

N° d'ordre : 1234

THÈSE

Présentée par

Christophe COSSOU

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
BORDEAUX 1**

Spécialité : Astrophysique, Plasmas, Corpuscules

Migration et accrétion d'embryons planétaires dans un disque radiatif

Soutenue le : xx XXXXXXXX xxxx

Après avis de : Mmmmmmm NNNNNNN Rapporteurs
Ooooooooo PPPPPPP

Devant la Commission d'examen formée de :

Aaaaa BBBBBBBB	Astronome, Université Paris VI, LESIA	Président du Jury
Ccccccc DDDDDDDDD	Directeur de recherche, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Eee FFFFF	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB .	Examinateur
Gggggggg HHHHHH	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Iiii JJJJJJJJJJ	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Kkkkkkkkkkk LLLLLL	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Mmmmmmm NNNNNNN	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Rapporteur
Ooooooooo PPPPPPP	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB .	Rapporteur



Thèse préparée au
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux
Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers (OASU, UMR 5804-LAB)
2, rue de l'observatoire
33 271 Floirac CEDEX

Résumé

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Mots-clefs : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

MY ENGLISH THESIS TITLE

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Keywords : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

Remerciements

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Table des matières

Introduction	10
1 Formation Planétaire	12
1.1 Formation stellaire	14
1.2 Les disques protoplanétaires	15
1.2.1 Formation et évolution	15
1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque	15
1.2.3 Profil de température	22
1.2.4 La viscosité du disque	27
1.2.5 La poussière	29
1.2.6 Opacité du disque	30
1.2.7 Profil de densité de surface	31
1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation	32
1.3 Interaction disque-planète	34
1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I	34
1.3.2 Migration des planètes massives	41
1.3.3 L’amortissement de l’excentricité	42
1.3.4 L’amortissement de l’inclinaison	42
1.3.5 L’accrétion du gaz	42
1.3.6 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	43
2 Le Code N-Corps	44
2.1 Présentation de mercury	45
2.2 Mode d’emploi du code N-corps modifié	46

2.2.1	Note technique	46
2.2.2	Paramètres divers	46
2.2.3	Densité de surface	47
2.2.4	Irradiation de l'étoile centrale	48
2.2.5	Viscosité	48
2.2.6	Opacité	49
2.2.7	Turbulence	50
2.2.8	Migration	51
2.3	Disque 1D	54
2.3.1	Profil de densité de surface	54
2.3.2	Table d'opacité	55
2.3.3	Profil de température	55
2.4	Migration type I	55
2.5	Amortissement de e et I	56
2.6	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	56
2.7	Désactivation des effets du disque	57
2.8	Validité des éléments orbitaux	57
3	Mécanismes individuels	58
3.1	Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	59
3.1.1	Définition	59
3.1.2	Résonances et excentricité	60
3.1.3	Stabilité et ordre des résonances	60
3.2	Les Zones de Convergence	60
3.2.1	Existence et intérêt	60
3.2.2	Les différents types	60
3.2.3	Diagrammes de couple a - m	60
3.2.4	Résonances et Accrétions	60
4	Mécanismes de formation	61
4.1	Décalage de la Zone de Convergence	62
4.1.1	Introduction	62
4.1.2	Méthode	63

4.1.3	Le cas de deux planètes	65
4.1.4	Effet du rapport de masse	67
4.2	Formation des super terre chaude	67
4.3	Effets des paramètres du disque	67
4.3.1	Viscosité du disque	67
4.3.2	Profil de densité de surface	67
4.3.3	Profil de température	67
4.3.4	Masse du disque	67
4.3.5	Table d'opacité	67
5	Discussion et limite du modèle	68
5.1	Étude de sensibilité	69
5.1.1	Le choix de la table d'opacité et son implémentation	69
5.1.2	Modélisation de la viscosité	69
5.2	Approximations	69
5.2.1	Profil de densité du gaz en 2D	69
5.2.2	La modélisation des bords du disque	69
5.2.3	Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes . .	69
5.2.4	Auto-gravité	69
5.3	Idées	69
5.3.1	Snow line comme source de particules	69
	Conclusion	70
A	Formulaire	71
A.1	Variables usuelles	72
A.2	Propriétés du disque	72
A.3	Propriétés des orbites képlériennes	73
	Bibliographie	74

Introduction

Oscillant en fonction de l'humeur de l'époque le débat de la vie ailleurs et de l'existence d'autres planètes a animé la communauté scientifique depuis l'antiquité. Souvent influencé par les convictions religieuses et les modèles du système solaire en vigueur, il était parfois même dangereux d'émettre l'hypothèse que d'autres planètes ou d'autres formes de vies puissent exister, l'idée de la pluralité des civilisations étant indissociable de la question de la pluralité des mondes physiques.

Ces questions que l'on pouvait considérer comme philosophiques ou métaphysiques ont changé de registre depuis la découverte, il y a une vingtaine d'années de la première exoplanète¹ [Wolszczan and Frail, 1992].

Bien que cette dernière fut découverte en 1992, c'est véritablement en 1995 avec 51 Peg b [Mayor and Queloz, 1995] que la chasse aux exoplanètes a véritablement commencé. Depuis, multipliant les campagnes d'observations, les missions dédiées et les techniques de détection, on arrive, 20 ans après la première découverte à un catalogue d'exoplanètes toujours plus fourni, montrant une population extrêmement riche et variée. Le nombre variant continuellement, il n'y a pas de sens à donner un chiffre sans la date associée mais au jour du 20 février 2013, on compte pas moins de 861 planètes confirmées.

Avant toute chose, il est important de noter le nombre. Non pas le nombre exact mais plutôt les conséquences qu'implique une liste de plusieurs centaines de planètes : Ce ne sont pas des objets rares ! Si auparavant on pouvait encore en douter, il ne fait aujourd'hui plus aucun doute que les planètes sont des objets communs. C'est d'autant plus flagrant quand on note que la grande majorité des exoplanètes détectées l'ont été autour d'étoiles à moins de 400 pc du Soleil comme illustré dans [FIGURE 1 page ci-contre].

En multipliant les méthodes de détections et les instruments, et surtout en ayant de plus en plus de planètes, il devient possible d'estimer la probabilité pour qu'une étoile héberge au moins une planète [Mayor et al., 2011]. D'autres études estiment même la sensibilité de cette fréquence d'occurrence en fonction de paramètres stellaires [Fischer and Valenti, 2005, Johnson et al., 2007, Howard et al., 2012] ou planétaires [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010].

Mais le point qui me semble le plus intéressant est la découverte de types de planètes

1. Planète orbitant autour d'une étoile autre que notre Soleil.



FIGURE 1 – Image de la voie lactée avec indication de la position approximative du système solaire ainsi que de la zone (en noir) contenant la majorité des exoplanètes détectées à ce jour.

qui n'existent pas dans le système solaire. En un mot : diversité. Que ce soient les jupiters chauds, comme 51 Peg b ou les super terres comme Gliese 1214 b, ces planètes n'ont pas d'équivalent dans le système solaire. Ces variétés de composition, de taille, de systèmes nous offrent un champ de connaissance toujours plus grand dans lequel tester nos modèles de formations planétaire. Ils nous permettent aussi de mieux comprendre notre propre système et comment il s'est formé, et surtout de le placer dans cette immense horlogerie qu'est le catalogue de systèmes exoplanétaires à notre disposition.

Formation Planétaire

Sommaire

1.1 Formation stellaire	14
1.2 Les disques protoplanétaires	15
1.2.1 Formation et évolution	15
1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque	15
Bilan de masse	17
Bilan de moment cinétique/angularaire	18
Conclusion de la partie	22
1.2.3 Profil de température	22
Refroidissement radiatif	23
Chauffage par l'enveloppe	24
Chauffage par l'étoile	24
Chauffage visqueux	25
Bilan	27
1.2.4 La viscosité du disque	27
Les disques alpha	28
Ionisation et dead-zones	28
1.2.5 La poussière	29
1.2.6 Opacité du disque	30
1.2.7 Profil de densité de surface	31
1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation	32
1.3 Interaction disque-planète	34
1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I	34
Couple du disque sur la planète	34
Couple de Lindblad	35
Couple co-orbital ou de corotation	37
Modélisation dans le code N-corps	41
1.3.2 Migration des planètes massives	41
Type II	41
Type III	42
1.3.3 L'amortissement de l'excentricité	42

1.3.4	L'amortissement de l'inclinaison	42
1.3.5	L'accrétion du gaz	42
1.3.6	Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	43

1.1 Formation stellaire

Les étoiles se forment à partir de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz. Quand ce dernier est suffisamment massif (masse au delà d'une masse critique dite masse de Jeans, de l'ordre de quelques masses solaires, même si ça dépend de la configuration, du volume etc...), son autogravité initie un effondrement du nuage sur lui même, qui peu à peu se fragmente en système découplés.

Au centre de chaque fragment se forme un cœur pré-stellaire à mesure que la température et la pression augmente, jusqu'à atteindre les conditions nécessaires à l'allumage de la fusion de l'hydrogène. On obtient alors une proto-étoile appelée « classe 0 ».

Durant l'effondrement du nuage, la conservation du moment angulaire empêche la contraction du nuage, en particulier dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation du nuage. Ceci ajouté à la pression de radiation, apparue depuis la formation de la proto-étoile conduit à la formation d'un tore autour de l'étoile centrale en quelques dizaines de milliers d'années. Ce stade est appelé « classe I ».

Le tore de gaz est chaud et par conséquence enflé, principalement à cause de l'énergie gravitationnelle résiduelle, mais aussi par le chauffage de la proto-étoile centrale. En quelques centaines de milliers d'années, ce tore devient un disque, à mesure que le rayonnement de corps noir évacue l'énergie par la surface. À mesure que le tore refroidit, et compte tenu de la conservation du moment angulaire qui empêche une contraction rapide dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, il s'aplatit jusqu'à former un disque.

Un million d'années environ après la formation de la proto-étoile, le disque mince est formé et la proto-étoile est devenu une étoile T-Tauri (objet de classe II). Après quelques millions d'années (typiquement 10 millions d'années), le disque se dissipe et on est dans le cas d'étoiles T-Tauri évoluées ou objets de classe III.

Ces dénominations en classe peuvent sembler étrange mais elles proviennent en premier lieu de l'étude des spectres d'étoiles jeunes qui présentent différentes caractéristiques en fonction du stade d'évolution de l'étoile. [FIGURE 1.1] résume la formation stellaire, les différentes phases et en particulier les caractéristiques du spectre d'émission de ces objets.

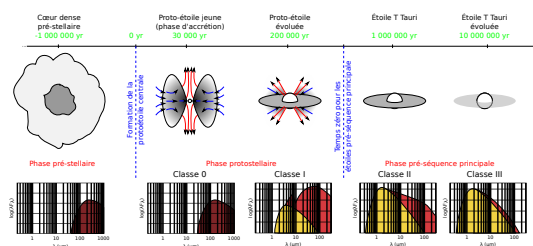


FIGURE 1.1 – Classification empirique des différents stades de formation des étoiles de faible masse, du cœur dense pré-stellaire à la classe III. Schéma basé sur [André, 2002].

1.2 Les disques protoplanétaires

1.2.1 Formation et évolution

Durant les différentes phases de formation de l'étoile, alors même que le disque de gaz et de poussière se dissipe à lieu la formation des planètes.

À mesure que le nuage s'effondre sur lui-même, et afin de satisfaire à la conservation du moment angulaire, ce dernier voit sa rotation accélérer, même si la rotation du nuage moléculaire était infime au départ. C'est ainsi que le disque d'accrétion, résultat de l'effondrement du nuage de gaz, est en rotation. L'effondrement d'un nuage moléculaire s'effectuant sur plusieurs ordres de grandeurs (en distance), l'accélération de la rotation est d'autant plus grande.

Initialement, il est hautement improbable que le moment angulaire du nuage soit parfaitement nul. C'est ainsi que même si sa rotation est imperceptible lors des premiers stades de son effondrement gravitationnel, le disque d'accrétion fini toujours en rotation.

1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque

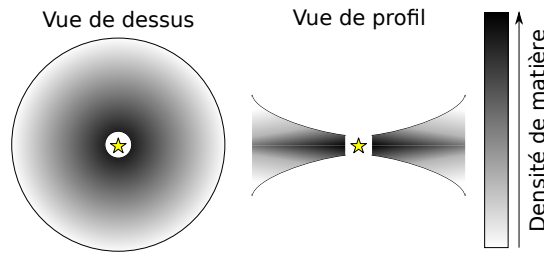


FIGURE 1.2 – Représentation de la répartition radiale et azimutale de gaz dans un disque protoplanétaire.

Avant de considérer l'évolution d'un disque, il est important de regarder sa masse par rapport à la masse de l'étoile centrale. En effet, si la masse du disque est de l'ordre de la masse de l'étoile, alors des instabilités se développent et on ne peut plus négliger l'autogravité du disque.

Le *paramètre de Toomre* Q , défini par :

$$Q = \frac{\kappa c_s^2}{\pi G \Sigma} \quad (1.1)$$

est un indicateur de la stabilité du disque par rapport à l'autogravité.

La densité de surface Σ mesure l'importance de l'*auto-gravité*. La vitesse du son c_s est liée à la pression thermique ; la *fréquence épicyclique* κ détermine quant à elle la force du cisaillement dans le disque.

Si $Q < 1$ alors le gaz est instable gravitationnellement et il commence à s'effondrer sur lui-même et former des « tas » de matière. Si $Q > 1$, le disque est stable.

Nous ne considérerons que des disques dont la masse M_d est faible devant la masse de l'étoile M_\star :

$$\frac{M_d}{M_\star} \lesssim 0.1 \quad (1.2)$$

Si tel n'était pas le cas, le temps pour que le disque perde suffisamment de masse pour se retrouver dans le cas qui nous intéresse sera court devant la vie du disque et le temps de formation planétaire. Étant donné qu'on ne s'intéresse qu'aux derniers stades de la formation planétaire, à savoir quand les embryons planétaires ont une masse de l'ordre du dixième de masse terrestre au minimum, il est raisonnable de penser que le disque sera dans un stade peu dense où l'approximation $Q > 1$ sera valable.

Dans un tel cas, c'est le potentiel gravitationnel de l'étoile qui domine la dynamique du gaz. En négligeant l'effet de la pression de ce dernier, on peut donc écrire la vitesse angulaire du gaz comme étant égale à la vitesse angulaire képlerienne :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\star}{r^3}} \quad (1.3)$$

où G est la constante de gravitation, et r la distance à l'étoile. Dans la pratique, il est à noter que la vitesse est légèrement sous-képlerienne.

À l'instar des planètes du système solaire qui orbitent autour du Soleil d'autant plus vite qu'elle sont proche de ce dernier, les éléments fluides du disques de gaz vont orbiter beaucoup plus vite au bord interne qu'ils ne le font au bord externe. Il existe donc une force de cisaillement entre deux anneaux de gaz concentriques, dûs à leur différence de vitesse. Cette différence de vitesse génère des frottements à cause de la viscosité du disque ν (dont nous parlerons plus en détail plus loin [§ 1.2.4 page 27]) qui chauffe le gaz en lui faisant perdre de l'énergie. En conséquence, une partie de l'énergie gravitationnelle du gaz est convertie en chaleur, qui est ensuite évacuée par le rayonnement de corps noir du gaz.

La première conséquence est qu'un terme visqueux va apparaître dans l'équation de l'énergie, comme nous le verrons par la suite.

La deuxième conséquence, c'est que le gaz perds de l'énergie, et donc dérive lentement vers l'étoile centrale qui accrete petit à petit le gaz du disque.

On définit donc une vitesse de dérive négative $\vec{v}_d = v_r \hat{e}_r$, orientée vers l'étoile, qui entraine petit à petit le gaz du disque (avec v_r négatif).

Dans la suite de la section, nous allons nous intéresser à la conservation de différentes quantités, que ce soit la masse ou le moment angulaire. Pour cela nous allons définir un anneau de référence, portion du disque sur laquelle nous allons faire le bilan. Le but est ici de présenter d'où viennent les équations et plus précisément d'où viennent les termes des équations.

Afin de décrire l'évolution hydrodynamique du disque de gaz, nous allons utiliser successivement la **conservation de la masse**, et la **conservation du moment angulaire**. Les démonstrations qui vont suivre ont été déjà faites de nombreuses fois,

notamment par [Pringle, 1981]. L'intérêt ici n'est pas de réinventer la roue, mais de montrer un calcul encore plus détaillé, montrant en particulier les approximations faites, ces calculs étaient loin d'être évident pour moi quand je les ai découverts et je n'ai trouvé nulle part une démonstration détaillée.

Bilan de masse

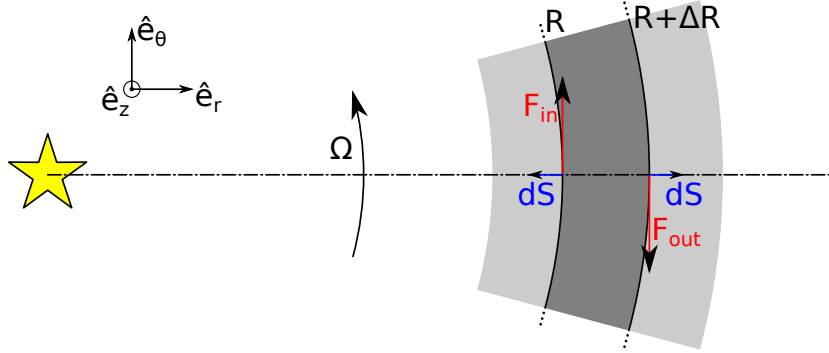


FIGURE 1.3 – Représentation d'un anneau de largeur Δr et du bilan de moment angulaire de ce dernier.

On cherche dans un premier temps à faire le bilan de masse de l'anneau considéré. Sa masse s'écrit :

$$m_a = 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \quad (1.4)$$

Soit $v_r \hat{e}_r$ la vitesse radiale du gaz (avec $v_r < 0$ dans notre cas). Cette vitesse est responsable d'un certain taux d'accrétion du gaz du disque sur l'étoile centrale. On cherche maintenant à modéliser cette accrétion pour le bilan de moment cinétique sur l'anneau.

Pour cela, on cherche à exprimer la variation de masse de l'anneau, ainsi que le moment cinétique emporté par cette variation de masse.

Au bord interne R , par unité de temps, la masse entrant ou sortant de l'anneau peut-être exprimée comme un flux :

$$dF_M = \Sigma \cdot 2\pi r \cdot \left(-\vec{v}_r \cdot d\vec{S} \right) \quad (1.5)$$

En effet, en multipliant la circonférence de l'anneau par la vitesse, on obtient une sorte de surface par unité de temps qui représente ce qui sort de la frontière virtuelle représentée par l'anneau en $r = R$.

On note aussi qu'on effectue le produit scalaire entre $d\vec{S}$, le vecteur élément de surface, orienté vers l'extérieur de l'anneau et la vitesse. Un signe moins est appliqué, car si le vecteur vitesse et l'élément de surface sont colinéaires, alors la masse sort de l'anneau, c'est donc un flux négatif.

On a ainsi aux deux bords de l'anneau :

$$dF_M(R) = \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) \quad (1.6a)$$

$$dF_M(R + \Delta R) = -2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R) \quad (1.6b)$$

v_r étant négatif, on a bien une perte de masse en $r = R$ et un gain de masse en $r = R + \Delta R$.

La conservation de la masse implique alors que la dérivée temporelle de la masse de l'anneau est égale au flux de masse à travers sa surface. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma(R)) &= dF_M(R) + dF_M(R + \Delta R) \\ \frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma(R)) &= \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) - 2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R)\end{aligned}$$

R et ΔR sont des variables indépendantes du temps. On peut donc les sortir de la dérivée partielle en fonction du temps.

En faisant passer le terme ΔR dans le second membre de l'équation, on fait apparaître des termes de la forme

$$\frac{U(R + \Delta R) - U(R)}{\Delta R}$$

En faisant tendre l'épaisseur ΔR de l'anneau vers 0, on fait ainsi apparaître une forme différentielle :

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{U(R + \Delta R) - U(R)}{\Delta R} = \frac{\partial U}{\partial r}(R)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (R v_r \Sigma) = 0 \quad (1.7)$$

Bilan de moment cinétique/angularaire

On cherche maintenant à faire le bilan de moment cinétique de ce même anneau. Son moment cinétique est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{J}_a &= \vec{R} \wedge (m_a \overrightarrow{v(R)}) \\ &= m_a \cdot R \cdot R \Omega(R) \\ &= 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \cdot R \cdot R \Omega(R) \\ \vec{J}_a &= 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R)\end{aligned} \quad (1.8)$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment ([1.6 page](#)

précédente) :

$$\begin{aligned} dJ(R) &= \vec{r} \wedge (dF_M(R) \vec{v}(R)) \\ &= dF_M(R) \cdot R^2 \Omega(R) \hat{e}_z \\ dJ(R) &= 2\pi v_r(R) \Sigma(R) \cdot R^3 \Omega(R) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.9a)$$

$$\begin{aligned} dJ(R + \Delta R) &= \vec{r} \wedge (dM(R + \Delta R) \vec{v}(R + \Delta R)) \\ &= dF_M(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^2 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \\ dJ(R + \Delta R) &= 2\pi v_r(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^3 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.9b)$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

Le taux de cisaillement A est donné par :

$$A = r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.10)$$

et est une illustration de la viscosité d'un fluide. Plus le fluide est visqueux, et moins le cisaillement est important. C'est à dire que plus un fluide est visqueux, et plus son comportement se rapproche de celui d'un solide. En conséquence, par frottement, les éléments fluides sont agglomérés, et le gradient de vitesse est très faible, le cisaillement l'est aussi par extension.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$dF_{\text{vis}} = \nu \Sigma A = \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.11)$$

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi R \times dF_{\text{vis}}(R) \\ \vec{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi \nu \Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dr}(R) \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi(R + \Delta R) \times dF_{\text{vis}}(R + \Delta R) \\ \vec{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi \nu \Sigma(R + \Delta R)^2 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) \cdot \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.12b)$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation \hat{e}_θ . À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence

s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\text{in}} &= R\hat{e}_r \wedge \vec{F}_{\text{in}} \\ \vec{\Gamma}_{\text{in}} &= 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{1.13a}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\text{out}} &= (R + \Delta R)\hat{e}_r \wedge \vec{F}_{\text{out}} \\ \vec{\Gamma}_{\text{out}} &= 2\pi\nu\Sigma(R + \Delta R)^3 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{1.13b}$$

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{dJ_a}{dt} = dJ(R + \Delta R) + dJ(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}}\tag{1.14}$$

En utilisant (1.8 page 18), (1.9 page précédente), (1.13), dans (1.14)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R)) &= - (R + \Delta R)^3 v_R(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \Omega(R + \Delta R) \\ &\quad + R^3 v_R(R) \Sigma(R) \Omega(R) + \left[\nu(R + \Delta R)^3 \Sigma(R + \Delta R) \right. \\ &\quad \left. \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) - \nu \Sigma(R) R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R) \right]\end{aligned}$$

On fait tendre ΔR vers 0, et de manière similaire au bilan de masse obtenu précédemment, il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 \Sigma \Omega) = - \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t sont des variables indépendantes, on peut donc sortir R de la dérivée partielle temporelle afin de faire apparaître une forme qui fait penser à une équation de continuité.

$$R \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \Sigma \Omega) = - \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t étant des variables indépendantes, on peut écrire :

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)\tag{1.15}$$

On suppose que $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ vu que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps (on ne considère pas une masse variable de l'étoile due à l'accrétion), et sachant que R ne dépend pas explicitement de t , en utilisant la formule :

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \cdot R^2 \Omega) = (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial R^2 \Omega}{\partial t} \quad (1.16)$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma \cdot R^2 \Omega) \\ &= (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) \end{aligned} \quad (1.17)$$

En utilisant (1.16) et (1.17) dans (1.15 page ci-contre), on fait alors apparaître (1.7 page 18), ce qui donne :

$$\begin{aligned} R (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ (R^2 \Omega) \left[R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) \right] + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

On injecte alors (1.18) dans (1.7 page 18) afin de supprimer v_r de l'expression et obtenir finalement :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \right]$$

On décale le signe moins au niveau de la dérivée de la vitesse angulaire, cette dernière étant généralement négative, ça permet d'avoir un terme positif :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(-\frac{d\Omega}{dr} \right) \right] \right\} \quad (1.19)$$

On fait maintenant l'approximation que le mouvement est képlérien, avec pour première conséquence que $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$. On peut alors simplifier l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r^5}} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \sqrt{\frac{r}{GM}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma \frac{3}{2} \sqrt{GM} r^{1/2} \right] \right\}\end{aligned}$$

Conclusion de la partie

On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^{1/2} \right) \right] \quad (1.20)$$

Cette équation a nécessité les approximations suivantes :

1. On suppose que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps ($\frac{d\Omega}{dt} = 0$), c'est à dire que la masse de l'étoile est constante, l'accrétion ayant un effet négligeable.
2. On suppose que le mouvement du gaz est képlérien $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, la pression du gaz rendant le mouvement légèrement sous-képlérien.

1.2.3 Profil de température

Du point de vue de la température, il y a principalement deux types de disques :

- les *disques actifs* : la source de température est le disque lui même, qui par *chauffage visqueux* (frottements) va convertir de l'énergie gravitationnelle en chaleur ;
- les *disques passifs* : la source de chaleur/température est l'étoile centrale qui éclaire le disque.

Un disque peut à la fois être actif et passif, mais généralement on essaie d'approximer, de considérer que l'un est négligeable devant l'autre. De plus, un disque aura des zones actives et des zones passives, c'est à dire que certaines zones seront principalement chauffées par la viscosité alors que d'autres le seront par l'*irradiation de l'étoile*.

Afin de déterminer le profil de température, il faut écrire l'équation de conservation de l'énergie, qui va tenir compte de tous les termes source et toutes les pertes, par unité de surface.

On a tout d'abord les pertes par rayonnement de corps noir. Ensuite, il y a les termes sources, qui peuvent dépendre en fonction de la physique que l'on considère. Pour notre cas, il y a un terme dû à l'enveloppe du disque, un dû à l'irradiation de l'étoile centrale, et enfin un dernier dû au chauffage visqueux.

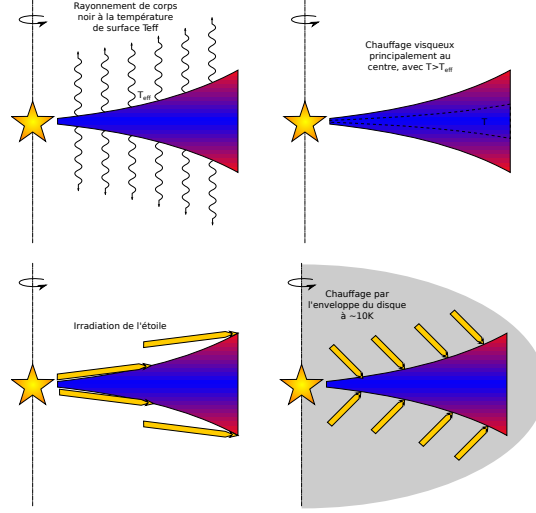


FIGURE 1.4 – Représentation du bilan thermique d'un disque

Refroidissement radiatif

Par toute la surface du disque, qui est à une température T_{eff} en surface, on a des pertes par rayonnement de corps noir :

$$P_{\text{cn}} = -2\sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.21)$$

où σ est la constante de Stephan. Ces dernières doivent être multiplié par deux, en effet, il y a des pertes par rayonnements des deux cotés du disque à une position donnée.

T_{eff} est une estimation de la température effective du disque à sa surface [Hubeny \[1990\]](#) :

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{T^4}{\tau_{\text{eff}}} \quad (1.22a)$$

avec

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau} \quad (1.22b)$$

où τ est la profondeur optique verticale moyenne.

Cette température effective est le résultat d'un transfert de rayonnement depuis le cœur du disque, à une température T qui se refroidit, et chauffe les différentes couches successives jusqu'à atteindre le bord du disque. Il résulte alors une température T_{eff} plus faible que la température dans le plan du disque.

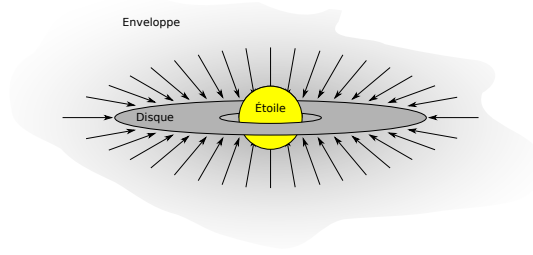


FIGURE 1.5 – Représentation de l’effondrement d’un nuage moléculaire et des différentes parties qui composent le système en effondrement.

Chauffage par l’enveloppe

L’enveloppe [FIGURE 1.5] provient de l’effondrement continu du nuage moléculaire. C’est un reste diffus qui alimente continuellement le disque en matière. Mais cette enveloppe, qui possède une température que l’on fixe ici à $T_{\text{en}} = 10 \text{ K}$ contribue aussi au bilan d’énergie du disque en apportant la contribution uniforme suivante :

$$C_{\text{en}} = 2\sigma T_{\text{en}}^4 \quad (1.23)$$

Remarque : La température de l’enveloppe étant très faible, cette dernière ne contribue que dans les parties externes du disque, là où la densité de surface du gaz est très faible, rendant du même coup le chauffage visqueux extrêmement ténu lui aussi.

Chauffage par l’étoile

La surface du disque reçoit de la lumière de l’étoile centrale. Soit R_* , L_* respectivement le rayon et la luminosité de l’étoile. Soit ε l’albédo du disque, que l’on choisis typiquement égal à 0.5.

Le flux incident est alors [Menou and Goodman, 2004, eq. (7)] :

$$F_{\text{irr}} = \frac{L_*(1 - \varepsilon)}{4\pi r^2} \alpha \quad (1.24)$$

où α (avec $\alpha \ll 1$ représente l’angle entre les rayons incidents et la surface du disque.

D’après notamment [Chiang and Goldreich, 1997, eq. (5)], cet angle peut être écrit comme :

$$\alpha = 0.4 \frac{R_*}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \quad (1.25)$$

On note que dans cette expression, le premier terme illustre le fait que l’étoile n’est pas ponctuelle, et que ceci a un effet sur l’irradiation dès que l’on s’approche de cette dernière. Le deuxième terme représente la surface du disque qui intercepte le rayonnement incident, et qui est fonction de la variation d’échelle de hauteur du disque (plus le disque est évasé, et plus la paroi qui intercepte le rayonnement est abrupte).

Il vient enfin, en exprimant la luminosité de l'étoile en fonction de sa température et de son rayon, l'expression suivante :

$$C_{\text{irr}} = 2\sigma T_{\star}^4 \frac{R_{\star}^2}{r^2} (1 - \varepsilon) * \left[0.4 \frac{R_{\star}}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \right] \quad (1.26)$$

Remarque : Il faut cependant noter qu'une approximation implicite à été faite, c'est de dire que $h_p \sim h$, où h_p est la position verticale dans le disque où les photons stellaires sont absorbés. En effet, l'absorption des photons ne dépend pas simplement de la densité mais aussi de l'opacité du disque aux photons stellaires, qui dépend de la composition du disque.

Dans le cadre d'un disque optiquement épais, il devient possible de considérer $h_p \sim h$

Chauffage visqueux

On considère un fluide incompressible. Il peut paraître étonnant de considérer un disque de gaz comme étant un fluide incompressible. Mais en fait l'aspect compressible va surtout se manifester lors de la mise à l'équilibre, générant des ondes de chocs par exemple. Mais une fois le disque stabilisé tout se passe comme si on avait un fluide incompressible. C'est matérialisé par le fait que la vitesse dans le disque est considérée comme inférieure à la vitesse du son dans le milieu c_s , au delà de laquelle on aura des ondes des chocs ayant une incidence sur le bilan thermique. Ainsi donc, en considérant un fluide incompressible, on peut partir de l'expression de la variation d'énergie cinétique (qui est l'inverse du chauffage, les pertes cinétiques étant converties en chaleur par la viscosité) [Landau and Lifschitz, 1989, (16.3)] :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \\ T_{ik} &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $\eta = \rho\nu$ est la viscosité dynamique¹

À partir de [Landau and Lifschitz, 1989, (15.8) et (15.17)], on extrait de manière assez directe l'expression du tenseur T_{ik} en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, & T_{r\varphi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ T_{\varphi\varphi} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & T_{\varphi z} &= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ T_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}, & T_{rz} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

sachant que le tenseur est symétrique en statique, ce qui donne :

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{r\varphi} & T_{rr} & T_{\varphi z} \\ T_{rz} & T_{\varphi z} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

1. ν étant la viscosité cinématique et ρ la densité volumique de gaz.

À partir de ces expressions, nous allons procéder à quelques simplifications, moyennant quelques approximations :

- On considère tout d’abord que $v_z = 0$ en invoquant le fait que le disque est à l’équilibre hydrostatique verticalement.
- Ensuite, on néglige tous les termes en $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ car le disque est axisymétrique.
- On néglige enfin tous les termes en v_r devant les termes en v_φ étant donné que la vitesse de dérive (liée à l’accrétion) est beaucoup plus petite que la vitesse de rotation due au mouvement képlerien. En effet, la vitesse de dérive est une conséquence des pertes d’énergie par frottement visqueux entre deux anneaux due à la différence de vitesse de leur mouvement képlerien.

Seul le terme $T_{r\varphi}$ reste :

$$T_{r\varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}$$

avec $v_\varphi = r\Omega$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\Omega} + r \frac{d\Omega}{dr} - \cancel{\frac{r\Omega}{r}} \\ T_{r\varphi} &= r \frac{d\Omega}{dr} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \eta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2 dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{r\varphi}^2 + T_{\varphi r}^2) dV \end{aligned}$$

Le tenseur est symétrique, on a donc $T_{r\varphi} = T_{\varphi r}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \eta (2T_{r\varphi}^2) dV \\ &= - \iint \rho \nu \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2 dS dz \end{aligned}$$

En utilisant une vitesse angulaire képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ on obtient alors :

$$\begin{aligned} &= - \int \Sigma \nu \left(-\frac{3}{2} \Omega \right)^2 dS \\ \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{9}{4} \int \Sigma \nu \Omega^2 dS \end{aligned}$$

La variation d’énergie cinétique est négative, cette perte est convertie en chaleur par chauffage visqueux. Le chauffage visqueux intégré sur toute la surface du disque peut ainsi être défini comme :

$$C_{\text{vis/tot}} = - \frac{dE_c}{dt}$$

de sorte qu'on peut écrire le chauffage visqueux par unité de surface comme étant égal à :

$$C_{\text{vis}} = \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega^2 \quad (1.31)$$

Bilan

On cherche maintenant la température d'équilibre du disque, compte tenu de tous les termes rentrant dans l'équation bilan de l'énergie du disque. Il vient alors, en considérant le chauffage visqueux, l'irradiation de l'étoile centrale, le chauffage par l'enveloppe et les pertes par radiation à la surface du disque :

$$0 = P_{\text{cn}} + C_{\text{en}} + C_{\text{irr}} + C_{\text{vis}}$$

$$0 = -2\sigma \frac{T^4}{\frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau}} + 2\sigma T_{\text{en}}^4 + 2\sigma T_{\star}^4 \frac{R_{\star}^2}{r^2} (1 - \varepsilon) * \left[0.4 \frac{R_{\star}}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \right] + \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega^2 \quad (1.32)$$

Dans la pratique, c'est une équation de l'on résout de manière numérique, par itération. En effet, beaucoup de paramètres dépendent de la température, alors même que c'est la variable que l'on recherche.

Ce calcul est lui même extrêmement dépendant de la définition que l'on choisi pour l'opacité κ et de la dépendance de cette dernière en fonction de la température, la densité ou la pression.

1.2.4 La viscosité du disque

Quand on parle de viscosité ν dans un disque, ce n'est pas la viscosité moléculaire classique, bien trop faible aux densités rencontrées. On suppose généralement une viscosité due aux turbulences qui est beaucoup plus importante que la viscosité moléculaire, mais qui peut être traitée par les mêmes équations.

Ceci implique par contre qu'il y ait de l'ionisation. En effet, sans ionisation, il n'y a pas de couplage entre le champ magnétique et la matière, et donc pas de turbulence induite par ce même champ.

Dans la pratique, il est rare que la viscosité soit calculée de manière cohérente, ce qui serait beaucoup trop couteux en calculs, sans apporter forcément beaucoup plus de précisions étant donné les nombreuses incertitudes sur la poussière, le couplage et le champ magnétique.

La première hypothèse est de considérer une viscosité constante. Ce n'est certainement pas satisfaisant, sûrement éloigné de la vérité, mais on n'a ainsi qu'un seul paramètre et on n'ajoute pas de surcouche de complexité apportant son lot supplémentaire d'incertitude. Reste qu'une viscosité constante dans un disque très étendu, par exemple allant de 0.1 AU à 100 AU n'est certainement pas cohérent avec la physique du disque.

Un autre modèle très répandu pour la viscosité du disque est la prescription α .

Les disques alpha

On peut introduire un paramètre adimensionné α [Shakura and Sunyaev, 1973]. Dans ce formalisme, plusieurs hypothèses sont faites :

- On considère que les turbulences sont sub-soniques.
- L'échelle des tourbillons des turbulences est plus petite que l'échelle de hauteur du disque

Le mécanisme qui a le plus de chance d'être à l'origine de la viscosité alpha est l'*Instabilité Magnéto-Rotationnelle* (MRI).

En conséquence, on peut définir la viscosité ν associée aux turbulences comme étant

$$\nu = \alpha c_s H \quad (1.33)$$

où c_s est la vitesse du son et H l'échelle de hauteur du disque. α (avec $\alpha \ll 1$) est alors un paramètre adimensionné qui permet de définir plus ou moins l'intensité des turbulences, et donc la viscosité qui leur est associée. Une valeur typique d' α se situe entre 10^{-2} et 10^{-4} .

Ce modèle permet de définir une viscosité non constante dans le disque de gaz ce qui semble déjà plus cohérent avec un disque de gaz étendu ($[0.1 - 100]$ AU par exemple).

Pourtant, le modèle α n'est pas forcément la panacée en comparaison du modèle à viscosité constante. En effet, la complexité est ici masquée dans la valeur qu'il faut attribuer au paramètre α . D'une part il est difficile d'estimer la valeur du paramètre α mais en plus il n'y a aucune raison physique qui permet de justifier qu' α soit constant dans tout le disque (approximation généralement sous-jacente au choix de la prescription α pour la viscosité).

Ceci justifie donc que l'on mette ces deux modèles en concurrence, sans placer le modèle α au dessus du modèle à viscosité constante. Les incertitudes étant tellement grandes dans les deux cas, il est justifié d'explorer ces deux modèles et de les comparer quand cela nous est donné de le faire.

Ionisation et dead-zones

Pour qu'une instabilité magnéto rotationnelle ait lieu, c'est à dire qu'il y ait un couplage entre le champ magnétique et les mouvements du disque, il faut qu'une partie au moins du disque soit ionisé. Dans ces régions ionisées, on pourra alors avoir transport du moment angulaire via la viscosité due au champ magnétique (et turbulences engendrées).

Or, comment ioniser ? Que ce soit le rayonnement X de l'étoile centrale, des rayons cosmiques ou l'ionisation thermique, il n'est pas si évident que ça de se représenter l'ionisation totale du disque de gaz. Il est donc probable que certaines zones du disques ne soient pas ionisés, et donc que le transport du moment angulaire s'y fasse peu ou pas du tout. Ces zones, appelées , sont donc des zones sans viscosité magnétique.

On voit donc que les modèles de viscosité constante ou alpha sont incapables de rendre compte de la présence de ces zones de manière intrinsèque. Il est possible de

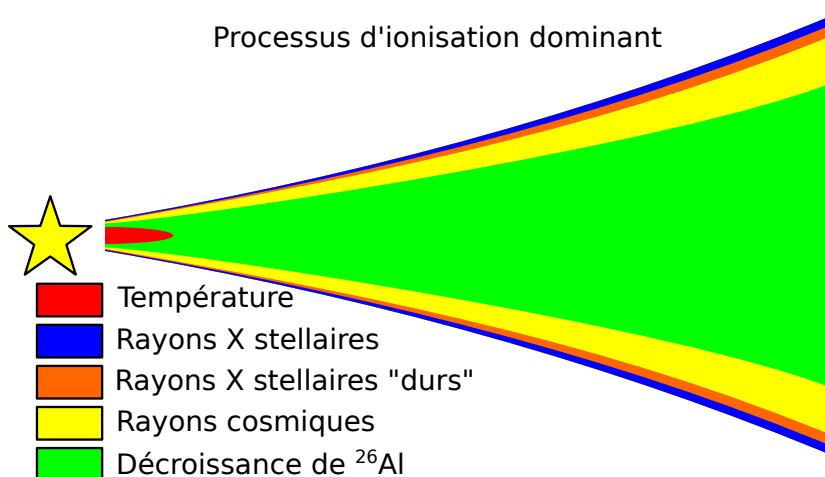


FIGURE 1.6 – Représentation des différentes zones d'un disque en fonction du mécanisme principal d'ionisation. La nature du mode d'ionisation n'indique pas le taux d'ionisation pour autant. Et ce dernier va donc fluctuer dans le disque. Les zones où l'ionisation est très faible, appelées « dead-zones » sont des positions où on pense que la viscosité turbulente est extrêmement faible.

modifier artificiellement les profils de viscosité pour faire apparaître de telles zones mais ça reste ad-hoc. Dans la suite, je n'ai pas modélisé de dead-zone même s'il est probable qu'elles aient un effet sur la migration, le modèle sans dead-zone n'est encore pas suffisamment bien compris pour que le rajout de ces zones sans ionisations soit pertinent.

1.2.5 La poussière

Le disque protoplanétaire est principalement composé de gaz, hydrogène et hélium en majorité. Pourtant, même si la poussière ne représente qu'environ 1% de la masse du disque elle joue un rôle au moins aussi important que le gaz lui-même.

À cause de la pression quasi inexistante dans le disque en raison des faibles densités, solide et gaz sont les seules phases existantes, il n'y a pas de liquides dans l'espace. La poussière représente la matière solide du disque, en grain plus ou moins fin, allant du nanomètre, micromètre, jusqu'à des tailles planétaires en fin de formation.

Cette poussière est un composé extrêmement complexe à manipuler. Elle contient différents composés solides en fonction de la température (à certaines températures et densité des composés se volatilisent et d'autres non). La ligne des glaces est une ligne imaginaire au delà de laquelle de la glace d'eau apparaît, augmentant de manière drastique la quantité de poussière dans le disque.

De plus, la poussière est aussi responsable de l'opacité du disque, c'est à dire sa capacité à laisser passer ou non la lumière. À travers l'opacité, la poussière a donc une influence sur la température du disque qui se refroidit plus ou moins efficacement, et qui absorbe le rayonnement stellaire plus ou moins efficacement.

1.2.6 Opacité du disque

Un paramètre crucial des modèles de disques protoplanétaires est l'opacité du disque qui représente l'absorption du rayonnement incident par une cellule de gaz. Cette dernière dépend principalement de la composition chimique de la poussière sauf quand la température devient suffisamment importante pour que la totalité de la poussière se sublime, généralement au delà de 1500 K, l'opacité étant alors régie par les molécules du gaz.

En fonction de la température et de la pression, différentes espèces se condensent ou se subliment, modifiant les propriétés de la poussière (notamment la quantité de poussière disponible) et donc l'opacité.

L'opacité dépend de plus de la longueur d'onde, les raies d'absorptions n'étant pas uniformément réparties sur toute la gamme de longueur d'onde. Ce dernier paramètre est généralement intégré dans des modèles d'opacité. Citons notamment les opacités moyennes de Plank et de Rosseland, principales opacités utilisés dans les disques. Ce sont des quantités moyennées sur tout un spectre, rendant les opacités indépendantes de la longueur d'onde.

Dans le cas de l'opacité de la moyenne de Rosseland, on fait l'approximation que le disque est optiquement épais, de sorte qu'on peut négliger le flux total pour se concentrer uniquement sur la dérivée du flux. C'est à dire, en d'autres termes, que seul le flux provenant du gaz environnant arrive jusqu'à la zone considérée, le reste étant absorbé. Dû au coté optiquement épais du disque, on perd l'information sur le flux total, ce qui simplifie les calculs. L'opacité moyenne de Rosseland $\langle \kappa_R \rangle$ est alors définie comme :

$$\frac{1}{\langle \kappa_R \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \int_0^\infty \frac{\frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\kappa_\nu} d\nu \quad (1.34)$$

où B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

À l'inverse, les opacités de Planck concernent les disques optiquement mince, où on ne peut plus considérer uniquement la dérivée du flux. La moyenne est alors effectuée sur l'intensité spécifique directement :

$$\frac{1}{\langle \kappa_P \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty B_\nu d\nu} \int_0^\infty \frac{B_\nu}{\kappa_\nu} d\nu \quad (1.35)$$

où $\int_0^\infty B_\nu d\nu$ représente l'intensité totale, tandis que B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

Dans la pratique, on fait bien souvent l'approximation que le disque est optiquement épais, ce qui est généralement vrai dans les parties internes du disque (0.1 – 15 AU), lieu de formation des planètes. Pour autant, le calcul des opacités est loin d'être trivial et plusieurs modèles proposent des tables d'opacités dont le détail des propriétés est différent. Le choix du modèle a donc des implications importantes sur le modèle de formation planétaire comme je le détaillerai dans la section [§ ?? page ??].

En formation planétaire, le modèle le plus utilisé est [Bell and Lin, 1994]. Mais dans mes études, j'ai utilisé en tout et pour tout 4 modèles différents [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]. À noter que [Bell and Lin, 1994,

[Zhu et al., 2009] sont des modèles qui proposent différentes fonctions analytiques pour définir une opacité par morceaux. [Chambers, 2009] propose un modèle très simple à opacité constante $\kappa = 3$ tant que la température est inférieure à 1380 K, puis une simple loi de puissance, fonction uniquement de la température au delà. Enfin, le modèle dans [Huré, 2000] ne définit pas de fonctions par morceaux mais utilise simplement une table d'opacité fonction de la température et de la densité. L'avantage de ce type de méthode est qu'on ne rajoute pas d'incertitudes par des fits en loi de puissance, c'est donc principalement pour ça que j'ai choisi cette table d'opacité pour mon modèle standard.

1.2.7 Profil de densité de surface

Un point crucial dans la modélisation physique d'un disque protoplanétaire est son profil de densité de surface Σ . Ça signifie d'une part qu'on fait l'approximation d'un disque mince, et que toutes les quantités qu'on considère par la suite sont moyennées selon la direction verticale z .

Que l'on fasse évoluer la densité de surface ou non, on doit choisir un profil initial. Ce profil est généralement sous forme d'une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\alpha} \quad (1.36)$$

Un profil largement utilisé est celui de la Masse Minimale de la Nébuleuse Solaire² [Hayashi, 1981]. Dans cet article, le profil de densité est calculé à partir de la masse des planètes. La quantité de solide contenu dans les planètes est répartie dans des anneaux en lieu et place des planètes, puis à partir d'un rapport gaz sur poussière, le profil de densité de surface du gaz est calculé, puis approximé par une loi de puissance, ce qui donne :

$$\Sigma(R) = 1700 \left(\frac{R}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} \text{ g/cm}^2 \quad (1.37)$$

La première chose, c'est que c'est une masse minimale, c'est à dire qu'on suppose que toute la masse de poussière présente dans le disque de gaz se retrouve dans la masse finale des planètes, ce qui est hautement improbable, que ce soit à cause notamment de l'accrétion sur l'étoile ou de la disparition d'embryons de planètes soit en tombant dans l'étoile, soit par éjection du système.

Ce profil est malgré tout une base de travail, vu qu'il est extrêmement difficile de déduire ces informations des observations des disques. Malgré tout, les études semblent montrer que l'on s'attend à un profil moins abrupt que $\Sigma \propto r^{-3/2}$, plus proche de $\Sigma \propto r^{-1}$ [Bell et al., 1997].

Mais on voit quand même que l'on a une grande liberté sur la densité de surface du disque, à la fois parce qu'on sait à ce jour peu de choses à ce sujet, mais aussi et surtout parce qu'au cours de son évolution, le disque de gaz va voir sa densité de surface varier énormément. En variant le profil, on étudie donc aussi différentes étapes de formation d'un même disque.

2. MMSN : Minimum Mass Solar Nebulae

Le profil de densité de surface, que ce soit au travers de Σ_0 ou de l'indice α de la loi de puissance a une grande influence sur les autres paramètres du disque, notamment le profil de température, au travers du chauffage visqueux notamment.

Il est aussi crucial de garder à l'esprit que la loi de puissance n'est qu'un modèle, issu notamment des observations qui sondent les parties externes des disques, au delà de plusieurs dizaines d'unités astronomiques. Extrapoler ces lois de puissances jusqu'aux parties les plus internes est une très grande approximation qui a des conséquences importantes pour les planètes, dont le lieu de formation se situe vraisemblablement dans les parties internes.

1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation

Tout d'abord, le bord interne est une des parties les plus complexes d'un disque protoplanétaire. Ce bord interne correspond à des zones différentes pour le gaz ou pour la poussière. La poussière disparaît quand la température du disque dépasse 1500K environ, température au delà de laquelle la partie réfractaire des grains se sublime.

Le gaz, quant à lui, ne se propage pas non plus jusqu'à la surface de l'étoile en raison du champ magnétique important autour des jeunes étoiles. Le bord interne est ainsi déterminé par le rayon de co-rotation de l'étoile, c'est à dire la distance à laquelle une particule en rotation képlerienne orbite à la vitesse de rotation de l'étoile. Le champ magnétique de l'étoile tournant à la vitesse de rotation de l'étoile, ce rayon de co-rotation correspond ainsi au rayon en dessous duquel le gaz est freiné par le champ magnétique et est rapidement accrété le long des lignes de champ.

En considérant un système « étoile + disque » isolé, il n'y a pas d'arrêt brutal de la distribution de matière au bord externe qui est donc plus une limitation numérique nécessaire aux simulations qu'autre chose. La réalité est représentée plus fidèlement par une décroissance continue de la matière, difficile à représenter tant pour le bord externe que pour la distribution azimutale du disque.

Généralement, on considère donc que la taille verticale du disque est égale à une échelle de hauteur (grandeur caractéristique de la décroissance exponentielle verticale de la densité de matière), tandis que la taille radiale du disque dépend de la physique que l'on considère. Dans mon cas j'ai souvent pris un bord externe à 100 AU.

Je vais ici essayer de récapituler les approximations qui ont été faites jusque là sur la physique des disques, et qui vont se retrouver implicitement dans tout code qui implémente les équations décrites ci-dessus :

1. On suppose que les disques évoluent de manière isolée. Les études suggèrent que les étoiles se forment majoritairement dans des amas (clusters) à l'intérieur desquels la plupart des étoiles font partie de systèmes binaires ou multiples [Duquennoy and Mayor, 1991]. Même si cette approximation permet la modélisation de l'évolution du disque, il est probable que des effets de voisinages aient des conséquences dans tout ou partie des systèmes stellaires.
2. On néglige l'autogravité du disque ($M_d \lesssim 0.1M_\star$) en considérant que la période où ce n'est pas le cas est courte devant le temps de vie du disque, et que ce dernier temps rapidement vers une configuration où l'autogravité est négligeable.

3. On considère que le gaz est en rotation képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$. Pour cela, on néglige la pression du gaz qui a tendance à rendre la rotation légèrement sous-képlerienne.
4. On considère qu'il n'y a pas de variation de la gravité dû à la variation de masse de l'étoile induite par l'accrétion. Ça entraîne alors $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$.
5. Dans le calcul du chauffage visqueux, on néglige la vitesse azimuthale, la vitesse radiale ainsi que toutes les dérivées en φ compte tenu que le disque est axisymétrique.
6. On se place dans le cadre d'un disque optiquement épais quand on choisi d'utiliser des moyennes de Rosseland pour l'opacité. Si c'est physiquement cohérent avec les parties internes du disque, ça ne l'est parfois plus dans les parties externes, surtout si le disque est très étendu.
7. Le modèle d'opacité a une grande influence sur la physique du disque. En particulier, chaque modèle fait des hypothèses sur la métallicité, les propriétés de la poussière, notamment la taille des grains. Chacune de ces hypothèses joue sur l'opacité d'une manière qui est totalement masquée dans les équations ou tables qu'on utilise pour rendre compte de la dépendance de l'opacité en fonction de la température et de la densité.
8. On fait souvent l'approximation de la masse moléculaire moyenne μ est constante (et typiquement égale à $\mu = 2.35$). Or en fonction des transitions d'opacité, la quantité de poussière va brusquement varier, engendrant une variation de μ . Cette masse moléculaire moyenne a en particulier une importance dans le calcul de l'échelle de hauteur H du disque et la vitesse du son c_s .
9. Définir le profil de densité de surface du disque comme une loi de puissance reste une approximation. Ça l'est d'autant plus que le disque est étendu. Du reste, la masse du disque et l'indice de la loi de puissance sont peu contraints, donnant une grande liberté dans le profil de densité dont il faut tenir compte pour mettre en perspective les résultats que l'on obtient.
10. Le modèle choisi pour la viscosité, constante ou prescription alpha, néglige bien souvent la présence de « dead zone » où l'ionisation n'est pas suffisante pour que l'on puisse définir une viscosité turbulente. L'absence de ces zones dans un disque modélisé est bien entendu une approximation à des fins de simplifications, mais masque certaines propriétés intrinsèques des disques dont les conséquences sur la formation planétaire sont encore mal connues.
11. Une dernière approximation, et qui a des conséquences importantes pour l'opacité, le profil de température, la viscosité et par extension, toute la physique du disque, est le fait de considérer les propriétés de la poussière comme figées dans le temps. Au cours de la vie du disque, la poussière évolue. Sa distribution de taille change, la quantité totale de poussière est modifiée, notamment par l'accrétion. Et enfin, à mesure que la poussière se retrouve dans des embryons de planète de plus en plus gros, la quantité de poussière disponible sous la forme de petites particules diminue d'autant.

1.3 Interaction disque-planète

Au même titre qu'on rencontre de la résistance quand on essaie de courir en ayant les jambes dans l'eau, les planètes sont sujettes aux mêmes effets dans le disque proto-planétaire.

Ce seul fait explique pourquoi il est si difficile de comprendre la formation des planètes dans le disque de gaz. On ne peut étudier séparément le disque ou les planètes, c'est un système global, en interaction, qui évolue depuis la formation du disque (et les poussières qu'ils contient) jusqu'à la dissipation du disque (et la possible présence d'une ou plusieurs planètes).

Étant donné que j'ai implémenté les interactions disque-planète à partir de modèles calibrés sur des simulations hydrodynamiques, je ne vais pas redémontrer ici les formules analytiques, mais plutôt m'attacher à présenter, avec les mains, le principe de chacun des phénomènes physiques mis en jeu.

1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I

Ce type de migration ne concerne que les planètes de faible masse (de l'ordre de $10M_{\oplus}$) pour lesquelles l'interaction de marée entre la planète et le disque a une réponse linéaire, c'est à dire que le profil de densité surfacique n'est quasiment pas modifié par la planète. Ces planètes, qui ne creusent pas de sillon (gap) dans le disque de gaz, vont migrer vers l'intérieur. On appelle cette migration la *migration de type I*.

Couple du disque sur la planète

Un couple gravitationnel peut-être vu comme le vecteur énergie associé à une interaction gravitationnelle. Un couple positif d'un corps 1 sur un corps 2 signifie que le premier corps va donner de l'énergie au deuxième.

Inversement, si ce couple est négatif, le corps 1 va prendre de l'énergie au corps 2.

Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crée abouti à un couple qui agit sur la planète.



À chaque fois qu'il sera mentionné « couple », celui-ci fera référence au couple *du* disque *sur* la planète.

Ainsi, si le couple est négatif (sous entendu du disque sur la planète), le disque va prendre de l'énergie à la planète qui va ainsi migrer plus proche de son étoile, vu que son énergie cinétique diminue.

Si le couple est positif, la planète migre vers l'extérieur, cette dernière prenant de l'énergie au disque.

Couple de Lindblad

La présence d'une planète dans un disque de gaz entraîne la création d'ondes de densités aux *résonances de Lindblad* [Goldreich and Tremaine, 1979]. Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crée aboutit à un *couple* qui agit sur la planète.

Il est tout d'abord intéressant de remarquer l'origine des bras spiraux dans les galaxies. Ce sont essentiellement des phénomènes statistiques que l'on peut résumer en deux points :

1. Une onde de densité se forme par la présence de sur-densité locales comme des nuages de gaz géants [D'Onghia et al., 2013]. Mais une fois les nuages dissipés, il y a un phénomène d'auto-interaction. L'onde de densité, formée par l'excitation cohérente des excentricité et orientation d'orbites excentriques [FIGURE 1.7 page suivante] entretient elle-même les excentricités des éléments qui la composent.

La sur-densité a tendance à s'auto-entretenir en modifiant les orbites des étoiles de sorte à augmenter leur excentricité ainsi qu'orienter de manière cohérente les arguments du périhélie (la direction du grand axe de l'orbite).

2. Les étoiles qui constituent le bras spiral ne seront pas les mêmes en fonction de l'instant d'analyse, le bras spiral n'est rien de plus qu'une sur-densité statistique. Pour une orbite excentrique, la vitesse d'une étoile est plus grande au périastre qu'à l'apoastre. Ainsi elle passera plus de temps loin de son étoile. L'excitation cohérente des excentricités des étoiles crée donc des ondes de densité dû à la présence statistique des étoiles. Le bras spiral n'est ainsi pas constitué d'une population fixe d'étoile, mais plutôt d'une population statistique. Les étoiles constituant le bras spiral changent avec le temps, mais statistiquement, la position des étoiles dans la galaxie dessine une onde de densité où le nombre d'étoiles est plus grand.

[FIGURE 1.7 page suivante] schématise l'apparition d'onde de densité. Dans le cas à gauche, des orbites concentriques parfaitement circulaires sont ajoutés. On ne voit rien de particulier. Par contre, dans le cas à droite, on choisit des orbites très légèrement excentriques. À chaque étape, on rajoute une orbite en agrandissant l'orbite précédente et en la tournant légèrement. On voit ainsi apparaître deux ondes de densités dans le disques simplement dues à l'orientation des orbites excentriques.

Pour l'interaction entre une planète et un disque protoplanétaire, c'est exactement le même principe. Le potentiel de la planète excite les excentricités des éléments fluides voisins jusqu'à former une onde de densité autour de la planète. La différence principale est que le perturbateur est un potentiel gravitationnel tournant, ce qui modifie la forme des ondes de densité comme illustré [FIGURE 1.8 page 37].

Le potentiel gravitationnel de la planète peut se décomposer en série de Fourier où chaque mode m (entier) a une dépendance sinusoïdale en azimut et possède m maxima et m minima.

Pour chaque mode m du potentiel gravitationnel de la planète, on définit deux résonances, une résonance interne (ILR : Inner Lindblad Resonance) et une résonance

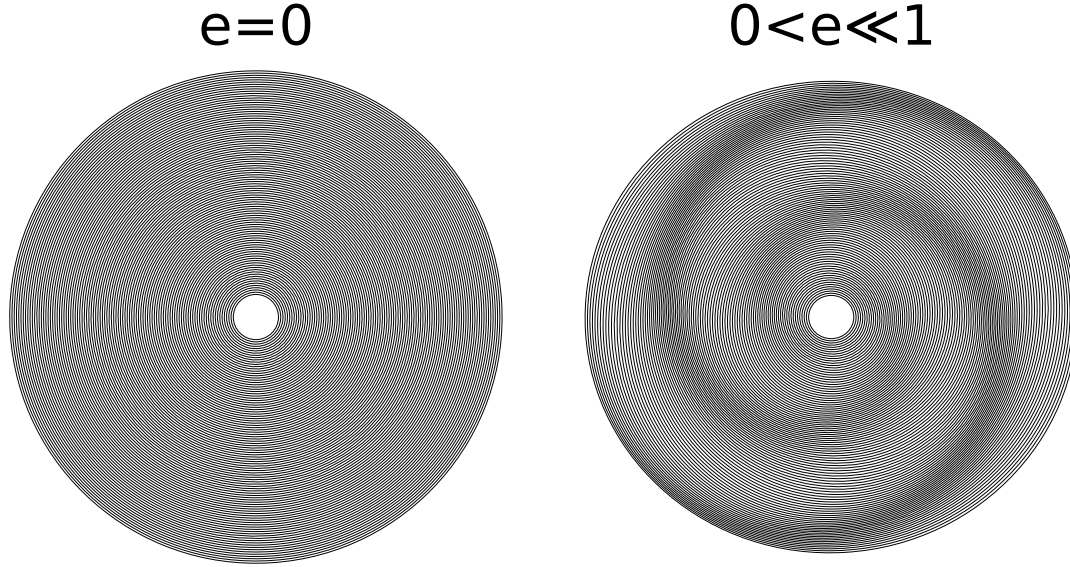


FIGURE 1.7 – Illustration de l'origine des bras spiraux dans une galaxie au travers de l'excitation cohérente de l'excentricité par les bras eux mêmes. Dans le cas « $e = 0$ », les orbites des étoiles, représentées par les traits noir sont des cercles parfaits. Dans le cas « $0 < e \ll 1$ », les orbites sont toutes très légèrement excentriques, et les arguments du périhélie légèrement décalés à mesure que les demi-grands axes augmentent.

externe (OLR : Outer Lindblad Resonance) associées aux positions suivantes :

$$r_{OLR}(m) = \left(\frac{m+1}{m} \right)^{2/3} \quad (1.38a)$$

$$r_{ILR}(m) = \left(\frac{m-1}{m} \right)^{2/3} \quad (1.38b)$$

Pour un mode m donnée, à partir des anneaux de rayon $r_{ILR}(m)$ et $r_{OLR}(m)$ vont être lancées m ondes de densités.

Dans le cas des bras spiraux dans une galaxie, c'est principalement un mode $m = 2$ qui propage une onde spirale de part et d'autre d'une barre centrale source des ondes de densité. Dans le cas d'une planète dans un disque, des ondes de densité sont lancées pour chaque mode m .

Par interférence constructive, la somme de toutes les ondes de densités émises par tous les modes du potentiel gravitationnel vont résulter en la formation d'une onde de densité résultante [FIGURE 1.8 page suivante].

Il est important de remarquer que la position de la résonance externe d'ordre m est systématiquement plus proche que la résonance interne associée. Ainsi, en sommant sur tous les modes, on arrive à la conclusion que le couple total externe l'emporte toujours sur le couple total interne [Ward, 1997].

Ainsi, le couple de Lindblad est toujours négatif dans un disque protoplanétaire. De plus, c'est un résultat qui dépend peu ou pas du tout des paramètres du disque [Ward, 1997].

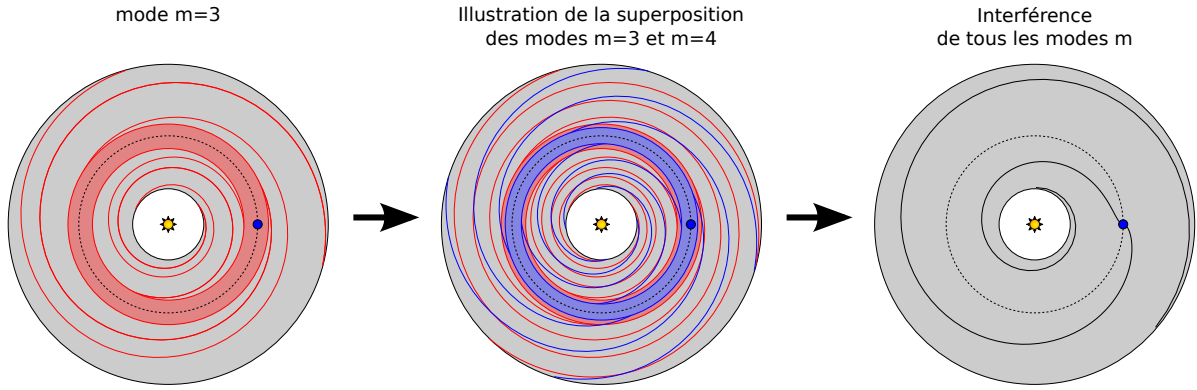


FIGURE 1.8 – Génération d’ondes de densité dans le disque protoplanétaire dû à la présence d’une planète. Chaque mode m émet des ondes de densité à partir de deux positions entourant la planète. Un anneau interne aux positions du mode m est dénué de toute onde dû à ce même mode. Les interférences entre toutes les ondes de densités de tous les modes donne deux ondes de densités que l’on observe dans des simulations hydrodynamique.

Notons aussi que le processus physique du transport du moment angulaire de la planète est réalisé par l’onde de densité. Le moment angulaire est emporté par l’onde de densité qui l’échange avec le gaz environnant à mesure que ce dernier amorti et dissipe l’onde.

Couple co-orbital ou de corotation

De la même manière que précédemment pour le couple de Lindblad, on peut repartir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète. Pour chaque mode m de la décomposition, on voit apparaître m zones de libration, centrées sur le rayon de la planète, et réparties en azimut. Figure 1.9 page suivante représente le mode $m = 3$, puis une juxtaposition de mode et finalement le résultat des interférences constructives entre tous les modes m de la décomposition.

Le couple de corotation provient des échanges gravitationnels que va avoir une particule fluide en co-orbite avec une planète. Il existe deux types de couples, provenant de deux quantités physiques distinctes, la vorticité spécifique (vorticité divisée par la densité de surface) appelée parfois vortensit   et l’entropie.

Sans considérer de grandeur thermodynamique particulière, il convient de définir certains temps caractéristiques afin de comprendre l’origine du couple de corotation. Figure 1.10 page 39 représente schématiquement les 3 temps principaux mis en jeu.

On définit tout d’abord t_{lib} comme le temps mis par un élément fluide pour effectuer une co-orbite complète dans le fer à cheval. Ceci dépend de la distance de l’élément fluide au rayon de corotation. Mais le temps de libration le plus court est obtenu à la distance x_s de la corotation, où x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region ») et vaut [Baruteau and Masset, 2008, eq. (52)] :

$$t_{\text{lib}} = \frac{4\pi}{x_s \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|} = \frac{8\pi r_p}{3\Omega_p x_s} \quad (1.39)$$

Ce temps de libration est généralement de quelques dizaines de fois la période orbitale de la planète, $t_{\text{lib}} \sim 50T_{\text{orb}}$.

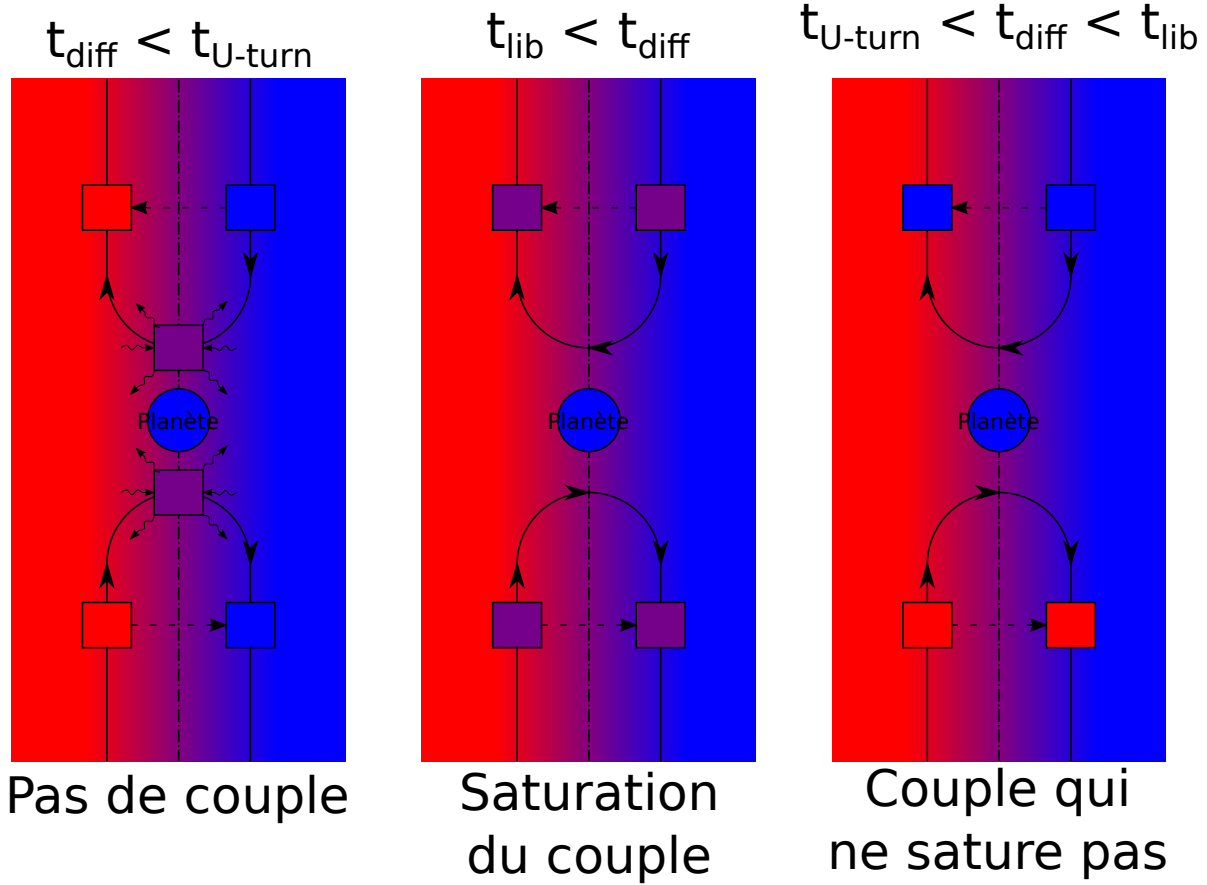


FIGURE 1.9 – À partir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète, chaque mode m a pour conséquence m zones de libration dans la zone de corotation avec la planète. Les interférences entre l'infinité de modes m fait apparaître des orbites fer-à-cheval (« horseshoe orbits ») dans la référentiel tournant avec la planète. La zone de corotation a ici été exagérée pour plus de lisibilité.

Le temps $t_{U\text{-turn}}$ représente quant à lui la durée nécessaire à un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète, c'est à dire pour parcourir la zone de longueur $2x_s$ ³ devant la planète. Il est défini par [Baruteau and Masset, 2008, eq. (64)]

$$t_{U\text{-turn}} \simeq \frac{4}{\Omega_p} \left[\frac{H(r_p)}{R_H} \right]^{3/2} \quad (1.40)$$

Ce temps est généralement de l'ordre de $t_{U\text{-turn}} \sim 10T_{\text{orb}}$.

Un troisième et dernier temps t_{diff} rentre en jeu, c'est le temps de diffusion. Selon le processus physique mis en jeu, ce temps peut être t_{rad} ou t_{visc} .

t_{rad} représente le temps de diffusion par refroidissement radiatif. Ce temps est plus long quand on se rapproche de l'étoile car le rayonnement est plus rapidement ré-absorbé. Le temps radiatif à la zone de corotation est de l'ordre de :

$$t_{\text{rad}} = \frac{x_s^2}{\chi} \quad (1.41)$$

où x_s est la demi-largeur de la zone de corotation et χ est la diffusivité thermique.

3. x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region »)

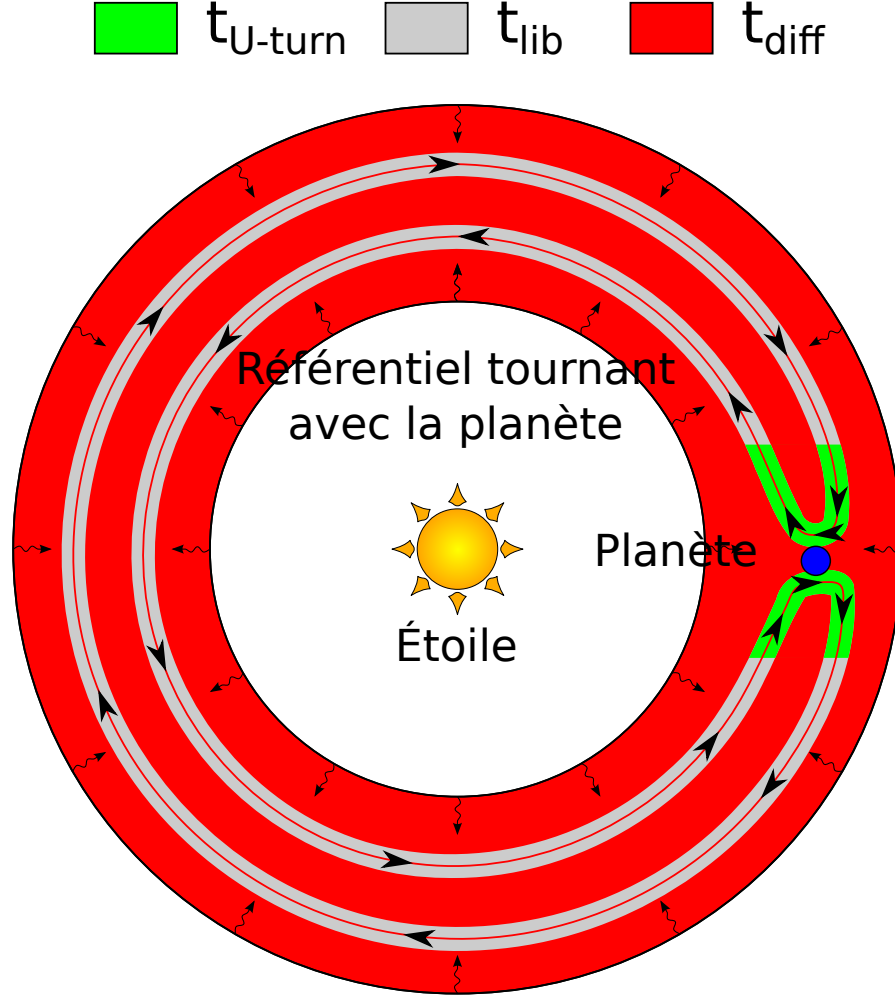


FIGURE 1.10 – Dans le référentiel tournant avec la planète (qui est donc fixe dans ce repère), représentation d’une orbite de corotation ainsi que des différents temps caractéristiques mis en jeu. t_{lib} est le temps mis par un élément fluide pour effectuer une orbite de corotation (temps qui peut être égal à 130 fois la période orbitale de la planète). $t_{\text{U-turn}}$ est le temps mis par un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète. t_{diff} peut être suivant le cas le temps radiatif t_{rad} ou le temps visqueux t_{vis} nécessaire pour homogénéiser les propriétés thermodynamiques de l’élément fluide avec son environnement.

t_{visc} représente la diffusion d’une quantité physique par la viscosité. Ce temps est plus court quand on se rapproche de l’étoile. La densité et la vitesse angulaire étant plus grandes, les frottements visqueux sont plus importants. Le temps visqueux à la zone de corotation t_{visc} est de l’ordre de [Masset, 2001, 2002, Ogilvie and Lubow, 2003]

$$\tau_{\nu} \sim \frac{x_s^2}{\nu} \quad (1.42)$$

Pour la grandeur physique considérée est la vortensité (ou vorticité spécifique), seul t_{visc} est à prendre en compte. Quand c’est l’entropie, les deux temps t_{visc} et t_{rad} sont importants. Figure 1.10 récapitule les temps mis en jeu et à quoi ils correspondent.

Pour que le couple de corotation soit positif, on doit satisfaire aux inéquations sui-

vantes :

$$t_{u\text{-turn}} < t_{\text{diff}} < t_{\text{lib}} \quad (1.43)$$

$t_{u\text{-turn}}$ est le temps nécessaire pour faire le demi tour devant la planète (en gros, pour traverser la zone égale à $2x_s$). t_{lib} est le temps de libration, c'est à dire le temps mis par une particule fluide pour faire le tour de la zone en fer-à-cheval. t_{diff} quant à lui est le temps de diffusion de la quantité physique considérée. Suivant les cas, il peut y avoir plusieurs temps de diffusion qui sont important, auquel cas les inégalités doivent être satisfaites pour tous les temps de diffusions mis en jeux.

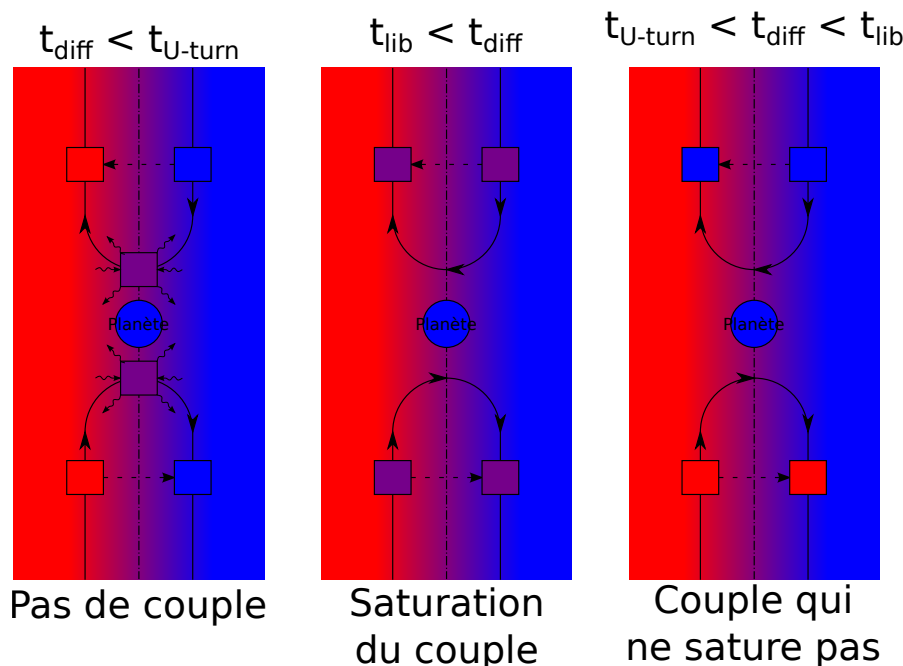


FIGURE 1.11 – Dans le référentiel tournant avec la planète (qui est donc fixe dans ce repère), représentation du mécanisme général à l'origine du couple de corotation. Les trois schémas représentent les différents cas de figure suivant les valeurs de t_{lib} , $t_{U\text{-turn}}$ et t_{diff} . Un couple apparaît quand le temps mis par un élément fluide pour faire demi tour devant la planète $t_{U\text{-turn}}$ est plus court que le temps nécessaire pour qu'il s'homogénéise avec son environnement (t_{diff}). Ce couple ne sature pas quand le temps t_{lib} mis par l'élément fluide pour effectuer une orbite complète est plus long que le temps t_{diff} nécessaire pour qu'il s'homogénéise avec le gaz environnant.

Figure 1.11 illustre les trois cas possibles en fonction des commensurabilités entre les différents temps caractéristiques mis en jeux.

Si le temps de diffusion t_{diff} est plus grand que le temps de libration t_{lib} , alors une particule fluide verra ses propriétés physique converger vers une valeur moyenne qui restera plus ou moins constante au cours d'une orbite. Le couple de corotation va ainsi saturer, celui-ci étant issu de différence de propriétés physiques entre les différentes zones de l'orbite fer-à-cheval. Afin que le couple de corotation ne sature pas, il faut que le temps de diffusion t_{diff} soit suffisamment court pour que l'état de l'élément fluide soit remis à zéro avant d'atteindre de nouveau la zone de U-turn.

Si le temps de diffusion t_{diff} est plus court que le temps pour effectuer le demi tour $t_{U\text{-turn}}$, alors la particule fluide aura le temps de s'équilibrer avec le disque avant même

d’avoir fait un demi tour. Il n’y aura donc pas de différence avec le reste du disque, et donc pas de couple issu de différence de propriété physique à la zone de corotation.

Dans la pratique, ce couple peut être positif (migration vers l’extérieur) ou négatif (migration vers l’intérieur) en fonction des variations des quantités physiques par rapport à leur valeur nominales.

Remarque : Si la planète creuse un *sillon* (*gap*) le long de son orbite, alors il n’y a pas de couple co-orbital étant donné que le gaz est déplété.

S’il n’y a pas de diffusion (temps de diffusion t_{diff} très long), alors le couple va saturer très rapidement, typiquement quelques dizaines d’orbites.

Modélisation dans le code N-corps

Les couples de Lindblad et de Corotation ont été intégrés aux simulations numériques en utilisant le modèle de [Paardekooper et al. \[2011\]](#). Plus de détails sur l’implémentation de ces formules et le modèle de disque utilisé dans la section [§ 2 page 45].

1.3.2 Migration des planètes massives

Par massive, on entend une planète qui va induire des modifications importantes du profil de densité du disque. L’approximation du régime linéaire n’est alors plus valable.

Je présente ici très succinctement ces deux types de migration que je n’ai pas considéré tout au long de ma thèse. Je me place dans le régime linéaire et me suis concentré sur les cœurs de planète géante et les planètes telluriques. J’ai donc négligé tous les effets non linéaires dû aux grandes masses, et en particulier la création d’un sillon par les planètes.

Type II

Quand une planète dans un disque devient suffisamment massive, la réponse du disque n’est plus linéaire, et des ondes de densité induites par la planète forment des chocs non loin de là où elles sont émises. La répulsion entre le disque et la planète devient si forte qu’une cavité annulaire se forme autour de l’orbite de la planète, creusant le disque de gaz [[Lin and Papaloizou, 1986](#)].

Une fois que la cavité est formée, la planète est dite en migration de *type II* : son orbite agit alors essentiellement comme une barrière entre les deux parties du disque de gaz, *interne* et *externe*. Du gaz peut parfois sauter le gap, ou être accrété par la planète mais cette dernière voit son mouvement régit par le disque de gaz, se retrouvant entraînée par la migration de celui-ci.

Compte tenu que la planète a une masse de l’ordre de ⁴ la masse du disque local (avec

4. Quand la masse de la planète devient supérieure à la masse du disque local, l’inertie de celle-ci devient importante afin de déterminer son taux de migration

lequel elle interagit), la migration se passe sur des temps de l'ordre du *temps visqueux* du disque.

Type III

La migration de type III est un type de migration intermédiaire aux migrations de type I et II. Le principe est que la planète commence à migrer par type I, tout en accréant du gaz. À mesure que la masse de la planète augmente, elle creuse petit à petit un gap et la migration devient une migration de type II [Masset and Papaloizou, 2003].

1.3.3 L'amortissement de l'excentricité

Je ne vais pas chercher à détailler ici le mécanisme mathématiquement. Le principe de la décomposition en série de Fourier détaillé pour le calcul des couples de Lindblad et Corotation est toujours le même. Mais au delà des couples, il y a un effet subtil sur les paramètres orbitaux de la planète que je vais essayer de détailler avec une image pour l'excentricité et l'inclinaison.

Quand une planète possède une excentricité, elle oscille autour de sa position moyenne qu'est son demi-grand axe. En conséquence, elle passe dans des zones du disque où la vitesse du disque est légèrement supérieure ou légèrement inférieure à sa propre vitesse orbitale. Ainsi, quand la planète est en dessous de son demi-grand axe, elle est dans une zone où la vitesse orbitale est plus grande que sa vitesse, cette dernière est donc accélérée.

À l'inverse, quand la planète est dans les parties externes du disque, proche de son apo-astre, la rotation du disque est plus faible, elle est donc freinée. Ces effets ont tendance à réduire l'excentricité d'une planète et à circulariser son orbite, sur des temps qui vont de la centaine au millier d'années dépendant des propriétés du disque.

1.3.4 L'amortissement de l'inclinaison

Le principe est le même pour l'inclinaison d'une planète. Au cours de l'orbite, la planète va passer tantôt au dessus ou en dessous du disque. L'attraction gravitationnelle du gaz sur la planète n'étant plus symétrique, elle va avoir tendance à ramener la planète dans le plan du disque.

1.3.5 L'accrétion du gaz

Dans le modèle d'*accrétion de cœur*, les planètes géantes sont d'abord des cœurs rocheux qui grossissent jusqu'à atteindre une masse critique de l'ordre de $15M_{\oplus}$. Une fois cette masse atteinte, le cœur commence à accréter rapidement du gaz jusqu'à former une géante gazeuse.

Ceci implique que la formation des planètes géantes doit se passer avant que le disque de gaz ne se dissipe (ce qui intervient au bout de 10^7 ans environ).

Les noyaux de ces planètes sont supposés se former au delà de la ligne des glaces (limite radiale virtuelle au delà de laquelle on peut trouver de l'eau sous forme solide ; autour de 4 ua). En effet, au delà de cette limite, la quantité de matière solide augmente, et donc le taux d'accrétion augmente aussi.



La formation des embryons de planètes géantes n'est toujours pas clair. On ne sait pas vraiment s'il y a une zone privilégiée ou non, la limite virtuelle de la ligne des glaces pourrait ne pas être valable, la glace ne rajoutant qu'environ 50% de masse en plus.

À noter qu'il n'y a pas de pression et donc pas de liquide dans l'espace, juste du gaz ou du solide.

Pour une simulation donnée, si on augmente le taux d'accrétion de la planète, celle-ci sera plus massive, et aura donc une inertie plus grande. Elle mettra donc plus de temps à migrer par migration Type II car son inertie s'y opposera. D'un autre côté, si la planète n'a pas encore créé de gap, la migration de Type I est plus rapide à mesure que la masse augmente.

1.3.6 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps

Numériquement, le couple de migration type I est pris en compte en utilisant les formules semi-analytiques développées par [Paardekooper et al. \[2011\]](#).

L'amortissement de l'inclinaison et de l'excentricité quant à elles sont modélisées via les formules de [Cresswell and Nelson \[2008\]](#).

Chapitre 2

Le Code N-Corps

Sommaire

2.1	Présentation de mercury	45
2.2	Mode d'emploi du code N-corps modifié	46
2.2.1	Note technique	46
2.2.2	Paramètres divers	46
2.2.3	Densité de surface	47
2.2.4	Irradiation de l'étoile centrale	48
2.2.5	Viscosité	48
	constant	48
	alpha	48
	alpha_dz	49
2.2.6	Opacité	49
	bell	49
	zhu	49
	chambers	50
	hure	50
2.2.7	Turbulence	50
2.2.8	Migration	51
	real	51
	mass_dependant	51
	linear_indep	52
	tanh_indep	52
	manual	54
2.3	Disque 1D	54
2.3.1	Profil de densité de surface	54
2.3.2	Table d'opacité	55
2.3.3	Profil de température	55
2.4	Migration type I	55
2.5	Amortissement de e et I	56
2.6	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	56
2.7	Désactivation des effets du disque	57
2.8	Validité des éléments orbitaux	57

Afin d'étudier la formation planétaire et les interactions avec le disque de gaz, j'ai utilisé un code de simulation N-corps, qui permet de regarder l'évolution d'un nombre arbitraire de corps orbitant autour d'un astre central [Chambers, 1999].

Ce choix est apparu naturellement. Au début de ma thèse j'ai fait quelques simulations hydrodynamiques avec le code Genesis développé par Arnaud Pierens. J'ai rapidement constaté que ce genre de simulations, bien que modélisant de manière poussée le disque, ne permettait pas d'étudier de manière approfondie la dynamique planétaire. Le temps de calcul nécessaire pour une simulation limite en effet grandement le nombre de corps ainsi que la durée d'intégration. J'ai donc souhaité me tourner vers un code N-corps, afin de privilégier la dynamique planétaire, et de modifier ce programme afin d'y inclure les effets d'un disque de gaz sur la dynamique planétaire.

J'ai ainsi gagné en temps de calcul, et j'ai ouvert un vaste champ d'investigation sur les paramètres du disque, le nombre de corps en interaction, me permettant de faire des systèmes planétaires très divers, parfois avoir plusieurs centaines d'embryons pour plusieurs millions d'années, chose impossible dans les simulations hydrodynamiques du début de ma thèse où 20 corps pendant quelques dizaines de milliers d'années était un maximum.

Ce choix a bien entendu introduit son lot d'incertitudes et d'approximations qui sont discutés dans la partie [§ 5 page 69]. La présente section a pour but de présenter le code N-corps que j'ai utilisé ainsi que les différents effets du disque que j'ai modélisé. J'ai avant tout souhaité présenter les parties qui ont des conséquences sur la physique du disque, que ce soit en terme de choix d'un modèle particulier, ou de limitations numériques qu'il est bien de garder à l'esprit quand on interprète les résultats.

2.1 Présentation de mercury

Le code N-corps choisi est le code **mercury** [Chambers, 1999]. Ce code offre la possibilité de choisir un algorithme parmi 5 différents (BS, BS2, RADAU, MVS et HYBRID), ayant des propriétés diverses. Dans le cadre de ma thèse, je n'ai utilisé que l'algorithme HYBRID, qui utilise l'algorithme MVS la plupart du temps, mais change pour l'algorithme BS2 lors de rencontres proches. Il est possible de déterminer à quel moment on considère qu'une rencontre est "proche" dans le fichier de paramètre de programme, j'ai laissé le paramètre par défaut.

La raison de ce changement est assez simple. MVS est un algorithme symplectique, c'est à dire à pas de temps constant, dans lequel on définit un hamiltonien que l'on résout pour faire évoluer les orbites. La conservation de l'énergie est moins bonne que pour un algorithme à pas de temps adaptatif, mais le point très important est que cette conservation de l'énergie est bien meilleure au cours du temps. C'est à dire que là où les algorithmes tels que BS, BS2 et RADAU verront leur erreur sur l'énergie augmenter au cours du temps, les algorithmes symplectiques vont eux voir leur erreur rester plus ou moins constante au cours du temps.

Dans le cadre de mes simulations, j'ai accordé une importance limitée aux variations d'énergie, étant donné que les couples que l'on rajoute pour simuler la présence du disque de gaz font que l'énergie n'est pas conservée pour une planète donnée. Cependant, il est

important de bien résoudre les orbites et c'est ce point qui est le plus crucial ici. En effet, quelques tests ont permis de contraindre le pas de temps minimal qu'il est nécessaire d'avoir en fonction de la distance orbitale d'une planète. La contrainte de pas de temps dans mes simulations vient donc d'une distance minimale en dessous de laquelle les orbites ne sont pas correctement calculées. Cette limite, afin d'éviter tout problème, est choisie pour être en dessous du bords interne du disque de gaz que je défini.

2.2 Mode d'emploi du code N-corps modifié

À part la première section qui donne quelques détails techniques, le but de cette partie est de présenter les différentes options du code modifié. Ces options sont lues à partir d'un fichier commun **disk.in**. Si une option n'est pas présente, la valeur par défaut sera lue à partir du code. Le fichier **disk.out** récapitule toutes les valeurs de toutes les options et paramètres importants du code.

Remarque : Il est possible de mettre des commentaires dans le fichier **disk.in**, que ce soit pour commenter une ligne entière, ou pour mettre en fin de ligne après un paramètre, à l'aide du caractère « ! » exactement comme en Fortran90.

2.2.1 Note technique

Le code est en grande partie le code mercury [Chambers \[1999\]](#). Les effets du disque ont été inclus dans la partie **mfo_user** prévue pour inclure des effets propre à chaque utilisateur.

Pour autant, le code a été conçu de manière modulaire en portant une attention particulière au temps d'exécution et à la souplesse d'utilisation. La plupart des effets sont désactivables par une simple option dans un fichier de paramètre spécifique au effets du disque **disk.in**.

Prenons un exemple. Le couple exercé par le disque sur la planète peut être issus des formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#), ou bien suivre plusieurs lois artificielles permettant de tester certains effets dans des cas simplifiés. Pour autant, cette souplesse d'utilisation ne se fait pas au détriment de la célérité du code car au lancement du code, les options sont lues et des pointeurs de fonctions permettent au code d'exécuter directement la bonne fonction lors de l'intégration, sans avoir à tester à chaque pas de temps quelle fonction doit être lancée.

Un programme externe, nommé **test_disk** permet d'effectuer des tests unitaires sur différentes fonctions, afin de vérifier quand bon nous semble que chaque fonction n'est pas perturbée par les autres et donne des résultats corrects à la fois physiquement et numériquement.

2.2.2 Paramètres divers

Ici je regroupe des paramètres du disque qui nécessitent simplement une valeur :

```

b/h = 0.6
adiabatic_index = 1.4
mean_molecular_weight = 2.35
disk_edges = 0.1 100.
sample = 800

```

b/h est la longueur de lissage du potentiel gravitationnel d'une planète (qui diverge dans les simulations hydrodynamiques et qui est un paramètre des formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#)).

adiabatic_index est l'indice adiabatique γ comme son nom l'indique. De même, **mean_molecular_weight** est la masse moléculaire moyenne μ .

disk_edges définit les deux extrémités du disque, les bords internes et externes.

sample définit le nombre de points qu'auront les profils radiaux des différents paramètres du disque. Ces points ne sont pas répartis uniformément, il y a plus de points au bord interne qu'au bord externe, afin d'avoir une évolution plus fine des paramètres en fonction du rayon.

2.2.3 Densité de surface

surface_density permet de définir le profil en loi de puissance pour la densité de surface :

```
surface_density = 500 0.5
```

Ici, on a défini le profil suivant :

$$\Sigma(R) = 500. \cdot R^{-0.5} \text{ g/cm}^2$$

Mais il est aussi possible de donner un profil tabulé de densité de surface en fonction du rayon en paramètre d'entrée, en spécifiant le paramètre suivant :

```
surface_density = manual
```

Ainsi, le profil de densité de surface sera lu à partir du fichier **surface_density_profile.dat** qui doit être constitué de deux colonnes, la première étant la valeur du rayon en AU, et la deuxième la densité de surface en g/cm^2 . Les lignes doivent être classées par ordre croissant de distance orbitale. (les premières lignes étant les points les plus proches de l'étoile, et les dernières les points les plus lointains).

Remarque : Une interpolation sera réalisée si la discrétisation du fichier d'entrée est différente de celle du code.

À ceci s'ajoute un paramètre supplémentaire :

```
inner_smoothing_width = 0.05
```

Ce paramètre représente la longueur d'amortissement de la densité de surface au bord interne du disque, afin que la densité de surface au bord interne soit très faible. Cette longueur est exprimée en pourcentage de distance orbitale du bord interne ; c'est à dire que si le bord interne est à 0.1 AU, alors dans le cas présent, le lissage sera effectué sur une longueur de 0.005AU

2.2.4 Irradiation de l'étoile centrale

is_irradiation permet de définir si on veut inclure ou non l'irradiation dans le calcul de l'équilibre énergétique du disque.

```
is_irradiation = 1
disk_albedo = 0.5
r_star = 4.65e-3 ! AU
t_star = 5700 ! K
```

Les paramètres sont relativement explicite mais pour détailler, **disk_albedo** est l'albedo moyen du disque protoplanétaire, il représente le fait qu'une partie de la lumière incidente de l'étoile est directement réfléchi vers l'espace.

r_star et **t_star** sont respectivement le rayon de l'étoile en AU et sa température en Kelvin.

La manière dont est modélisée l'irradiation de l'étoile centrale est détaillée dans [§ 1.2.3 page 24].

2.2.5 Viscosité

Il est possible de définir plusieurs types de viscosité via l'option **viscosity_type** : **constant**, **alpha** et **alpha_dz**.

constant

Ce paramètre permet de définir une viscosité ν constante dans tout le disque. La valeur de la viscosité associée est définie dans le paramètre **viscosity** en cm^2/s .

```
viscosity_type = constant
viscosity = 1e15 ! cm^2/s
```

alpha

Ce paramètre permet de définir une viscosité via la prescription alpha de [Shakura and Sunyaev \[1973\]](#). La valeur du paramètre alpha sera lue dans le paramètre **alpha**.


```
viscosity_type = alpha
alpha = 5e-3
```

alpha_dz

Ce paramètre permet de définir une viscosité α par morceau, permettant de modéliser une dead zone. On aura donc 3 zones avec 3 α différents. Pour définir ces zones là, il faut donner dans le paramètre **alpha_dz** trois valeurs de α et dans **radius_dz** deux valeurs de distance orbitales (en AU) pour définir les bornes de la dead zone.

```
viscosity_type = alpha_dz
alpha_dz = 0.005 0.0001 0.005
radius_dz = 1.0 10.0 ! in AU
```

Quand cette option est activée, une modification au profil de densité est appliquée, afin de modéliser une sous-densité, puis une sur-densité avant et après le bord interne de la zone morte. L'écart maximum de ces « bumps » est de 15% de la valeur de la densité au bord interne de la zone morte.

À ceci s'ajoute un lissage des valeurs de α entre la valeur à gauche et la valeur à droite de la transition selon une tangente hyperbolique. La transition s'effectue typiquement sur une longueur égale à 10% de la position de la transition dans le disque (si la transition est à 1AU, alors la transition a lieu sur 0.1 AU autour de la transition).

2.2.6 Opacité

Afin de pouvoir les comparer, j'ai ajouté au code la possibilité de tourner avec différents modèles pour l'opacité.

Les différents modèles sont [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]

bell

```
opacity_type = bell
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Bell and Lin [1994].

zhu

```
opacity_type = zhu
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Zhu et al. [2009].

chambers

`opacity_type = chambers`

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par [Chambers \[2009\]](#). Ce modèle est très simplifié et utilise une opacité constante sur un grand régime de température, pour ensuite faire une transition vers une loi de puissance à très haute température.

hure

`opacity_type = hure`

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par [Huré \[2000\]](#).

À la différence de tous les autres modèles que j'ai implémenté, celui de [Huré \[2000\]](#) est directement une table d'opacité, sans faire intervenir de loi de puissance pour différents régimes.

À la différence des autres modèles, il n'introduit pas d'incertitudes supplémentaire via les lois de puissance qu'il définit.

En effet, dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire la migration planétaire via la formule de [\[Paardekooper et al., 2011\]](#), l'indice des lois de puissance pour la densité de surface et la température a une très grande influence sur la couple effectif du disque. Et les transitions d'opacités, très marquées lors de la transition des lois de puissance, fait apparaître des zones particulières dans le disque qui n'ont parfois aucune réalité physique mais ont de grandes conséquences sur le résultat des simulations. De même, le lissage qu'elles introduisent masquent certaines zones d'intérêt qui ne sont mises en évidence qu'avec une table d'opacité où tous les effets fins ont été préservés.

2.2.7 Turbulence

Pour activer la turbulence dans le disque, c'est à dire l'effet que la turbulence peut induire sur la migration planétaire, il suffit d'utiliser le paramètre suivant :

`is_turbulence = 1`

La turbulence n'est ici qu'une migration stochastique de moyenne nulle qui perturbe les planètes et leur migration.

Le modèle utilisé est le même que celui détaillé dans [Ogihara et al. \[2007\]](#). Le principe est de définir un potentiel turbulent dans le disque, fait de la superposition de perturbation individuelle qui ont des modes m , temps de vie t_m et position dans le disque différents.

Dans le cas typique, il y a 100 modes différents dans le disque :

$$\Phi_{\text{turb}}(R, \phi, t) = \gamma R^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^{100} \Lambda_k(R, \phi, t) \quad (2.1)$$

avec

$$\Lambda_k = \xi_k e^{-\frac{(R-R_k)^2}{\sigma_k^2}} \cos(m_k \phi - \phi_k - \Omega_k \tilde{t}_k) \sin(\pi \tilde{t}_k / \Delta t_k) \quad (2.2)$$

ξ_k est une constante adimensionnée déterminée aléatoirement en suivant une distribution gaussienne.

R_k et ϕ_k sont respectivement les coordonnées radiales et azimutales du mode k choisies aléatoirement et de manière uniforme pour l'un entre les bornes du disque, pour l'autre entre 0 et 2π .

Chaque mode k possède un nombre de mode m_k déterminée selon une distribution logarithmique entre $m = 1$ et $m = 150$, le nombre de mode déterminant l'extension radiale et la durée du vie du mode k .

$\sigma_k = \pi R_k / 4m_k$ est l'extension radiale de ce mode tandis que Ω_k représente la vitesse angulaire képlerienne à la position $R = R_k$.

$\Delta t_k = 0.2\pi R_k / m_k c_s$ est la durée de vie du mode k .

Les modes apparaissent et disparaissent en fonction de leur temps de vie et sont remplacés afin qu'il y ait toujours 100 modes différents dans le disque à un instant t . Chaque mode k est créé à un instant $t_{0,k}$ et se termine quand $\tilde{t}_k = t - t_{0,k} > \Delta t_k$.

2.2.8 Migration

real

C'est le cas le plus classique. Il n'y a pas besoin de définir d'autres paramètres, la migration induite par le disque de gaz sera simplement calculée à partir du modèle de [Paardekooper et al. \[2011\]](#).

`torque_type = real`

mass_dependant

On définit une zone de convergence artificielle qui va dépendre de la masse des planètes. On va donc devoir définir deux bornes en masses et deux bornes en distance orbitale qui vont déterminer cette ligne de couple nul. À l'intérieur (resp. extérieur) de cette séparation virtuelle, la migration sera vers l'extérieur (resp. intérieur).

Ensuite, on définit une pente linéaire plus ou moins importante pour voir à quelle vitesse on va tendre vers la valeur de saturation à mesure qu'on s'éloigne de la zone de convergence. Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

En résumé, on a ces paramètres suivants à définir :

`torque_type = mass_dependant`

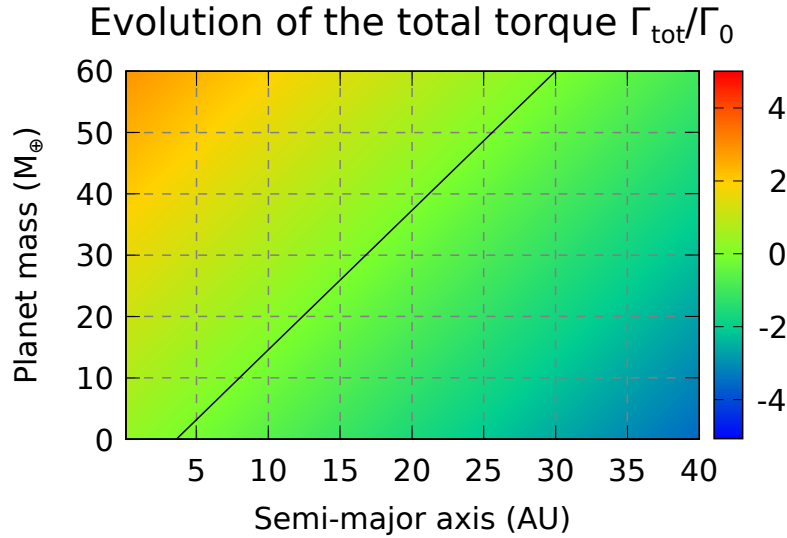


FIGURE 2.1 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **mass_dependant** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

```
mass_dep_cz_m_max = 30 ! AU
mass_dep_m_max = 60 ! m_earth
```

```
mass_dep_cz_m_min = 4 ! AU
mass_dep_m_min = 1 ! m_earth
```

```
torque_profile_steepness = 1.0
```

linear_indep

Même chose que précédemment, on peut définir un couple artificiel qui définit une zone de convergence indépendante de la masse, c’est à dire qu’on ne spécifie que la position de la zone de convergence dans le disque. On a donc :

```
torque_type = linear_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
torque_profile_steepness = 1.0
```

Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

tanh_indep

Ici, on définit aussi une zone de convergence indépendante de la masse, mais au lieu d’avoir une évolution linéaire du couple à mesure qu’on s’éloigne de la zone de convergence, on a une tangente hyperbolique qui sature à une valeur que l’on peut donner en paramètre.

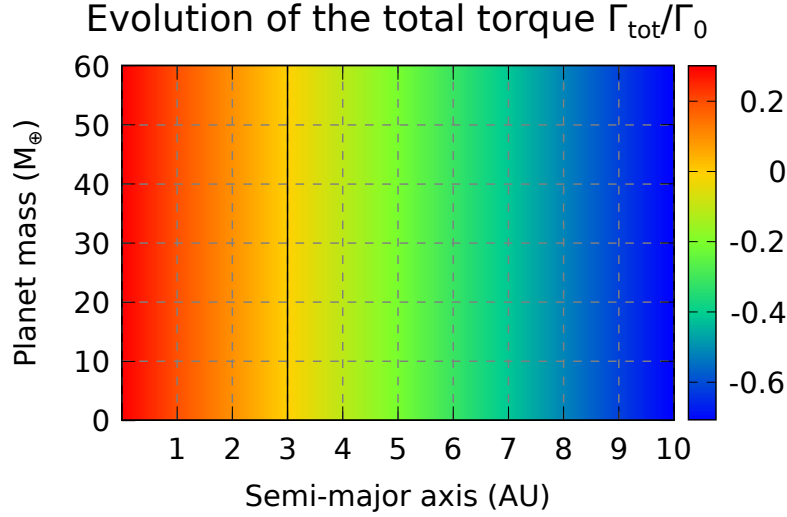


FIGURE 2.2 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **linear_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

La valeur du couple de saturation définit la valeur absolue du couple vers laquelle on va tendre quand on est très loin de la zone de convergence. Si on est à l’extérieur, ce sera cette valeur de saturation prise négativement, tandis que c’est la valeur positive qui est utilisée à l’intérieur.

On a donc les paramètres suivants à définir :

```
torque_type = tanh_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
saturation_torque = 1.0 ! in Gamma_0
```

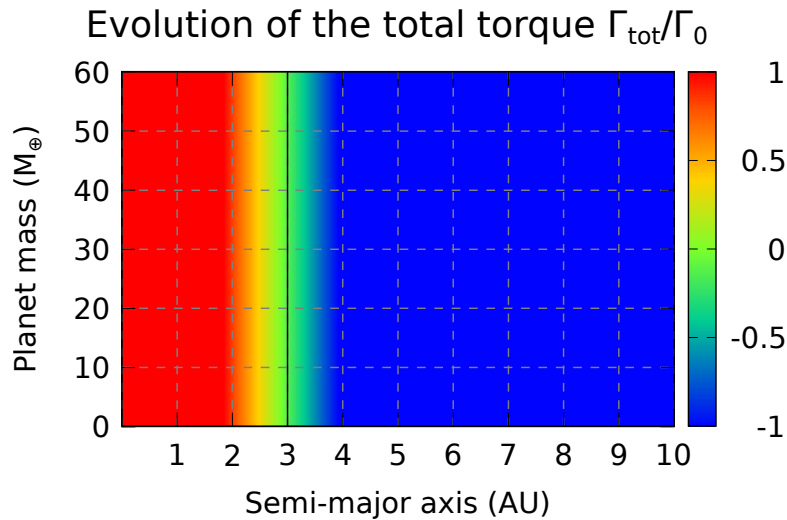


FIGURE 2.3 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **tanh_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

manual

Il est aussi possible de rentrer manuellement un couple total en fonction de la position de la planète dans le disque.

Les valeurs seront alors lues à partir du fichier **torque_profile.dat**. La première colonne sera les positions dans le disque en AU tandis que la deuxième colonne sera le couple exercé par le disque en unité de Γ_0 (c'est à dire que l'effet de la masse de la planète sur la vitesse de migration sera toujours pris en compte dans le code au travers de la dépendance de Γ_0 en fonction de la masse de la planète et de la masse du disque.

2.3 Disque 1D

Afin de calculer les effets d'un disque de gaz, une modélisation de ce dernier est nécessaire. Le but étant d'avoir une grande souplesse, le disque implémenté est bien entendu très simplifié. Toutes les quantités sont intégrées et invariantes selon la hauteur z et la position azimutale θ dans le disque, résultant en un modèle radial 1D de toutes les quantités.

Dans la mesure du possible, les quantités du disque ont été calculées de manière consistante. Je vais présenter dans la suite de manière chronologique comment sont calculées les grandeurs physiques du disque.

2.3.1 Profil de densité de surface

Le profil de densité de surface est défini au début de la simulation comme une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \times R^{-d} \quad (2.3)$$

où Σ_0 est la densité de surface à 1 AU et d l'indice de la loi de puissance.

Ce profil de densité de surface est défini pour une certaine étendue radiale. On définit donc un bord interne R_{in} et un bord externe R_{out} . Le bord interne est généralement à 0.1 AU et le bord externe à 100 AU.

Afin de calculer les valeurs suivantes, ce disque est échantillonné et toutes les valeurs nécessaires sont ensuite calculées à chacun de ces points.

Le profil de densité de surface est le paramètre d'entrée le plus important. Il est celui à partir duquel on calcule toutes les autres quantités du disque, température, échelle de hauteur, etc. . .

Le profil étant une loi de puissance, un amortissement est effectué au bord interne du disque afin que la valeur de la densité au bord interne soit proche de zéro.

2.3.2 Table d'opacité

Afin de pouvoir calculer le profil de température, on a besoin de choisir un modèle pour l'opacité. Je ne détaillerai pas ici les différents modèles car une étude complète sur le sujet a été effectuée, afin de comprendre l'influence du choix du modèle sur les résultats des simulations.

Par contre, quel que soit le modèle, on a généralement une dépendance en fonction de la densité et de la température. L'opacité est donc un paramètre de la résolution de l'équation qui nous permet d'avoir la température. L'opacité n'est pas, dans notre modèle, une quantité qu'on fixe *a priori*, mais plutôt un des paramètres de sortie de la résolution de l'équation de l'énergie dans le disque.

2.3.3 Profil de température

Afin de construire le profil de température point par point, on résout, pour chaque position dans le disque définie dans le profile, l'équation de l'énergie (1.32 page 27).

De manière consistante, cette équation a pour paramètre d'entrée la position, et on cherche à trouver les valeurs de la température T , échelle de hauteur H , profondeur optique τ , diffusivité thermique χ . Toutes ces valeurs sont fixées une fois qu'un ensemble cohérent de valeurs satisfait l'équation.

Afin de résoudre cette équation du type $f(x) = 0$, j'ai utilisé une version modifiée de la méthode **zbrent** de **Numerical Recipes** [Press et al., 1992]

2.4 Migration type I

La migration de type I est implémentée dans le code en utilisant le modèle 1D de disque, qui définit pour toute position du disque, une température, une densité de surface, et tous les autres paramètres nécessaires comme l'échelle de hauteur. En utilisant ces paramètres, on obtient ainsi le couple qu'exerce le disque sur la planète en fonction de sa masse et de sa position via la formule semi-analytique de Paardekooper et al. [2011].

Les deux différences principales entre le cadre du modèle de Paardekooper et al. [2011] et le disque que j'ai modélisé, c'est que dans mon cas je n'ai pas un profil de température en loi de puissance (avec une seule loi de puissance), mais j'ai une loi de puissance définie point par point. C'est à dire que pour chaque zone du disque, la température est calculée de manière cohérente avec les autres paramètres du disque, et que l'indice de la loi de puissance correspondante est calculée en fonction des températures autour.

La deuxième différence est que j'ai un profil pour l'échelle de hauteur H et le rapport d'aspect $h = H/R$ du disque au lieu d'avoir un rapport d'aspect constant pour tout le disque.

De plus, certaines erreurs se sont glissées dans ce papier. [Bitsch and Kley, 2011, appendice A] fait remarquer en particulier qu'il manque un facteur 4 dans l'équation

(33). Ainsi, la formule que j'ai utilisé pour calculer la conductivité thermique χ est :

$$\chi = \frac{16\gamma(\gamma - 1)\sigma T^4}{3\kappa\rho^2 H^2 \Omega^2} \quad (2.4)$$

Il y a aussi une erreur dans l'équation (35) car le disque se refroidit par la surface supérieur et la surface inférieure. Mais comme j'utilise dans mon code une équation de l'énergie (1.32 page 27) un peu plus complexe où j'ai tenu compte de ce fait là, cette erreur n'a pas d'incidence sur le calcul du couple.

Les formules nous donnent alors un couple exercé par le disque sur la planète.

À partir de ce couple, on définit un temps de migration t_{mig} comme :

$$t_{\text{mig}} = \frac{J}{2\Gamma} \quad (2.5)$$

où J est le moment angulaire total de la planète et $\Gamma = \dot{J}$ est le couple total exercé par le disque sur la planète.

L'accélération due à la migration $\overrightarrow{a_{\text{mig}}}$ est alors donnée par :

$$\overrightarrow{a_{\text{mig}}} = \frac{\overrightarrow{v}}{t_{\text{mig}}} \quad (2.6)$$

où \overrightarrow{v} est la vitesse instantanée de la planète.

2.5 Amortissement de e et I

L'amortissement de l'excentricité e et de l'inclinaison I d'une planète plongée dans un disque protoplanétaire est modélisée dans le code via les formules de [Cresswell and Nelson, 2008, eq. (9), (11) et (12)] :

$$t_{\text{wave}} = \frac{M_\star}{m_p} \frac{M_\star}{\Sigma_p a_p^2} \left(\frac{H}{r} \right)^4 \Omega_p^{-1} \quad (2.7a)$$

$$t_e = \frac{t_{\text{wave}}}{0.780} \left[1 - 0.14 \left(\frac{e}{H/r} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{e}{H/r} \right)^3 + 0.18 \left(\frac{e}{H/r} \right) \left(\frac{i}{H/r} \right)^2 \right] \quad (2.7b)$$

$$t_i = \frac{t_{\text{wave}}}{0.544} \left[1 - 0.30 \left(\frac{i}{H/r} \right)^2 + 0.24 \left(\frac{i}{H/r} \right)^3 + 0.14 \left(\frac{e}{H/r} \right)^2 \left(\frac{i}{H/r} \right) \right] \quad (2.7c)$$

L'amortissement de I est arrêté quand l'inclinaison descend en dessous de $I < 5 \cdot 10^{-4}$ rad afin d'empêcher les planètes d'être parfaitement dans le plan (x, y) , essentiellement pour empêcher des problèmes numériques.

2.6 Effet de l'excentricité sur le couple de corotation

Afin de tenir compte d'un effet mis en évidence par Bitsch and Kley [2010], une petite modification a été effectuée dans le calcul du couple total Γ exercé par le disque sur la planète.

En effet, il a été montré que l'excentricité d'une planète a une influence sur sa zone fer-à-cheval et par extension, sur son couple de corotation Γ_C . Un paramètre d'amortissement D , compris entre 0 et 1 a ainsi été ajouté au calcul du couple total :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot (\Gamma_L + D \cdot \Gamma_C) \quad (2.8)$$

où $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$ et Γ_L est le couple de Lindblad.

La valeur du paramètre d'amortissement D est donnée par une formule qui a été calculée pour coller au mieux aux simulations de Bitsch and Kley [2010], détaillée dans Cossou et al. [2013], et recopiée ici :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e=0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b * e}{x_s} + c\right) \right] \quad (2.9a)$$

$$a = 0.45 \quad b = 3.46 \quad c = -2.34 \quad (2.9b)$$

où x_s représente la demi-largeur de la zone fer-à-cheval divisée par le demi-grand axe.

2.7 Désactivation des effets du disque

Quand une planète sort des bornes du disque, les effets d'amortissement de e et I sont désactivés, au même titre que la migration dû à la présence du disque. Ce cas survient rarement au bord externe du disque (généralement à 100 AU), mais est beaucoup plus probable au bord interne (généralement à 0.1 AU).

2.8 Validité des éléments orbitaux

Lorsque d'une rencontre proche entre deux planètes, leurs interactions gravitationnelles rendent caduque les formules qui permettent de calculer les éléments orbitaux à partir des vitesses et positions car ceci suppose qu'on est dans le cas d'une orbite képlerienne isolée.

Dans de tels cas, on peut avoir des demi-grands axe négatifs, des excentricités supérieures à 1. Si c'est déjà en soit un problème physique, c'est aussi et surtout un problème numérique car cela fait apparaître des **Not A Number** (NaN) quand par exemple on a le demi-grand axe en argument d'une racine carrée. Ceci a donc pour conséquence concrète de faire planter le code, au mieux, ou pire, de le faire tourner avec tous les paramètres de la simulation peu à peu gangrénés par des **NaN**.

En conséquence, j'ai décidé de remplacer dans la plupart des calculs de mes simulations, le demi-grand axe par le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ qui lui n'est pas sensible à ce genre de divergences. Quand il y a une excentricité, il est clair que le rayon est différent du demi-grand axe. Mais les excentricités étant généralement faible, l'erreur faite sur le demi-grand axe reste faible. De plus les rencontres proches représentent un temps négligeable de la simulation au regard des centaines de milliers d'années sur lesquelles on intègre les orbites. On considère donc que la migration induite sur les planètes pendant leur temps de rencontre proche est totalement négligeable au regard du reste de la simulation.

Chapitre 3

Mécanismes individuels

Sommaire

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	59
3.1.1 Définition	59
3.1.2 Résonances et excentricité	60
3.1.3 Stabilité et ordre des résonances	60
3.2 Les Zones de Convergence	60
3.2.1 Existence et intérêt	60
3.2.2 Les différents types	60
3.2.3 Diagrammes de couple a-m	60
3.2.4 Résonances et Accrétions	60

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)

3.1.1 Définition

Les *résonances de moyen mouvement* sont des configurations orbitales particulières de deux planètes dans lesquelles il existe un lien entre les périodes orbitales des planètes. Exemple, si deux planètes sont en résonance 3 : 2, ça signifie que la planète interne effectuera 3 orbites pendant que la planète externe en effectuera 2.

Ces configurations particulières confèrent une stabilité accrue aux planètes. Plus la résonance est forte et plus il sera difficile pour les planètes d'en sortir.

On met généralement une résonance sous la forme $(p + q) : p$ où p et q sont des entiers. Cette forme permet de mettre en évidence un des paramètres qui permet de rendre compte de la force de la résonance. En effet, plus q est petit et plus la résonance est forte. Ainsi, les résonances avec $q = 1$ sont les plus fortes. On dit que q est l'ordre de la résonance (plus l'ordre est petit et plus la résonance est forte).



Mais ce n'est pas le seul paramètre à prendre en compte pour évaluer la force d'une résonance et je suis bien incapable de tous les décrire.

Pour une résonance $(p + q) : p$ on définit un certain nombre d'angles θ_i dits *angles de résonance* de la forme :

$$\theta_{i+1} = (p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 - [i\varpi_1 + (q - i)\varpi_2] \quad (3.1)$$

avec i allant de 0 à q ; où λ sont les longitudes moyennes, ϖ les longitudes du péricentre et les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement à la planète interne et externe. Pour une résonance $(p + q) : p$ on a donc $q + 1$ angles de résonance.

Les angles de résonances mesurent l'angle entre les deux planètes au point de conjonction. Si un seul de ces angles est en libration (oscillation autour d'une valeur moyenne) au lieu de circuler librement de 0 à 2π alors on dit que les planètes sont en résonances. Le nombre d'angles en libration permettra aussi d'avoir une idée de la force de la résonance.

Exemple : Soit une résonance 7 : 2, les angles de résonances sont :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_1 \\ \theta_2 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (4\varpi_1 + 1\varpi_2) \\ \theta_3 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (3\varpi_1 + 2\varpi_2) \\ \theta_4 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (2\varpi_1 + 3\varpi_2) \\ \theta_5 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (1\varpi_1 + 4\varpi_2) \\ \theta_6 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_2 \end{aligned}$$

Remarque : Les *lacunes de Kirkwood* font elles aussi intervenir des résonances mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, ces résonances avec Jupiter sont des

zones déplétées en astéroïdes. La raison profonde n'est pas parfaitement connue mais il semblerait que ce soit dû au chaos. Je ne saurais pas expliquer exactement ce que ça veut dire par contre.

La résonance impose une valeur de a , mais des échanges sont possibles entre les deux corps en résonance (je ne sais pas bien de quelles valeurs par contre), et il est possible que par ce biais l'excentricité puisse augmenter, et ainsi déléter la lacune de kirkwood en favorisant les collisions entre les objets en résonance et les autres qui sont dans la ceinture.

3.1.2 Résonances et excentricité

3.1.3 Stabilité et ordre des résonances

3.2 Les Zones de Convergence

3.2.1 Existence et intérêt

3.2.2 Les différents types

3.2.3 Diagrammes de couple $a-m$

3.2.4 Résonances et Accrétions

Mécanismes de formation

Sommaire

4.1 Décalage de la Zone de Convergence	62
4.1.1 Introduction	62
4.1.2 Méthode	63
4.1.3 Le cas de deux planètes	65
4.1.4 Effet du rapport de masse	67
4.2 Formation des super terre chaude	67
4.3 Effets des paramètres du disque	67
4.3.1 Viscosité du disque	67
4.3.2 Profil de densité de surface	67
4.3.3 Profil de température	67
4.3.4 Masse du disque	67
4.3.5 Table d'opacité	67

4.1 Décalage de la Zone de Convergence

Cette partie a fait l'objet d'un article, publié dans le journal *Astronomy & Astrophysics* : [Cossou et al. \[2013\]](#).

Le but de cette partie est de montrer que quand on met plusieurs planètes dans disque de gaz possédant une zone de convergence, ces dernières ne migrent pas individuellement mais au contraire se comportent comme un système ayant une migration globale.

4.1.1 Introduction

Des planètes de l'ordre de quelques unités à quelques dizaines de masses terrestres interagissent avec le disque de gaz dans lequel elles se forment et génèrent des ondes de densité dans le disque [[Goldreich and Tremaine, 1979](#)]. La planète elle même est influencée par cette onde de densité et migre par migration de Type I [[Ward, 1997](#)].

Dans les disques isothermes, la migration de Type I est gouvernée par le couple différentiel dû aux ondes de Lindblad. Pour les planètes, la migration qui en résulte est rapide et dirigée vers l'étoile centrale [[Tanaka et al., 2002](#)]. Dans les disques radiatifs, un couple apparaît dans la zone en fer-à-cheval de la planète. Ce dernier peut contrebalancer le couple différentiel de Lindblad au point de transformer la migration vers l'intérieur précédemment présentée en migration vers l'extérieur. Ainsi, dans de tels disques, la migration peut être dirigée soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur [[Paardekooper and Mellema, 2006](#), [Kley and Crida, 2008](#)]. Ceci rend possible l'existence de zone dans les disques où la migration est convergente. Ces dernières sont appelées zone de convergence [CZs; [Lyra et al., 2010](#), [Paardekooper et al., 2011](#)].

À la zone de convergence, le couple de corotation (positif) compense exactement le couple différentiel de Lindblad (négatif). Ainsi, à la zone de convergence, une planète ne migre pas. Les zones de convergences pourraient ainsi concentrer les embryons planétaires et être le lieu de formation de planètes (ou cœurs) massives [[Lyra et al., 2010](#), [Horn et al., 2012](#)].

Cependant, durant leur migration vers la zone de convergence les planètes vont interagir entre elles et se placer en résonance de moyen mouvement (Mean Motion Resonance : MMR), s'opposant ainsi à l'accrétion illimitée de matière à la zone de convergence [[Morbidelli et al., 2008](#), [Sándor et al., 2011](#)]. Malgré cela, des collisions ont bien lieu à la zone de convergence quand les embryons sont emprisonnés dans une chaîne de résonance avec suffisamment de corps pour engendrer des perturbations. De plus, la turbulence pourrait casser les résonances et augmenter le taux d'accrétion.

[Bitsch and Kley \[2010\]](#) a montré que le couple de corotation était atténué quand une planète avait une excentricité telle que son orbite oscille sur une distance de l'ordre de la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s .

Quand deux planètes sont en résonance à cause de la migration convergente, leurs excentricités sont excités de manière continues malgré la présence du disque qui a tendance à amortir les excentricités et circulariser les orbites. [par exemple [Cresswell and Nelson, 2008](#)]. Ce phénomène devrait à son tour modifier le couple de corotation et

ainsi modifier l'équilibre entre couple différentiel de Lindblad et couple de corotation. En conséquence, la migration de la planète elle-même devrait être modifiée.

Nous présentons des simulations de migration convergentes de planètes de faible masse ($M = 1 - 10 M_{\oplus}$) dans un disque de gaz idéalisé (voir § 2.2.8 page 52). On utilise un modèle simplifié de rétroaction de l'excentricité sur le couple de corotation. Nous montrons que les planètes qui prisent de manière isolées migrent à la zone de convergence, ne migrent plus au même endroit quand il y a plusieurs planètes. Au lieu de ça, elles migrent à une position d'équilibre décalée vers l'intérieur du disque qui correspond à une somme nulle des couples exercées sur le système.

La position de cet zone d'équilibre dépend de l'excentricité maintenue par perturbation mutuelle de chaque planète constituante du système.

4.1.2 Méthode

On modélise une Zone de Convergence (CZ : Convergence Zone) artificielle, qui imite une zone de convergence indépendante de la masse, c'est à dire que la position de la zone de convergence est la même pour toutes les planètes quelle que soit leur masse. En particulier, on s'intéresse à la zone de convergence que l'on peut trouver à une transition d'opacité telle que celle représentée sur [FIGURE 4.1], où l'on peut voir un renversement brutal du couple, qui passe de positif à négatif [voir par exemple [Masset, 2011](#)].

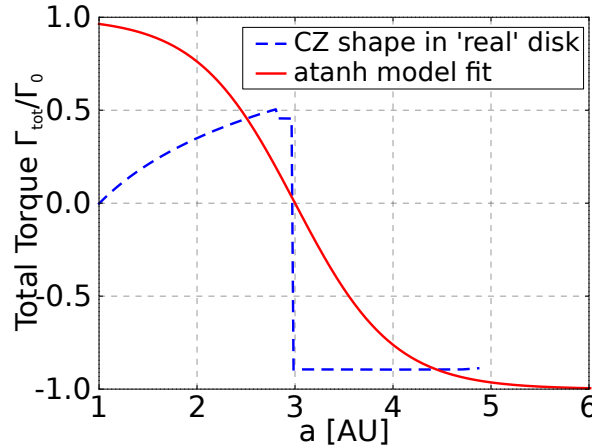


FIGURE 4.1 – Le couple total de notre disque standard est représenté en rouge. La ligne bleue pointillée représente le profil de couple ressenti par une planète de $10 M_{\oplus}$ autour d'une transition d'opacité, calculé à partir des équations de [Paardekooper et al. \[2011\]](#).

À noter qu'une fonction de Heavyside n'a pas été utilisée car la marche d'escalier dans le profil *réel* n'est due qu'au fait que la table d'opacité n'a pas été lissée, on est donc témoin ici du changement de régime numérique, mais on ne s'attend pas à une transition aussi marquée dans un cas physique et non numérique.

La position de la zone de convergence était 3 UA. À l'intérieur de 3 UA, le couple est positif et égal à $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$, la migration se fait donc vers l'extérieur. Au delà de 3 UA, le couple total est égal à $-\Gamma_0$. Ici q est le rapport entre les masses de la planète et de l'étoile, h est le rapport d'aspect qui dépend du profil de température

mais faut typiquement 0.05. Σ_p , r_p et Ω_p sont respectivement la densité de surface, la distance orbitale et la vitesse angulaire pour la planète.

Le couple total est la somme du couple différentiel de Lindblad Γ_L — que l’on suppose constant et indépendant de e — et le couple de corotation Γ_C . Le principal intérêt de la zone de convergence artificielle est de s’affranchir de la forme très complexe du profil réel et ne garder que la zone de convergence, afin d’en étudier les effets de manière isolée.

[Bitsch and Kley \[2010\]](#) montre que la structure de la zone fer-à-cheval est modifiée quand l’excentricité d’un corps massif augmente. En conséquence, son couple de corotation Γ_C , lié à cette région du disque, diminue.

Nous avons élaboré une formule simple qui reproduit l’effet de l’excentricité sur Γ_C par une simple calibration des simulations 3D de [Bitsch and Kley \[2010\]](#) :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e=0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b * e}{x_s} + c\right) \right] \quad (4.1)$$

où x_s représente la demi-largeur de la région fer-à-cheval en unité de distance orbitale de la planète considérée, e est l’excentricité de la planète, et notre ajustement statistique donne les valeurs suivantes pour les paramètres de la fonction :

$$a = 0.45 \quad b = 3.46 \quad c = -2.34 \quad (4.2)$$

On défini x_s comme [voir ?, eq. 44] :

$$x_s = \frac{1.1}{\gamma^{1/4}} \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{h}} \quad (4.3)$$

où γ est l’indice adiabatique, q le rapport entre les masses de la planète et de l’étoile, h le rapport d’aspect et b/h la longueur de lissage du potentiel gravitationnel de la planète, afin d’éviter une divergence du potentiel au voisinage de la position de la planète (problème issu des simulations hydrodynamiques 2D qui se répercute sur les formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#)).

[FIGURE 4.2 page suivante] montre que notre formule simple (4.1) correspond bien à la tendance des simulations hydrodynamiques de l’effet de e sur Γ_C , en particulier pour les excentricités faibles. Il faut tout de même noter qu’il y a peu de points « expérimentaux » et qu’il semble y avoir des fluctuations aléatoires influençant les valeurs mesurées.

Afin de réaliser nos simulations, nous avons utilisé une version modifiée de l’intégrateur **Mercury** [[Chambers, 1999](#)]. Nous avons inclus à la fois une zone de convergence artificielle (où $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_C$) et le fait que Γ_C est modifiée par l’excentricité selon (4.1). L’amortissement de l’excentricité et de l’inclinaison est modélisé via les formulées décrites dans [Cresswell and Nelson \[2008\]](#).

Nous supposons que le disque possède le profil de densité de surface suivant :

$$\Sigma(R) = 500 (R/1 \text{ AU})^{-1/2} \text{ g.cm}^{-2} \quad (4.4)$$

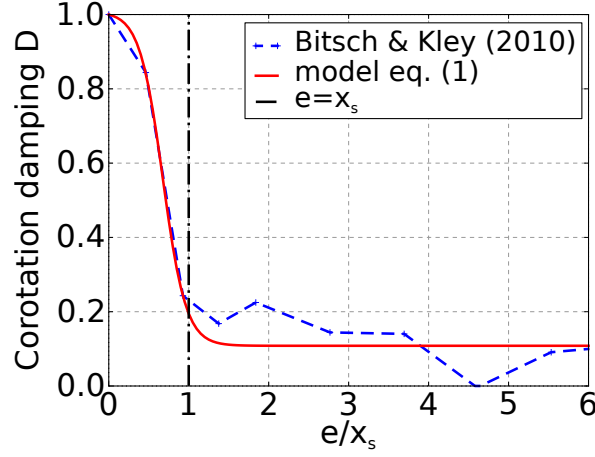


FIGURE 4.2 – Diminution du couple de corotation Γ_C en fonction de l'excentricité e . On suppose que l'atténuation ($0 < D < 1$) du couple de corotation en fonction de l'excentricité e est la même dans un disque isotherme ou radiatif. Ainsi, on extrait la valeur de D à partir de la figure 2 de Bitsch and Kley [2010] en faisant la différence entre la valeur pour le disque radiatif et celle pour le disque isotherme, et normalisant de sorte que D vale 1 dans le cas $e = 0$.

Ce profil est alors utilisé dans le calcul de Γ_0 et de l'amortissement induit par le disque sur e et I .

Pour implémenter la migration induite par le couple du disque Γ , on note que $\Gamma = \frac{dJ}{dt}$, et on défini une accélération de migration a_m telle que [Cresswell and Nelson, 2008, eq. (14)] :

$$a_m = -\frac{v}{t_m} \quad (4.5)$$

où v est la vitesse de la planète et $t_m = J/\frac{dJ}{dt}$ le temps de migration (J est le moment angulaire).

Dans toutes les simulations, les planètes étaient initialement sur des orbites à faible excentricité ($e < 0.001$) et faible inclinaison ($I < 1^\circ$). Chaque simulation a été intégrée pendant trois millions d'années, avec un pas de temps compris entre 0.4 et 3 jours.

4.1.3 Le cas de deux planètes

[FIGURE 4.3 page suivante] montre l'évolution de deux planètes de $1 M_\oplus$ initialement de part et d'autre d'une zone de convergence située à 3 UA. Alors qu'elles se rapprochent l'une de l'autre, les deux planètes croisent une série de résonances and finissent piégée dans la résonance 7:6. Les excentricités des deux planètes atteignent alors un équilibre entre excitation résonante et amortissement par le disque. Cette excentricité d'équilibre est environ égale à 0.5 fois la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s et amorti le couple de corotation à environ 80% de sa valeur nominale (quand $e = 0$).

Les planètes se stabilisent et arrêtent de migrer à 1.77 et 1.96 UA, toutes les deux à l'intérieur de la position nominale de la zone de convergence qu'elle ressentiraient si elles étaient seules et isolées dans le disque. Compte tenu de leurs excentricités, la zone de convergence de la planète la plus interne est décalée à 1.95 UA tandis qu'elle est décalée

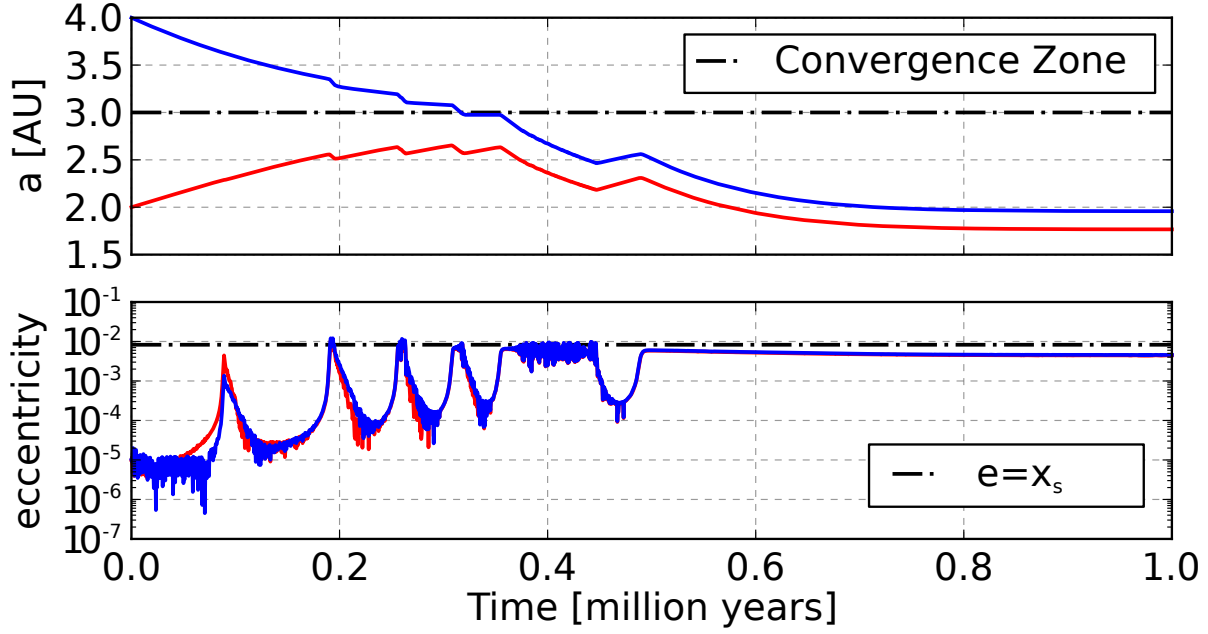


FIGURE 4.3 – Simulation de la migration convergence de deux planètes de $1 M_{\oplus}$ vers la zone de convergence située à 3 UA, la rétroaction de l'excentricité e sur le couple de corotation Γ_C étant incluse (voir Figure 4.2).

à 1.74 UA pour la planète externe (située à 1.96 UA). On constate alors qu'aucune des deux planètes n'est à une position d'équilibre. Elles continuent de migrer chacune vers une position d'équilibre qui leur est inaccessible à cause de la présence de l'autre planète.

Le décalage de la zone d'équilibre provient ici de l'équilibre nouveau entre le couple de Lindblad resté inchangé et le couple de corotation atténué par l'excentricité. *Les deux planètes se stabilisent autour d'une zone où le couple total exercé sur le système dans sa globalité est nul, même si chaque planète prise séparément ressent un couple de migration non nul.* Aucune des deux planètes n'est ici à une zone de convergence (même celle calculée en tenant compte de l'atténuation du couple de corotation).

Il est clair que les excentricités des planètes — excitées par les interactions entre planètes — sont le facteur clé pour déterminer la force du couple de corotation et la position effective de la zone de stabilisation du système. Pour deux planètes de même masse, le même comportement qualitatif est observé, quelle que soit la masse ou la résonance considérée : Une plus grande excentricité implique un amortissement plus fort du couple de corotation Γ_C et une stabilisation du système de plus en plus proche de leur étoile.

4.1.4 Effet du rapport de masse

4.2 Formation des super terre chaude

4.3 Effets des paramètres du disque

4.3.1 Viscosité du disque

4.3.2 Profil de densité de surface

4.3.3 Profil de température

4.3.4 Masse du disque

4.3.5 Table d'opacité

Discussion et limite du modèle

Sommaire

5.1	Étude de sensibilité	69
5.1.1	Le choix de la table d’opacité et son implémentation	69
5.1.2	Modélisation de la viscosité	69
5.2	Approximations	69
5.2.1	Profil de densité du gaz en 2D	69
5.2.2	La modélisation des bords du disque	69
5.2.3	Pas d’effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes	69
5.2.4	Auto-gravité	69
5.3	Idées	69
5.3.1	Snow line comme source de particules	69

5.1 Étude de sensibilité

5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation

5.1.2 Modélisation de la viscosité

5.2 Approximations

5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D

5.2.2 La modélisation des bords du disque

5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes

5.2.4 Auto-gravité

5.3 Idées

5.3.1 Snow line comme source de particules

Conclusion

J'ai cherché tout au long de ma thèse à développer un code numérique simple et modulaire avec une idée en tête, pouvoir tester les interactions et/ou différences entre différents modèles, que ce soit pour la viscosité, l'opacité, ou même des rétroactions subtiles comme celle de l'excentricité sur le couple de corotation.

Annexe

A

Formulaire

Sommaire

A.1 Variables usuelles	72
A.2 Propriétés du disque	72
A.3 Propriétés des orbites képlériennes	73

Ici sont répertoriées bon nombre de formules que j’ai utilisé et qui relient des grandeurs physique entre elles. Dans la mesure du possible, une source est donnée où la formule est mentionnée. Ceci a pour but de centraliser ces formules, liées à la physique des disques, et que j’ai parfois eu du mal à retrouver parmi la quantité d’articles ou de livres traitant du sujet.

A.1 Variables usuelles

Dans la thèse, j’utilise couramment les mêmes notations pour une propriété physique donnée. Ici je fais un inventaire des notations, afin qu’on puisse s’y référer, et pour gagner en clarté dans le texte en m’évitant de redéfinir à chaque fois les mêmes unités :

ν	Viscosité du disque
c_s	vitesse du son
α	paramètre adimensionné pour la prescription α du disque, permettant de définir une viscosité fonction de la vitesse du son
H	Échelle de hauteur du disque
$h = H/R$	rapport d’aspect du disque
Ω	vitesse angulaire d’une particule fluide ou d’une planète dans le disque
k_B	constante de Boltzmann
T	Température
μ	Masse moléculaire moyenne du gaz constituant principal du disque
Σ	Densité de surface du disque de gaz
ρ	Densité volumique du disque de gaz
q	rapport adimensionné entre la masse de la planète et la masse de son étoile

TABLE A.1 – Liste de la plupart des variables utilisées tout au long de la thèse. Les paramètres avec un p en indice indiquent simplement que c’est la valeur du paramètre à la position orbitale de la planète.

A.2 Propriétés du disque

La prescription alpha pour la viscosité d’un disque est définie par :

$$\nu = \alpha c_s H \quad (\text{A.1})$$

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (\text{A.2})$$

$$H = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{c_s}{\Omega} \quad (\text{A.4})$$

où m_H est la masse d'un atome d'hydrogène.

On considère que la densité de surface est égale à la densité volumique, intégrée sur la taille verticale $2H$ du disque.

$$\Sigma = 2\rho H \quad (\text{A.5})$$

A.3 Propriétés des orbites képlériennes

Bibliographie

- Ph André. The initial conditions for protostellar collapse : observational constraints. *EAS Publications Series*, 3 :1–38, 2002.
- C. Baruteau and F. Masset. On the Corotation Torque in a Radiatively Inefficient Disk. *ApJ*, 672 :1054–1067, January 2008. doi : 10.1086/523667.
- K. R. Bell and D. N. C. Lin. Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. *ApJ*, 427 :987–1004, June 1994. doi : 10.1086/174206.
- K. R. Bell, P. M. Cassen, H. H. Klahr, and T. Henning. The Structure and Appearance of Protostellar Accretion Disks : Limits on Disk Flaring. *ApJ*, 486 :372, September 1997. doi : 10.1086/304514.
- B. Bitsch and W. Kley. Orbital evolution of eccentric planets in radiative discs. *A&A*, 523 :A30, November 2010. doi : 10.1051/0004-6361/201014414.
- B. Bitsch and W. Kley. Range of outward migration and influence of the disc’s mass on the migration of giant planet cores. *A&A*, 536 :A77, December 2011. doi : 10.1051/0004-6361/201117202.
- J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304 :793–799, April 1999. doi : 10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.
- J. E. Chambers. An Analytic Model for the Evolution of a Viscous, Irradiated Disk. *ApJ*, 705 :1206–1214, November 2009. doi : 10.1088/0004-637X/705/2/1206.
- E. I. Chiang and P. Goldreich. Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks. *ApJ*, 490 :368, November 1997. doi : 10.1086/304869.
- C. Cossou, S. N. Raymond, and A. Pierens. Convergence zones for Type I migration : an inward shift for multiple planet systems. *A&A*, 553 :L2, May 2013. doi : 10.1051/0004-6361/201220853.
- P. Cresswell and R. P. Nelson. Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 482 :677–690, May 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20079178.

- E. D’Onghia, M. Vogelsberger, and L. Hernquist. Self-perpetuating Spiral Arms in Disk Galaxies. *ApJ*, 766 :34, March 2013. doi : 10.1088/0004-637X/766/1/34.
- A. Duquennoy and M. Mayor. Multiplicity among solar-type stars in the solar neighbourhood. II - Distribution of the orbital elements in an unbiased sample. *A&A*, 248 : 485–524, August 1991.
- D. A. Fischer and J. Valenti. The Planet-Metallicity Correlation. *ApJ*, 622 :1102–1117, April 2005. doi : 10.1086/428383.
- P. Goldreich and S. Tremaine. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233 :857–871, November 1979. doi : 10.1086/157448.
- C. Hayashi. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70 :35–53, 1981. doi : 10.1143/PTPS.70.35.
- B. Horn, W. Lyra, M.-M. Mac Low, and Z. Sándor. Orbital Migration of Interacting Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Turbulent Models. *ApJ*, 750 :34, May 2012. doi : 10.1088/0004-637X/750/1/34.
- A. W. Howard, G. W. Marcy, S. T. Bryson, J. M. Jenkins, J. F. Rowe, N. M. Batalha, W. J. Borucki, D. G. Koch, E. W. Dunham, T. N. Gautier, III, J. Van Cleve, W. D. Cochran, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Torres, T. M. Brown, R. L. Gilliland, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, D. Ciardi, F. Fressin, M. R. Haas, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Seager, L. Rogers, D. D. Sasselov, J. H. Steffen, G. S. Basri, D. Charbonneau, J. Christiansen, B. Clarke, A. Dupree, D. C. Fabrycky, D. A. Fischer, E. B. Ford, J. J. Fortney, J. Tarter, F. R. Girouard, M. J. Holman, J. A. Johnson, T. C. Klaus, P. Machalek, A. V. Moorhead, R. C. Morehead, D. Ragozzine, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, S. N. Quinn, H. Isaacson, A. Shporer, P. W. Lucas, L. M. Walkowicz, W. F. Welsh, A. Boss, E. Devore, A. Gould, J. C. Smith, R. L. Morris, A. Prsa, T. D. Morton, M. Still, S. E. Thompson, F. Mullally, M. Endl, and P. J. MacQueen. Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler. *ApJS*, 201 :15, August 2012. doi : 10.1088/0067-0049/201/2/15.
- A.W. Howard, G.W. Marcy, J.A. Johnson, D.A. Fischer, J.T. Wright, H. Isaacson, J.A. Valenti, J. Anderson, D.N.C. Lin, and S. Ida. The occurrence and mass distribution of close-in super-earths, neptunes, and jupiters. *Science*, 330(6004) :653–655, 2010.
- I. Hubeny. Vertical structure of accretion disks - A simplified analytical model. *ApJ*, 351 :632–641, March 1990. doi : 10.1086/168501.
- J.-M. Huré. On the transition to self-gravity in low mass AGN and YSO accretion discs. *A&A*, 358 :378–394, June 2000.
- J. A. Johnson, R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, S. S. Vogt, J. T. Wright, and K. M. G. Peek. A New Planet around an M Dwarf : Revealing a Correlation between Exoplanets and Stellar Mass. *ApJ*, 670 :833–840, November 2007. doi : 10.1086/521720.

- W. Kley and A. Crida. Migration of protoplanets in radiative discs. *A&A*, 487 :L9–L12, August 2008. doi : 10.1051/0004-6361:200810033.
- L Landau and E Lifschitz. *Mécanique des fluides, vol. 6*. Éditions Mir, Paris, 752pp, 1989.
- D. N. C. Lin and J. Papaloizou. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets. *ApJ*, 309 :846–857, October 1986. doi : 10.1086/164653.
- W. Lyra, S.-J. Paardekooper, and M.-M. Mac Low. Orbital Migration of Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Models : Avoiding Catastrophic Infall. *ApJ*, 715 : L68–L73, June 2010. doi : 10.1088/2041-8205/715/2/L68.
- F. S. Masset. On the Co-orbital Corotation Torque in a Viscous Disk and Its Impact on Planetary Migration. *ApJ*, 558 :453–462, September 2001. doi : 10.1086/322446.
- F. S. Masset. The co-orbital corotation torque in a viscous disk : Numerical simulations. *A&A*, 387 :605–623, May 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20020240.
- F. S. Masset. On type-I migration near opacity transitions. A generalized Lindblad torque formula for planetary population synthesis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111 :131–160, October 2011. doi : 10.1007/s10569-011-9364-0.
- F. S. Masset and J. C. B. Papaloizou. Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters. *ApJ*, 588 :494–508, May 2003. doi : 10.1086/373892.
- M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378 : 355–359, November 1995. doi : 10.1038/378355a0.
- M. Mayor, C. Lovis, F. Pepe, D. Ségransan, and S. Udry. The road to Earth twins. *Astronomische Nachrichten*, 332 :429, June 2011. doi : 10.1002/asna.201111558.
- K. Menou and J. Goodman. Low-Mass Protoplanet Migration in T Tauri α -Disks. *ApJ*, 606 :520–531, May 2004. doi : 10.1086/382947.
- A. Morbidelli, A. Crida, F. Masset, and R. P. Nelson. Building giant-planet cores at a planet trap. *A&A*, 478 :929–937, February 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20078546.
- M. Ogiwara, S. Ida, and A. Morbidelli. Accretion of terrestrial planets from oligarchs in a turbulent disk. *Icarus*, 188 :522–534, June 2007. doi : 10.1016/j.icarus.2006.12.006.
- G. I. Ogilvie and S. H. Lubow. Saturation of the Corotation Resonance in a Gaseous Disk. *ApJ*, 587 :398–406, April 2003. doi : 10.1086/368178.
- S.-J. Paardekooper and G. Mellema. Halting type I planet migration in non-isothermal disks. *A&A*, 459 :L17–L20, November 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20066304.
- S.-J. Paardekooper, C. Baruteau, and W. Kley. A torque formula for non-isothermal Type I planetary migration - II. Effects of diffusion. *MNRAS*, 410 :293–303, January 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2010.17442.x.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. 1992.

- J. E. Pringle. Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19 :137–162, 1981. doi : 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033.
- Z. Sándor, W. Lyra, and C. P. Dullemond. Formation of Planetary Cores at Type I Migration Traps. *ApJ*, 728 :L9, February 2011. doi : 10.1088/2041-8205/728/1/L9.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24 :337–355, 1973.
- H. Tanaka, T. Takeuchi, and W. R. Ward. Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, 565 :1257–1274, February 2002. doi : 10.1086/324713.
- W. R. Ward. Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 126 :261–281, April 1997. doi : 10.1006/icar.1996.5647.
- A. Wolszczan and D. A. Frail. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355 :145–147, January 1992. doi : 10.1038/355145a0.
- Z. Zhu, L. Hartmann, and C. Gammie. Nonsteady Accretion in Protostars. *ApJ*, 694 : 1045–1055, April 2009. doi : 10.1088/0004-637X/694/2/1045.