

N° d'ordre : 1234

THÈSE

Présentée par

Christophe COSSOU

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
BORDEAUX 1**

Spécialité : Astrophysique, Plasmas, Corpuscules

Migration et accrétion d'embryons planétaires dans un disque radiatif

Soutenue le : xx XXXXXXXX xxxx

Après avis de : Mmmmmmm NNNNNNN Rapporteurs
Ooooooooo PPPPPPP

Devant la Commission d'examen formée de :

Aaaaa BBBBBBBB	Astronome, Université Paris VI, LESIA	Président du Jury
Ccccccc DDDDDDDDD	Directeur de recherche, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Eee FFFFF	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB .	Examinateur
Gggggggg HHHHHH	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Iiii JJJJJJJJJJ	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Kkkkkkkkkkk LLLLLL	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Mmmmmmm NNNNNNN	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Rapporteur
Ooooooooo PPPPPPP	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB .	Rapporteur



Thèse préparée au
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux
Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers (OASU, UMR 5804-LAB)
2, rue de l'observatoire
33 271 Floirac CEDEX

Résumé

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Mots-clefs : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

MY ENGLISH THESIS TITLE

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Keywords : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

Remerciements

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Table des matières

Introduction	10
1 Physique des disques	12
1.1 Les disques protoplanétaires	13
1.1.1 Formation et évolution	13
1.1.2 Évolution hydrodynamique du disque	13
1.1.3 Profil de température	20
1.1.4 Taille et représentation des disques	24
1.1.5 Le rôle prépondérant de la poussière	25
1.1.6 La viscosité du disque	26
1.1.7 Ionisation et dead-zones	26
1.1.8 Profil de densité	27
1.1.9 Les bords du disque	27
1.2 Interaction disque-planète	27
1.2.1 Migration planétaire	27
1.2.2 L'amortissement de l'excentricité	28
1.2.3 L'amortissement de l'inclinaison	28
1.2.4 L'accrétion du gaz	28
1.2.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	29
2 Le Code N-Corps	30
2.1 Présentation de mercury	31
2.2 Disque 1D	32
2.2.1 Profil de densité de surface	32

2.2.2	Table d'opacité	32
2.2.3	Profil de température	32
2.3	Migration type I	32
2.4	Amortissement de e et I	32
2.5	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	32
3	Mécanismes individuels	33
3.1	Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	34
3.1.1	Définition	34
3.1.2	Résonances et excentricité	35
3.1.3	Stabilité et ordre des résonances	35
3.2	Les Zones de Convergence	35
3.2.1	Existence et intérêt	35
3.2.2	Les différents types	35
3.2.3	Diagrammes de couple a - m	35
3.2.4	Résonances et Accrétions	35
4	Mécanismes de formation	36
4.1	Décalage de la Zone de Convergence	37
4.2	Formation des super terre chaude	37
4.3	Effets des paramètres du disque	37
4.3.1	Viscosité du disque	37
4.3.2	Profil de densité de surface	37
4.3.3	Profil de température	37
4.3.4	Masse du disque	37
4.3.5	Table d'opacité	37
5	Discussion et limite du modèle	38
5.1	Étude de sensibilité	39
5.1.1	Le choix de la table d'opacité et son implémentation	39
5.1.2	Modélisation de la viscosité	39
5.2	Approximations	39
5.2.1	Profil de densité du gaz en 2D	39
5.2.2	La modélisation des bords du disque	39

5.2.3	Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes . .	39
5.2.4	Auto-gravité	39
5.3	Idées	39
5.3.1	Snow line comme source de particules	39
Conclusion		40
A Formulaire		41
A.1	Propriétés du disque	42
A.2	Propriétés des orbites képlériennes	42
Bibliographie		43

Introduction

Oscillant en fonction de l'humeur de l'époque le débat de la vie ailleurs et de l'existence d'autres planètes a animé la communauté scientifique depuis l'antiquité. Souvent influencé par les convictions religieuses et les modèles du système solaire en vigueur, il était parfois même dangereux d'émettre l'hypothèse que d'autres planètes ou d'autres formes de vies puissent exister, l'idée de la pluralité des civilisations étant indissociable de la question de la pluralité des mondes physiques.

Ces questions que l'on pouvait considérer comme philosophiques ou métaphysiques ont changé de registre depuis la découverte, il y a une vingtaine d'années de la première exoplanète¹ [Wolszczan and Frail, 1992].

Bien que cette dernière fut découverte en 1992, c'est véritablement en 1995 avec 51 Peg b [Mayor and Queloz, 1995] que la chasse aux exoplanètes a véritablement commencé. Depuis, multipliant les campagnes d'observations, les missions dédiées et les techniques de détection, on arrive, 20 ans après la première découverte à un catalogue d'exoplanètes toujours plus fourni, montrant une population extrêmement riche et variée. Le nombre variant continuellement, il n'y a pas de sens à donner un chiffre sans la date associée mais au jour du 20 février 2013, on compte pas moins de 861 planètes confirmées.

Avant toute chose, il est important de noter le nombre. Non pas le nombre exact mais plutôt les conséquences qu'implique une liste de plusieurs centaines de planètes : Ce ne sont pas des objets rares ! Si auparavant on pouvait encore en douter, il ne fait aujourd'hui plus aucun doute que les planètes sont des objets communs. C'est d'autant plus flagrant quand on note que la grande majorité des exoplanètes détectées l'ont été autour d'étoiles à moins de 400 pc du Soleil comme illustré dans [FIGURE 1 page ci-contre].

En multipliant les méthodes de détections et les instruments, et surtout en ayant de plus en plus de planètes, il devient possible d'estimer la probabilité pour qu'une étoile héberge au moins une planète [Mayor et al., 2011]. D'autres études estiment même la sensibilité de cette fréquence d'occurrence en fonction de paramètres stellaires [Fischer and Valenti, 2005, Johnson et al., 2007, Howard et al., 2012] ou planétaires [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010].

Mais le point qui me semble le plus intéressant est la découverte de types de planètes

1. Planète orbitant autour d'une étoile autre que notre Soleil.



FIGURE 1 – Image de la voie lactée avec indication de la position approximative du système solaire ainsi que de la zone (en noir) contenant la majorité des exoplanètes détectées à ce jour.

qui n'existent pas dans le système solaire. En un mot : diversité. Que ce soient les jupiters chauds, comme 51 Peg b ou les super terres comme Gliese 1214 b, ces planètes n'ont pas d'équivalent dans le système solaire. Ces variétés de composition, de taille, de systèmes nous offrent un champ de connaissance toujours plus grand dans lequel tester nos modèles de formations planétaire. Ils nous permettent aussi de mieux comprendre notre propre système et comment il s'est formé, et surtout de le placer dans cette immense horlogerie qu'est le catalogue de systèmes exoplanétaires à notre disposition.

Physique des disques

Sommaire

1.1 Les disques protoplanétaires	13
1.1.1 Formation et évolution	13
1.1.2 Évolution hydrodynamique du disque	13
Bilan de masse	15
Bilan de moment cinétique/angularaire	16
Conclusion de la partie	20
1.1.3 Profil de température	20
Refroidissement radiatif	21
Chauffage par l'enveloppe	21
Chauffage par l'étoile	22
Chauffage visqueux	22
1.1.4 Taille et représentation des disques	24
1.1.5 Le rôle prépondérant de la poussière	25
1.1.6 La viscosité du disque	26
Les disques alpha	26
1.1.7 Ionisation et dead-zones	26
1.1.8 Profil de densité	27
1.1.9 Les bords du disque	27
1.2 Interaction disque-planète	27
1.2.1 Migration planétaire	27
Type I	27
Type II	28
Type III	28
1.2.2 L'amortissement de l'excentricité	28
1.2.3 L'amortissement de l'inclinaison	28
1.2.4 L'accrétion du gaz	28
1.2.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	29

1.1 Les disques protoplanétaires

1.1.1 Formation et évolution

Les planètes se forment à partir d'un disque protoplanétaire constitué de gaz et de poussière. On observe de tels disques autour d'étoiles jeunes, essentiellement pendant les premiers millions d'années de leur existence. Il peut sembler étrange de voir que les disques d'accrétion sont aussi courants dans l'univers et surtout de voir qu'il apparaît spontanément un axe de rotation.

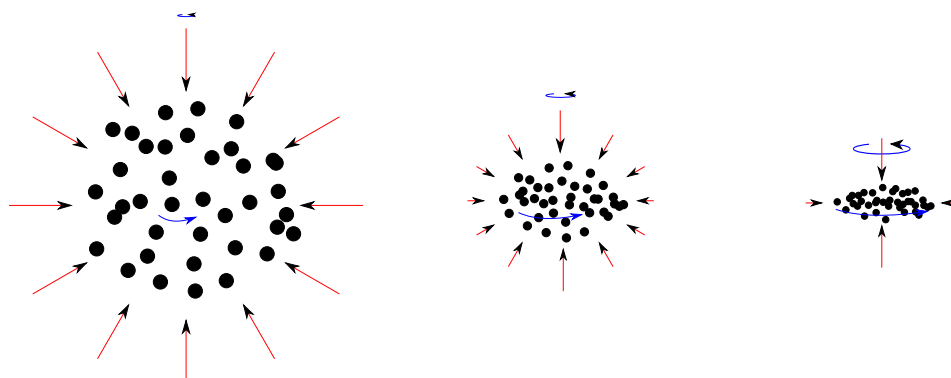


FIGURE 1.1 – Schéma de l'effondrement d'un nuage moléculaire, représenté par un amas éparé de cellules de gaz représentées par des points noirs.

Figure 1.1 montre le principe de l'effondrement gravitationnel d'un nuage. Loin de moi l'idée de comparer les patineuses avec un nuage de gaz mais pour illustrer l'effondrement gravitationnel d'un nuage moléculaire, rien de mieux que le patinage artistique.

Quand une patineuse tourne sur elle-même, vous observerez qu'en ramenant les bras le long du corps, sa rotation s'accélère. À l'inverse, sa rotation diminue quand elle écarte les bras. C'est une illustration de la conservation du moment angulaire.

Pour un nuage moléculaire c'est exactement pareil. À mesure que le nuage s'effondre sur lui-même, et afin de satisfaire à la conservation du moment angulaire, ce dernier voit sa rotation accélérer. C'est ainsi que le disque d'accrétion, résultat de l'effondrement du nuage de gaz, est en rotation. L'effondrement d'un nuage moléculaire étant beaucoup plus violent que le fait de ramener ses bras le long de son corps, l'accélération de la rotation est elle aussi beaucoup plus drastique dans le cas du nuage.

Initialement, il est hautement improbable que le moment angulaire du nuage soit parfaitement nul. C'est ainsi que même si sa rotation est imperceptible lors des premiers stades de son effondrement gravitationnel, le disque d'accrétion fini toujours en rotation.

1.1.2 Évolution hydrodynamique du disque

Avant de considérer l'évolution d'un disque, il est important de regarder sa masse par rapport à la masse de l'étoile centrale. En effet, si la masse du disque est de l'ordre de la masse de l'étoile, alors des instabilités se développent et on ne peut plus négliger l'autogravité du disque.

Le *paramètre de Toomre* Q , défini par :

$$Q = \frac{\kappa c_s^2}{\pi G \Sigma} \quad (1.1)$$

est un indicateur de la stabilité du disque par rapport à l'autogravité.

La densité de surface Σ mesure l'importance de l'*auto-gravité*. La vitesse du son c_s est liée à la pression thermique ; la *fréquence épicyclique* κ détermine quant à elle la force du cisaillement dans le disque.

Si $Q < 1$ alors le gaz est instable gravitationnellement et il commence à s'effondrer sur lui même et former des « tas » de matière. Si $Q > 1$, le disque est stable.

Nous ne considérerons que des disques dont la masse M_d est faible devant la masse de l'étoile M_\star :

$$\frac{M_d}{M_\star} \lesssim 0.1 \quad (1.2)$$

Si tel n'était pas le cas, le temps pour que le disque perde suffisamment de masse pour se retrouver dans le cas qui nous intéresse sera court devant la vie du disque et le temps de formation planétaire. Étant donné qu'on ne s'intéresse qu'aux derniers stades de la formation planétaire, à savoir quand les embryons planétaires ont une masse de l'ordre du dixième de masse terrestre au minimum, il est raisonnable de penser que le disque sera dans un stade peu dense où l'approximation $Q > 1$ sera valable.

Dans un tel cas, c'est le potentiel gravitationnel de l'étoile qui domine la dynamique du gaz. En négligeant l'effet de la pression de ce dernier, on peut donc écrire la vitesse angulaire du gaz comme étant égale à la vitesse angulaire képlérienne :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\star}{r^3}} \quad (1.3)$$

où G est la constante de gravitation, et r la distance à l'étoile. Dans la pratique, il est à noter que la vitesse est légèrement sous-képlérienne.

À l'instar des planètes du système solaire qui orbitent autour du Soleil d'autant plus vite qu'elle sont proche de ce dernier, les éléments fluides du disques de gaz vont orbiter beaucoup plus vite au bord interne qu'ils ne le font au bord externe. Il existe donc une force de cisaillement entre deux anneaux de gaz concentriques, dûs à leur différence de vitesse. Cette différence de vitesse génère des frottements à cause de la viscosité du disque ν (dont nous parlerons plus en détail plus loin [§ ?? page ??]) qui chauffe le gaz en lui faisant perdre de l'énergie. En conséquence, une partie de l'énergie gravitationnelle du gaz est convertie en chaleur, qui est ensuite évacuée par le rayonnement de corps noir du gaz.

La première conséquence est qu'un terme visqueux va apparaître dans l'équation de l'énergie, comme nous le verrons par la suite.

La deuxième conséquence, c'est que le gaz perd de l'énergie, et donc dérive lentement vers l'étoile centrale qui accrete petit à petit le gaz du disque.

On définit donc une vitesse de dérive négative $\vec{v}_d = v_r \hat{e}_r$, orientée vers l'étoile, qui entraîne petit à petit le gaz du disque (avec v_r négatif).

Dans la suite de la section, nous allons nous intéresser à la conservation de différentes quantités, que ce soit la masse ou le moment angulaire. Pour cela nous allons définir un anneau de référence, portion du disque sur laquelle nous allons faire le bilan. Le but est ici de présenter d'où viennent les équations et plus précisément d'où viennent les termes des équations.

Afin de décrire l'évolution hydrodynamique du disque de gaz, nous allons utiliser successivement la **conservation de la masse**, et la **conservation du moment angulaire**.

Bilan de masse

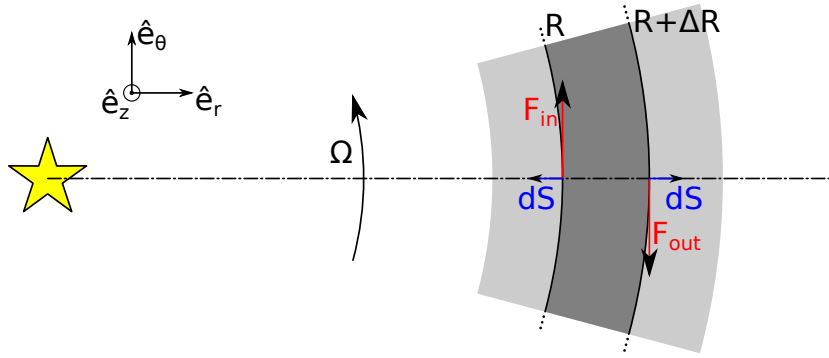


FIGURE 1.2 – Représentation d'un anneau de largeur Δr et du bilan de moment angulaire de ce dernier.

On cherche dans un premier temps à faire le bilan de masse de l'anneau considéré. Sa masse s'écrit :

$$m_a = 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \quad (1.4)$$

Soit $v_r \hat{e}_r$ la vitesse radiale du gaz (avec $v_r < 0$ dans notre cas). Cette vitesse est responsable d'un certain taux d'accrétion du gaz du disque sur l'étoile centrale. On cherche maintenant à modéliser cette accrétion pour le bilan de moment cinétique sur l'anneau.

Pour cela, on cherche à exprimer la variation de masse de l'anneau, ainsi que le moment cinétique emporté par cette variation de masse.

Au bord interne R , par unité de temps, la masse entrant ou sortant de l'anneau peut-être exprimée comme un flux :

$$dF_M = \Sigma \cdot 2\pi r \cdot \left(-\vec{v}_r \cdot \vec{dS} \right) \quad (1.5)$$

En effet, en multipliant la circonférence de l'anneau par la vitesse, on obtient une sorte de surface par unité de temps qui représente ce qui sort de la frontière virtuelle représentée par l'anneau en $r = R$.

On note aussi qu'on effectue le produit scalaire entre \overrightarrow{dS} , le vecteur élément de surface, orienté vers l'extérieur de l'anneau et la vitesse. Un signe moins est appliqué, car si le vecteur vitesse et l'élément de surface sont colinéaires, alors la masse sort de l'anneau, c'est donc un flux négatif.

On a ainsi aux deux bords de l'anneau :

$$dF_M(R) = \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) \quad (1.6a)$$

$$dF_M(R + \Delta R) = -2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R) \quad (1.6b)$$

v_r étant négatif, on a bien une perte de masse en $r = R$ et un gain de masse en $r = R + \Delta R$.

La conservation de la masse implique alors que la dérivée temporelle de la masse de l'anneau est égale au flux de masse à travers sa surface. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma(R)) = dF_M(R) + dF_M(R + \Delta R)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma(R)) = \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) - 2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R)$$

R et ΔR sont des variables indépendantes du temps. On peut donc les sortir de la dérivée partielle en fonction du temps.

En faisant passer le terme ΔR dans le second membre de l'équation, on fait apparaître des termes de la forme

$$\frac{U(R + \Delta R) - U(R)}{\Delta R}$$

En faisant tendre l'épaisseur ΔR de l'anneau vers 0, on fait ainsi apparaître une forme différentielle :

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{U(R + \Delta R) - U(R)}{\Delta R} = \frac{\partial U}{\partial r}(R)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (R v_r \Sigma) = 0 \quad (1.7)$$

Bilan de moment cinétique/angularaire

On cherche maintenant à faire le bilan de moment cinétique de ce même anneau. Son moment cinétique est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{J}_a &= \vec{R} \wedge (m_a \overrightarrow{v(R)}) \\ &= m_a \cdot R \cdot R \Omega(R) \\ &= 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \cdot R \cdot R \Omega(R) \\ \vec{J}_a &= 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment (1.6 page précédente) :

$$\begin{aligned} dJ(R) &= \vec{r} \wedge (dF_M(R) \vec{v}(R)) \\ &= dF_M(R) \cdot R^2 \Omega(R) \hat{e}_z \\ dJ(R) &= 2\pi v_r(R) \Sigma(R) \cdot R^3 \Omega(R) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.9a)$$

$$\begin{aligned} dJ(R + \Delta R) &= \vec{r} \wedge (dM(R + \Delta R) \vec{v}(R + \Delta R)) \\ &= dF_M(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^2 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \\ dJ(R + \Delta R) &= 2\pi v_r(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^3 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.9b)$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

Le taux de cisaillement A est donné par :

$$A = r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.10)$$

et est une illustration de la viscosité d'un fluide. Plus le fluide est visqueux, et moins le cisaillement est important. C'est à dire que plus un fluide est visqueux, et plus son comportement se rapproche de celui d'un solide. En conséquence, par frottement, les éléments fluides sont agglomérés, et le gradient de vitesse est très faible, le cisaillement l'est aussi par extension.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$dF_{\text{vis}} = \nu \Sigma A = \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.11)$$

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi R \times dF_{\text{vis}}(R) \\ \vec{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi \nu \Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dr}(R) \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi(R + \Delta R) \times dF_{\text{vis}}(R + \Delta R) \\ \vec{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi \nu \Sigma(R + \Delta R)^2 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) \cdot \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.12b)$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation \hat{e}_θ . À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\text{in}} &= R\hat{e}_r \wedge \vec{F}_{\text{in}} \\ \vec{\Gamma}_{\text{in}} &= 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{1.13a}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\text{out}} &= (R + \Delta R)\hat{e}_r \wedge \vec{F}_{\text{out}} \\ \vec{\Gamma}_{\text{out}} &= 2\pi\nu\Sigma(R + \Delta R)^3 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{1.13b}$$

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{dJ_a}{dt} = dJ(R + \Delta R) + dJ(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}}\tag{1.14}$$

En utilisant (1.8 page 16), (1.9 page précédente), (1.13), dans (1.14)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R)) &= -(R + \Delta R)^3 v_R(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \Omega(R + \Delta R) \\ &\quad + R^3 v_R(R) \Sigma(R) \Omega(R) + [\nu(R + \Delta R)^3 \Sigma(R + \Delta R) \\ &\quad \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) - \nu \Sigma(R) R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R)]\end{aligned}$$

On fait tendre ΔR vers 0, et de manière similaire au bilan de masse obtenu précédemment, il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 \Sigma \Omega) = -\frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t sont des variables indépendantes, on peut donc sortir R de la dérivée partielle temporelle afin de faire apparaître une forme qui fait penser à une équation de continuité.

$$R \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \Sigma \Omega) = -\frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t étant des variables indépendantes, on peut écrire :

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)\tag{1.15}$$

On suppose que $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ vu que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps (on ne considère pas une masse variable de l'étoile due à l'accrétion), et sachant que R ne dépend pas explicitement de t , en utilisant la formule :

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \cdot R^2 \Omega) = (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \cancel{\Sigma \frac{\partial R^2 \Omega}{\partial t}}^0 \quad (1.16)$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma \cdot R^2 \Omega) \\ &= (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) \end{aligned} \quad (1.17)$$

En utilisant (1.16) et (1.17) dans (1.15 page ci-contre), on fait alors apparaître (1.7 page 16), ce qui donne :

$$\begin{aligned} R (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ (R^2 \Omega) \left[\cancel{R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma)}^0 \right] + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

On injecte alors (1.18) dans (1.7 page 16) afin de supprimer v_r de l'expression et obtenir finalement :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \right]$$

On décale le signe moins au niveau de la dérivée de la vitesse angulaire, cette dernière étant généralement négative, ça permet d'avoir un terme positif :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(-\frac{d\Omega}{dr} \right) \right] \right\} \quad (1.19)$$

On fait maintenant l'approximation que le mouvement est képlérien, avec pour première conséquence que $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$. On peut alors simplifier l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r^5}} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \sqrt{\frac{r}{GM}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma \frac{3}{2} \sqrt{GM} r^{1/2} \right] \right\}\end{aligned}$$

Conclusion de la partie

On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^{1/2} \right) \right] \quad (1.20)$$

Cette équation a nécessité les approximations suivantes :

1. On suppose que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps ($\frac{d\Omega}{dt} = 0$), c'est à dire que la masse de l'étoile est constante, l'accrétion ayant un effet négligeable.
2. On suppose que le mouvement du gaz est képlérien $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, la pression du gaz rendant le mouvement légèrement sous-képlérien.

1.1.3 Profil de température

Du point de vue de la température, il y a principalement deux types de disques :

- les *disques actifs* : la source de température est le disque lui même, qui par *chauffage visqueux* (frottements) va convertir de l'énergie gravitationnelle en chaleur ;
- les *disques passifs* : la source de chaleur/température est l'étoile centrale qui éclaire le disque.

Un disque peut à la fois être actif et passif, mais généralement on essaie d'approximer, de considérer que l'un est négligeable devant l'autre. De plus, un disque aura des zones actives et des zones passives, c'est à dire que certaines zones seront principalement chauffées par la viscosité alors que d'autres le seront par l'*irradiation de l'étoile*.

Afin de déterminer le profil de température, il faut écrire l'équation de conservation de l'énergie, qui va tenir compte de tous les termes source et toutes les pertes, par unité de surface.

On a tout d'abord les pertes par rayonnement de corps noir. Ensuite, il y a les termes sources, qui peuvent dépendre en fonction de la physique que l'on considère. Pour notre cas, il y a un terme dû à l'enveloppe du disque, un dû à l'irradiation de l'étoile centrale, et enfin un dernier dû au chauffage visqueux.

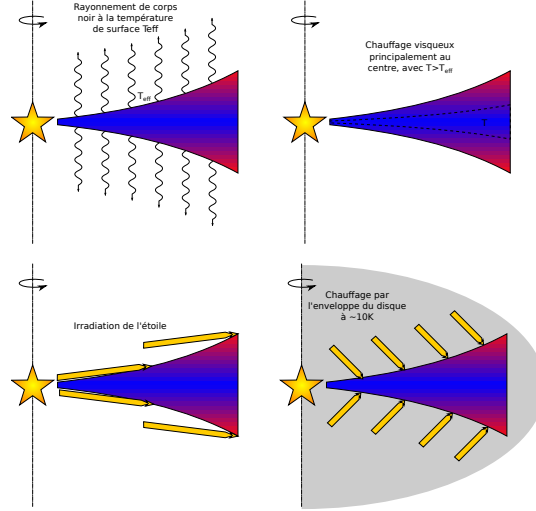


FIGURE 1.3 – Représentation du bilan thermique d'un disque

Refroidissement radiatif

Par toute la surface du disque, qui est à une température T_{eff} en surface, on a des pertes par rayonnement :

$$P_{\text{cn}} = -2\sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.21)$$

où σ est la constante de Stephan. Ces dernières doivent être multiplié par deux, en effet, il y a des pertes par rayonnements des deux cotés du disque à une position donnée.

T_{eff} est une estimation de la température effective du disque à sa surface [Hubeny \[1990\]](#) :

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{T^4}{\tau_{\text{eff}}} \quad (1.22a)$$

avec

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau} \quad (1.22b)$$

où τ est la profondeur optique verticale moyenne.

Chauffage par l'enveloppe

L'enveloppe [[FIGURE 1.4 page suivante](#)] provient de l'effondrement continu du nuage moléculaire. C'est un reste diffus qui alimente continuellement le disque en matière. Mais cette enveloppe, qui possède une température que l'on fixe ici à $T_{\text{en}} = 10 \text{ K}$ contribue aussi au bilan d'énergie du disque en apportant la contribution uniforme suivante :

$$C_{\text{en}} = 2\sigma T_{\text{en}}^4 \quad (1.23)$$

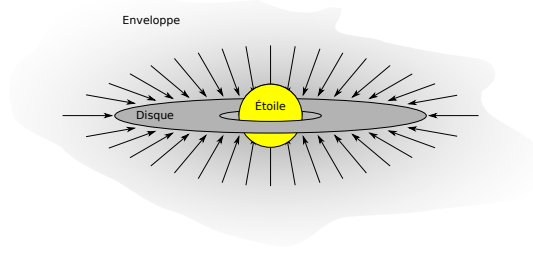


FIGURE 1.4 – Représentation de l'effondrement d'un nuage moléculaire et des différentes parties qui composent le système en effondrement.

Chauffage par l'étoile

La surface du disque reçoit de la lumière de l'étoile centrale. Soit R_* , L_* respectivement le rayon et la luminosité de l'étoile. Soit ε l'albédo du disque, que l'on peut typiquement égal à 0.5.

Le flux incident est alors [Menou and Goodman, 2004, eq. (7)] :

$$F_{\text{irr}} = \frac{L_*(1 - \varepsilon)}{4\pi r^2} \alpha \quad (1.24)$$

où α (avec $\alpha \ll 1$ représente l'angle entre les rayons incidents et la surface du disque.

D'après notamment [Chiang and Goldreich, 1997, eq. (5)], cet angle peut être écrit comme :

$$\alpha = 0.4 \frac{R_*}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \quad (1.25)$$

On note que dans cette expression, le premier terme illustre le fait que l'étoile n'est pas ponctuelle, et que ceci a un effet sur l'irradiation dès que l'on s'approche de cette dernière. Le deuxième terme représente la surface du disque qui intercepte le rayonnement incident, et qui est fonction de la variation d'échelle de hauteur du disque (plus le disque est évasé, et plus la paroi qui intercepte le rayonnement est abrupte).

Il vient enfin, en exprimant la luminosité de l'étoile en fonction de sa température et de son rayon, l'expression suivante :

$$C_{\text{irr}} = 2\sigma T_*^4 \frac{R_*^2}{r^2} (1 - \varepsilon) * \left[0.4 \frac{R_*}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \right] \quad (1.26)$$

Chauffage visqueux

On considère un fluide incompressible. Il peut paraître étonnant de considérer un disque de gaz comme étant un fluide incompressible. Mais en fait l'aspect compressible va surtout se manifester lors de la mise à l'équilibre, générant des ondes de chocs par exemple. Mais une fois le disque stabilisé tout se passe comme si on avait un fluide incompressible. C'est matérialisé par le fait que la vitesse dans le disque est considérée comme inférieure à la vitesse du son dans le milieu c_s , au delà de laquelle on aura des ondes des chocs ayant une incidence sur le bilan thermique. Ainsi donc, en considérant

un fluide incompressible, on peut partir de l'expression de la variation d'énergie cinétique (qui est l'inverse du chauffage, les pertes cinétiques étant converties en chaleur par la viscosité) [Landau and Lifschitz, 1989, (16.3)] :

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \quad (1.27)$$

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

où $\eta = \rho\nu$ est la viscosité dynamique¹

À partir de [Landau and Lifschitz, 1989, (15.8) et (15.17)], on extrait de manière assez directe l'expression du tenseur T_{ik} en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, & T_{r\varphi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ T_{\varphi\varphi} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & T_{\varphi z} &= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ T_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}, & T_{rz} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

sachant que le tenseur est symétrique en statique, ce qui donne :

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{r\varphi} & T_{rr} & T_{\varphi z} \\ T_{rz} & T_{\varphi z} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

À partir de ces expressions, nous allons procéder à quelques simplifications, moyennant quelques approximations :

- On considère tout d'abord que $v_z = 0$ en invoquant le fait que le disque est à l'équilibre hydrostatique verticalement.
- Ensuite, on néglige tous les termes en $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ car le disque est axisymétrique.
- On néglige enfin tous les termes en v_r devant les termes en v_φ étant donné que la vitesse de dérive (liée à l'accrétion) est beaucoup plus petite que la vitesse de rotation due au mouvement képlerien. En effet, la vitesse de dérive est une conséquence des pertes d'énergie par frottement visqueux entre deux anneaux due à la différence de vitesse de leur mouvement képlerien.

Seul le terme $T_{r\varphi}$ reste :

$$T_{r\varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}$$

avec $v_\varphi = r\Omega$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\Omega} + r \frac{d\Omega}{dr} - \cancel{\frac{r\Omega}{r}} \\ T_{r\varphi} &= r \frac{d\Omega}{dr} \end{aligned} \quad (1.30)$$

1. ν étant la viscosité cinématique et ρ la densité volumique de gaz.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \\
 &= -\frac{1}{2} \int \eta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2 dV \\
 &= -\frac{1}{2} \int \eta T_{r\varphi}^2 dV \\
 &= -\frac{1}{2} \iint \rho \nu \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2 dS dz
 \end{aligned}$$

En utilisant une vitesse angulaire képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int \Sigma \nu \left(-\frac{3}{2} \Omega \right)^2 dS \\
 \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{9}{8} \int \Sigma \nu \Omega^2 dS
 \end{aligned}$$

La variation d'énergie cinétique est négative, cette perte est convertie en chaleur par chauffage visqueux. Le chauffage visqueux intégré sur toute la surface du disque peut ainsi être défini comme :

$$C_{\text{vis/tot}} = -\frac{dE_c}{dt}$$

de sorte qu'on peut écrire le chauffage visqueux par unité de surface comme étant égal à :

$$C_{\text{vis}} = \frac{9}{8} \nu \Sigma \Omega^2 \quad (1.31)$$

1.1.4 Taille et représentation des disques

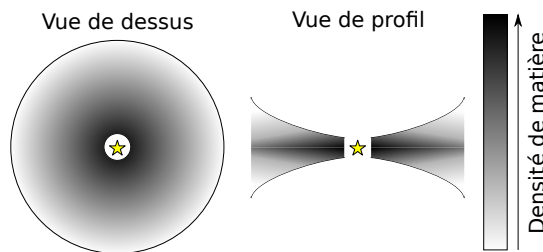


FIGURE 1.5 – Représentation de la répartition radiale et azimutale de matière dans un disque protoplanétaire.

Figure 1.5 donne une idée de ce qu'est un disque protoplanétaire. Pour autant, ce n'est qu'une représentation et il est toujours important de garder en tête quelques différences notables entre cette représentation et la réalité physique d'un disque. Quand on parle de disque protoplanétaire, on fait référence à la composante gazeuse, largement

majoritaire. Pourtant, bien que minoritaire, la poussière joue un rôle majeur et sa répartition spatiale ne suis pas forcément exactement celle du gaz, ces deux entités n'ayant pas les mêmes propriétés, elles ne sont pas strictement régies par les mêmes équations.

Tout d'abord, le bord interne est une des parties les plus complexes d'un disque protoplanétaire. Ce bord interne correspond, pour la poussière, à une température de 1500K environ, température au delà de laquelle la partie réfractaire des grains se sublime.

Le gaz, quant à lui, ne se propage pas non plus jusqu'à la surface de l'étoile en raison du champ magnétique important autour des jeunes étoiles. Le bord interne est ainsi déterminé par le rayon de co-rotation de l'étoile, c'est à dire la distance à laquelle une particule en rotation képlerienne orbite à la vitesse de rotation de l'étoile. Le champ magnétique de l'étoile tournant à la vitesse de rotation de l'étoile, ce rayon de co-rotation correspond ainsi au rayon en dessous duquel le gaz est freiné par le champ magnétique et est rapidement accrété le long des lignes de champ.

En considérant un système « étoile + disque » isolé, il n'y a pas d'arrêt brutal de la distribution de matière au bord externe qui est donc plus une limitation numérique nécessaire aux simulations qu'autre chose. La réalité est représentée plus fidèlement par une décroissante continue de la matière, difficile à représenter tant pour le bord externe que pour la distribution azimuthale du disque.

Généralement, on considère donc que la taille verticale du disque est égale à une échelle de hauteur (grandeur caractéristique de la décroissance exponentielle verticale de la densité de matière), tandis que la taille radiale du disque dépend de la physique que l'on considère. Dans mon cas j'ai souvent pris un bord externe à 100 AU.

1.1.5 Le rôle prépondérant de la poussière

Le disque est principalement composé de gaz, hydrogène et hélium en majorité. Pour autant, c'est bien la poussière qui est au centre de toutes les attentions, même si cette dernière ne représente qu'1% de la masse du disque environ.

À cause de la pression quasi inexistante dans le disque en raison des faibles densités, solide et gaz sont les seules phases existantes, il n'y a pas de liquides dans l'espace. La poussière représente la matière solide du disque, en grain plus ou moins fin, allant du nanomètre, micromètre, jusqu'à des tailles planétaires en fin de formation.

Cette poussière est un composé extrêmement complexe à manipuler. Elle contient différents composés solides en fonction de la température (à certaines températures et densité des composés se volatilisent et d'autres non). La ligne des glaces est une ligne imaginaire au delà de laquelle de la glace d'eau apparaît, augmentant de manière drastique la quantité de poussière dans le disque.

De plus, la poussière est aussi responsable de l'opacité du disque, c'est à dire sa capacité à laisser passer ou non la lumière. À travers l'opacité, la poussière a donc une influence sur la température du disque qui se refroidit plus ou moins efficacement, et qui absorbe le rayonnement stellaire plus ou moins efficacement.

1.1.6 La viscosité du disque

Quand on parle de viscosité ν dans un disque, ce n'est pas la viscosité moléculaire classique, bien trop faible aux densités rencontrées. On suppose généralement une viscosité due aux turbulences qui est beaucoup plus importante que la viscosité moléculaire, mais qui peut être traitée par les mêmes équations.

Ceci implique par contre qu'il y ait de l'ionisation. En effet, sans ionisation, il n'y a pas de couplage entre le champ magnétique et la matière, et donc pas de turbulence induite par ce même champ.

Dans la pratique, il est rare que la viscosité soit calculée de manière cohérente, ce qui serait beaucoup trop couteux en calculs, sans apporter forcément beaucoup plus de précisions étant donné les nombreuses incertitudes sur la poussière, le couplage et le champ magnétique.

La première hypothèse est de considérer une viscosité constante. Faute de mieux, c'est ce qui semble être le plus évident. On peut, si on veut affiner, utiliser une théorie dite des *disque-alpha*

Les disques alpha

On peut introduire un paramètre adimensionné α [Shakura and Sunyaev, 1973]. Dans ce formalisme, plusieurs hypothèses sont faites :

- On considère que les turbulences sont sub-soniques.
- L'échelle des tourbillons des turbulences est plus petite que l'échelle de hauteur du disque

Le mécanisme qui a le plus de chance d'être à l'origine de la viscosité alpha est l'*Instabilité Magnéto-Rotationnelle* (MRI).

En conséquence, on peut définir la viscosité ν associée aux turbulences comme étant

$$\nu = \alpha c_s H \quad (1.32)$$

où c_s est la vitesse du son et H l'échelle de hauteur du disque. α (avec $\alpha < 1$) est alors un paramètre adimensionné qui permet de définir plus ou moins l'intensité des turbulences, et donc la viscosité qui leur est associée. Une valeur typique d' α se situe entre 10^{-2} et 10^{-4} .

Même si cette prescription simplifie un peu le problème, il semble probable qu' α ne soit pas constant, et dépende de la position dans le disque. On déplace alors le problème, vu que se pose la question des variations d' α dans le disque, notamment la dépendance radiale de ce dernier.

1.1.7 Ionisation et dead-zones

Pour qu'une instabilité magnéto rotationnelle ait lieu, c'est à dire qu'il y ait un couplage entre le champ magnétique et les mouvements du disque, il faut qu'une partie

au moins du disque soit ionisé. Dans ces régions ionisées, on pourra alors avoir transport du moment angulaire via la viscosité due au champ magnétique (et turbulences engendrées).

Or, comment ioniser ? Que ce soit le rayonnement X de l'étoile centrale, des rayons cosmiques ou l'ionisation thermique, il n'est pas si évident que ça de se représenter l'ionisation totale du disque de gaz. Il est donc probable que certaines zones du disque ne soient pas ionisées, et donc que le transport du moment angulaire s'y fasse peu ou pas du tout. Ces zones, appelées *dead-zones*, sont donc des zones sans viscosité magnétique.

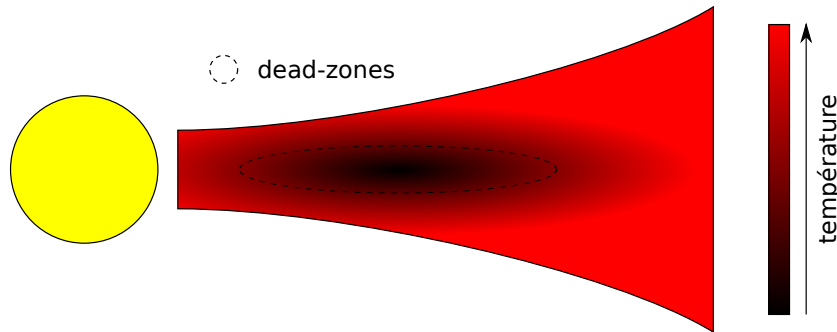


FIGURE 1.6 – Représentation d'un disque à couches (layered disk). L'ionisation d'une zone est déterminé par sa température. Ainsi, les zones internes à température plus faible ne sont pas ionisées et n'ont donc pas de viscosité dues aux turbulences magnétique (MRI). Les régions externes ne sont pas des zones mortes parce qu'elles peuvent être sujettes à des ionisations non thermiques en raison de leur densité plus faible. À distance intermédiaire, le disque est trop froid pour de l'ionisation thermique, et trop dense pour de l'ionisation non thermique.

1.1.8 Profil de densité

1.1.9 Les bords du disque

1.2 Interaction disque-planète

1.2.1 Migration planétaire

Type I

Ce type de migration ne concerne que les planètes de faible masse (de l'ordre de $10M_{\oplus}$) pour lesquelles l'interaction de marée entre la planète et le disque a une réponse linéaire (Le profil de densité surfacique reste quasiment le même). Ces planètes, qui ne creusent pas de sillon (gap) dans le disque de gaz, vont migrer vers l'intérieur.

Remarque : Pour plus de détails, se référer au chapitre 9, page 188–191 de [Barnes \[2010\]](#) ou [Ward \[1997\]](#) pour l'article original.

La présence d'une planète dans un disque de gaz entraîne la création d'ondes de densités aux *résonances de Lindblad* [[Goldreich and Tremaine, 1979](#)]. Le couplage gra-

vitational entre les ondes de densité et la planète qui les crée abouti à un *couple* qui agit sur la planète.

Lors de la création d'ondes de densité par une planète dans un disque, il se forme un déséquilibre naturel entre les couples agissant sur les disques internes et externes. La position des résonances de Lindblad externes tend à être plus proche de la planète que ne l'est celle des résonances internes.

Type II

Quand une planète dans un disque devient suffisamment massive, la réponse du disque n'est plus linéaire, et des ondes de densité induites par la planète forment des chocs non loin de là où elles sont émises. La répulsion entre le disque et la planète devient si forte qu'une cavité annulaire se forme autour de l'orbite de la planète, creusant le disque de gaz.

Une fois que la cavité est formée, la planète est dite en migration de *type II* : son orbite agit alors essentiellement comme une barrière entre les deux parties du disque de gaz, *interne* et *externe*. Du gaz peut parfois sauter le gap, ou être accrété par la planète mais cette dernière voit son mouvement régi par le disque de gaz, se retrouvant entraînée par la migration de celui-ci.

Compte tenu que la planète a une masse de l'ordre de ² la masse du disque local (avec lequel elle interagit), la migration se passe sur des temps de l'ordre du *temps visqueux* du disque.

Remarque : Pour plus de détails, se référer au chapitre 9, page 191–192 de [Barnes \[2010\]](#) ou [Lin and Papaloizou \[1986\]](#) pour des détails sur les planètes capables de former un sillon dans le disque de gaz.

Type III

Remarque : Pour plus de détails, se référer au chapitre 9, page 192–193 de [Barnes \[2010\]](#) ou [Masset and Papaloizou \[2003\]](#).

1.2.2 L'amortissement de l'excentricité

1.2.3 L'amortissement de l'inclinaison

1.2.4 L'accrétion du gaz

Dans le modèle d'*accrétion de cœur*, les planètes géantes sont d'abord des cœurs rocheux qui grossissent jusqu'à atteindre une masse critique de l'ordre de $15M_{\oplus}$. Une fois cette masse atteinte, le cœur commence à accréter rapidement du gaz jusqu'à former une géante gazeuse.

2. Quand la masse de la planète devient supérieure à la masse du disque local, l'inertie de celle-ci devient importante afin de déterminer son taux de migration

Ceci implique que la formation des planètes géantes doit se passer avant que le disque de gaz ne se dissipe (ce qui intervient au bout de 10^7 ans environ).

Les noyaux de ces planètes sont supposés se former au delà de la ligne des glaces (limite radiale virtuelle au delà de laquelle on peut trouver de l'eau sous forme solide ; autour de 4 ua). En effet, au delà de cette limite, la quantité de matière solide augmente, et donc le taux d'accrétion augmente aussi.



La formation des embryons de planètes géantes n'est toujours pas clair. On ne sait pas vraiment s'il y a une zone privilégiée ou non, la limite virtuelle de la ligne des glaces pourrait ne pas être valable, la glace ne rajoutant qu'environ 50% de masse en plus.

À noter qu'il n'y a pas de pression et donc pas de liquide dans l'espace, juste du gaz ou du solide.

Pour une simulation donnée, si on augmente le taux d'accrétion de la planète, celle-ci sera plus massive, et aura donc une inertie plus grande. Elle mettra donc plus de temps à migrer par migration Type II car son inertie s'y opposera. D'un autre côté, si la planète n'a pas encore créé de gap, la migration de Type I est plus rapide à mesure que la masse augmente.

1.2.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps

Chapitre 2

Le Code N-Corps

Sommaire

2.1	Présentation de mercury	31
2.2	Disque 1D	32
2.2.1	Profil de densité de surface	32
2.2.2	Table d'opacité	32
2.2.3	Profil de température	32
2.3	Migration type I	32
2.4	Amortissement de e et I	32
2.5	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	32

Afin d'étudier la formation planétaire et les interactions avec le disque de gaz, j'ai utilisé un code de simulation N-corps, qui permet de regarder l'évolution d'un nombre arbitraire de corps orbitant autour d'un astre central.

Ce choix est apparu naturellement. Au début de ma thèse j'ai fait quelques simulations hydrodynamiques avec le code Genesis développé par Arnaud Pierens. J'ai rapidement constaté que ce genre de simulations, bien que modélisant de manière poussée le disque, ne permettait pas d'étudier de manière approfondie la dynamique planétaire. Le temps de calcul nécessaire pour une simulation limite en effet grandement le nombre de corps ainsi que la durée d'intégration. J'ai donc souhaité me tourner vers un code N-corps, afin de privilégier la dynamique planétaire, et de modifier ce programme afin d'y inclure les effets d'un disque de gaz sur la dynamique planétaire.

J'ai ainsi gagné en temps de calcul, et j'ai ouvert un vaste champ d'investigation sur les paramètres du disque, le nombre de corps en interaction, me permettant de faire des systèmes planétaires très divers, parfois avoir plusieurs centaines d'embryons pour plusieurs millions d'années, chose impossible dans les simulations hydrodynamiques du début de ma thèse où 20 corps pendant quelques dizaines de milliers d'années était un maximum.

Ce choix a bien entendu introduit son lot d'incertitudes et d'approximations qui sont discutés dans la partie [§ 5 page 39]. La présente section a pour but de présenter le code N-corps que j'ai utilisé ainsi que les différents effets du disque que j'ai modélisé. J'ai avant tout souhaité présenter les parties qui ont des conséquences sur la physique du disque, que ce soit en terme de choix d'un modèle particulier, ou de limitations numériques qu'il est bien de garder à l'esprit quand on interprète les résultats.

2.1 Présentation de mercury

Le code N-corps choisi est le code **mercury** [Chambers, 1999]. Ce code offre la possibilité de choisir un algorithme parmi 5 différents (BS, BS2, RADAU, MVS et HYBRID), ayant des propriétés diverses. Dans le cadre de ma thèse, je n'ai utilisé que l'algorithme HYBRID, qui utilise l'algorithme MVS la plupart du temps, mais change pour l'algorithme BS2 lors de rencontres proches. Il est possible de déterminer à quel moment on considère qu'une rencontre est "proche" dans le fichier de paramètre de programme, j'ai laissé le paramètre par défaut.

La raison de ce changement est assez simple. MVS est un algorithme symplectique, c'est à dire à pas de temps constant, dans lequel on définit un hamiltonien que l'on résout pour faire évoluer les orbites. La conservation de l'énergie est moins bonne que pour un algorithme à pas de temps adaptatif, mais le point très important est que cette conservation de l'énergie est bien meilleure au cours du temps. C'est à dire que là où les algorithmes tels que BS, BS2 et RADAU verront leur erreur sur l'énergie augmenter au cours du temps, les algorithmes symplectiques vont eux voir leur erreur rester plus ou moins constante au cours du temps.

Dans le cadre de mes simulations, j'ai accordé une importance limitée aux variations d'énergie, étant donné que les couples que l'on rajoute pour simuler la présence du disque de gaz font que l'énergie n'est pas conservée pour une planète donnée. Cependant, il est

important de bien résoudre les orbites et c'est ce point qui est le plus crucial ici. En effet, quelques tests ont permis de contraindre le pas de temps minimal qu'il est nécessaire d'avoir en fonction de la distance orbitale d'une planète. La contrainte de pas de temps dans mes simulations vient donc d'une distance minimale en dessous de laquelle les orbites ne sont pas correctement calculées. Cette limite, afin d'éviter tout problème, est choisie pour être en dessous du bords interne du disque de gaz que je défini.

2.2 Disque 1D

Afin de calculer les effets d'un disque de gaz, une modélisation de ce dernier est nécessaire. Le but étant d'avoir une grande souplesse, le disque implémenté est bien entendu très simplifié. Toutes les quantités sont intégrées et invariantes selon la hauteur z et la position azimutale θ dans le disque, résultant en un modèle radial de toutes les quantités.

Dans la mesure du possible, les quantités du disque ont été calculées de manière consistante. Je vais présenter dans la suite de manière chronologique comment sont calculées les grandeurs physiques du disque.

2.2.1 Profil de densité de surface

Le profil de densité de surface est défini au début de la simulation comme une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \times R^{-\alpha} \quad (2.1)$$

où Σ_0 est la densité de surface à 1 AU et α l'indice de la loi de puissance.

Ce profil de densité de surface est défini pour une certaine étendue radiale. On définit donc un bord interne R_{in} et un bord externe R_{out} . Le bord interne est généralement à 0,1 AU et le bord externe à 100 AU.

Afin de calculer les valeurs suivantes, ce disque est échantillonné et toutes les valeurs nécessaires sont ensuite calculées à chacun de ces points.

2.2.2 Table d'opacité

2.2.3 Profil de température

2.3 Migration type I

2.4 Amortissement de e et I

2.5 Effet de l'excentricité sur le couple de corotation

Chapitre 3

Mécanismes individuels

Sommaire

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	34
3.1.1 Définition	34
3.1.2 Résonances et excentricité	35
3.1.3 Stabilité et ordre des résonances	35
3.2 Les Zones de Convergence	35
3.2.1 Existence et intérêt	35
3.2.2 Les différents types	35
3.2.3 Diagrammes de couple a-m	35
3.2.4 Résonances et Accrétions	35

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)

3.1.1 Définition

Les *résonances de moyen mouvement* sont des configurations orbitales particulières de deux planètes dans lesquelles il existe un lien entre les périodes orbitales des planètes. Exemple, si deux planètes sont en résonance 3 : 2, ça signifie que la planète interne effectuera 3 orbites pendant que la planète externe en effectuera 2.

Ces configurations particulières confèrent une stabilité accrue aux planètes. Plus la résonance est forte et plus il sera difficile pour les planètes d'en sortir.

On met généralement une résonance sous la forme $(p + q) : p$ où p et q sont des entiers. Cette forme permet de mettre en évidence un des paramètres qui permet de rendre compte de la force de la résonance. En effet, plus q est petit et plus la résonance est forte. Ainsi, les résonances avec $q = 1$ sont les plus fortes. On dit que q est l'ordre de la résonance (plus l'ordre est petit et plus la résonance est forte).



Mais ce n'est pas le seul paramètre à prendre en compte pour évaluer la force d'une résonance et je suis bien incapable de tous les décrire.

Pour une résonance $(p + q) : p$ on définit un certain nombre d'angles θ_i dits *angles de résonance* de la forme :

$$\theta_{i+1} = (p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 - [i\varpi_1 + (q - i)\varpi_2] \quad (3.1)$$

avec i allant de 0 à q ; où λ sont les longitudes moyennes, ϖ les longitudes du péricentre et les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement à la planète interne et externe. Pour une résonance $(p + q) : p$ on a donc $q + 1$ angles de résonance.

Les angles de résonances mesurent l'angle entre les deux planètes au point de conjonction. Si un seul de ces angles est en libration (oscillation autour d'une valeur moyenne) au lieu de circuler librement de 0 à 2π alors on dit que les planètes sont en résonances. Le nombre d'angles en libration permettra aussi d'avoir une idée de la force de la résonance.

Exemple : Soit une résonance 7 : 2, les angles de résonances sont :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_1 \\ \theta_2 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (4\varpi_1 + 1\varpi_2) \\ \theta_3 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (3\varpi_1 + 2\varpi_2) \\ \theta_4 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (2\varpi_1 + 3\varpi_2) \\ \theta_5 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (1\varpi_1 + 4\varpi_2) \\ \theta_6 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_2 \end{aligned}$$

Remarque : Les *lacunes de Kirkwood* font elles aussi intervenir des résonances mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, ces résonances avec Jupiter sont des

zones déplétées en astéroïdes. La raison profonde n'est pas parfaitement connue mais il semblerait que ce soit dû au chaos. Je ne saurais pas expliquer exactement ce que ça veut dire par contre.

La résonance impose une valeur de a , mais des échanges sont possibles entre les deux corps en résonance (je ne sais pas bien de quelles valeurs par contre), et il est possible que par ce biais l'excentricité puisse augmenter, et ainsi dépleter la lacune de Kirkwood en favorisant les collisions entre les objets en résonance et les autres qui sont dans la ceinture.

3.1.2 Résonances et excentricité

3.1.3 Stabilité et ordre des résonances

3.2 Les Zones de Convergence

3.2.1 Existence et intérêt

3.2.2 Les différents types

3.2.3 Diagrammes de couple a - m

3.2.4 Résonances et Accrétions

Chapitre 4

Mécanismes de formation

Sommaire

4.1	Décalage de la Zone de Convergence	37
4.2	Formation des super terre chaude	37
4.3	Effets des paramètres du disque	37
4.3.1	Viscosité du disque	37
4.3.2	Profil de densité de surface	37
4.3.3	Profil de température	37
4.3.4	Masse du disque	37
4.3.5	Table d'opacité	37

4.1 Décalage de la Zone de Convergence

4.2 Formation des super terre chaude

4.3 Effets des paramètres du disque

4.3.1 Viscosité du disque

4.3.2 Profil de densité de surface

4.3.3 Profil de température

4.3.4 Masse du disque

4.3.5 Table d'opacité

Discussion et limite du modèle

Sommaire

5.1 Étude de sensibilité	39
5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation	39
5.1.2 Modélisation de la viscosité	39
5.2 Approximations	39
5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D	39
5.2.2 La modélisation des bords du disque	39
5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes	39
5.2.4 Auto-gravité	39
5.3 Idées	39
5.3.1 Snow line comme source de particules	39

5.1 Étude de sensibilité

5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation

5.1.2 Modélisation de la viscosité

5.2 Approximations

5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D

5.2.2 La modélisation des bords du disque

5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes

5.2.4 Auto-gravité

5.3 Idées

5.3.1 Snow line comme source de particules

Conclusion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Annexe

A

Formulaire

Sommaire

A.1 Propriétés du disque	42
A.2 Propriétés des orbites képlériennes	42

Ici sont répertoriées bon nombre de formules que j'ai utilisé et qui relient des grandeurs physique entre elles. Dans la mesure du possible, une source est donnée où la formule est mentionnée. Ceci a pour but de centraliser ces formules, liées à la physique des disques, et que j'ai parfois eu du mal à retrouver parmi la quantité d'articles ou de livres traitant du sujet.

A.1 Propriétés du disque

La prescription alpha pour la viscosité d'un disque est définie par :

$$\nu = \alpha c_s H \quad (\text{A.1})$$

$$c_s = \quad (\text{A.2})$$

$$H = \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{c_s}{\Omega} \quad (\text{A.4})$$

On considère que la densité de surface est égale à la densité volumique, intégrée sur la taille verticale $2H$ du disque.

$$\Sigma = 2\rho H \quad (\text{A.5})$$

A.2 Propriétés des orbites képlériennes

Bibliographie

- R. Barnes. *Formation and Evolution of Exoplanets*. Wiley-VCH, 2010.
- J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304 :793–799, April 1999. doi : 10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.
- E. I. Chiang and P. Goldreich. Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks. *ApJ*, 490 :368, November 1997. doi : 10.1086/304869.
- D. A. Fischer and J. Valenti. The Planet-Metallicity Correlation. *ApJ*, 622 :1102–1117, April 2005. doi : 10.1086/428383.
- P. Goldreich and S. Tremaine. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233 :857–871, November 1979. doi : 10.1086/157448.
- A. W. Howard, G. W. Marcy, S. T. Bryson, J. M. Jenkins, J. F. Rowe, N. M. Batalha, W. J. Borucki, D. G. Koch, E. W. Dunham, T. N. Gautier, III, J. Van Cleve, W. D. Cochran, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Torres, T. M. Brown, R. L. Gilliland, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, D. Ciardi, F. Fressin, M. R. Haas, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Seager, L. Rogers, D. D. Sasselov, J. H. Steffen, G. S. Basri, D. Charbonneau, J. Christiansen, B. Clarke, A. Dupree, D. C. Fabrycky, D. A. Fischer, E. B. Ford, J. J. Fortney, J. Tarter, F. R. Girouard, M. J. Holman, J. A. Johnson, T. C. Klaus, P. Machalek, A. V. Moorhead, R. C. Morehead, D. Ragozzine, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, S. N. Quinn, H. Isaacson, A. Shporer, P. W. Lucas, L. M. Walkowicz, W. F. Welsh, A. Boss, E. Devore, A. Gould, J. C. Smith, R. L. Morris, A. Prsa, T. D. Morton, M. Still, S. E. Thompson, F. Mullally, M. Endl, and P. J. MacQueen. Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler. *ApJS*, 201 :15, August 2012. doi : 10.1088/0067-0049/201/2/15.
- A.W. Howard, G.W. Marcy, J.A. Johnson, D.A. Fischer, J.T. Wright, H. Isaacson, J.A. Valenti, J. Anderson, D.N.C. Lin, and S. Ida. The occurrence and mass distribution of close-in super-earths, neptunes, and jupiters. *Science*, 330(6004) :653–655, 2010.
- I. Hubeny. Vertical structure of accretion disks - A simplified analytical model. *ApJ*, 351 :632–641, March 1990. doi : 10.1086/168501.

- J. A. Johnson, R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, S. S. Vogt, J. T. Wright, and K. M. G. Peek. A New Planet around an M Dwarf : Revealing a Correlation between Exoplanets and Stellar Mass. *ApJ*, 670 :833–840, November 2007. doi : 10.1086/521720.
- L Landau and E Lifschitz. *Mécanique des fluides, vol. 6*. Éditions Mir, Paris, 752pp, 1989.
- D. N. C. Lin and J. Papaloizou. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets. *ApJ*, 309 :846–857, October 1986. doi : 10.1086/164653.
- F. S. Masset and J. C. B. Papaloizou. Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters. *ApJ*, 588 :494–508, May 2003. doi : 10.1086/373892.
- M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378 : 355–359, November 1995. doi : 10.1038/378355a0.
- M. Mayor, C. Lovis, F. Pepe, D. Ségransan, and S. Udry. The road to Earth twins. *Astronomische Nachrichten*, 332 :429, June 2011. doi : 10.1002/asna.201111558.
- K. Menou and J. Goodman. Low-Mass Protoplanet Migration in T Tauri α -Disks. *ApJ*, 606 :520–531, May 2004. doi : 10.1086/382947.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24 :337–355, 1973.
- W. R. Ward. Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 126 :261–281, April 1997. doi : 10.1006/icar.1996.5647.
- A. Wolszczan and D. A. Frail. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355 :145–147, January 1992. doi : 10.1038/355145a0.