$

解一阶线性微分方程，得

$$W(x)=W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}\operatorname{tr}[A(x)]\,\mathrm{d}x}$$

□

定理 2.3

设 $\mathbf{y}_1(x),\cdots,\mathbf{y}_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程的一组解,$W(x)$ 是它们的 Wronsky 行列式则以下几条等价:

1. $(\mathbf{y}_k(x))_{k=1}^n\in S^n$ 线性无关;
2. $\forall x\in(a,b)\,,W(x)\neq 0$;
3. $\exists x_0\in(a,b)\,,W(x_0)\neq 0$.

♡

Proof 由命题2.1, 第一条和第三条等价. 由引理2.3, 第二条和第三条等价.

□

定义 2.3

设 n 阶齐次线性微分方程的一个解组为 $\{\mathbf{y}_j : j=1,2,\cdots,n\}$, 则令

$$\mathbf{Y}(x):=\left(y_j^i(x)\right)_{n\times n}$$

是一个矩阵，定义 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}(x)}{\mathrm{d}x}$ 为分量各自求导. 则

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}(x)}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)$$

♣

Remark

- 若结论成立，则 $\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{A}\mathbf{y}_i, i = 1, 2, \cdots, n$，因此解矩阵与解组一一对应.
- 当解组 $\{\mathbf{y}_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ 是一个基本解组时，称相应的 $\mathbf{Y}(x)$ 为一个基解矩阵.
- 若 $\Phi(x)$ 是 n 阶齐次线性方程的一个基解矩阵，则通解为 $\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{c}$，其中 $\mathbf{c}$ 为任意 n 维常值列向量.

Proof　$\mathbf{Y}$ 写作 $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n)$，$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}(x)}{\mathrm{d}x}$ 写作 $(\dot{\mathbf{y}}_1, \cdots, \dot{\mathbf{y}}_n)$，则

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}} &= (\dot{\mathbf{y}}_1, \cdots, \dot{\mathbf{y}}_n) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{y}_n) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{Y}\end{aligned}$$

□

命题 2.2

设 $\Phi(x)$ 是齐次线性方程组的一个基解矩阵，则对于任意非奇异的常数矩阵 $\mathbf{C}$，矩阵

$$\Psi(x) := \Phi(x)\mathbf{C}$$

也是一个基解矩阵.

♠

Proof　由分量求导的线性，

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\mathbf{C} = \mathbf{A}\Phi\mathbf{C} = \mathbf{A}\Psi$$

因此 Ψ 是一个解矩阵. 此外 $W_\Psi(x) = W_\Phi(x)\det C \neq 0$，因此 Ψ 是一个基解矩阵.

□

命题 2.3

设 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 均为齐次线性方程的基解矩阵，则存在非奇异的 n 阶常值矩阵 $\mathbf{C}$，使得 $\Psi = \Phi\mathbf{C}$

♠

Proof　取定 $x_0 \in (a, b)$，令 $C := \Phi(x_0)^{-1}\Psi(x_0)$，则由上面的命题，$\Phi(x)C$ 也是一个基解矩阵，又 $\Psi(x_0) = \Phi(x_0)C$，故 Ψ 和 ΦC 是同一初值问题的解，由齐次线性方程方程初值问题解的唯一性，$\Psi = \Phi C$.

□

2.1.2 非齐次线性微分方程组

约定

- "方程"均指线性方程.

引理 2.4 (特解与通解)

设 $\Phi(x)$ 是非齐次方程所对应的齐次方程的一个基解矩阵,$\varphi^*(x)$ 是非齐次方程的一个特解, 则非齐次方程的任意解 $\varphi(x)$ 可以表示为

$$\varphi(x)=\Phi(x)\mathbf{c}+\varphi^*(x)$$

其中 $\mathbf{c}$ 是由 $\varphi(x)$ 决定的常值列向量.

Proof 易见 $\varphi(x)-\varphi^*(x)$ 是齐次方程的一个解, 由 Remark2.1.1, 存在常值列向量 $\mathbf{c}$, 使得

$$\varphi(x)-\varphi^*(x)=\Phi(x)\mathbf{c}$$

□

引理 2.5 (一个特解)

设 $\Phi(x)$ 是齐次方程的一个基解矩阵, 则非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}(x)}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)+\mathbf{f}(x)$$

的一个特解是

$$\varphi^*(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

其中 x_0 可以从 (a,b) 中任取.

Idea 常数变易法

Proof 假设特解有形式

$$\varphi^*(x)=\Phi(x)\mathbf{c}(x)$$

带入非齐次方程, 得到

$$\Phi'(x)\mathbf{c}(x)+\Phi(x)\mathbf{c}'(x)=\mathbf{A}(x)\Phi(x)\mathbf{c}(x)+\mathbf{f}(x)$$

又 $\Phi'(x)=\mathbf{A}(x)\Phi(x)$, 于是

$$\Phi(x)\mathbf{c}'(x)=\mathbf{f}(x)$$

注意到 $\Phi(x)$ 是基解矩阵蕴含 Wronsky 行列式 $\det[\Phi(x)]\neq 0$, 进而 $\Phi(x)$ 在每一点处的取值可逆, 于是可以定义 $\Phi^{-1}(x)$, 让其左作用在等式两侧, 得到

$$\mathbf{c}'(x)=\Phi^{-1}\mathbf{f}(x)$$

积分得到

$$\mathbf{c}(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s,\quad x_0\in(a,b)$$

代回原方程知，

$$\varphi^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

是非齐次方程的一个特解.

定理 2.4 (通解) 设 $\Phi(x)$ 是齐次方程的一个基解矩阵，则非齐次方程在 $a < x < b$ 上的通解可以表示为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\left(\mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

其中 $\mathbf{c}$ 为任意 n 维常值列向量.

此外，非齐次方程满足初值条件 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ 的解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\,\Phi^{-1}(x_0)\,\mathbf{y}_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

♡

Proof 由引理2.5和引理2.4可得第一个结论. 对于第二个结论，取 $\mathbf{c} = \Phi^{-1}(x_0)\,\mathbf{y}_0$ 即可.

Example 2.1 求齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Proof 解 $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} = y^2$，得到

$$y^2 = c_1 e^t$$

由 $\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t} = y^3$, $\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}t} = y^1$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^1}{\mathrm{d}t^2} = y^1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y^3}{\mathrm{d}t^2} = y^3$$

从而

$$y^1 = c_2 e^t + c_3 e^{-t}, \quad y^3 = c_2 e^t - c_3 e^{-t}$$

于是

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2.2 常系数线性微分方程组

2.2.1 矩阵指数函数

定义 2.4 (矩阵的模)

设 $\mathcal{M}$ 表示全体 n 阶（复）矩阵的集合，则 $\mathcal{M}$ 构成一个复线性空间. 对于每个 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}$，定义它的模为

$$\|A\| := \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

♣

Remark

1. $\|\cdot\|$ 是一个范数.
2. $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ 是完备的赋范线性空间.

引理 2.6

任取 $A, B \in \mathcal{M}$,$AB \in \mathcal{M}$, 且

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

♡

Remark

- 由此立即有

$$\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k, \quad k \ge 1$$

Proof 设 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$，则 $AB = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)_{1\le i,j\le n}$, 于是

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sum_{i,j}\left|\sum_k a_{ik}b_{kj}\right| \\ &\le \sum_{i,j}\sum_k |a_{ik}|\,|b_{kj}|\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|A\|\,\|B\| &= \left(\sum_{i,j}|a_{ij}|\right)\left(\sum_{i,j}|b_{ij}|\right) = \sum_{i,k}\sum_{l,j}|a_{ik}|\,|b_{lj}| \\ &\ge \sum_{i,k}\sum_{j}|a_{ik}|\,|b_{kj}| = \sum_{i,j}\sum_{k}|a_{ik}|\,|b_{kj}| \ge \|AB\|\end{aligned}$$

定义 2.5

对于每个 $A \in \mathcal{M}$，定义

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

♣

Remark

- 由上面引理的 Remark, 易见 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ 绝对收敛, 故 $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Cauchy 列, 又由 $\mathcal{M}$ 的完备性, e^A 收敛于 $\mathcal{M}$.

命题 2.4 (矩阵指数的运算性质)

任取 $A, B \in \mathcal{M}$

1. 若 $AB = BA$, 则

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

2. e^A 总可逆, 且

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$$

3. 若 P 是非奇异的 n 阶矩阵, 则

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$$

Proof

1. 由

$$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k B^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

可得

$$\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{B^k}{k!}\right) \le \sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m}\sum_{i+j=n}\frac{A^i B^j}{i!j!} \le \left(\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{B^k}{k!}\right)$$

令 $n \to \infty$ 即可.

2. 注意到 $A(-A) = (-A)A$, 由 1, 立即得到.
3. 由定义

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(PAP^{-1}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}P\frac{A^k}{k!}P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^A P^{-1}$$

推论 2.1

非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x) \tag{2.8}$$

在区间 (a,b) 上的一个通解为

$$\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.9}$$

其中 c 为任意常列向量. 此外, 非齐次方程满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为

$$\mathbf{y} = e^{(x-x_0)A}\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

2.2.2 基解矩阵与 Jordan 标准型

引理 2.7

设 A 是 n 阶矩阵,$J=\operatorname{diag}\left(J_1,\cdots,J_m\right)$ 是 A 的 Jordan 标准型, P 是可逆矩阵, 使得 $A=PJP^{-1}$ 则

$$e^{xA}=P\operatorname{diag}\left(e^{xJ_1},\cdots,e^{xJ_m}\right)P^{-1}$$

♡

Remark

- 若 e^{xA} 齐次方程的一个基解矩阵, 则 $e^{xA}P$ 亦然.

  Proof 只需注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[e^{xA}P]=Ae^{xA}P$

□

Proof

$$\begin{aligned}
e^{xA}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}PJ^kP^{-1}\\
&=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}J^k\right)P^{-1}\\
&=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\operatorname{diag}\left(J_1^k,\cdots,J_m^k\right)\right)P^{-1}\\
&=P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}J_1^k,\cdots,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}J_m^k\right)P^{-1}\\
&=P\operatorname{diag}\left(e^{xJ_1},\cdots,e^{xJ_m}\right)P^{-1}
\end{aligned}$$

□

命题 2.5

设 A 有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$, A 的 Jordan 标准型为

$$J=\operatorname{diag}\left(J_1,\cdots,J_s\right)$$

其中

$$J_i=\operatorname{diag}\left(J_{i,1},\cdots,J_{i,l_j}\right),\quad i=1,\cdots,s$$

$J_{i,k}:=\lambda_iE_{p_{i,k}}+Z_{p_{i,k}}$ 表示 λ_i 的第 k 个 Jordan 块 ($p_{i,k}$ 是阶数), $k=1,\cdots,l_j$. 设 $P=\left(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n\right)$ 是过渡矩阵, 使得 $P^{-1}AP=J$, 则一个基解矩阵是

$$\begin{aligned}
e^{xA}P=Pe^{xJ}=P\operatorname{diag}\left(e^{x\left(\lambda_iE_{p_{i,k}}+Z_{p_{i,k}}\right)}\right)&=P\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_ix}e^{xZ_{p_{i,k}}}\right)\\
&=\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_ix}\left(\mathbf{r}_0+x\mathbf{r}_1+\frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\mathbf{r}_{p-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

最后的形式中括号里的是 Jordan 块对应分块的某一列, $\mathbf{r}_i$ 取对应到的 $\mathbf{p}_j$ 的倒序.

♠

Remark 作为动机了解即可.

Proof

$$e^{xZ_p}=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{x^k}{k!}Z^k=\begin{pmatrix}1&&&&\\x&1&&&\\\frac{1}{2!}x^2&x&1&&\\\cdots&\cdots&&&\\\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}&\cdots&&x&1\end{pmatrix}$$

因此

$$(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_p)\,e^{xZ_p}=\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}x^k\mathbf{p}_k,\cdots,\sum_{k=p}^{p}\frac{1}{k!}x^k\mathbf{p}_k\right)$$

□

2.2.3 通过待定特征向量寻求基解矩阵

引理 2.8

微分方程 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}=A\mathrm{y}$ 有非零解 $\mathrm{y}=e^{\lambda x}\mathbf{r}$, 当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征值, 且 $\mathbf{r}$ 是属于 λ 的特征向量.

♡

Proof $\mathrm{y}=e^{\lambda x}\mathbf{r}$ 是该齐次方程的解, 当且仅当

$$\lambda e^{\lambda x}\mathbf{r}=Ae^{\lambda x}\mathbf{r}$$

由于 y 是非零解, 故 $e^{\lambda x}\neq 0$ 且 $\mathbf{r}\neq 0$, 上述等式等价于

$$\lambda\mathbf{r}=A\mathbf{r}$$

即 λ 为特征值且 $\mathbf{r}$ 为属于 λ 的特征向量.

□

定理 2.5 (特征向量给出的复基解矩阵)

设 A 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 和对应的特征向量 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n$, 则

$$\Phi(x)=\left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\mathbf{r}_n\right)$$

是 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}=A\mathrm{y}$ 的一个基解矩阵.

♡

Proof 由引理2.8, $\Phi(x)$ 是该齐次方程的一个解矩阵, 又 $\det[\Phi(0)]=\det(\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n)\neq 0$, 故由定理??, $\Phi(x)$ 是基解矩阵.

□

引理 2.9

设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征值, 则齐次方程有形如

$$e^{\lambda_i x}\left(\mathbf{r}_0+x\mathbf{r}_1+\frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2+\cdots+\frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}\right)\tag{2.11}$$

的非零解，当且仅当它是

$$(A-\lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r}=0$$

的一个非零解，且

$$\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_{n_i-1} \tag{2.12}$$

按以下方式确定

$$\mathbf{r}_k=(A-\lambda_i E)\mathbf{r}_{k-1},\quad k=1,\cdots,n_i-1 \tag{2.13}$$

Remark $\mathbf{r}_0,\cdots,\mathbf{r}_k$ 中后几项可能为 0，事实上，只有 λ_i 的 Jordan 块只有一个时，才会有 $r_{n_i-1}\neq 0$，其余情况下，x 的最高次数为 λ_i 的最大 Jordan 块的阶数减一（即它的 rank）.

Proof 2.11为齐次方程 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=A\mathbf{y}$ 的解，当且仅当

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}&=\lambda_i e^{\lambda_i x}\left(\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{1}{k!}x^k\mathbf{r}_k\right)+e^{\lambda_i x}\left(\sum_{k=1}^{n_i-1}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}\mathbf{r}_k\right)\\&=Ae^{\lambda_i x}\left(\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{1}{k!}x^k\mathbf{r}_k\right)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(A-\lambda_i E)\left(\mathbf{r}_0+x\mathbf{r}_1+\cdots+\frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}\right)\\&=\mathbf{r}_1+x\mathbf{r}_2+\cdots+\frac{1}{(n_i-2)!}x^{n_i-2}\mathbf{r}_{n_i-1}\end{aligned}$$

考察各项系数知，上式成立当且仅当

$$(A-\lambda_i E)\mathbf{r}_j=\mathbf{r}_{j+1},\quad j=0,\cdots,n_i-2;\quad (A-\lambda_i E)\mathbf{r}_{n_i-1}=0$$

即

$$\mathbf{r}_{j+1}=(A-\lambda_i E)\mathbf{r}_j,\quad j=0,\cdots,n_i-2;\quad (A-\lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r}_0=0$$

□

引理 2.10

设 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$. 记 n 维常数列向量组成的（复）线性空间为 V，则

- $$V_i:=\{\mathbf{r}\in V:(A-\lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r}=0\}$$
  是矩阵 A 的 n_i 维不变子空间.
- V 有直和分解
  $$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

定理 2.6

设 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$, 则齐次方程有基解矩阵

$$\left(e^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}\left(x\right),\cdots,e^{\lambda_1 x}P_n^{(1)}\left(x\right);\cdots;e^{\lambda_s x}P_1^{(s)}\left(x\right),\cdots,e^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}\left(x\right)\right)$$

其中

$$P_j^{(i)}=\mathbf{r}_{j0}^{(i)}+x\mathbf{r}_{j1}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)},\quad i=1,\cdots,s,j=1,\cdots,n_i$$

$\mathbf{r}_{10}^{(i)},\cdots,\mathbf{r}_{n_i0}^{(i)}$ 是 $(A-\lambda_iE)^{n_i}\mathbf{r}=0$ 的 n_i 个线性无关解, 使得 $\mathbf{r}_{jk}^{(i)}=(A-\lambda_iE)^k\mathbf{r}_{j0}^{(i)}$

Idea 只需要在每个根子空间上求广义特征根系, 每一系的"母向量" $\mathbf{r}_{j0}$ 给出一个 Jordan 链, 链中的元素塞进指数函数幂级数给出方程的一个解.

Proof 令 $\Phi\left(x\right)$ 是形如题中的矩阵. 由引理2.9, 矩阵的每一列都是一个解. 注意到

$$\Phi\left(0\right)=\left(\mathbf{r}_{10}^{(1)},\cdots,\mathbf{r}_{n_10}^{(1)};\cdots;\mathbf{r}_{10}^{(s)},\cdots,\mathbf{r}_{n_s0}^{(s)}\right)$$

选取每个根子空间 V_i 中的 n_i 个线性无关的广义特征向量, 作为 $\mathbf{r}_{j0}^{(i)}$, 且不同根子空间中的广义特征根线性无关, 故此时的 $\Phi\left(0\right)$ 的列向量两两线性无关, 我们有 $\det[\Phi\left(0\right)]\neq 0$, 因此由定理2.3, $\Phi\left(x\right)$ 是基解矩阵.

□

至此, 说明了如何找到基解矩阵, 但寻求的基解矩阵可能是复矩阵, 因此还需要进一步标准化.

定理 2.7 (实-标准化)

设 $\Phi\left(x\right)$ 是齐次方程的基解矩阵, 则

$$\Phi\left(x\right)\Phi^{-1}\left(0\right)$$

是（实的）标准基解矩阵.

Proof 由命题2.3, 存在常值可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使得

$$e^{Ax}=\Phi\left(x\right)\mathbf{C}$$

带入 $x=0$, 得到 $\mathbf{C}=\Phi^{-1}\left(0\right)$ 而 e^{Ax} 是齐次方程的（实的）标准基解矩阵. □

定理 2.8

设 $\Phi\left(x\right)=B\left(x\right)+iC\left(x\right)$ 是如上基解矩阵. $B\left(x\right)$ 和 $C\left(x\right)$ 也是解矩阵, 且

$$\operatorname{rank}\left(B\left(x\right),C\left(x\right)\right)=\operatorname{rank}\left(\Phi\left(x\right)\right)=n$$

, 进而存在 $B\left(x\right),C\left(x\right)$ 中的 n 列, 构成齐次方程的一个（实）基解矩阵.

Proof 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi\left(x\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B\left(x\right)+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C\left(x\right)$$

并带入 $\Phi(x)$ 满足的齐次方程即可得到 $B(x)$, $C(x)$ 均为解矩阵. 秩关系由

$$\operatorname{rank}(B(x), C(x)) \geq \operatorname{rank}(\Phi(x))$$

立即得到. 最后一个结论是显然的.

$\square$

Example 2.2 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Solution $\det(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1$, 得到特征根 $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$.

由

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\mathbf{r}_1 := (1, i)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{r}_2 := (1, -i)^{\mathsf{T}}$ 是一组分别对应于 λ_1, λ_2 特征向量. 因此得到基解矩阵

$$\begin{aligned} \Phi(x) :&= \left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1, e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \\ ie^{(1+i)x} & -ie^{(1-i)x} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

又

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

于是标准基解矩阵为

$$e^{xA} = \Phi(x)\Phi^{-1}(0) = e^x \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

得到通解

$$\mathbf{y} = C_1 e^x (\cos x, -\sin x)^{\mathsf{T}} + C_2 e^x (\sin x, \cos x)^{\mathsf{T}}$$

或者由

$$\Phi(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos x + i\sin x & \cos x - i\sin x \\ -\sin x + i\cos x & -\sin x - i\cos x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x & \cos x \\ -\sin x & -\sin x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \sin x & -\sin x \\ \cos x & -\cos x \end{pmatrix}$$

选取线性无关的列向量, 得到基解矩阵

$$e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

事实上, 仅 $e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1$, 它的实部和虚部就分别提供了两个线性无关的解.

Example 2.3 求解

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Solution 由 $\det(\lambda E - A) = 0$, 得一重特征根 $\lambda_1 = -1$, 和二重特征根 $\lambda_2 = 2$.

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

得 λ_1 的一个特征向量 $\mathbf{r}_{10}^{(1)} = (2, -3, 0)$, 对应的解为 $e^{-x}(2, -3, 0)^{\mathsf{T}}$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda_2 E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(A - 2E)^2$ 的两个线性无关的解

$$\mathbf{r}_{10}^{(2)} = (1, 0, 0)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{r}_{20}^{(2)} = (0, 1, 3)^{\mathsf{T}}$$

从而

$$\mathbf{r}_{11}^{(2)} = (0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{r}_{21}^{(2)} = (2, 0, 0)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{r}_{22}^{(2)} = (0, 0, 0)^T$$

, 得到两个解

$$e^{2x}(1, 0, 0)^{\mathsf{T}}, \quad e^{2x}(2x, 1, 3)^{\mathsf{T}}$$

于是基解矩阵为

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & e^{2x} & 2xe^{2x} \\ -3e^{-x} & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 3e^{2x} \end{pmatrix}$$

2.3 高阶线性微分方程

考虑关于未知函数 $y = y(x)$ 的 n 阶线性微分方程组

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \tag{2.14}$$

方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \tag{2.15}$$

称为方程对应的齐次线性方程.

定理 2.9

方程 2.14等价于

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \tag{2.16}$$

其中

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n)^{\mathsf{T}} := \left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{f}(x) = (0, \cdots, 0, f(x))^{\mathsf{T}}$$

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

Proof 引入新变量后，方程化为

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n(x)\,y_1 - a_{n-1}(x)\,y_2 - \cdots - a_1(x)\,y_n \end{cases}$$

推论 2.2

微分方程2.14满足初值条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

的解在区间 $a<x<b$ 上存在且唯一.

Proof 令 $\mathbf{y}_0 := \left(y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}\right)$，做替换 $\mathbf{y} := (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n)^{\mathsf{T}} := \left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)^{\mathsf{T}}$，$\mathbf{f}(x) := (0, \cdots, 0, f(x))$，由方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

满足初值条件 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ 的解存在且唯一，可得命题成立.

2.3.1 高阶线性微分方程的一般理论

约定

- "高阶方程" 指 n 阶线性微分方程
- "多元方程" 指 n 元线性微分方程

命题 2.6 (解的对应关系)

设标量值函数组

$$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x) \tag{2.17}$$

是高阶齐次方程的 m 个解，则

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_m(x) \\ \varphi_m'(x) \\ \vdots \\ \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

是高阶齐次方程对应的多元齐次方程的 m 个解. 反之，若它高阶齐次方程对应的多元齐次方程的有形如上的 m 个解，每个解的第一个分量给出高阶方程的 m 个解.

Remark

- 高阶方程的解组2.17线性无关，当且仅当对应的多元方程的解组2.18线性无关.

  Proof　由导数的线性，形如2.18的向量组线性无关，当且仅当它们的第一个分量组线性无关.

定义 2.6 (Wronsky)

定义

$$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \tag{2.19}$$

的 Wronsky 行列式，为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

的 Wronsky 行列式.

定理 2.10

设 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是高阶方程在 $a < x < b$ 上的的 n 个解,$W(x)$ 是它们的 Wronsky 行列式则以下几条等价

1. $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 线性无关；
2. $\exists x_0 \in (a,b)$, $W(x_0) \neq 0$;
3. $\forall x \in (a,b), W(x) \neq 0$.

此外，若以上其一成立，则

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)$$

是高阶齐次方程的一个通解,$C_1, \cdots, C_n$ 为任意常数.

Proof　由定理2.3和解的对应关系立即得到三条的等价性，通解由2.2给出.

□

利用高阶方程对应的多元方程的特殊形式，可以给出一个特解的形式.

定理 2.11

设 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是高阶齐次方程的一个基本解组. 高阶非齐次方程有一个特解 $\varphi^*(x)$

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s)\, \mathrm{d}s \tag{2.21}$$

其中 $W_k(x)$ 是 (最后一行的) 代数余子式 W_{nk} 进而高阶非齐次方程的一个通解是

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) + \varphi^*(x) \tag{2.22}$$

♡

Proof 只需验证 $\varphi^*(x)$ 是如下向量值函数的第一个分量注意到 $\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{W(s)}\Phi^*(s)$ □ 其中 $\Phi^*(s)$ 表示伴随, 它的每一个分量都是 $\Phi(s)^{\mathsf{T}}$ 对应分量代数余子式. 于是

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} \Phi(x)\,\Phi^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x)}{W(s)} \begin{pmatrix} * & W_1(s) \\ \vdots & \vdots \\ * & W_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{W(s)} \Phi(x) \begin{pmatrix} W_1(s) \\ \vdots \\ W_n(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

上述向量的第一个行为

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s)\, \mathrm{d}s$$

命题 2.7 (二阶方程)

考虑二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{2.23}$$

其中 $p, q, f \in C(a, b)$. 若对应的齐次方程有两个线性无关的解 $y = \varphi_1(x), \varphi_2(x)$, 则非齐次方程的一个通解是

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{-\varphi_1(x)\,\varphi_2(s) + \varphi_2(x)\,\varphi_1(s)}{\varphi_1(s)\,\varphi_2'(s) - \varphi_2(s)\,\varphi_1'(s)} f(s)\, \mathrm{d}s$$

♠

此外, 上面的一般性讨论给出了特解的形式, 我们可以待定系数 $\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{n} C_k(x)\,\varphi_k(x)$ 利用常数变易法给出特解. 仍然用二阶方程举例.

命题 2.8 (常数变易法)

由定理2.11方程2.23有形如下的特解

$$y = C_1(x)\,\varphi_1(x) + C_2(x)\,\varphi_2(x)$$

，其中 φ_1,φ_2 是对应齐次方程的线性无关的解. 由非齐次方程的第一个分量，

$$y'=[A\Phi(x)C(x)]^{(1)}+0=C_1(x)\varphi_1'(x)+C_2(x)\varphi_2'(x)$$

这要求

$$C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0$$

对

$$y'=C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'$$

得到

$$y''=C_1\varphi_1''+C_2\varphi_2''+C_1'\varphi_1'+C_2'\varphi_2'$$

又 $y''+py'+qy=f,\quad \varphi_i''+p\varphi_i'+\varphi_i=0,i=1,2$，故 $y''-f=C_1\varphi_1''+C_2\varphi_2''$，可得

$$C_1'\varphi_1'+C_2'\varphi_2'=f(x)$$

再由之前的式子，解得

$$C_1'(x)=-\frac{\varphi_2(x)f(x)}{W(x)},C_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)}$$

♠

2.3.2 常系数高阶线性微分方程

本小节讨论 n 阶常系数线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{2.24}$$

和相应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n=0 \tag{2.25}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是常数，$f(x)$ 是区间 $a<x<b$ 上的实值连续函数.

定义 2.7

考虑与常系数线性微分方程2.24对应的多元方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(x)}{\mathrm{d}x}=A\mathbf{y}(x)+\mathbf{f}(x)$$

则矩阵 A 的特征方程为

$$\det[\lambda E-A]=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{2.26}$$

恰为高阶方程将 $y^{(k)}$ 替换为 λ^k($k=0,\cdots,n$ ）的结果. 所以也成上述特征方程为高阶方程2.24的特征方程.

♣

定理 2.12

设齐次方程2.25的特征方程在复数域中共有 s 个互不相同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ ，重数分别为 $n_1, \cdots n_s$，则函数组

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}; \\ \cdots \\ e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, \cdots, x^{n_s-1}e^{\lambda_s x} \end{cases} \tag{2.27}$$

是微分方程的一个基本解组.

♡

Example 2.4 求解微分方程

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

Solution 特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

解得特征根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 得到一个基本解组

$$1, e^{-x}, e^{2x}$$

方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

Example 2.5 求解微分方程

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y^{(3)} - 4y^{(2)} + 3y^{(1)} - y = 0$$

Solution 特征方程为

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

容易看出有特征根 $\lambda_1 = 1$, 特征方程化为

$$(\lambda - 1)^3 \left(\lambda^2 + 1\right)$$

故 λ_1 是三重特征根, $\lambda_2 = i$ 和 $\lambda_3 = -i$ 是单根, 得到一个基本解组

$$e^x, e^{ix}, e^{-ix}$$

即

$$e^x, xe^x, x^2e^x, \cos x + i\sin x, \cos x - i\sin x$$

取复解的实部和虚部, 得到通解

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2 e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

第 3 章 矩阵指数补充与线性方程组的算法

本节讨论常系数齐次线性方程

$$y' = Ay, \quad y(x_0) = \eta \tag{3.1}$$

引理 3.1 (齐次线性方程的 Picard 迭代)

设列 $(\phi_m)_{m=0}^{\infty}$ 是初值问题3.1 的 Picard 逼近, 则

$$\phi_m(x) = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k\right)\eta, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

其中 A_0 表示单位矩阵.

♡

Proof $m=0$ 时显然成立, 若等式对于给定 m 成立,

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(x) &= \eta + \int_{x_0}^{x} A\phi_m(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \eta + \int_{x_0}^{x} A\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(t-x_0)^k}{k!} A^k\right)\eta\,\mathrm{d}t \\
&= \eta + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(t-x_0)^k}{k!} A^{k+1}\right)\eta\,\mathrm{d}t \\
&= \eta + \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} A^{k+1}\eta \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k\eta
\end{aligned}$$

□

线性映射 $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 诱导出线性映射 $A:\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, 通过定义 $AX := (AX_1, \cdots, AX_n)$, 其中 $X = (X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$. 因此可以考虑矩阵微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = AT, \quad T(0) = E_n \tag{3.2}$$

定义 3.1

定义矩阵 A 的指数 $\exp(A)$ 为初值问题3.2的（唯一）解在 $x=1$ 处的取值.

♣

命题 3.1

初值问题3.2的解为 e^{xA}.

♠

Proof 暂记3.2的解为 $\Phi(x, A)$. 对于给定的 x_0, 由链式法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x_0x, A) = x_0A\Phi(x_0x, A)$$

当 $x=0$ 时,$\Phi\left(x_0 x, A\right)$ 化为 E_n, 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi\left(x_0 x, A\right)(0)=x_0 A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi\left(x, x_0 A\right)(0)$$

于是 $\Phi\left(x_0 x, A\right)$ 和 $\Phi\left(x, x_0 A\right)$ 是 x 的至多相差一常数的函数, 又 $x=0$ 时, 二者相等等于 E_n, 故 $\Phi\left(x_0 x, A\right)=\Phi\left(x, x_0 A\right)$. 令 $x=1$, 得到 $\Phi\left(x_0, A\right)=\Phi\left(1, x_0 A\right)=e^{x_0 A}$.

□

命题 3.2

设 A 是 $n\times n$-矩阵, 则

- 指数函数满足
$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k,$$
- 初值问题
$$y'=Ay,\quad y\left(x_0\right)=\eta \tag{3.3}$$
  的解为
$$y\left(x\right)=e^{\left(x-x_0\right)A}\eta$$

♠

Proof

- 任意固定 x_0, 初值问题
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=x_0 AT,\quad T\left(0\right)=E_n$$
  的解存在且唯一, 由引理3.1, 它的 Picard 迭代序列为
$$\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\left(x_0 A\right)^k\right\}_{m=1}^{\infty}$$
  按定义带入 $x=1$, 得到
$$e^{x_0 A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_0^k}{k!}A^k$$
- 由引理3.1, 初值问题的解为
$$y\left(x\right)=\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(x-x_0\right)^k}{k!}A^k\right)\eta=e^{\left(x-x_0\right)A}\eta$$

□

3.1 矩阵指数的计算

对于 A 有复特征值的情况, 我们需要考虑形式与3.1相同的, 但取值在复向量空间上的初值问题.

将 $\mathbb{C}^n$ 视作 $\mathbb{R}^n$ 的复化, 即看作直和 $\mathbb{R}^n\oplus i\mathbb{R}^n$. 对于复向量 $u+iv$, 令 $A\left(u+iv\right):=Au+iAv$,$e^{xA}\left(u+iv\right)=e^{xA}u+ie^{xA}v$

3.1.1 特征值向量法

一个基本的观察是，若 $M(x)$ 是满足 $M'(x) = AM(x)$ 的矩阵函数，且 $M(0)$ 可逆，则 $e^{xA} = M(x)M(0)^{-1}$（只需注意到 $M(x)M(0)^{-1}$ 是标准初值问题3.2的解）.

方程 $M'(x) = AM(x)$ 无非是说它的列向量函数 y 都满足 $y' = Ay$. $M(0)$ 可逆无非是说由列向量构成的 n 个解是线性无关的.

于是，若我们有 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$，则 n 个初值问题的解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay, \quad y(0) = v_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

可以按列向量排成一个矩阵,$M(x)$，使得 $M'(x) = AM(x)$，由此可以通过计算 $M(x)M^{-1}(0)$ 得到 e^{xA}.

初值 v_k 对应的解为 $e^{xA}v_k$，这似乎需要借助 e^{xA} 的信息，但是我们完全可以选择适当的 v_k，使得 $e^{xA}v_k$ 有简单的形式.

一些线性代数事实：

对于 A 的每个特征值 λ_k，

$$W_k^m := \ker(\lambda_k E_n - A)^m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

是一列递增的线性空间，且存在最小的正整数 s_k，使得 $W_k^{s_k} = W_k^{s_k+1}$.

$\mathbb{C}^n$ 可以分解为直和

$$\mathbb{C}^n = W_1^{s_1} \oplus \cdots \oplus W_p^{s_p}$$

命题 3.3 (广义特征根为初值的解)

若 $v \in W_k^{s_k}$，则

$$e^{xA}v = e^{\lambda_k x} \sum_{j=1}^{s_k-1} \frac{1}{j!} x^j (A - \lambda_k E_n)^j v$$

♠

Proof

$$e^{xA} = e^{\lambda_k x} e^{x(A-\lambda_k E_n)}$$

又当 $j \geq s_k$ 时，$(A - \lambda_k E_n)^j v = 0$ 带入即可. □

Example 3.1 计算 e^{xA}，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution 矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

它有单根 $\lambda_1=1$ 和二重特征根 $\lambda_2=2$. 计算得

$$v_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

是属于 λ_1 的一个特征向量, 它张成了 W_1^1. 此外, 存在线性无关意义下唯一的属于 λ_2 的特征向量, 取其一为

$$v_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

继续寻找满足

$$(A-\lambda_2 E)\, v_3=v_2$$

得一解

$$v_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

向量 v_2,v_3 构成 W_2^2 的一组基, 于是 v_1,v_2,v_3 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 此时

$$\begin{aligned}e^{xA}v_1=e^{x}v_1,\quad e^{xA}v_2=e^{2x}v_2,\\ e^{xA}v_3=e^{2x}\left(I+x\left(A-2I\right)\right)v_3=e^{2x}\left(v_3+xv_2\right)\end{aligned}$$

因此

$$M\left(x\right)=\begin{bmatrix}0 & e^{2x} & xe^{2x}\\ e^{x} & e^{2x} & xe^{2x}\\ e^{x} & 0 & e^{2x}\end{bmatrix}$$

最后

$$e^{xA}=M(x)M(0)^{-1}=\begin{bmatrix}(1+x)e^{2x} & -xe^{2x} & xe^{2x}\\ -e^{x}+(1+x)e^{2x} & e^{x}-xe^{2x} & xe^{2x}\\ -e^{x}+e^{2x} & e^{x}-e^{2x} & e^{2x}\end{bmatrix}$$

3.1.2 Cayley-Hamilton 和 Putzer 算法

由 Cayley-Hamilton, 若 $P\left(X\right)$ 是 A 的特征多项式, 则 $P\left(A\right)=0$. 对于每个 $k\geq n$, A^k 表为不高于 $n-1$ 次的 A 的多项式. 因此

$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^kA^k=\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\left(x\right)A^k$$

对于某些函数 $Q_k\left(x\right)$,($k=0,1,\cdots,n-1$) 成立, 这些函数仅通过 A 的特征多项式确定, 进而仅通过 A 的特征值和重数确定.

计算 e^{xA} 简化为计算 $Q_k\left(x\right)$, 进而只需要关注特征向量和它们的重数. 此外, 通过一个多项式空间的基变换可以简化这个问题.

命题 3.4 (简化问题的一个基变换)

将特征值记重数地排成一列 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 将次数小于 n 的多项式空间的基

$X^1, \cdots, X^{n-1}$ 替换为 $M_k(X)$, $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 可以给出一组新的基，其中

$$M_0(X)=1, \quad M_k(X)=M_{k-1}(X)(X-\lambda_k), \quad (k=1,\cdots,n-1)$$

进而 e^{xA} 表为

$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) M_k(A)$$

接下来给出寻求 $p_k(x)$ 的一个算法.

命题 3.5 (Putzer 算法)

设函数 $(p_1(x), \cdots, p_k(x))^{\mathrm{T}}$ 满足初值问题

$$p_0'(x)-\lambda_1 p_0(x)=0, \quad p_0(0)=1$$

$$p_k'(x)-\lambda_{k+1} p_k(x)=p_{k-1}(x), \quad p_k(0)=0, \quad k=1,\cdots,n-1$$

则

$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) M_k(A)$$

Remark 由此，求 e^{xA} 的问题化为依次解 n 个一阶线性微分方程的问题.

Proof 令 $T(x)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) M_k(A)$，其中 $p_k(x)$ 满足上述初值问题. 我们有

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \lambda_1 p_0(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(p_{k-1}(x)+\lambda_{k+1} p_k(x)\right) M_k(A) \\
&= \lambda_1 p_0(x)+\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k+1} p_k(x) M_k(A)+\sum_{k=1}^{n-1} p_{k-1}(x) M_{k-1}(A)(A-\lambda_k) \\
&= \lambda_1 p_0(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{k+1} p_k(x) M_k(A)-\lambda_k p_{k-1}(x) M_{k-1}(A)\right)+\sum_{k=1}^{n-1} p_{k-1}(x) M_{k-1}(A) \\
&= \lambda_1 p_0(x)+\lambda_n p_{n-1}(x) M_k(A)-\lambda_1 p_0(x)+\sum_{k=1}^{n-1} p_{k-1}(x) M_{k-1}(A) \\
&= A T(x)
\end{aligned}$$

此外，带入 $x=0$，得到 $T(0)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k(0) M_k(A)=M_0(A)=E_n$.

由此得到 $T(x)=e^{xA}$.

□

Example 3.2 计算 e^{xA}，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution 计算得特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 设

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=2$$

解 Putzer 算法中的方程, 得

$$p_0(x)=e^x,\quad p_1(x)=e^{2x}-e^x,\quad p_2(x)=(x-1)e^{2x}+e^x$$

于是

$$\begin{aligned}
e^{xA}&=p_0(x)M_0(x)+P_1(x)M_1(x)+p_2(x)M_2(x)\\
&=e^xE+\left(e^{2x}-e^x\right)(A-E)+\left((x-1)e^{2x}+e^x\right)(A-2E)(A-E)\\
&=e^xE+\left(e^{2x}-e^x\right)\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}+\left((x-1)e^{2x}+e^x\right)\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\\
&=e^x\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}+e^{2x}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}+xe^{2x}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(x+1)e^{2x}&-xe^{2x}&xe^{2x}\\-e^x+(x+1)e^{2x}&e^x-xe^{2x}&xe^{2x}\\-e^x+e^{2x}&e^x-e^{2x}&e^{2x}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.1.3 插值公式

第 4 章 稳定性理论初步

定义 4.1 (Lyapunov 稳定性)

令 $F \in C([t_0, \infty] \times \mathbb{R}^n)$ 且关于 X 满足局部 Lipschitz 条件, 对于微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X) \tag{4.1}$$

设 $\varphi(t)$ 是它的满足初值 $\varphi(t_0) = X_0$ 一个右行整体解.

若任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\|X_0 - \varphi(t_0)\| \leq \delta$, 就有方程组的解 $X = X(t; t_0, X_0)$ 整体存在, 且

$$\|X(t; t_0, X_0) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \in [t_0, \infty)$$

或者说对于 $t_0 \leq t < \infty$, 一致地有

$$\lim_{X_0 \to \varphi(t_0)} \sup_{t \in [t_0, \infty)} \|X(t; t_0, X_0) - \varphi(t)\| = 0$$

则称解 $X = \varphi(t)$ 是 Lyapnov 稳定的. ♣

定义 4.2 (渐进稳定)

沿用上述记号, 若 $X = \varphi(t)$ 是 Lyapunov 稳定的, 且存在正常数 δ_0, 使得一切满足 $\|X_0 - \varphi(t_0)\| \leq \delta_0$ 的解 $X(t; t_0, X_0)$ 还满足

$$\lim_{t \to \infty} \|X(t; t_0, X_0) - \varphi(t)\| = 0$$

则称解 $X = \varphi(t)$ 是渐进稳定的. ♣

命题 4.1 (归约)

令 $Y = X - \varphi(t)$, $G(t, Y) := F(t, Y + \varphi) - F(t, \varphi)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0$$

等价于

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = G(t, Y), \quad Y(t_0) = 0$$

其中 $G(t, 0) = 0$. 并且此时 $\varphi(t)$ 稳定, 当且仅当上述关于 Y 的方程的零解稳定. 此外, 做变量替换 $Z = (t, Y)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \left(1, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)$$

关于 Y 的方程又等价于

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = (1, G(Z)) := H(Z), \quad Z(t_0) = (t_0, 0)$$

♠

Remark 因此, 只需要研究自治方程常值解的稳定性.

4.1 平衡点的稳定性

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连通开集，考虑定义在 $I \times D$ 上的方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t, x)$$

其中 I 是包含了 $[0, \infty)$ 的区间，且函数 $F : I \times D \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 .

定义 4.3 (平衡点)

称 c 是一个平衡点或常值解，若 $F(t, c) = 0$ 对于所有的 $t \in I$ 成立.

定义 4.4 (稳定性)

称平衡点 c 是稳定的，若以下条件成立：

对于 c 的任一邻域 U，都存在 c 的邻域 V，使得对于所有的 $\eta \in V$，满足 $x(0) = \eta$ 的解在 $t \geq 0$ 上存在，并且对于所有这样的 t，都有 $x(t) \in U$

Idea 也就是说，只要对初值的扰动足够小，满足初值的解都广泛存在，且在未来都不会超出限定区域.

定义 4.5 (渐进稳定)

常值解 c 被称为是渐进稳定的，若它是稳定的，并且以下条件成立：

存在 c 的邻域 U，使得对于所有的 $\eta \in U$，满足 $x(0) = \eta$ 的解都在 $t \geq 0$ 上存在，并且 $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$.

Remark 稳定性也是渐进稳定的条件之一，它排除了解从外面溜一圈再返回来的情况.

Example 4.1 设 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^1 函数，c 是 F 的孤立零点. 设 c 是区间 $(c-h, c+h)$ 上唯一的零点.

1. 若 F 在 $(c-h, c)$ 上为正，$(c, c+h)$ 上为负，则 c 是渐进稳定的平衡点；
2. 若 F 造 $(c-h, c)$ 上为负，$(c, c+h)$ 上为正，则 c 是不稳定的平衡点.

Idea 1. 的情况为负反馈,2. 的情况为正反馈.

引理 4.1

若矩阵 A 的特征值都有负的实部，则存在 $C > 0$，和 $m > 0$，使得

$$\left|e^{tA}\eta\right| \leq Ce^{-mt}|\eta|, \quad t > 0$$

对于所有的 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 成立.

Idea e 脑袋上的数的实部代表了整体的模，虚部代表了角度.

Idea How to Proof：将任意 $\eta \in \mathbb{C}^n$ 按广义根子空间分解，利用投影映射的线性建立 η 与根子分量 v_k 的羁绊.

$e^{tA}v$ 的模由两部分乘在一起决定，一部分是 e^{λ_k} 的模，它由 λ_k 的实部决定，另一部分是 $e^{(A-\lambda_k I)t}v$，它在高次下消失.

Proof 任取 $\eta \in \mathbb{C}^n$, 考虑 η 的广义根子分解 $\eta = v_1 + \cdots + v_p$, 其中 $v_k \in W_k^{s_k}$ 是属于特征向量 λ_k ,$k = 1, \cdots, s$ 的广义特征根. 令 $\sigma := -\max\{\lambda_k\}$, 则由条件 $-\sigma < 0$. 取定 $0 < m < \sigma$.

任取 $v \in W_k^{s_k}$, 我们有

$$e^{tA}v = e^{\lambda_k x} e^{(A-\lambda_k I)t} v$$

因为 $(A - \lambda_k I)^{s_k} v = 0$, 所以上式中的

$$e^{(A-\lambda_k I)t} v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A - \lambda_k I)^n t^n v = \sum_{n=0}^{s_k - 1} \frac{1}{n!} (A - \lambda_k I)^n v$$

于是

$$\left|e^{tA}v\right| \leq \left|e^{\lambda_k x}\right| \sum_{n=0}^{s_k-1} \frac{1}{n!} \|A - \lambda_k I\| \, |t|^n \, |v| \leq e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)x} \left|P_k(t)\right| |v| \leq e^{-\sigma x} \left|P_k(t)\right| |v|$$

其中 $P_k(t)$ 是 $s_k - 1$ 次多项式, 它由 λ_k 决定. 于是存在 $C_k > 0$, 使得

$$\left|e^{tA}v\right| \leq C_k e^{-mx} |v|, \quad v \in W_k^{s_k}$$

最后, 由投影映射的线性, 对每个 $k = 1, \cdots, p$, 存在与 η, k 均无关的数 L, 使得

$$|v_k| \leq L |\eta|$$

令 $C := L \max\{C_k\}$, 我们就有

$$\left|e^{tA}\eta\right| \leq \sum_{k=1}^{p} \left|e^{tA}v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-mx} |v_k| \leq C e^{-mx} |\eta|$$

□

引理 4.2

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,$g(x) \geqslant 0$,c 是一个常数. 如果

$$f(x) \leqslant c + \int_a^x g(s) f(s) \, ds$$

则

$$f(x) \leqslant c e^{\int_a^x g(s) ds}$$

♡

命题 4.2 (渐近稳定性判据)

设 $F : D \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的, $c \in D$ 使得 $F(c) = 0$, 令 A 是矩阵 $DF(c)$. 若 A 的特征值都有负的实部, 则平衡解 $x(t) = c$ 是渐进稳定的.

♠

Idea How to Proof 利用余项高阶于 $|x|$ 无穷小的性质, 将 $g(x)$ 代替为"小数 $\times$ $|x|$", 这几乎就将 $F(x)$ 化作线性方程, 可以使用 Gronwall 不等式 (它几乎就是线性方程解的不等号版本) 的结果.

这给出一个条件与结果相互影响的不等式: 在使得 $|x(t)|$ 能被 β 控制住的点 t 上才成立, 而不等式的结果又能提供 $|x(t)|$ 的更小的上界, 进而提供更多的使得不等式成立的点 t, 经验告诉我们不等式应该是广泛成立的, 故用反证法说明.

Proof 通过一个平移变换, 不妨设 $c=0$. 记

$$F(x)=Ax+g(x)$$

其中 $A:=DF(0)$, $g(x)$ 是余项, 使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{|x|}=0$$

对于给定的 $\eta\in D$, 设 $x(t)$ 是满足 $x(0)=\eta$ 的方程的解, 将它延拓到 $t>0$ 时的最大存在区间上. 我们有

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+g(x(t))$$

由非齐次常系数线性方程的解的形式2.1,

$$x(t)=e^{At}\eta+\int_0^t e^{(t-s)A}g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

设 A 的特征值都有负的实部, 于是由引理4.1, 存在与 η 无关的 $C\geq 1$ 和 $m>0$, 使得

$$\left|e^{At}\eta\right|\leq Ce^{-mt}|\eta|,\quad \forall 0<t<\tau$$

于是

$$|x(t)|\leq Ce^{-mt}|\eta|+C\int_0^t e^{-m(t-s)}|g(x(s))|\,\mathrm{d}s$$

取 $0<\alpha\leq\frac{m}{2C}$. 存在 $\beta>0$, 使得当 $|x|\leq\beta$ 时, $|g(x)|\leq\alpha|x|$. 任取 $\tau>0$, 使得解可以延拓到 $t=\tau$ 上, 并且 $|x(t)|\leq\beta$ 对于 $t\in[0,\tau]$ 成立

$$,e^{mt}|x(t)|\leq C|\eta|+C\alpha\int_0^t e^{ms}|x(s)|\,\mathrm{d}s,\quad 0<x<\tau$$

由 Gronwall 不等式, 此时

$$e^{mt}|x(t)|\leq C|\eta|e^{C\alpha t},\quad 0<t<\tau$$

从而

$$|x(t)|\leq C|\eta|e^{(C\alpha-m)t}\leq C|\eta|e^{-\frac{1}{2}mt},0<t<\tau$$

设 $\delta=\frac{\beta}{2C}$, 断言当 $|\eta|<\delta$ 时, 右行解整体存在. 事实上, 若设 $x(t)$ 的右行最大区间为 $[0,T_*)$, 则由 η 的模的大小和 $x(t)$ 的连续性, 可以取到最大的 $T\in(0,T_*]$, 使得

$$|x(t)|\leq\beta,\forall t\in[0,T)$$

上面的讨论告诉我们, 在该区间上,

$$|x(t)|\leq C|\eta|e^{-\frac{1}{2}mt}\leq\frac{\beta}{2}<\beta$$

于是一定有 $T=T_*$. 进一步地, 因为在右行最大存在区间 $[0,T_*)$ 上,

$$|x(t)|<\beta$$

于是由延拓定理, 一定有 $T_*=\infty$.

若取 $|\eta|<\delta$, 则 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$. 此外, 任取 $\varepsilon>0$, 只要 $|\eta|<\min\left(\delta,\frac{\varepsilon}{C}\right)$, 就有

$$|x(t)|\leq C|\eta|<\varepsilon$$

对于所有的 $t>0$ 成立, 这就说明了渐近稳定性. □

4.2 Lyapunov 函数

Lyapunov 函数没有确切的定义, 对于不同的问题我们引入不同的 Lyapunov 函数. 总的来说, 它是沿任意相曲线具有一定单调性的“赋值”连续函数, 利用这种函数研究相曲线在长久地运动之后的最终的行为.

考虑相空间 $D\subseteq\mathbb{R}^n$（x 的取值范围）上的自治方程（右侧与时间 t 无关）

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x)$$

在 D 上, F 是 C^1 映射.

Idea 通常将这样一个问题视为物体在空间中的运动, 它的速度遵循上述方程, 只由空间的性质决定而与时间无关, 因此只要掌握了空间上每一点赋予物体的速度 $F(x)$，以及物体一开始出现的位置（初值条件），就能预判物体的一切运动.

定义 4.6

记 $\phi^t(\eta)$ 为初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x),\quad x(0)=\eta$$

的饱和解. ♣

Idea

1. $\phi^t(\eta)$ 若视为一个点, 可以看成是从 η 点开始, 沿着初值问题的解曲线走了 t 时间后的位置.

Remark

- 对于固定的 t, $\phi(t)(\cdot):D\to D$ 是相空间 D 上的微分同胚, 它让相空间上的点依 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x)$ 运动时间 t.
- $\phi^{(t-t_0)}(\eta)$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x),\quad x(t_0)=\eta$$

  的解.
- 满足某种群的性质

$$\phi^{t_1+t_2}(\eta)=\phi^{t_1}\left(\phi^{t_2}(\eta)\right)$$

定义 4.7 (相曲线与解曲线)

给定 $\eta\in D$, 通过 η 的相曲线是指参数曲线 $x=\phi^t(\eta)$，视为 D 上以 t 为参数的曲线. 解曲线是指图像 $\{(t,x):x=\phi^t(\eta)\}$, 视为 $\mathbb{R}\times D$ 上的曲线. ♣

定义 4.8 (正定)

设 $W\subseteq\mathbb{R}^n, 0\in W, V:W\to R$. 称函数 V 是正定的, 若 $V(x)>0$ 对于所有 $x\in W\setminus\{0\}$ 成立, 且 $V(0)=0$.

♣

定义 4.9 (邻域基)

设 X 是拓扑空间, $x\in X, \mathcal{U}$ 是 x 的一族邻域, 若对于 x 的任一邻域 V, 存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $U\subseteq V$, 则称 $\mathcal{U}$ 为 x 的一个邻域基.

♣

Remark 可以将邻域 V 修改成开邻域, 得到等价的定义.

定理 4.1

设 $F:D\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 的, $c\in D$ 是 F 的一个零点. W 是 c 的紧邻域, 令 $V:W\to\mathbb{R}$ 是满足以下两条的连续函数

- V 沿任一相曲线 ($t\mapsto V(\phi^t(\eta))$) 单调递减;
- 函数 $v\mapsto V(c+x)$ 是平移集合 $W-c$ 上的正定函数.

则 c 是稳定的平衡点.

♡

Proof 考虑水平下集族

$$H_r:=\{x\in W:V(x)<r\},\quad r>0$$

则 $\{H_r\}$ 构成 c 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域基.$V|_{\partial W}$ 是紧集上的连续函数, 故存在最小值 m, 由正定性 $m>0$, 取 r 使得 $0<r<m$. 任取 $\eta\in H_r$, 则相曲线 $\phi^t(\eta)$ 不能延伸至 W 的边界, 否则存在 $t_0\in\partial W$, 使得 $V(\phi^{t_0}(\eta))\geq m>r$, 矛盾. 因此 $\phi^t(\eta)$ 在 $t>0$ 时广泛存在. 又由单调性可知 $\phi^t(\eta)$ 始终含于 H_r.

这表明对于任意的 c 的邻域 U, 都能找到某个 $H_r\subseteq U\cap W$, 使得对于任意的 $\eta\in H_r$, $\phi^t(\eta)$ 当 $t>0$ 时广泛存在且不溢出 H_r, 这就说明了稳定性.

□

接下来加强一些条件, 得到渐近稳定性版本的定理, 定理的证明需要引入一些动力系统中的概念.

定义 4.10 (ω-极限)

设以 η 为起点的解能延拓到 $t>0$. 定义上 η 的 ω-极限集, 记作 $\omega(\eta)$, 由具有以下性质的点 $x\in D$ 组成:

存在递增的列 $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, 使得 $t_k\to\infty$ 且 $\phi^{t_k}(\eta)\to x$

♣

引理 4.3

设 η 是落在 D 的紧子集上的正向相曲线 ($t>0$) , 则 $\omega(\eta)$ 非空.

♡

Proof 取无穷大的递增列 $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, 则 $\{\phi^{t_k}(\eta)\}$ 是紧子集 K 上的 (有界) 点列, 从而存在收敛的子列 $\phi^{s_k}(\eta)$, 由 K 的列紧性, $\lim_{k\to\infty}\phi^{s_k}(\eta)\in K$, 为 η 的一个 ω-极限. 因此 $\omega(\eta)$ 非空.

□

引理 4.4

若 $\xi \in \omega(\eta)$，则过 ξ 的正向相曲线和逆向相曲线都落在 $\omega(\eta)$ 上.

Proof 由 $\xi \in \omega(\eta)$，知存在 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}, t_k \to \infty$，使得 $\lim_{k\to\infty} \phi^{t_k}(\eta) = \phi^0(\xi)$. 由 ϕ 连续性和群性质，我们有

$$\phi^t(\xi) = \phi^t\left(\phi^0(\xi)\right) = \phi^t \lim_{k\to\infty} \phi^{t_k}(\eta) = \lim_{k\to\infty} \phi^t\left(\phi^{t_k}(\eta)\right) = \lim_{k\to\infty} \phi^{t+t_k}(\eta) \in \omega(\eta)$$

对于任意的 $t \in \mathbb{R}$ 成立. □

引理 4.5

设 η 的正向相曲线落在 D 的紧子集上. 若 $\omega(\eta)$ 是单点集 $\{p\}$，则 $\lim_{t\to\infty} \phi^t(\eta) = p$.

接下来就可以证明渐进稳定性的 Lyapunov 函数的判定.

推论 4.1

设 $F : D \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的，$c \in D$ 是 F 的孤立零点. W 是 c 的紧邻域，使得 c 是 W 上的唯一零点. 令 $V : W \to \mathbb{R}$ 是连续函数，满足以下两条

- V 沿任意非常值相曲线严格递减；
- $x \mapsto V(c+x)$ 是平移集合 $W - c$ 上的正定函数.

则 c 是渐进稳定的平衡点.

Idea 第一条限定了：平衡点附近的相曲线最后的运动一定趋于一个极限点，只需要说明该极限点就是平衡点即可. 过极限点的相曲线落在极限点集上，V 严格单调性给出该曲线只能平衡点，再由平衡点的唯一性（孤立性）即可.

Proof 首先由定理4.1，平衡点 c 是稳定的. 选取 $r > 0$，使得 V 的下水平集 H_r 不能到达 W 的边界. 令 $\xi \in H_r$，则相曲线 $\phi^t(\xi)$ 延拓到所有 $t > 0$ 上，并且始终落在 H_r 上. 由引理4.3，$\omega(\xi)$ 非空. 此外，由第一个条件，极限 $\lambda := \lim_{t\to\infty} V(\phi^t(\xi))$ 存在，且 $\lambda \geq 0$. 令 $p \in \omega(\xi)$,$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{k\to\infty} \phi^{t_k}(\xi) = p$，则 $V(p) = \lambda$. 这立即给出 V 在集合 $\omega(\xi)$ 上取常值 λ. 又有以 $\omega(\xi)$ 为起点的相曲线始终落在 $\omega(\xi)$ 上，故而 V 沿着这条相曲线也始终取常值，那么由条件 1，此相曲线只能是常值曲线. 由假设,W 上的平衡点只有 c，而 $\omega(\xi) \subseteq W$，因此 $\omega(\xi) = \{c\}$，由上面的引理，$\phi^t(\xi) \to c$.

□

定理 4.2 (不稳定性判据)

设 $F : D \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的，$c \in D$ 是 F 的孤立零点. 设 W 是 c 的邻域，使得 W 上不存在 c 以外的其他零点. 令 $V : W \to \mathbb{R}$ 是满足以下两条的连续函数

- $V(c) = 0$ 且沿非常值相曲线严格递增；
- c 的每个邻域上都有使得 V 大于零的点.

设 c 是不稳定的平衡点.

Idea 如果相曲线徘徊于 B, 则它由 V 的性质一定是常值曲线, 进而是（唯一的）平衡点. 但是 V 的递增性给出, 对于正赋值点为起点的相曲线, 它随时间增加, V 给它的赋值越来越大, 最终的赋值（极限）一定大于 0.

Proof 设 B 是以 c 为中心的闭球, 使得 B 中没有 c 以外的零点, 且 $B \subseteq W$. 令 $\xi \in B$ 使得 $V(\xi) > 0$. 断言正向相曲线 $\phi^t(\xi)$ 逃出 B. 为此, 设如果 $\phi^t(\xi)$ 始终落在 B 中, 则相曲线延拓到所有 $t > 0$ 上, 且由引理4.3 $\omega(\xi)$ 非空, 且 $\omega(\xi) \subseteq B$（闭集）. 类似上面的证明,V 在 $\omega(\xi)$ 上取常值 λ, 使得 $\lambda > 0$. 由条件 1,$\omega(\xi)$ 只能由平衡点组成. 因此 $\omega(\xi) = c$, 这与 $V(c) = 0$ 矛盾.

□

4.3 实践

通常取 V 是 C^1 函数, V 沿相曲线的增减可以通过计算微分来研究:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\left(\phi^t(\eta)\right) = \nabla V\left(\phi^t(\eta)\right) \cdot F'\left(\Phi^t(\eta)\right)$$

以下三种情况是非常好用的:

1. 若 $\nabla V(x) \cdot F(x) < 0$ 对于除使得 $F(x) = 0$ 外的 x 都成立, 则 V 沿着非常值相曲线严格递减;
2. 若 $\nabla V(x) \cdot F(k) \leq 0$ 对于所有 x 成立, 则 V 沿着相曲线递减;
3. 若 $\nabla V(x) \cdot F(x) > 0$ 对于除 $F(x) = 0$ 外的所有 x 成立, 则 V 沿非常值相曲线严格递增.

Example 4.2 考虑平面系统, 坐标 x, y 满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + f(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + g(x, y)$$

其中 f, g 是 C^1 函数, 使得 $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ 当 $x = y = 0$ 时均取 0.

Solution 取 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 则 V 显然是正定的, 此外, 考虑极坐标, 我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla V(x, y) \cdot (-x + f(x, y), -y + g(x, y)) \\
&= -2x^2 + 2xf(x, y) - 2y^2 + 2yg(x, y) \\
&= -2r^2 + 2r\cos\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2r\sin\theta g(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -2r^2\left(1 - r^{-1}\cos\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta) - r^{-1}\sin\theta g(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)
\end{aligned}$$

由于 f, g 的偏导数均在 $x = y = 0$ 处取 0, 故存在 $\alpha > 0$, 使得当 $0 < r < \alpha$ 时, 右侧括号内的值大于 $\frac{1}{2}$. 于是存在以 0 为原点的闭球, 使得 V 在其上沿任意相曲线严格递减. 由反函数定理, 0 是孤立的平衡点, 可以通过缩小 α 不妨设 $0 < r < \alpha$ 内没有平衡点. 由4.1, $(0, 0)$ 是渐进稳定的平衡点.

Example 4.3 考虑平面系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + f(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + g(x, y)$$

f, g 是同上的 C^1 函数.

Solution 令 $V(x,y) = -x^2 + y^2$, 类似地计算得到 $V(x,y)$ 在某范围内的任意非常值相曲线上严格递增. 得到 $(0,0)$ 是不稳定的平衡点.

4.4 构造 Lyapunov 函数

Case 1: 当 A 的所有特征值有负实部时:

我们为方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ 构造正定的二次型, 使得

$$\nabla Q(x) \cdot Ax \leq -\sigma Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

对某个正常数 σ 成立.

我们将看到 $Q(x)$ 由以下给出

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z}_k$$

其中 $z_1, \cdots, z_n$ 是 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 在选取某个 $\mathbb{R}^n$ 的复向量基 $w^{(1)}, \cdots, w^{(n)}$ 下的坐标.

设 T 是（复）过渡矩阵, 使得向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 在基 $w^{(1)}, \cdots, w^{(n)}$ 下的表示为 $(z_1, \cdots, z_n) := \zeta := T^{-1}x$. 对于实向量 x, 我们有

$$Q(x) = \left|\xi^2\right| = T^{-1}x \cdot \overline{T}^{-1}x$$

从而

$$\begin{aligned}
\nabla Q(x) \cdot Ax &= T^{-1}Ax\overline{T}^{-1}x + T^{-1}x \cdot T^{-1}Ax \\
&= \left(T^{-1}AT\right)\zeta \cdot \overline{\zeta} + \zeta \cdot \left(\overline{T^{-1}AT}\right)\overline{\zeta} \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\left(T^{-1}AT\right)\zeta \cdot \overline{\zeta}\right)
\end{aligned}$$

当 A 可对角化时, 设它的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (可重复), 可以选择过渡矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 有以下对角型

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

此时有

$$\nabla Q(x) \cdot Ax = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_k)\left|z_k\right|^2$$

因此可以选择 $\sigma > 0$, 使得对于所有的特征值, $\mathrm{Re}\ \lambda_k < -\frac{1}{2}\sigma < 0$, 此时

$$\nabla Q(x) \cdot Ax \leq -\sigma \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right|^2 = -\sigma Q(x)$$

对于一般的 A, 我们将说明, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 可以选择过渡矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \mu_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中每个 u_k 要么是 ε, 要么是 0. 此时就容易看到

$$\nabla Q(x) \cdot Ax \le 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_k) |z_k|^2 + 2(n-1)\varepsilon |\zeta|^2$$

若 ε 一开始就选取的充分小, 就能找到 $\sigma > 0$, 使得

$$2 \max_{1\le k\le n} \mathrm{Re}\lambda_k + 2(n-1)\varepsilon < -\sigma < 0$$

此时就有

$$\nabla Q(x) \cdot Ax \le -\sigma Q(x)$$

为了构造这与的“几乎对角化”的形式, 从 A 的 Jordan 标准型开始, 设 T_1 是过渡矩阵, 使得

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} [J_1] & & & \\ & [J_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [J_p] \end{bmatrix}$$

然后, 考虑一个对角矩阵

$$T_2 := \mathrm{diag}\left(\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n\right)$$

计算 $T_2^{-1}\left(T_1^{-1}AT_1\right)T_2$, 单独取一个 Jordan 考虑, 不妨考虑

$$\mathrm{diag}\left(\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \cdots, \varepsilon^{-k}\right) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^k\right)$$

它等于

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

这样就得到了所需的形式.

非常美妙的是 $Q(x)$ 也是非线性方程

$$x' = Ax + g(x)$$

的一个 Lyapunov 函数, 其中 g 是 C^1 函数使得 $g(x)/|x| \to 0(x \to 0)$. 对此, 我们有

$$\nabla Q(x) \cdot (Ax + g(x)) \le -\sigma Q(x) + \nabla Q(x) \cdot g(x)$$

任意给定 $\alpha > 0$, 当 $|x|$ 充分小时, 就有

$$|\nabla Q(x) \cdot g(x)| \le |\nabla Q(x)| \, |g(x)| \le \alpha |x|^2$$

这给出

$$\nabla Q(x) \cdot (Ax + g(x)) \le -\sigma Q(x) + \alpha |x|^2$$

所以只要选取 α 使得以下成立就可以了

$$Q(x) > \frac{\alpha}{2\sigma} |x|^2, \quad x \neq 0$$

由于 $Q(x)$ 是正定二次型, 这样的 α 是可以取到的. 现在,α 决定了一个以 0 为中心的球, 在其上 $Q(x)$ 正定且沿非常值相曲线严格递增, 给出了渐进稳定性判据的另一个证明.

Case 2: A 有一个正实部的特征值.

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 有正的实部,$\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_n$ 有负的或零实部. 设

$$Q_1(x) = \sum_{k=1}^{m} |z_k|^2, \quad Q_2(x) = \sum_{k=m+1}^{n} |z_k|^2$$

其中 $(z_1, \cdots, z_n) := \zeta := T^{-1}x$ 是经一个坐标变换后的坐标. 我们希望给出形如下的 Lyapunov 函数:

$$Q(x) := Q_1(x) - Q_2(x)$$