

THÈSE

Présentée par

Christophe COSSOU

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
BORDEAUX 1**

Spécialité : Astrophysique, Plasmas, Corpuscules

Migration et accrétion d'embryons planétaires dans un disque radiatif

Soutenue le : xx XXXXXXXX xxxx

Après avis de : Alessandro MORBIDELLI Rapporteurs
Caroline TERQUEM

Devant la Commission d'examen formée de :

Aaaaa BBBBBBBB	Astronome, Université Paris VI, LESIA	Président du Jury
Sean N. RAYMOND	Chargé de recherche, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Arnaud PIERENS	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Richard P. NELSON	Professor, Queen Mary, University of London	Examineur
Iiii JJJJJJJJJJ	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examineur
Kkkkkkkkkkkk LLLLLL	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examineur
Alessandro MORBIDELLI	Chargé de Recherche, Nice, OCA	Rapporteur
Caroline TERQUEM	Lecturer, Oxford, University of Oxford	Rapporteur



Thèse préparée au
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux
Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers (OASU, UMR 5804-LAB)
2, rue de l'observatoire
33 271 Floirac CEDEX

Résumé

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Mots-clefs : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

MY ENGLISH THESIS TITLE

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Keywords : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

Remerciements

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetur. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetur consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Table des matières

Introduction	11
1 Formation Planétaire	13
1.1 Formation stellaire	14
1.2 Les disques protoplanétaires	14
1.2.1 Formation et évolution	14
1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque	15
1.2.3 Profil de température	22
1.2.4 La viscosité du disque	28
1.2.5 La poussière	30
1.2.6 Opacité du disque	31
1.2.7 Profil de densité de surface	32
1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation	33
1.3 Interaction disque-planète	35
1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I	35
1.3.2 Migration des planètes massives : type II	42
1.3.3 L’amortissement de l’excentricité et de l’inclinaison	43
1.3.4 L’accrétion du gaz	44
1.3.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	44
2 Le Code N-Corps	45
2.1 Présentation de mercury	46
2.2 Mode d’emploi du code N-corps modifié	47
2.2.1 Note technique	47

2.2.2	Paramètres divers	47
2.2.3	Densité de surface	48
2.2.4	Irradiation de l'étoile centrale	49
2.2.5	Viscosité	49
2.2.6	Opacité	50
2.2.7	Turbulence	51
2.2.8	Migration	52
2.3	Disque 1D	55
2.3.1	Profil de densité de surface	55
2.3.2	Table d'opacité	56
2.3.3	Profil de température	56
2.4	Migration type I	56
2.5	Amortissement de e et I	57
2.6	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	57
2.7	Désactivation des effets du disque	58
2.8	Validité des éléments orbitaux	58
3	Mécanismes individuels	59
3.1	Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	60
3.1.1	Définition	60
3.1.2	Résonances et excentricité	61
3.1.3	Stabilité et ordre des résonances	61
3.2	Les Zones de Convergence	61
3.2.1	Existence et intérêt	61
3.2.2	Les différents types	61
3.2.3	Diagrammes de couple a - m	61
3.2.4	Résonances et Accrétions	61
4	Mécanismes de formation	62
4.1	Décalage de la Zone de Convergence	63
4.1.1	Introduction	63
4.1.2	Méthode	64
4.1.3	Le cas de deux planètes	66

4.1.4	Effet du rapport de masse	67
4.1.5	Effet des résonances	69
4.1.6	Évolution avec plus de deux planètes	70
4.1.7	Discussion	72
4.2	Formation des super terre chaude	74
4.2.1	Effet de la distribution de masse	75
4.3	Effets des paramètres du disque	75
4.3.1	Viscosité du disque	75
4.3.2	Profil de densité de surface	75
4.3.3	Profil de température	75
4.3.4	Masse du disque	75
4.3.5	Table d'opacité	75
4.3.6	Longueur de lissage	75
5	Discussion et limite du modèle	76
5.1	Étude de sensibilité	77
5.1.1	Le choix de la table d'opacité et son implémentation	77
5.1.2	Modélisation de la viscosité	77
5.2	Approximations	77
5.2.1	Profil de densité du gaz en 2D	77
5.2.2	La modélisation des bords du disque	77
5.2.3	Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes . .	77
5.2.4	Auto-gravité	77
5.3	Idées	77
5.3.1	Snow line comme source de particules	77
	Conclusion	78
A	Formulaire	79
A.1	Variables usuelles	80
A.2	Propriétés du disque	80
A.3	Propriétés des orbites képlériennes	81
B	Physique des disques	82

B.1 Bilan de moment angulaire	83
Bibliographie	87

Introduction

Oscillant en fonction de l'humeur de l'époque le débat de la vie ailleurs et de l'existence d'autres planètes a animé la communauté scientifique depuis l'antiquité. Souvent influencé par les convictions religieuses et les modèles du système solaire en vigueur, il était parfois même dangereux d'émettre l'hypothèse que d'autres planètes ou d'autres formes de vies puissent exister, l'idée de la pluralité des civilisations étant indissociable de la question de la pluralité des mondes physiques.

Ces questions que l'on pouvait considérer comme philosophiques ou métaphysiques ont changé de registre depuis la découverte, il y a une vingtaine d'années de la première exoplanète ¹ [Wolszczan and Frail, 1992].

Bien que cette dernière fut découverte en 1992, c'est véritablement en 1995 avec 51 Peg b [Mayor and Queloz, 1995] que la chasse aux exoplanètes a véritablement commencé. Depuis, multipliant les campagnes d'observations, les missions dédiées et les techniques de détection, on arrive, 20 ans après la première découverte à un catalogue d'exoplanètes toujours plus fourni, montrant une population extrêmement riche et variée. Le nombre variant continuellement, il n'y a pas de sens à donner un chiffre sans la date associée mais au jour du 20 février 2013, on compte pas moins de 861 planètes confirmées.

Avant toute chose, il est important de noter le nombre. Non pas le nombre exact mais plutôt les conséquences qu'implique une liste de plusieurs centaines de planètes : Ce ne sont pas des objets rares ! Si auparavant on pouvait encore en douter, il ne fait aujourd'hui plus aucun doute que les planètes sont des objets communs. C'est d'autant plus flagrant quand on note que la grande majorité des exoplanètes détectées l'ont été autour d'étoiles à moins de 400 pc du Soleil comme illustré dans [FIGURE 1 page suivante].

En multipliant les méthodes de détections et les instruments, et surtout en ayant de plus en plus de planètes, il devient possible d'estimer la probabilité pour qu'une étoile héberge au moins une planète [Mayor et al., 2011]. D'autres études estiment même la sensibilité de cette fréquence d'occurrence en fonction de paramètres stellaires [Fischer and Valenti, 2005, Johnson et al., 2007, Howard et al., 2012] ou planétaires [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010].

Mais le point qui me semble le plus intéressant est la découverte de types de planètes

1. Planète orbitant autour d'une étoile autre que notre Soleil.

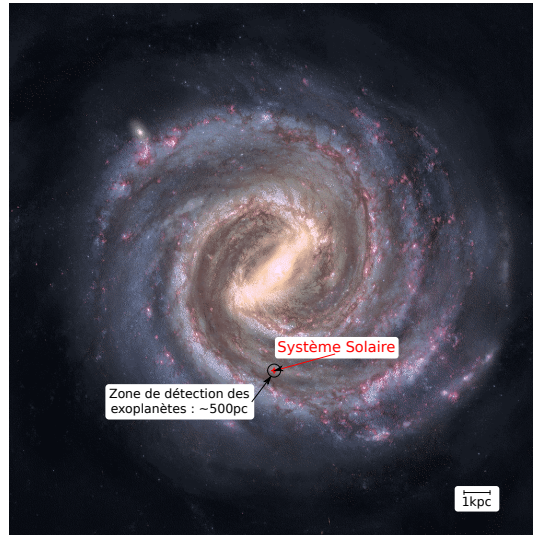


FIGURE 1 – Image de la voie lactée avec indication de la position approximative du système solaire ainsi que de la zone (en noir) contenant la majorité des exoplanètes détectées à ce jour.

qui n'existent pas dans le système solaire. En un mot : diversité. Que ce soient les jupiters chauds, comme 51 Peg b ou les super terres comme Gliese 1214 b, ces planètes n'ont pas d'équivalent dans le système solaire. Ces variétés de composition, de taille, de systèmes nous offrent un champ de connaissance toujours plus grand dans lequel tester nos modèles de formations planétaire. Ils nous permettent aussi de mieux comprendre notre propre système et comment il s'est formé, et surtout de le placer dans cette immense horlogerie qu'est le catalogue de systèmes exoplanétaires à notre disposition.

Formation Planétaire

Sommaire

1.1	Formation stellaire	14
1.2	Les disques protoplanétaires	14
1.2.1	Formation et évolution	14
1.2.2	Évolution hydrodynamique du disque	15
	Structure verticale du disque	17
	Bilan de masse	18
	Bilan de moment cinétique/angularaire	19
	Temps de vie et dispersion du disque	21
1.2.3	Profil de température	22
	Refroidissement radiatif	23
	Chauffage par l'enveloppe	24
	Chauffage par l'étoile	24
	Chauffage visqueux	25
	Bilan	27
1.2.4	La viscosité du disque	28
	Les disques alpha	29
	Ionisation et dead-zones	29
1.2.5	La poussière	30
1.2.6	Opacité du disque	31
1.2.7	Profil de densité de surface	32
1.2.8	Limites et approximations dues à la modélisation	33
1.3	Interaction disque-planète	35
1.3.1	Migration des planètes de faible masse : type I	35
	Couple du disque sur la planète	35
	Couple de Lindblad	35
	Couple co-orbital ou de corotation	38
	Modélisation dans le code N-corps	42
1.3.2	Migration des planètes massives : type II	42
1.3.3	L'amortissement de l'excentricité et de l'inclinaison	43
1.3.4	L'accrétion du gaz	44
1.3.5	Récapitulatif des interactions dans le code N-corps	44

1.1 Formation stellaire

Les étoiles se forment à partir de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz. Quand ce dernier est suffisamment massif (masse au delà d'une masse critique dite masse de Jeans, de l'ordre de quelques masses solaires, même si ça dépend de la configuration, du volume etc...), son autogravité initie un effondrement du nuage sur lui même, qui peu à peu se fragmente en système découplés.

Au centre de chaque fragment se forme un cœur pré-stellaire à mesure que la température et la pression augmente, jusqu'à atteindre les conditions nécessaires à l'allumage de la fusion de l'hydrogène. On obtient alors une proto-étoile appelée « classe 0 ».

Durant l'effondrement du nuage, la conservation du moment angulaire empêche la contraction du nuage, en particulier dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation du nuage. Ceci ajouté à la pression de radiation, apparue depuis la formation de la proto-étoile conduit à la formation d'un tore autour de l'étoile centrale en quelques dizaines de milliers d'années. Ce stade est appelé « classe I ».

Le tore de gaz est chaud et par conséquence enflé, principalement à cause de l'énergie gravitationnelle résiduelle, mais aussi par le chauffage de la proto-étoile centrale. En quelques centaines de milliers d'années, ce tore devient un disque, à mesure que le rayonnement de corps noir évacue l'énergie par la surface. À mesure que le tore refroidit, et compte tenu de la conservation du moment angulaire qui empêche une contraction rapide dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, il s'aplatit jusqu'à former un disque.

Un million d'années environ après la formation de la proto-étoile, le disque mince est formé et la proto-étoile est devenu une étoile T-Tauri (objet de classe II). Après quelques millions d'années (typiquement 10 millions d'années), le disque se dissipe et on est dans le cas d'étoiles T-Tauri évoluées ou objets de classe III.

Ces dénominations en classe peuvent sembler étrange mais elles proviennent en premier lieu de l'étude des spectres d'étoiles jeunes qui présentent différentes caractéristiques en fonction du stade d'évolution de l'étoile. [FIGURE 1.1 page suivante] résume la formation stellaire, les différentes phases et en particulier les caractéristiques du spectre d'émission de ces objets.

1.2 Les disques protoplanétaires

1.2.1 Formation et évolution

Durant les différentes phases de formation de l'étoile, alors même que le disque de gaz et de poussière se dissipe a lieu la formation des planètes.

À mesure que le nuage s'effondre sur lui même, et afin de satisfaire à la conservation du moment angulaire, ce dernier voit sa rotation accélérer, même si la rotation du nuage moléculaire était infime au départ. C'est ainsi que le disque d'accrétion, résultat de l'effondrement du nuage de gaz, est en rotation. L'effondrement d'un nuage moléculaire s'effectuant sur plusieurs ordres de grandeurs (en distance), l'accélération de la rotation

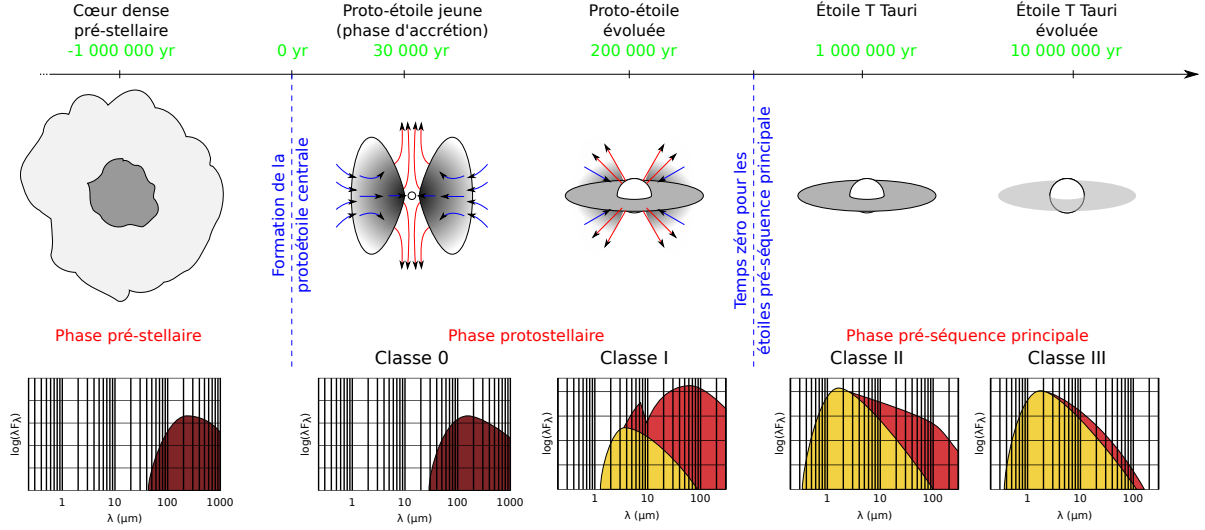


FIGURE 1.1 – Classification empirique des différents stades de formation des étoiles de faible masse, du cœur dense pré-stellaire à la classe III. Schéma basé sur [André, 2002].

est d'autant plus grande.

Initialement, il est hautement improbable que le moment angulaire du nuage soit parfaitement nul. C'est ainsi que même si sa rotation est imperceptible lors des premiers stades de son effondrement gravitationnel, le disque d'accrétion fini toujours en rotation.

1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque

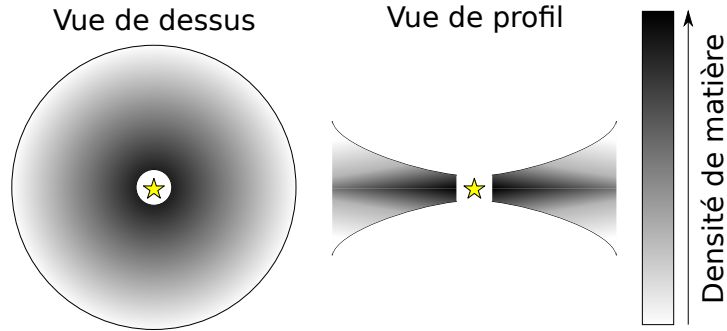


FIGURE 1.2 – Représentation de la répartition radiale et azimutale de gaz dans un disque protoplanétaire.

Avant de considérer l'évolution d'un disque, il est important de regarder sa masse par rapport à la masse de l'étoile centrale. En effet, si la masse du disque est de l'ordre de la masse de l'étoile, alors des instabilités se développent et on ne peut plus négliger l'autogravité du disque.

Le *paramètre de Toomre* Q , défini par [Toomre, 1964, Goldreich and Lynden-Bell, 1965] :

$$Q = \frac{\kappa c_s}{\pi G \Sigma} \quad (1.1)$$

est un indicateur de la stabilité du disque par rapport à l'autogravité.

Dans ce paramètre, $\pi G \Sigma$ représente la masse du disque. La vitesse du son c_s est liée à la pression thermique ; la *fréquence épicyclique* κ détermine quant à elle la force du cisaillement dans le disque.

Si $Q < 1$ alors le gaz est instable gravitationnellement et il commence à s'effondrer sur lui même et former des surdensités à condition que le temps de refroidissement soit inférieur à 3 fois la période orbitale ($\tau_c \lesssim 3\Omega^{-1}$) [Gammie, 2001]. Si $Q > 1$, le disque est stable.

À partir du paramètre Q , on peut dériver une condition sur le rapport de masse entre étoile et disque pour que l'auto-gravité soit négligeable, ce qui donne [Gammie, 2001] :

$$\frac{M_d}{M_\star} \lesssim \frac{H}{R} \quad (1.2)$$

Nous ne considérerons que des disques dont la masse M_d est faible devant la masse de l'étoile M_\star . Si tel n'était pas le cas, le temps pour que le disque perde suffisamment de masse pour se retrouver dans le cas qui nous intéresse sera court devant la vie du disque et le temps de formation planétaire. Étant donné qu'on ne s'intéresse qu'aux derniers stades de la formation planétaire, à savoir quand les embryons planétaires ont une masse de l'ordre du dixième de masse terrestre au minimum, il est raisonnable de penser que le disque sera dans un stade peu dense où l'approximation $Q > 1$ sera valable.

Dans un tel cas, c'est le potentiel gravitationnel de l'étoile qui domine la dynamique du gaz. En négligeant l'effet de la pression de ce dernier, on peut donc écrire la vitesse angulaire du gaz comme étant égale à la vitesse angulaire képlerienne :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\star}{R^3}} \quad (1.3)$$

où G est la constante de gravitation, et R la distance à l'étoile. Dans la pratique, il est à noter que la vitesse est légèrement sous-képlerienne.

Il existe une force de cisaillement entre deux anneaux de gaz concentriques, dûs à leur différence de vitesse. Cette différence de vitesse génère des frottements à cause de la viscosité du disque ν (dont nous parlerons plus en détail plus loin [§ 1.2.4 page 28]) qui chauffe le gaz en lui faisant perdre de l'énergie. En conséquence, une partie de l'énergie gravitationnelle du gaz est convertie en chaleur, qui est ensuite évacuée par le rayonnement de corps noir du gaz.

La première conséquence est qu'un terme visqueux va apparaître dans l'équation de l'énergie, comme nous le verrons par la suite.

La deuxième conséquence, c'est que le gaz perd de l'énergie, et donc dérive lentement vers l'étoile centrale qui accrete petit à petit le gaz du disque.

On définit donc une vitesse de dérive négative $\vec{v}_d = v_r \hat{e}_r$, orientée vers l'étoile, qui entraîne petit à petit le gaz du disque (avec v_r négatif).

Dans la suite de la section, nous allons nous intéresser à la conservation de différentes quantités, que ce soit la masse ou le moment angulaire. Pour cela nous allons définir un

anneau de référence, portion du disque sur laquelle nous allons faire le bilan. Le but est ici de présenter d'où viennent les équations et plus précisément d'où viennent les termes des équations.

Afin de décrire l'évolution hydrodynamique du disque de gaz, nous allons utiliser successivement la **conservation de la masse**, et la **conservation du moment angulaire**. Les démonstrations qui vont suivre ont été déjà faites de nombreuses fois, notamment par [Pringle, 1981].

Structure verticale du disque

On s'intéresse à la répartition de masse verticalement dans le disque. Afin de définir les quantités importantes qui s'y rapporte, nous allons écrire l'équation de l'équilibre hydrostatique. On a alors :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \vec{g} \cdot \hat{e}_z \quad (1.4)$$

$$= \left(-\frac{GM}{R^3} \hat{e}_r \right) \cdot \hat{e}_z \quad (1.5)$$

\vec{g} est orienté vers l'étoile centrale, selon la direction r (en sphérique). En projetant sur l'axe z pour effectuer le produit scalaire, et en faisant l'approximation que $r \sim a$ on obtient alors :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\Omega^2 z \quad (1.6)$$

En considérant un disque isotherme selon z et d'après la loi des gazs parfaits

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} \quad (1.7)$$

il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\mu m_H \Omega^2}{k_B T} \rho z \quad (1.8)$$

On obtient alors :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left(-\frac{z^2}{2H^2} \right) \quad (1.9)$$

où ρ_0 est la densité volumique du disque de gaz dans le plan médian et H l'échelle de hauteur du disque est définie par (dans la limite isotherme) :

$$H = \sqrt{\frac{k_B T}{\Omega^2 \mu m_H}} \quad (1.10)$$

Sachant que la vitesse du son, définie par :

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad (1.11)$$

dans le cas d'un gaz parfait, on peut alors écrire la relation suivante entre l'échelle de hauteur et la vitesse du son :

$$c_s = H\Omega \quad (1.12)$$

On considèrera dans la suite les quantités moyennées selon z , et en particulier on défini la densité de surface Σ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dz \\ &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right) dz \\ \Sigma &= \sqrt{2\pi} \rho_0 H \end{aligned} \quad (1.13)$$

Bilan de masse

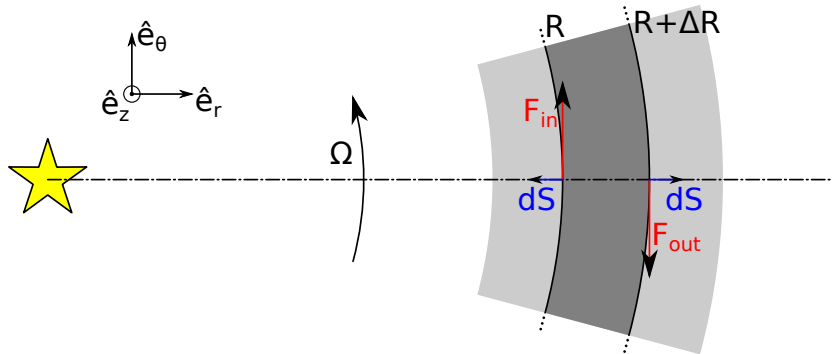


FIGURE 1.3 – Représentation d'un anneau de largeur ΔR et du bilan de moment angulaire de ce dernier.

On cherche dans un premier temps à faire le bilan de masse de l'anneau considéré. Sa masse s'écrit :

$$m_a = 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \quad (1.14)$$

Soit $v_r \hat{e}_r$ la vitesse radiale du gaz (avec $v_r < 0$ dans notre cas). Cette vitesse est responsable d'un certain taux d'accrétion du gaz du disque sur l'étoile centrale. On cherche maintenant à modéliser cette accrétion pour le bilan de moment cinétique sur l'anneau.

Pour cela, on cherche à exprimer la variation de masse de l'anneau, ainsi que le moment cinétique emporté par cette variation de masse.

Au bord interne R , par unité de temps, la masse entrant ou sortant de l'anneau peut-être exprimée comme un flux :

$$dF_M = \Sigma \cdot 2\pi r \cdot \left(-\vec{v}_r \cdot d\vec{S} \right) \quad (1.15)$$

En effet, en multipliant la circonférence de l'anneau par la vitesse, on obtient une sorte de surface par unité de temps qui représente ce qui sort de la frontière virtuelle représentée par l'anneau en $r = R$.

La flux de matière doit être négatif si la masse sort de l'anneau. Les éléments de surface étant orientés vers l'extérieur, un vecteur vitesse colinéaire à $d\vec{S}$ implique que la matière sort de l'anneau. Ceci explique la présence du signe négatif dans l'expression du flux de matière.

On a ainsi aux deux bords de l'anneau :

$$dF_M(R) = \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) \quad (1.16a)$$

$$dF_M(R + \Delta R) = -2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R) \quad (1.16b)$$

v_r étant négatif, on a bien une perte de masse en $r = R$ et un gain de masse en $r = R + \Delta R$.

La conservation de la masse implique alors que la dérivée temporelle de la masse de l'anneau est égale au flux de masse à travers sa surface. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R \Delta R \Sigma(R)) = dF_M(R) + dF_M(R + \Delta R)$$

En faisant tendre l'épaisseur ΔR de l'anneau vers 0, on obtient alors :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (R v_r \Sigma) = 0 \quad (1.17)$$

Bilan de moment cinétique/angularaire

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{dJ_a}{dt} = dJ(R + \Delta R) + dJ(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}} \quad (1.18)$$

Le moment cinétique de l'anneau est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{J}_a &= \vec{R} \wedge (m_a \vec{v}(R)) \\ \vec{J}_a &= 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.19)$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment (1.16 page précédente) :

$$dJ(R) = 2\pi v_r(R) \Sigma(R) \cdot R^3 \Omega(R) \hat{e}_z \quad (1.20a)$$

$$dJ(R + \Delta R) = -2\pi v_r(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^3 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \quad (1.20b)$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$dF_{\text{vis}} = \nu \Sigma A = \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.21)$$

où $A = r \frac{d\Omega}{dr}$ est le taux de cisaillement.

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\vec{F}_{\text{in}}(R) = 2\pi \nu \Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dr}(R) \hat{e}_\theta \quad (1.22a)$$

$$\vec{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) = 2\pi \nu \Sigma (R + \Delta R)^2 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) \cdot \hat{e}_\theta \quad (1.22b)$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation \hat{e}_θ . À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_{\text{in}} = 2\pi \nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R) \hat{e}_z \quad (1.23a)$$

$$\vec{\Gamma}_{\text{out}} = 2\pi \nu \Sigma (R + \Delta R)^3 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) \hat{e}_z \quad (1.23b)$$

En utilisant (1.19 page précédente), (1.20), (1.23), dans (1.18 page précédente) il vient alors :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(-\frac{d\Omega}{dr} \right) \right] \right\} \quad (1.24)$$

Dans le cas d'un disque Képlerien ($\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$) on obtient finalement :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^{1/2} \right) \right] \quad (1.25)$$

Le calcul détaillé est disponible [§ B.1 page 83].

Cette équation a nécessité les approximations suivantes :

1. On suppose que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps ($\frac{d\Omega}{dt} = 0$), c'est à dire que la masse de l'étoile est constante, l'accrétion ayant un effet négligeable.
2. On suppose que le mouvement du gaz est képlerien $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, la pression du gaz rendant le mouvement légèrement sous-képlerien.

Temps de vie et dispersion du disque

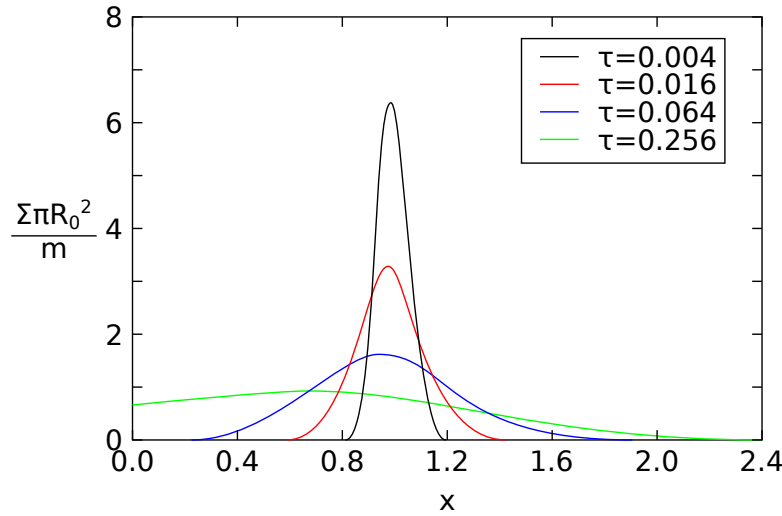


FIGURE 1.4 – Évolution visqueuse d'un anneau de matière de masse m et de rayon R_0 . La densité de surface est montrée comme une fonction de la longueur dédimensionnée $x = R/R_0$ et du temps adimensionné $\tau = 12\nu t/R_0^2$.

Cette équation permet de modéliser l'évolution visqueuse d'un disque au cours du temps. [FIGURE 1.4], tirée de Pringle [1981] et recalculée illustre l'évolution visqueuse d'un anneau de matière de masse m dans des unités adimensionnées de distance et de temps.

On situe généralement le temps de vie d'un disque protoplanétaire autour de quelques millions d'années. Cette information est obtenue de plusieurs études de d'amas d'étoiles d'âges différents dans lesquelles on mesure le taux d'étoiles possédant un excès infrarouge (signe de présence d'un disque) [Williams and Cieza, 2011]. 70% à 80% des étoiles jeunes ($t < 1 \text{ Myr}$) possèdent un disque [Winston et al., 2007, Gutermuth et al., 2008], 40 à

50% des étoiles dans des amas d'âge compris entre 2 et 3 millions d'années en possèdent un [Lada et al., 2006, Sung et al., 2009] tandis que moins de 20% des étoiles dans des amas d'environ 5 millions d'années ont un disque [Currie et al., 2009].

Par la rareté des disques en train de se dissiper, les observations suggèrent aussi que les disques se dissipent très rapidement, avec un temps de dispersion d'environ 10^5 ans [Simon and Prato, 1995, Wolk and Walter, 1996]. La dissipation visqueuse n'explique alors pas comment le disque peut subsister pendant plusieurs millions d'années, mais se dissiper complètement en 500 000 ans. Clarke et al. [2001] ont montré qu'il était possible d'expliquer ce comportement à deux temps caractéristiques à l'aide de la photoévaporation.

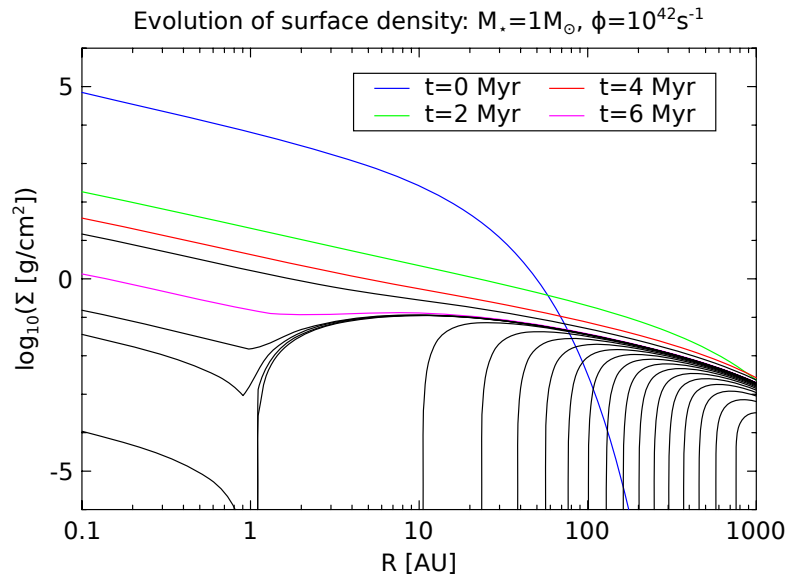


FIGURE 1.5 – Évolution de la densité de surface en fonction du temps dans une simulation qui modélise la dissipation du disque protoplanétaire par évolution visqueuse et photoévaporation. À $t = 6.20$ Myr le disque est totalement dissipé. Figure adaptée de Alexander et al. [2006].

Le principe de la photoévaporation est que le rayonnement de l'étoile permet de dissocier le dihydrogène ainsi que de fournir de l'énergie cinétique aux atomes du gaz. À partir d'un rayon r_g qui représente la distance à partir de laquelle l'énergie fournie par les photons de l'étoile devient suffisante pour contrebalancer les effets de sa gravité, la photoévaporation permet d'évaporer une partie du gaz superficiel du disque. Le disque va alors se creuser jusqu'à séparer le disque en deux. Les parties internes du disques ne sont alors plus alimentées par les parties externes. Des simulations montrent que les parties externes se dispersent rapidement une fois les parties internes accrétées [Alexander et al., 2006]. [FIGURE 1.5] montre l'évolution du profil radial de densité en fonction du temps en présence de l'évolution visqueuse et de la photoévaporation.

1.2.3 Profil de température

Du point de vue de la température, il y a principalement deux types de disques :

- les *disques actifs* : la source de température est le disque lui même, qui par *chauffage visqueux* (frottements) va convertir de l'énergie gravitationnelle en chaleur ;

- les *disques passifs* : la source de chaleur/température est l'étoile centrale qui éclaire le disque.

Un disque peut à la fois être actif et passif, mais généralement on essaie d'approximer, de considérer que l'un est négligeable devant l'autre. De plus, un disque aura des zones actives et des zones passives, c'est à dire que certaines zones seront principalement chauffées par la viscosité alors que d'autres le seront par l'*irradiation de l'étoile*.

Afin de déterminer le profil de température, il faut écrire l'équation de conservation de l'énergie, qui va tenir compte de tous les termes source et toutes les pertes, par unité de surface.

On a tout d'abord les pertes par rayonnement de corps noir. Ensuite, il y a les termes sources. Pour un disque actif, le terme source est le chauffage visqueux. Pour un disque passif, c'est l'irradiation de l'étoile [Chiang and Goldreich, 1997]. Dans notre cas, il y a un terme dû à l'enveloppe du disque, un dû à l'irradiation de l'étoile centrale, et enfin un dernier dû au chauffage visqueux.

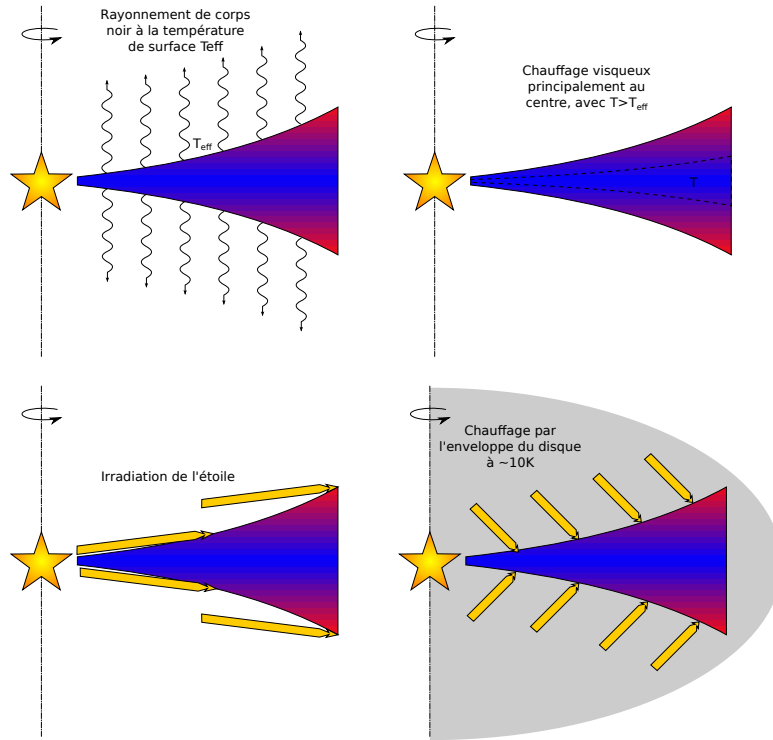


FIGURE 1.6 – Représentation du bilan thermique d'un disque

Refroidissement radiatif

Par toute la surface du disque, qui est à une température T_{eff} en surface, on a des pertes par rayonnement de corps noir :

$$P_{\text{cn}} = -2\sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.26)$$

où σ est la constante de Stephan. Ces dernières doivent être multiplié par deux, en effet, il y a des pertes par rayonnements des deux cotés du disque à une position donnée.

T_{eff} est une estimation de la température effective du disque à sa surface Hubeny [1990] :

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{T^4}{\tau_{\text{eff}}} \quad (1.27a)$$

avec

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau} \quad (1.27b)$$

où $\tau = \kappa\Sigma/2$ est la profondeur optique verticale moyenne, κ étant l'opacité du disque (l'opacité sera détaillée dans [§ ?? page ??]).

Cette température effective est le résultat d'un transfert de rayonnement depuis le cœur du disque, à une température T qui se refroidit, et chauffe les différentes couches successives jusqu'à atteindre le bord du disque. Il résulte alors une température T_{eff} plus faible que la température dans le plan du disque.

Chauffage par l'enveloppe

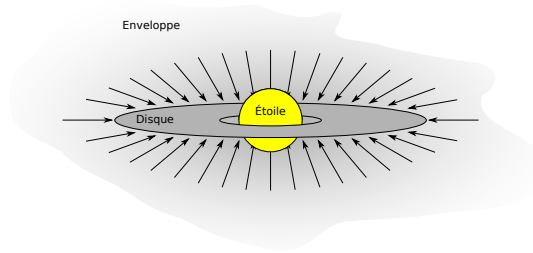


FIGURE 1.7 – Représentation de l'effondrement d'un nuage moléculaire et des différentes parties qui composent le système en effondrement.

L'enveloppe [FIGURE 1.7] provient de l'effondrement continu du nuage moléculaire. C'est un reste diffus qui alimente continuellement le disque en matière. Mais cette enveloppe, qui possède une température que l'on fixe ici à $T_{\text{en}} = 10 \text{ K}$ contribue aussi au bilan d'énergie du disque en apportant la contribution uniforme suivante :

$$C_{\text{en}} = 2\sigma T_{\text{en}}^4 \quad (1.28)$$

Remarque : La température de l'enveloppe étant très faible, cette dernière ne contribue que dans les parties externes du disque, là où la densité de surface du gaz est très faible, rendant du même coup le chauffage visqueux extrêmement ténu lui aussi.

Chauffage par l'étoile

La surface du disque reçoit de la lumière de l'étoile centrale. Soit R_* , L_* respectivement le rayon et la luminosité de l'étoile. Soit ε l'albédo du disque, que l'on choisis typiquement égal à 0.5.

Le flux incident est alors [Menou and Goodman, 2004, eq. (7)] :

$$F_{\text{irr}} = \frac{L_{\star}(1 - \varepsilon)}{4\pi r^2} \alpha \quad (1.29)$$

où α (avec $\alpha \ll 1$ représente l'angle entre les rayons incidents et la surface du disque.

D'après notamment [Chiang and Goldreich, 1997, eq. (5)], cet angle peut être écrit comme :

$$\alpha = 0.4 \frac{R_{\star}}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \quad (1.30)$$

On note que dans cette expression, le premier terme illustre le fait que l'étoile n'est pas ponctuelle, et que ceci a un effet sur l'irradiation dès que l'on s'approche de cette dernière. Le deuxième terme représente la surface du disque qui intercepte le rayonnement incident, et qui est fonction de la variation d'échelle de hauteur du disque (plus le disque est évasé, et plus la paroi qui intercepte le rayonnement est abrupte).

Il vient enfin, en exprimant la luminosité de l'étoile en fonction de sa température et de son rayon, l'expression suivante :

$$C_{\text{irr}} = 2\sigma T_{\star}^4 \frac{R_{\star}^2}{r^2} (1 - \varepsilon) * \left[0.4 \frac{R_{\star}}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \right] \quad (1.31)$$

Remarque : Il faut cependant noter qu'une approximation implicite à été faite, c'est de dire que $h_p \sim h$, où h_p est la position verticale dans le disque où les photons stellaires sont absorbés. En effet, l'absorption des photons ne dépend pas simplement de la densité mais aussi de l'opacité du disque aux photons stellaires, qui dépend de la composition du disque.

Dans le cadre d'un disque optiquement épais, il devient possible de considérer $h_p \sim h$

Chauffage visqueux

On considère un fluide incompressible. Il peut paraître étonnant de considérer un disque de gaz comme étant un fluide incompressible. Mais en fait l'aspect compressible va surtout se manifester lors de la mise à l'équilibre, générant des ondes de chocs par exemple. Mais une fois le disque stabilisé tout se passe comme si on avait un fluide incompressible. C'est matérialisé par le fait que la vitesse dans le disque est considérée comme inférieure à la vitesse du son dans le milieu c_s , au delà de laquelle on aura des ondes des chocs ayant une incidence sur le bilan thermique. Ainsi donc, en considérant un fluide incompressible, on peut partir de l'expression de la variation d'énergie cinétique (qui est l'inverse du chauffage, les pertes cinétiques étant converties en chaleur par la viscosité) [Landau and Lifschitz, 1989, (16.3)] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \\ T_{ik} &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

où $\eta = \rho\nu$ est la viscosité dynamique¹

À partir de [Landau and Lifschitz, 1989, (15.8) et (15.17)], on extrait de manière assez directe l'expression du tenseur T_{ik} en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, & T_{r\varphi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ T_{\varphi\varphi} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & T_{\varphi z} &= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ T_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}, & T_{rz} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

sachant que le tenseur est symétrique en statique, ce qui donne :

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{r\varphi} & T_{\varphi\varphi} & T_{\varphi z} \\ T_{rz} & T_{\varphi z} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

À partir de ces expressions, nous allons procéder à quelques simplifications, moyennant quelques approximations :

- On considère tout d'abord que $v_z = 0$ en invoquant le fait que le disque est à l'équilibre hydrostatique verticalement.
- Ensuite, on néglige tous les termes en $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ car le disque est axisymétrique.
- On néglige enfin tous les termes en v_r devant les termes en v_φ étant donné que la vitesse de dérive (liée à l'accrétion) est beaucoup plus petite que la vitesse de rotation due au mouvement képlerien. En effet, la vitesse de dérive est une conséquence des pertes d'énergie par frottement visqueux entre deux anneaux due à la différence de vitesse de leur mouvement képlerien.

Seul le terme $T_{r\varphi}$ reste :

$$T_{r\varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}$$

avec $v_\varphi = r\Omega$

$$T_{r\varphi} = r \frac{d\Omega}{dr} \quad (1.35)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{ik})^2 dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \eta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2 dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \eta (T_{r\varphi}^2 + T_{\varphi r}^2) dV \end{aligned}$$

1. ν étant la viscosité cinématique et ρ la densité volumique de gaz.

Le tenseur est symétrique, on a donc $T_{r\varphi} = T_{\varphi r}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \eta (2T_{r\varphi})^2 dV \\ &= - \iiint \rho \nu \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2 dS dz \end{aligned}$$

En utilisant une vitesse angulaire képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ on obtient alors :

$$\begin{aligned} &= - \int \Sigma \nu \left(-\frac{3}{2} \Omega \right)^2 dS \\ \frac{\partial E_c}{\partial t} &= -\frac{9}{4} \int \Sigma \nu \Omega^2 dS \end{aligned}$$

La variation d'énergie cinétique est négative, cette perte est convertie en chaleur par chauffage visqueux. Le chauffage visqueux intégré sur toute la surface du disque peut ainsi être défini comme :

$$C_{\text{vis/tot}} = - \frac{\partial E_c}{\partial t}$$

de sorte qu'on peut écrire le chauffage visqueux par unité de surface comme étant égal à :

$$C_{\text{vis}} = \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega^2 \quad (1.36)$$

Bilan

On cherche maintenant la température d'équilibre du disque, compte tenu de tous les termes rentrant dans l'équation bilan de l'énergie du disque. Il vient alors, en considérant le chauffage visqueux, l'irradiation de l'étoile centrale, le chauffage par l'enveloppe et les pertes par radiation à la surface du disque :

$$\begin{aligned} 0 &= P_{\text{cn}} + C_{\text{en}} + C_{\text{irr}} + C_{\text{vis}} \\ 0 &= -2\sigma \frac{T^4}{\frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau}} + 2\sigma T_{\text{en}}^4 + 2\sigma T_{\star}^4 \frac{R_{\star}^2}{r^2} (1 - \varepsilon) * \left[0.4 \frac{R_{\star}}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{H}{r} \right) \right] + \frac{9}{4} \nu \Sigma \Omega^2 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Dans la pratique, c'est une équation de l'on résout de manière numérique, par itération. En effet, beaucoup de paramètres dépendent de la température, alors même que c'est la variable que l'on recherche.

Ce calcul est lui même extrêmement dépendant de la définition que l'on choisi pour l'opacité κ et de la dépendance de cette dernière en fonction de la température, la densité ou la pression.

1.2.4 La viscosité du disque

La viscosité moléculaire, viscosité généralement considérée quand on étudie la dynamique d'un fluide, peut être définie par :

$$\nu_m \sim \lambda c_s \quad (1.38)$$

où c_s est la vitesse du son dans le milieu et λ , libre parcours moyen dans le gaz avec une concentration de particule n est :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{\text{mol}}} \quad (1.39)$$

On cherche ici à faire un calcul d'ordre de grandeur, on ne se préoccupe pas des détails plus fins qui seraient normalement nécessaire pour calculer une viscosité moléculaire.

On prend pour section efficace de collisions celle de l'hydrogène moléculaire [Chapman and Cowling, 1970] :

$$\sigma_{\text{mol}} = 2 \times 10^{-15} \text{ cm}^2 \quad (1.40)$$

On considère ensuite un disque dont la densité de surface Σ à 1 AU vaut $\Sigma_0 = 500 \text{ g/cm}^2$. En utilisant (1.13 page 18) on a alors $\rho = 2.67 \cdot 10^{-10} \text{ g/cm}^3$. Il vient la concentration $n = 6.8 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. On obtient alors une viscosité moléculaire à 1 AU de l'ordre de :

$$\nu_m \sim 1.0 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (1.41)$$

Le temps caractéristique de l'évolution visqueuse qui en découle est alors :

$$t_\nu \simeq \frac{r^2}{\nu_m} = 6.5 \times 10^{12} \text{ ans} \quad (1.42)$$

c'est à dire plus d'un million de fois le temps de vie observé des disques protoplanétaires qui se situe autour du million d'années [Williams and Cieza, 2011].

En conséquence, quand on parle de viscosité ν^2 dans un disque, ce n'est pas la viscosité moléculaire classique, bien trop faible aux densités rencontrées. On suppose généralement une viscosité due à la turbulence qui est beaucoup plus importante que la viscosité moléculaire, mais qui peut être traitée par les mêmes équations.

Il est rare que la viscosité soit calculée de manière cohérente. L'importante augmentation du temps de calcul n'apporterait pas forcément beaucoup plus de précisions étant donné les nombreuses incertitudes sur la poussière, le couplage et le champ magnétique.

La première hypothèse est de considérer une viscosité constante. Ce n'est certainement pas satisfaisant, sûrement éloigné de la vérité, mais on n'a ainsi qu'un seul paramètre et on n'ajoute pas de surcouche de complexité apportant son lot supplémentaire d'incertitude. Reste qu'une viscosité constante dans un disque très étendu, par exemple allant de 0.1 AU à 100 AU n'est certainement pas cohérent avec la physique du disque.

Un autre modèle très répandu pour la viscosité du disque est la prescription α .

Les disques alpha

On peut introduire un paramètre adimensionné α [Shakura and Sunyaev, 1973]. Dans ce formalisme, plusieurs hypothèses sont faites :

- On considère que la turbulence est sub-sonique.
- L'échelle des tourbillons des turbulences est plus petite que l'échelle de hauteur du disque

Le mécanisme qui a le plus de chance d'être à l'origine de la viscosité alpha est l'*Instabilité Magnéto-Rotationnelle* (MRI) [Balbus and Hawley, 1991].

En conséquence, on peut définir la viscosité ν associée à la turbulence comme étant

$$\nu = \alpha c_s H \quad (1.43)$$

où c_s est la vitesse du son et H l'échelle de hauteur du disque. α (avec $\alpha \ll 1$) est alors un paramètre adimensionné qui permet de définir plus ou moins l'intensité des turbulences, et donc la viscosité qui leur est associée. Une valeur typique d' α se situe entre 10^{-2} et 10^{-4} .

Ce modèle permet de définir une viscosité non constante dans le disque de gaz ce qui semble déjà plus cohérent avec un disque de gaz étendu ($[0.1 - 100]$ AU par exemple).

Pourtant, le modèle α n'est pas forcément la panacée en comparaison du modèle à viscosité constante. En effet, la complexité est ici masquée dans la valeur qu'il faut attribuer au paramètre α . D'une part il est difficile d'estimer la valeur du paramètre α mais en plus il n'y a aucune raison physique qui permet de justifier qu' α soit constant dans tout le disque (approximation généralement sous-jacente au choix de la prescription α pour la viscosité).

Ceci justifie donc que l'on mette ces deux modèles en concurrence, sans placer le modèle α au dessus du modèle à viscosité constante. Les incertitudes étant tellement grandes dans les deux cas, il est justifié d'explorer ces deux modèles et de les comparer quand cela nous est donné de le faire.

Ionisation et dead-zones

Pour qu'une instabilité magnéto rotationnelle ait lieu, c'est à dire qu'il y ait un couplage entre le champ magnétique et les mouvements du disque, il faut qu'une partie au moins du disque soit ionisé. Dans ces régions ionisées, on pourra alors avoir transport du moment angulaire via la viscosité turbulente.

Sans ionisation, il n'y a pas de couplage entre le champ magnétique et la matière, et donc pas de turbulence induite par ce même champ.

Or, comment ioniser ? [FIGURE 1.8a page suivante] représente les différents processus d'ionisation dominants en fonction de la zone du disque considérée. Mais si le taux d'ionisation décroît en fonction de la distance orbitale [Ilgner and Nelson, 2006] comme le montre [FIGURE 1.8b page suivante], il en va de même avec la densité de surface du disque. Il est donc probable que certaines zones du disques ne soient pas ionisés (en pourcentage du nombre total d'atomes disponibles), et donc que le transport du moment

angulaire s'y fasse peu ou pas du tout [Gammie, 1996]. Ces zones, appelées *dead zone*, sont donc des zones où la turbulence est faible ou inexistante, et où la viscosité et par conséquent beaucoup plus faible.

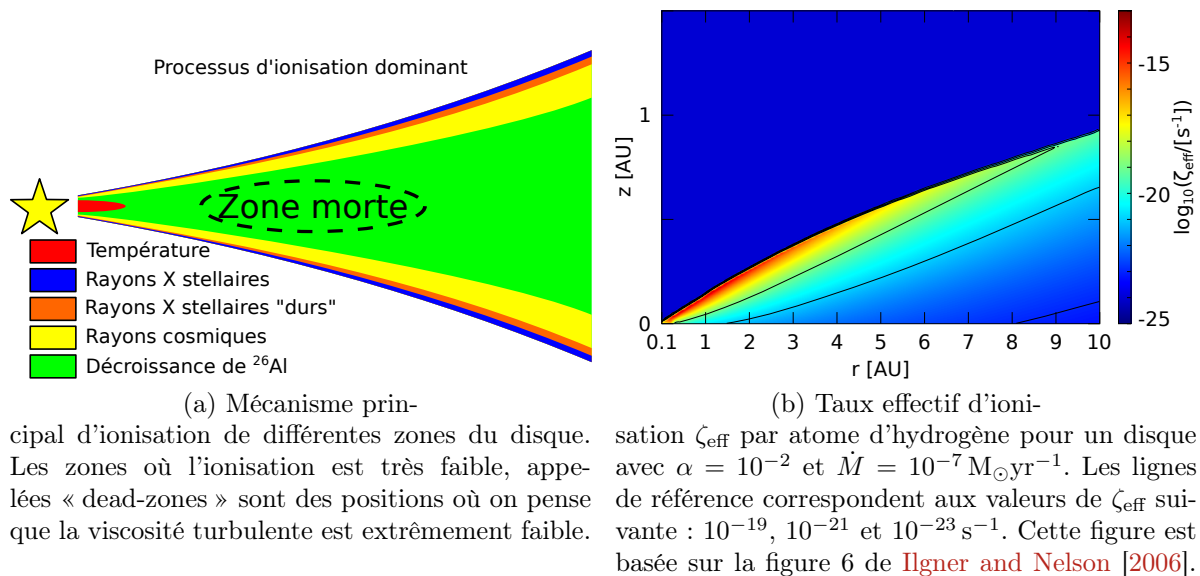


FIGURE 1.8 – Représentation de l'ionisation dans un disque protoplanétaire

On voit donc que les modèles de viscosité constante ou alpha sont incapables de rendre compte de la présence de ces zones de manière intrinsèque. Il est possible de modifier artificiellement les profils de viscosité pour faire apparaître de telles zones mais ça reste ad-hoc. Dans la suite, je n'ai pas modélisé de dead-zone même s'il est probable qu'elles aient un effet sur la migration, le modèle sans dead-zone n'est encore pas suffisamment bien compris pour que le rajout de ces zones sans ionisations soit pertinent.

1.2.5 La poussière

Le disque protoplanétaire est principalement composé de gaz, hydrogène et hélium en majorité. Pourtant, même si la poussière ne représente qu'environ 1% de la masse du disque elle joue un rôle au moins aussi important que le gaz lui-même.

À cause de la pression quasi inexistante dans le disque en raison des faibles densités, solide et gaz sont les seules phases existantes, il n'y a pas de liquides dans l'espace. La poussière représente la matière solide du disque, en grains plus ou moins fin, allant du nanomètre, micromètre, jusqu'à des tailles planétaires en fin de formation.

Cette poussière est un composé extrêmement complexe à manipuler. Elle contient différents composés solides en fonction de la température (à certaines températures et densité des composés se volatilisent et d'autres non). La ligne des glaces représente la distance à partir de laquelle de la glace d'eau apparaît, augmentant de manière drastique la quantité de poussière dans le disque.

De plus, la poussière est aussi responsable de l'opacité du disque, c'est à dire sa capacité à laisser passer ou non la lumière. À travers l'opacité, la poussière a donc une

influence sur la température du disque qui se refroidit plus ou moins efficacement, et qui absorbe le rayonnement stellaire plus ou moins efficacement.

1.2.6 Opacité du disque

Un paramètre crucial des modèles de disques protoplanétaires est l'opacité du disque qui représente l'absorption du rayonnement incident par une cellule de gaz. Cette dernière dépend principalement de la composition chimique de la poussière sauf quand la température devient suffisamment importante pour que la totalité de la poussière se sublime, généralement au delà de 1500 K, l'opacité étant alors régie par les molécules du gaz.

En fonction de la température et de la pression, différentes espèces se condensent ou se subliment, modifiant les propriétés de la poussière (notamment la quantité de poussière disponible) et donc l'opacité.

L'opacité dépend de plus de la longueur d'onde, les raies d'absorptions n'étant pas uniformément réparties sur toute la gamme de longueur d'onde. Ce dernier paramètre est généralement intégré dans des modèles d'opacité. Citons notamment les opacités moyennes de Plank et de Rosseland, principales opacités utilisés dans les disques. Ce sont des quantités moyennées sur tout un spectre, rendant les opacités indépendantes de la longueur d'onde.

Dans le cas de l'opacité de la moyenne de Rosseland, on fait l'approximation que le disque est optiquement épais, de sorte qu'on peut négliger le flux total pour se concentrer uniquement sur la dérivée du flux. C'est à dire, en d'autres termes, que seul le flux provenant du gaz environnant arrive jusqu'à la zone considérée, le reste étant absorbé. Dû au côté optiquement épais du disque, on perd l'information sur le flux total, ce qui simplifie les calculs. L'opacité moyenne de Rosseland $\langle \kappa_R \rangle$ est alors définie comme :

$$\frac{1}{\langle \kappa_R \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \int_0^\infty \frac{\frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\kappa_\nu} d\nu \quad (1.44)$$

où B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

À l'inverse, les opacités de Planck concernent les disques optiquement mince, où on ne peut plus considérer uniquement la dérivée du flux. La moyenne est alors effectuée sur l'intensité spécifique directement :

$$\frac{1}{\langle \kappa_P \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty B_\nu d\nu} \int_0^\infty \frac{B_\nu}{\kappa_\nu} d\nu \quad (1.45)$$

où $\int_0^\infty B_\nu d\nu$ représente l'intensité totale, tandis que B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

Dans la pratique, on fait bien souvent l'approximation que le disque est optiquement épais, ce qui est généralement vrai dans les parties internes du disque (0.1 – 15 AU), lieu de formation des planètes. Pour autant, le calcul des opacités est loin d'être trivial et plusieurs modèles proposent des tables d'opacités dont le détail des propriétés est différent. Le choix du modèle a donc des implications importantes sur le modèle de formation planétaire comme je le détaillerai dans la section [§ ?? page ??].

En formation planétaire, le modèle le plus utilisé est [Bell and Lin, 1994]. Mais dans mes études, j’ai utilisé en tout et pour tout 4 modèles différents [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]. À noter que [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009] sont des modèles qui proposent différentes fonctions analytiques pour définir une opacité par morceaux. [Chambers, 2009] propose un modèle très simple à opacité constante $\kappa = 3$ tant que la température est inférieure à 1380 K, puis une simple loi de puissance, fonction uniquement de la température au delà. Enfin, le modèle dans [Huré, 2000] ne définit pas de fonctions par morceaux mais utilise simplement une table d’opacité fonction de la température et de la densité. L’avantage de ce type de méthode est qu’on ne rajoute pas d’incertitudes par des fits en loi de puissance, c’est donc principalement pour ça que j’ai choisi cette table d’opacité pour mon modèle standard.

1.2.7 Profil de densité de surface

Un point crucial dans la modélisation physique d’un disque protoplanétaire est son profil de densité de surface Σ . Ça signifie d’une part qu’on fait l’approximation d’un disque mince, et que toutes les quantités qu’on considère par la suite sont moyennées selon la direction verticale z .

Que l’on fasse évoluer la densité de surface ou non, on doit choisir un profil initial. Ce profil est généralement sous forme d’une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\alpha} \quad (1.46)$$

Un profil largement utilisé est celui de la Masse Minimale de la Nébuleuse Solaire³ [Hayashi, 1981]. Dans cet article, le profil de densité est calculé à partir de la masse des planètes. La quantité de solide contenu dans les planètes est répartie dans des anneaux en lieu et place des planètes, puis à partir d’un rapport gaz sur poussière, le profil de densité de surface du gaz est calculé, puis approximé par une loi de puissance, ce qui donne :

$$\Sigma(R) = 1700 \left(\frac{R}{1 \text{ AU}} \right)^{-3/2} \text{ g/cm}^2 \quad (1.47)$$

La première chose, c’est que c’est une masse minimale, c’est à dire qu’on suppose que toute la masse de poussière présente dans le disque de gaz se retrouve dans la masse finale des planètes, ce qui est hautement improbable, que ce soit à cause notamment de l’accrétion sur l’étoile ou de la disparition d’embryons de planètes soit en tombant dans l’étoile, soit par éjection du système.

Ce profil est malgré tout une base de travail, vu qu’il est extrêmement difficile de déduire ces informations des observations des disques. Malgré tout, les études semblent montrer que l’on s’attend à un profil moins abrupt que $\Sigma \propto r^{-3/2}$, plus proche de $\Sigma \propto r^{-1}$ [Bell et al., 1997].

Mais on voit quand même que l’on a une grande liberté sur la densité de surface du disque, à la fois parce qu’on sait à ce jour peu de choses à ce sujet, mais aussi et surtout

3. MMSN : Minimum Mass Solar Nebulae

parce qu’au cours de son évolution, le disque de gaz va voir sa densité de surface varier énormément. En variant le profil, on étudie donc aussi différentes étapes de formation d’un même disque.

Le profil de densité de surface, que ce soit au travers de Σ_0 ou de l’indice α de la loi de puissance a une grande influence sur les autres paramètres du disque, notamment le profil de température, au travers du chauffage visqueux notamment.

Il est aussi crucial de garder à l’esprit que la loi de puissance n’est qu’un modèle, issu notamment des observations qui sondent les parties externes des disques, au delà de plusieurs dizaines d’unités astronomiques. Extrapoler ces lois de puissances jusqu’aux parties les plus internes est une très grande approximation qui a des conséquences importantes pour les planètes, dont le lieu de formation se situe vraisemblablement dans les parties internes.

1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation

Tout d’abord, le bord interne est une des parties les plus complexes d’un disque protoplanétaire. Ce bord interne correspond à des zones différentes pour le gaz ou pour la poussière. La poussière disparaît quand la température du disque dépasse 1500K environ, température au delà de laquelle la partie réfractaire des grains se sublime.

Le gaz, quant à lui, ne se propage pas non plus jusqu’à la surface de l’étoile en raison du champ magnétique important autour des jeunes étoiles. Le bord interne est ainsi déterminé par le rayon de co-rotation de l’étoile, c’est à dire la distance à laquelle une particule en rotation képlerienne orbite à la vitesse de rotation de l’étoile. Le champ magnétique de l’étoile tournant à la vitesse de rotation de l’étoile, ce rayon de co-rotation correspond ainsi au rayon en dessous duquel le gaz est freiné par le champ magnétique et est rapidement accrété le long des lignes de champ.

En considérant un système « étoile + disque » isolé, il n’y a pas d’arrêt brutal de la distribution de matière au bord externe qui est donc plus une limitation numérique nécessaire aux simulations qu’autre chose. La réalité est représentée plus fidèlement par une décroissance continue de la matière, difficile à représenter tant pour le bord externe que pour la distribution azimutale du disque.

Généralement, on considère donc que la taille verticale du disque est égale à une échelle de hauteur (grandeur caractéristique de la décroissance exponentielle verticale de la densité de matière), tandis que la taille radiale du disque dépend de la physique que l’on considère. Dans mon cas j’ai souvent pris un bord externe à 100 AU.

Je vais ici essayer de récapituler les approximations qui ont été faites jusque là sur la physique des disques, et qui vont se retrouver implicitement dans tout code qui implémente les équations décrites ci-dessus :

1. On suppose que les disques évoluent de manière isolée. Les études suggèrent que les étoiles se forment majoritairement dans des amas (clusters) à l’intérieur desquels la plupart des étoiles font partie de systèmes binaires ou multiples [Duquennoy and Mayor, 1991]. Même si cette approximation permet la modélisation de l’évolution du disque, il est probable que des effets de voisinages aient des conséquences dans tout ou partie des systèmes stellaires.

2. On néglige l'autogravité du disque ($M_d \lesssim \frac{H}{R} M_*$) en considérant que la période où ce n'est pas le cas est courte devant le temps de vie du disque, et que ce dernier tend rapidement vers une configuration où l'autogravité est négligeable.
3. On considère que le gaz est en rotation képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$. Pour cela, on néglige la pression du gaz qui a tendance à rendre la rotation légèrement sous-képlerienne.
4. On considère qu'il n'y a pas de variation de la gravité dû à la variation de masse de l'étoile induite par l'accrétion. Ça entraîne alors $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$.
5. Dans le calcul du chauffage visqueux, on néglige la vitesse azimuthale, la vitesse radiale ainsi que toutes les dérivées en φ compte tenu que le disque est axisymétrique.
6. On se place dans le cadre d'un disque optiquement épais quand on choisi d'utiliser des moyennes de Rosseland pour l'opacité. Si c'est physiquement cohérent avec les parties internes du disque, ça ne l'est parfois plus dans les parties externes, surtout si le disque est très étendu.
7. Le modèle d'opacité a une grande influence sur la physique du disque. En particulier, chaque modèle fait des hypothèses sur la métallicité, les propriétés de la poussière, notamment la taille des grains. Chacune de ces hypothèses joue sur l'opacité d'une manière qui est totalement masquée dans les équations ou tables qu'on utilise pour rendre compte de la dépendance de l'opacité en fonction de la température et de la densité.
8. On fait souvent l'approximation de la masse moléculaire moyenne μ est constante (et typiquement égale à $\mu = 2.35$). Or en fonction des transitions d'opacité, la quantité de poussière va brusquement varier, engendrant une variation de μ . Cette masse moléculaire moyenne a en particulier une importance dans le calcul de l'échelle de hauteur H du disque et la vitesse du son c_s .
9. Définir le profil de densité de surface du disque comme une loi de puissance reste une approximation. Ça l'est d'autant plus que le disque est étendu. Du reste, la masse du disque et l'indice de la loi de puissance sont peu contraints, donnant une grande liberté dans le profil de densité dont il faut tenir compte pour mettre en perspective les résultats que l'on obtient.
10. Le modèle choisi pour la viscosité, constante ou prescription alpha, néglige bien souvent la présence de « dead zone » où l'ionisation n'est pas suffisante pour que l'on puisse définir une viscosité turbulente. L'absence de ces zones dans un disque modélisé est bien entendu une approximation à des fins de simplifications, mais masque certaines propriétés intrinsèques des disques dont les conséquences sur la formation planétaire sont encore mal connues.
11. Une dernière approximation, et qui a des conséquences importantes pour l'opacité, le profil de température, la viscosité et par extension, toute la physique du disque, est le fait de considérer les propriétés de la poussière comme figées dans le temps. Au cours de la vie du disque, la poussière évolue. Sa distribution de taille change, la quantité totale de poussière est modifiée, notamment par l'accrétion. Et enfin, à mesure que la poussière se retrouve dans des embryons de planète de plus en plus gros, la quantité de poussière disponible sous la forme de petites particules diminue d'autant.

1.3 Interaction disque-planète

On ne peut étudier séparément le disque ou les planètes, c'est un système global, en interaction, qui évolue depuis la formation du disque (et les poussières qu'ils contient) jusqu'à la dissipation du disque (et la possible présence d'une ou plusieurs planètes).

Étant donné que j'ai implémenté les interactions disque-planète à partir de modèles calibrés sur des simulations hydrodynamiques, je ne vais pas redémontrer ici les formules analytiques, mais plutôt m'attacher à présenter, avec les mains, le principe de chacun des phénomènes physiques mis en jeu.

1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I

Ce type de migration ne concerne que les planètes de faible masse (de l'ordre de $10M_{\oplus}$) pour lesquelles l'interaction de marée entre la planète et le disque a une réponse linéaire, c'est à dire que le profil de densité surfacique n'est quasiment pas modifié par la planète. Ces planètes, qui ne creusent pas de sillon (gap) dans le disque de gaz, vont migrer vers l'intérieur. On appelle cette migration la *migration de type I*.

Couple du disque sur la planète

Un couple gravitationnel représente l'échange d'énergie associé à une force gravitationnelle. Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crée abouti à un couple qui agit sur la planète :

$$\Gamma = - \iint_{\text{disc}} \left(\vec{r} \wedge \vec{\nabla} (\Phi_p) \right) \Sigma r \, dr \, d\theta \quad (1.48)$$

⚠ À chaque fois qu'il sera mentionné « couple », celui-ci fera référence au couple *du* disque *sur* la planète.

Ainsi, si le couple est négatif (sous entendu du disque sur la planète), le disque va prendre de l'énergie à la planète qui va ainsi migrer plus proche de son étoile, vu que son énergie cinétique diminue.

Si le couple est positif, la planète migre vers l'extérieur, cette dernière prenant de l'énergie au disque.

Couple de Lindblad

La présence d'une planète dans un disque de gaz entraîne la création d'ondes de densités aux *résonances de Lindblad* [Goldreich and Tremaine, 1979]. Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crée abouti à un *couple* qui agit sur la planète.

Il est tout d'abord intéressant de remarquer l'origine des bras spiraux dans les galaxies. Ce sont essentiellement des phénomènes statistiques que l'on peut résumer en deux points :

1. Une onde de densité se forme par la présence de sur-densité locales comme des nuages de gaz géants [D’Onghia et al., 2013]. Une fois formée, il est possible que l’onde de densité s’auto-entretienne en modifiant les excentricités des éléments qui la composent [Binney and Tremaine, 2008].
2. L’onde ainsi créée n’est pas une onde matérielle rigide en rotation, mais une onde de densité statistique. Le bras spiral n’est ainsi pas constitué d’une population fixe d’étoile. Les étoiles constituant le bras spiral changent avec le temps, mais statistiquement, la position des étoiles dans la galaxie dessine une onde de densité où le nombre d’étoiles est plus grand.

[FIGURE 1.9] schématise l’apparition d’onde de densité. Dans le cas à gauche, des orbites concentriques parfaitement circulaires sont ajoutés. On ne voit rien de particulier. Par contre, dans le cas à droite, on choisi des orbites très légèrement excentriques. À chaque étape, on rajoute une orbite en agrandissant l’orbite précédente et en la tournant légèrement. On voit ainsi apparaître deux ondes de densités dans le disque simplement dues à l’orientation des orbites excentriques.

Ça signifie en particulier que la vitesse de rotation de l’onde de densité n’est pas liée à la vitesse de rotation des étoiles qui la composent. Ceci permet de résoudre le « winding problem » c’est à dire le fait que si l’onde de densité était rigide, elle s’enroulerait sur elle-même au bout de quelques orbites seulement, ce qui n’est pas le cas ici [Binney and Tremaine, 2008].

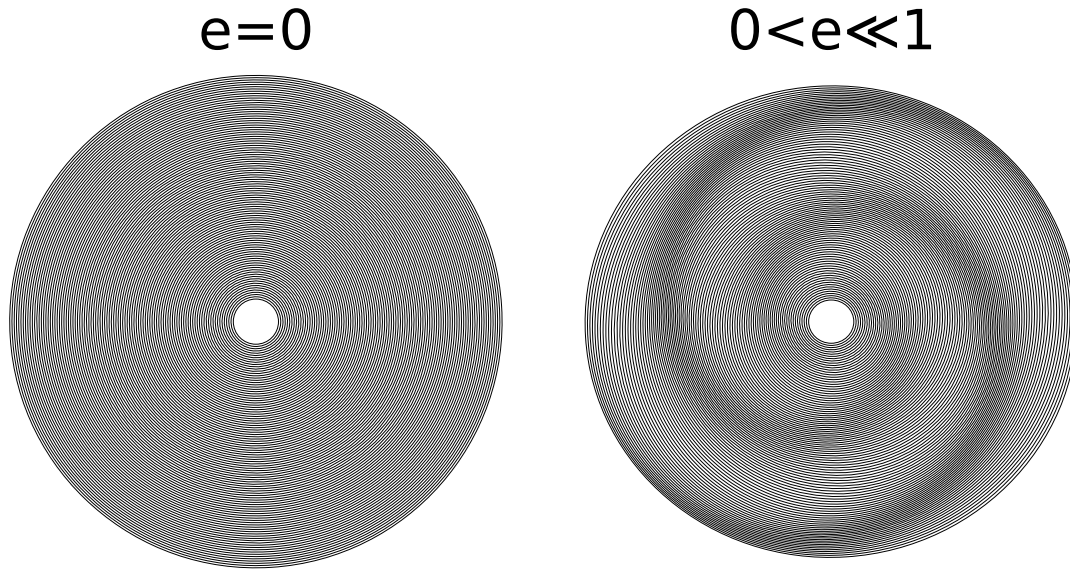


FIGURE 1.9 – Illustration de l’origine des bras spiraux dans une galaxie au travers de l’excitation cohérente de l’excentricité par les bras eux mêmes. Dans le cas « $e = 0$ », les orbites des étoiles, représentées par les traits noir sont des cercles parfaits. Dans le cas « $0 < e \ll 1$ », les orbites sont toutes très légèrement excentriques, et les arguments du périhélieus légèrement décalés à mesure que les demi-grands axes augmentent.

Pour l’interaction entre une planète et un disque protoplanétaire, c’est exactement le même principe. Le potentiel de la planète excite les excentricités des éléments fluides voisins jusqu’à former une onde de densité autour de la planète. La différence principale est que le perturbateur est un potentiel gravitationnel tournant, ce qui modifie la forme des ondes de densité comme illustré [FIGURE 1.10 page ci-contre].

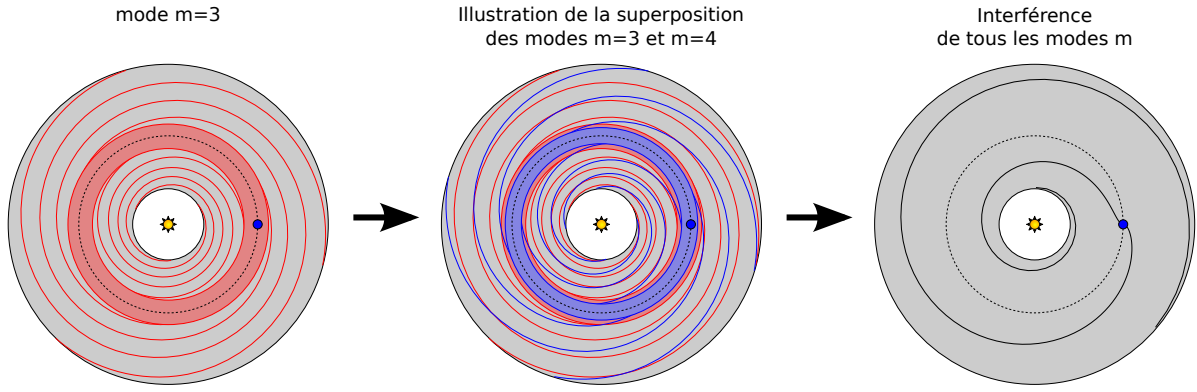


FIGURE 1.10 – Génération d’ondes de densité dans le disque protoplanétaire dû à la présence d’une planète. Chaque mode m émet m ondes de densité de part et d’autre de la position radiale de la planète. Un anneau interne aux positions du mode m est dénué de toute onde dû à ce même mode. Les interférences entre toutes les ondes de densités de tous les modes donne deux ondes de densités que l’on observe dans des simulations hydrodynamique. Les positions successives des interférences constructives sont données par [Ogilvie and Lubow, 2002, eq. (13) et (24)]

Le potentiel gravitationnel de la planète peut se décomposer en série de Fourier où chaque mode m (entier) a une dépendance sinusoïdale en azimuth et possède m maxima et m minima.

Pour chaque mode m du potentiel gravitationnel de la planète, on définit deux résonances, une résonance interne (ILR : Inner Lindblad Resonance) et une résonance externe (OLR : Outer Lindblad Resonance) associées aux positions suivantes dans le cas d’un disque froid ($H/R \ll 1$; Ward [1997]) :

$$r_{OLR}(m) = \left(\frac{m+1}{m} \right)^{2/3} r_p \quad (1.49a)$$

$$r_{ILR}(m) = \left(\frac{m-1}{m} \right)^{2/3} r_p \quad (1.49b)$$

Pour un mode m donnée, à partir des anneaux de rayon $r_{ILR}(m)$ et $r_{OLR}(m)$ vont être lancées m ondes de densités.

Dans le cas des bras spiraux dans une galaxie, c’est principalement un mode $m = 2$ qui propage une onde spirale de part et d’autre d’une barre centrale source des ondes de densité. Dans le cas d’une planète dans un disque, des ondes de densité sont lancées pour chaque mode m .

Par interférence constructive [Ogilvie and Lubow, 2002], la somme de toutes les ondes de densités émises par tous les modes du potentiel gravitationnel vont résulter en la formation d’une onde de densité résultante [FIGURE 1.10].

Il est important de remarquer que la position de la résonance externe d’ordre m est systématiquement plus proche que la résonance interne associée. Ainsi, en sommant sur tous les modes, on arrive à la conclusion que le couple total externe l’emporte toujours sur le couple total interne [Ward, 1997].

Ainsi, le couple de Lindblad est généralement négatif pour des modèles typiques de disques protoplanétaires [Ward, 1997].

La résolution numérique des équations linéarisées permet de trouver une formule analytique pour le couple de Lindblad Γ_L . Dû à la résolution numérique qui doit s'affranchir de la divergence du potentiel gravitationnel en $r = r_0$, cette formule introduit une longueur de lissage permettant de s'affranchir de la singularité du noyau du Green du potentiel gravitationnel [Paardekooper et al., 2010, eq. (14)] :

$$\gamma\Gamma_L/\Gamma_0 = -(2.5 + 1.7\beta - 0.1d) \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{0.71} \quad (1.50)$$

où γ est l'indice adiabatique, et β et d sont les exposants des lois de puissance pour les profils de température et de densité de surface.

Le couple est ici exprimé en unité de Γ_0 , couple de référence défini par :

$$\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h} \right)^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2 \quad (1.51)$$

Notons aussi que le processus physique du transport du moment angulaire de la planète est réalisé par l'onde de densité. Le moment angulaire est emporté par l'onde de densité qui l'échange avec le gaz environnant à mesure que ce dernier amorti et dissipe l'onde.

Couple co-orbital ou de corotation

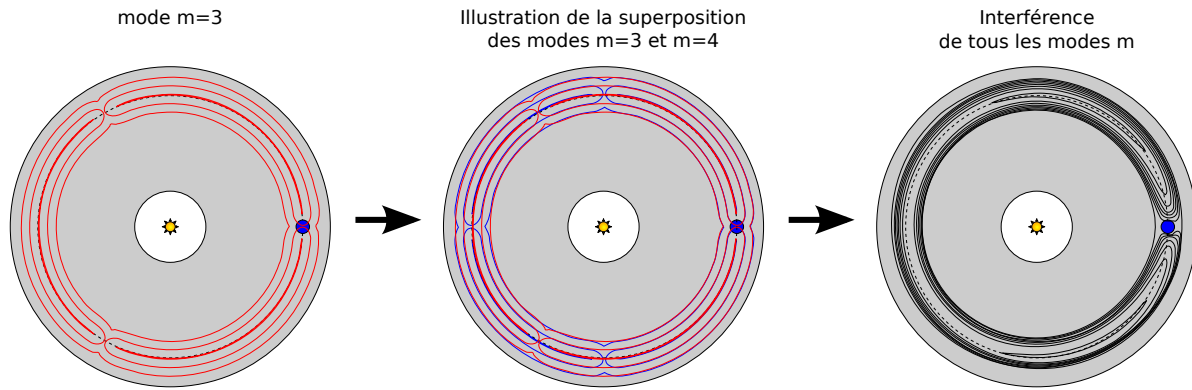


FIGURE 1.11 – À partir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète, chaque mode m a pour conséquence m zones de libration dans la zone de corotation avec la planète. Les interférences entre l'infinité de modes m fait apparaître des orbites fer-à-cheval (« horseshoe orbits ») dans la référentiel tournant avec la planète. La zone de corotation a ici été exagérée pour plus de lisibilité.

De la même manière que précédemment pour le couple de Lindblad, on peut repartir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète. Pour chaque mode m de la décomposition, on voit apparaître m zones de libration, centrées sur le rayon de la planète, et réparties en azimut. Figure 1.11 représente le mode $m = 3$, puis une juxtaposition de mode et finalement le résultat des interférences constructives entre tous les modes m de la décomposition.

Le couple de corotation provient des échanges gravitationnels que va avoir une particule fluide en co-orbite avec une planète. Il existe deux types de couples, issus du gradient de deux quantités physiques distinctes, la vorticité spécifique (vorticité divisée par la densité de surface) appelée parfois vortensité et l'entropie.

Chacun de ces deux couples possède une partie qui peut saturer en fonction des conditions physiques.

Pour illustrer le principe de la saturation, et sans considérer un couple en particulier, il convient de définir certains temps caractéristiques afin de comprendre l'origine de ce couple non saturé, et pourquoi ce dernier peut saturer. Figure 1.12 représente schématiquement les 3 temps principaux mis en jeux.



FIGURE 1.12 – Dans le référentiel tournant avec la planète (qui est donc fixe dans ce repère), représentation d'une orbite de corotation ainsi que des différents temps caractéristiques mis en jeux. t_{lib} est le temps mis par un élément fluide pour effectuer une orbite de corotation (temps qui peut être égal à 130 fois la période orbitale de la planète). t_{U-turn} est le temps mis par un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète. t_{diff} peut être suivant le cas le temps radiatif t_{rad} ou le temps visqueux t_{vis} nécessaire pour homogénéiser les propriétés thermodynamiques de l'élément fluide avec son environnement.

On définit tout d'abord t_{lib} comme le temps mis par un élément fluide pour effectuer une co-orbite complète dans la zone de fer-à-cheval. Ceci dépend de la distance de l'élément fluide au rayon de corotation. Mais le temps de libration le plus court est

obtenu à la distance x_s de la corotation, et vaut [Baruteau and Masset, 2008, eq. (52)] :

$$t_{\text{lib}} = \frac{4\pi}{x_s \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|} = \frac{8\pi r_p}{3\Omega_p x_s} \quad (1.52)$$

où x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region ») [Paardekooper et al., 2010, eq. (44)] :

$$x_s = \frac{1.1}{\gamma^{1/4}} \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{h}} \quad (1.53)$$

Dans le cas d'une planète de $20 M_{\oplus}$ à 1 AU dans un disque avec $h = 0.05$ et $M_{\star} = 1 M_{\odot}$, ce temps de libration vaut $t_{\text{lib}} \sim 38 p_{\text{orbital}}$.

Le temps $t_{\text{U-turn}}$ représente quant à lui la durée nécessaire à un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète, c'est à dire pour parcourir la zone de longueur $2x_s$ ⁴ devant la planète. Il est défini par [Baruteau and Masset, 2008, eq. (64)]

$$t_{\text{U-turn}} \simeq \frac{4}{\Omega_p} \left[\frac{H(r_p)}{R_H} \right]^{3/2} \quad (1.54)$$

où $R_H = r_p(q/3)^{1/3}$ est le rayon de Hill de la planète. Dans le cas d'une planète de $20 M_{\oplus}$ à 1 AU dans un disque avec $h = 0.05$ et $M_{\star} = 1 M_{\odot}$, ce temps vaut $t_{\text{U-turn}} \sim 1.6 p_{\text{orbital}}$.

Un troisième et dernier temps t_{diff} rentre en jeu, c'est le temps de diffusion. Selon le processus physique mis en jeu, ce temps peut être t_{rad} ou t_{visc} .

t_{rad} représente le temps de diffusion par refroidissement radiatif. Ce temps est plus long quand on se rapproche de l'étoile car le rayonnement est plus rapidement ré-absorbé. Le temps radiatif au travers de la zone de corotation est de l'ordre de :

$$t_{\text{rad}} = \frac{x_s^2}{\chi} \quad (1.55)$$

où x_s est la demi-largeur de la zone de corotation et χ est la diffusivité thermique.

t_{visc} représente la diffusion d'une quantité physique par la viscosité. Ce temps est plus court quand on se rapproche de l'étoile. Le temps visqueux à la zone de corotation t_{visc} est de l'ordre de [Masset, 2001, 2002, Ogilvie and Lubow, 2003]

$$\tau_{\nu} \sim \frac{x_s^2}{\nu} \quad (1.56)$$

Quand la grandeur physique considérée est la vortensité (ou vorticité spécifique), seul t_{visc} est à prendre en compte. Quand c'est l'entropie, les deux temps t_{visc} et t_{rad} sont importants. Figure 1.12 page précédente récapitule les temps mis en jeux et à quoi ils correspondent.

Pour que le couple de corotation soit non saturé, on doit satisfaire aux inéquations suivantes [Baruteau and Masset, 2013, eq. (31)] :

$$t_{\text{U-turn}} < t_{\text{diff}} < \frac{t_{\text{lib}}}{2} \quad (1.57)$$

4. x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region »)

$t_{U\text{-turn}}$ est le temps nécessaire pour faire le demi tour devant la planète (en gros, pour traverser la zone égale à $2x_s$). t_{lib} est le temps de libration, c'est à dire le temps mis par une particule fluide pour faire le tour de la zone en fer-à-cheval. t_{diff} quant à lui est le temps de diffusion de la quantité physique considérée. Suivant les cas, il peut y avoir plusieurs temps de diffusion qui sont important, auquel cas les inégalités doivent être satisfaites pour tous les temps de diffusions mis en jeux.

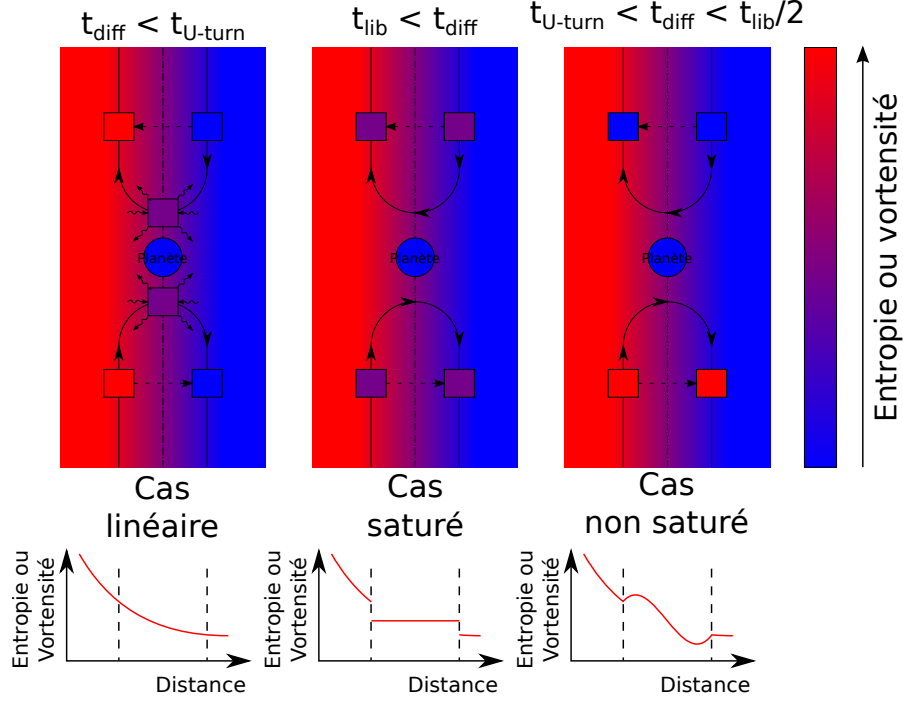


FIGURE 1.13 – Dans le référentiel tournant avec la planète, représentation du mécanisme général à l'origine du couple de corotation. Lorsque les temps de diffusion t_{diff} sont plus grande que le temps de libration t_{lib} , le couple de corotation sature car le gradient de vortensité/entropie au travers de la région fer-à-cheval tend à s'aplatir. Ce dernier est restauré quand les temps de diffusion t_{diff} sont plus courts que le temps de libration t_{lib} . Dans ce cas, la valeur optimale du couple de corotation est obtenue lorsque les temps de diffusion t_{diff} sont de l'ordre de la moitié du temps de libration $t_{\text{lib}}/2$. Dans la limite où les temps de diffusion t_{diff} sont plus courts que le temps de demi-tour $t_{U\text{-turn}}$, l'amplitude du couple de corotation décroît pour atteindre la valeur prédite par une analyse linéaire.

Figure 1.13 illustre les trois cas possibles en fonction des commensurabilités entre les différents temps caractéristiques mis en jeux.

L'idée générale afin d'éviter la saturation, c'est qu'on doit restaurer le gradient d'entropie / de vortensité au travers de la zone fer-à-cheval. Il faut donc que les processus diffusifs soient suffisamment efficace pour qu'en arrivant à la région de « U-turn » de l'autre coté, l'élément fluide ait pu équilibrer ses conditions physiques avec le milieu environnant. Cette condition est illustrée par l'inégalité suivante :

$$t_{\text{diff}} < \frac{t_{\text{lib}}}{2} \quad (1.58)$$

Mais il faut de plus que la diffusion ne soit pas trop efficace, sous peine que la valeur du couple de corotation diminue pour atteindre la valeur prédite par une analyse linéaire.

Ceci donne alors la deuxième inéquation :

$$t_{\text{U-turn}} < t_{\text{diff}} \quad (1.59)$$

De la même manière que pour le couple de Lindblad, la résolution numérique des équations nous permet d'avoir des expressions analytiques pour les couples de corotation.

Il y a d'une part les couples soumis à saturation [Paardekooper et al., 2010, eq. (45)] :

$$\gamma\Gamma_{\text{c,hs,baro}}/\Gamma_0 = 1.1 \left(\frac{3}{2} - d \right) \left(\frac{0.4}{b/h} \right) \quad (1.60a)$$

$$\gamma\Gamma_{\text{c,hs,ent}}/\Gamma_0 = \frac{\xi}{\gamma} \left(10.1 \sqrt{\frac{0.4}{b/h}} - 2.2 \right) \left(\frac{0.4}{b/h} \right) \quad (1.60b)$$

et les couples non soumis à saturation, dits linéaires [Paardekooper et al., 2010, eq. (17)] :

$$\gamma\Gamma_{\text{c,lin,baro}}/\Gamma_0 = 0.7 \left(\frac{3}{2} - d \right) \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{1.26} \quad (1.61a)$$

$$\gamma\Gamma_{\text{c,lin,ent}}/\Gamma_0 = \xi \left[2.2 \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{0.71} - \frac{1.4}{\gamma} \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{1.26} \right] \quad (1.61b)$$

d et ξ sont respectivement les exposants des lois de puissance pour les profils 1D de densité de surface et d'entropie.

Dans la pratique, ce couple peut être positif (migration vers l'extérieur) ou négatif (migration vers l'intérieur) en fonction des variations des quantités physiques par rapport à leur valeur nominales.

Remarque : Si la planète creuse un *sillon* (*gap*) le long de son orbite, alors il n'y a pas de couple co-orbital étant donné que le gaz est déplété.

S'il n'y a pas de diffusion (temps de diffusion t_{diff} très long), alors le couple va saturer très rapidement, typiquement quelques dizaines d'orbites.

Modélisation dans le code N-corps

Les couples de Lindblad et de Corotation ont été intégrés aux simulations numériques en utilisant le modèle de Paardekooper et al. [2011]. Plus de détails sur l'implémentation de ces formules et le modèle de disque utilisé dans la section [§ 2 page 46].

1.3.2 Migration des planètes massives : type II

Par massive, on entend une planète qui va induire des modifications importantes du profil de densité du disque. L'approximation du régime linéaire n'est alors plus valable.

Je présente ici très succinctement ce type de migration que je n'ai pas considéré tout au long de ma thèse. Je me place dans le régime linéaire et me suis concentré sur les cœurs de planète géante et les planètes telluriques. J'ai donc négligé tous les effets non linéaires dû aux grandes masses, et en particulier la création d'un sillon par les planètes.

Quand une planète dans un disque devient suffisamment massive, la réponse du disque n'est plus linéaire, et des ondes de densité induites par la planète forment des chocs non loin de là où elles sont émises. La répulsion entre le disque et la planète devient si forte qu'une cavité annulaire se forme autour de l'orbite de la planète, creusant le disque de gaz [Lin and Papaloizou, 1986].

Une fois que la cavité est formée, la planète est dite en migration de *type II* : son orbite agit alors essentiellement comme une barrière entre les deux parties du disque de gaz, *interne* et *externe*. Du gaz peut parfois sauter le gap, ou être accrété par la planète mais cette dernière voit son mouvement régir par le disque de gaz, se retrouvant entraînée par la migration de celui-ci.

Quand la planète creuse un sillon et que sa masse est inférieure ou de l'ordre de la masse locale du disque ($M_p \lesssim M_{d,loc}$ avec lequel elle interagit, alors le temps de migration de la planète est contrôlé par le *temps visqueux* du disque, car cette dernière se comporte comme une particule de ce disque [Nelson et al., 2000].

1.3.3 L'amortissement de l'excentricité et de l'inclinaison

Une planète sur une orbite non circulaire $e \neq 0$ génère des ondes supplémentaires à cause de son excentricité. De même, une orbite légèrement inclinée induit des ondes à cause de l'inclinaison I de la planète.

Des calculs analytiques sur les équations linéarisées (valables quand e et I sont faibles $e, i \ll H/R$) montrent que les ondes dues à l'excentricité ou l'inclinaison ont tendance à amortir l'élément orbital qui est à leur origine. [Tanaka and Ward, 2004, eqs. (45), (47)] trouvent un amortissement exponentiel dont les temps caractéristiques sont :

$$\frac{\bar{e}}{e} = -\frac{0.780}{t_{\text{wave}}} \quad (1.62a)$$

$$\frac{\bar{I}}{I} = -\frac{0.544}{t_{\text{wave}}} \quad (1.62b)$$

où le temps caractéristique de l'évolution orbitale t_{wave} est donné par [Tanaka and Ward, 2004, eq. (49)] :

$$t_{\text{wave}} = \frac{M_\star}{M_p} \frac{M_\star}{\Sigma_p a^2} \left(\frac{H}{R} \right)^4 \Omega_p^{-1} \quad (1.63)$$

Le temps caractéristique d'amortissement pour l'excentricité et l'inclinaison est similaire et de l'ordre de [Tanaka and Ward, 2004] :

$$\tau_e \sim \tau_I \sim h^2 \tau_{\text{mig}} \quad (1.64)$$

Des simulations hydrodynamiques montrent que le même phénomène d’amortissement se produit pour des valeurs plus grandes de e et I , tout en étant dans un régime différent que celui à faible valeurs ($e, i \ll H/R$) [Cresswell et al., 2007]. On explique cela pour l’inclinaison par le fait qu’à grande inclinaison, la planète peut sortir du disque et ressentir un amortissement réduit. Pour l’excentricité quant à elle, on invoque le fait que durant son orbite la planète va voir sa vitesse varier par rapport à celle du disque de gaz [Papaloizou and Larwood, 2000].

1.3.4 L’accrétion du gaz

Dans le modèle d’*accrétion de cœur*, les planètes géantes sont d’abord des cœurs rocheux qui grossissent jusqu’à atteindre une masse critique de l’ordre de $15M_{\oplus}$. Une fois cette masse atteinte, le cœur commence à accréter rapidement du gaz jusqu’à former une géante gazeuse.

Ceci implique que la formation des planètes géantes doit se passer avant que le disque de gaz ne se dissipe (ce qui intervient au bout de quelques millions d’années).

Les noyaux de ces planètes sont supposés se former au delà de la ligne des glaces (limite radiale virtuelle au delà de laquelle on peut trouver de l’eau sous forme solide ; autour de 4 UA). En effet, au delà de cette limite, la quantité de matière solide augmente, et donc le taux d’accrétion augmente aussi.



La formation des embryons de planètes géantes n’est toujours pas clair. On ne sait pas vraiment s’il y a une zone privilégiée ou non, la limite virtuelle de la ligne des glaces pourrait ne pas être valable, la glace ne rajoutant qu’environ 50% de masse en plus.

À noter qu’il n’y a pas de pression et donc pas de liquide dans l’espace, juste du gaz ou du solide.

Pour une simulation donnée, si on augmente le taux d’accrétion de la planète, celle-ci sera plus massive, et aura donc une inertie plus grande. Elle mettra donc plus de temps à migrer par migration Type II car son inertie s’y opposera. D’un autre côté, si la planète n’a pas encore créé de gap, la migration de Type I est plus rapide à mesure que la masse augmente.

1.3.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps

Numériquement, le couple de migration type I est pris en compte en utilisant les formules semi-analytiques développées par Paardekooper et al. [2011].

L’amortissement de l’inclinaison et de l’excentricité quant à elles sont modélisées via les formules de Cresswell and Nelson [2008].

Chapitre 2

Le Code N-Corps

Sommaire

2.1	Présentation de mercury	46
2.2	Mode d'emploi du code N-corps modifié	47
2.2.1	Note technique	47
2.2.2	Paramètres divers	47
2.2.3	Densité de surface	48
2.2.4	Irradiation de l'étoile centrale	49
2.2.5	Viscosité	49
	constant	49
	alpha	49
	alpha_dz	50
2.2.6	Opacité	50
	bell	50
	zhu	50
	chambers	51
	hure	51
2.2.7	Turbulence	51
2.2.8	Migration	52
	real	52
	mass_dependant	52
	linear_indep	53
	tanh_indep	53
	manual	55
2.3	Disque 1D	55
2.3.1	Profil de densité de surface	55
2.3.2	Table d'opacité	56
2.3.3	Profil de température	56
2.4	Migration type I	56
2.5	Amortissement de e et I	57
2.6	Effet de l'excentricité sur le couple de corotation	57
2.7	Désactivation des effets du disque	58
2.8	Validité des éléments orbitaux	58

Afin d'étudier la formation planétaire et les interactions avec le disque de gaz, j'ai utilisé un code de simulation N-corps, qui permet de regarder l'évolution d'un nombre arbitraire de corps orbitant autour d'un astre central [Chambers, 1999].

Ce choix est apparu naturellement. Au début de ma thèse j'ai fait quelques simulations hydrodynamiques avec le code Genesis développé par Arnaud Pierens. J'ai rapidement constaté que ce genre de simulations, bien que modélisant de manière poussée le disque, ne permettait pas d'étudier de manière approfondie la dynamique planétaire. Le temps de calcul nécessaire pour une simulation limite en effet grandement le nombre de corps ainsi que la durée d'intégration. J'ai donc souhaité me tourner vers un code N-corps, afin de privilégier la dynamique planétaire, et de modifier ce programme afin d'y inclure les effets d'un disque de gaz sur la dynamique planétaire.

J'ai ainsi gagné en temps de calcul, et j'ai ouvert un vaste champ d'investigation sur les paramètres du disque, le nombre de corps en interaction, me permettant de faire des systèmes planétaires très divers, parfois avoir plusieurs centaines d'embryons pour plusieurs millions d'années, chose impossible dans les simulations hydrodynamiques du début de ma thèse où 20 corps pendant quelques dizaines de milliers d'années était un maximum.

Ce choix a bien entendu introduit son lot d'incertitudes et d'approximations qui sont discutés dans la partie [§ 5 page 77]. La présente section a pour but de présenter le code N-corps que j'ai utilisé ainsi que les différents effets du disque que j'ai modélisé. J'ai avant tout souhaité présenter les parties qui ont des conséquences sur la physique du disque, que ce soit en terme de choix d'un modèle particulier, ou de limitations numériques qu'il est bien de garder à l'esprit quand on interprète les résultats.

2.1 Présentation de mercury

Le code N-corps choisi est le code **mercury** [Chambers, 1999]. Ce code offre la possibilité de choisir un algorithme parmi 5 différents (BS, BS2, RADAU, MVS et HYBRID), ayant des propriétés diverses. Dans le cadre de ma thèse, je n'ai utilisé que l'algorithme HYBRID, qui utilise l'algorithme MVS la plupart du temps, mais change pour l'algorithme BS2 lors de rencontres proches. Il est possible de déterminer à quel moment on considère qu'une rencontre est "proche" dans le fichier de paramètre de programme, j'ai laissé le paramètre par défaut.

La raison de ce changement est assez simple. MVS est un algorithme symplectique, c'est à dire à pas de temps constant, dans lequel on définit un hamiltonien que l'on résout pour faire évoluer les orbites. La conservation de l'énergie est moins bonne que pour un algorithme à pas de temps adaptatif, mais le point très important est que cette conservation de l'énergie est bien meilleure au cours du temps. C'est à dire que là où les algorithmes tels que BS, BS2 et RADAU verront leur erreur sur l'énergie augmenter au cours du temps, les algorithmes symplectiques vont eux voir leur erreur rester plus ou moins constante au cours du temps.

Dans le cadre de mes simulations, j'ai accordé une importance limitée aux variations d'énergie, étant donné que les couples que l'on rajoute pour simuler la présence du disque de gaz font que l'énergie n'est pas conservée pour une planète donnée. Cependant, il est

important de bien résoudre les orbites et c'est ce point qui est le plus crucial ici. En effet, quelques tests ont permis de contraindre le pas de temps minimal qu'il est nécessaire d'avoir en fonction de la distance orbitale d'une planète. La contrainte de pas de temps dans mes simulations vient donc d'une distance minimale en dessous de laquelle les orbites ne sont pas correctement calculées. Cette limite, afin d'éviter tout problème, est choisie pour être en dessous du bords interne du disque de gaz que je défini.

2.2 Mode d'emploi du code N-corps modifié

À part la première section qui donne quelques détails techniques, le but de cette partie est de présenter les différentes options du code modifié. Ces options sont lues à partir d'un fichier commun **disk.in**. Si une option n'est pas présente, la valeur par défaut sera lue à partir du code. Le fichier **disk.out** récapitule toutes les valeurs de toutes les options et paramètres importants du code.

Remarque : Il est possible de mettre des commentaires dans le fichier **disk.in**, que ce soit pour commenter une ligne entière, ou pour mettre en fin de ligne après un paramètre, à l'aide du caractère « ! » exactement comme en Fortran90.

2.2.1 Note technique

Le code est en grande partie le code mercury [Chambers \[1999\]](#). Les effets du disque ont été inclus dans la partie **mfo_user** prévue pour inclure des effets propre à chaque utilisateur.

Pour autant, le code a été conçu de manière modulaire en portant une attention particulière au temps d'exécution et à la souplesse d'utilisation. La plupart des effets sont désactivables par une simple option dans un fichier de paramètre spécifique au effets du disque **disk.in**.

Prenons un exemple. Le couple exercé par le disque sur la planète peut être issus des formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#), ou bien suivre plusieurs lois artificielles permettant de tester certains effets dans des cas simplifiés. Pour autant, cette souplesse d'utilisation ne se fait pas au détriment de la célérité du code car au lancement du code, les options sont lues et des pointeurs de fonctions permettent au code d'exécuter directement la bonne fonction lors de l'intégration, sans avoir à tester à chaque pas de temps quelle fonction doit être lancée.

Un programme externe, nommé **test_disk** permet d'effectuer des tests unitaires sur différentes fonctions, afin de vérifier quand bon nous semble que chaque fonction n'est pas perturbée par les autres et donne des résultats corrects à la fois physiquement et numériquement.

2.2.2 Paramètres divers

Ici je regroupe des paramètres du disque qui nécessitent simplement une valeur :

```

b/h = 0.6
adiabatic_index = 1.4
mean_molecular_weight = 2.35
disk_edges = 0.1 100.
sample = 800

```

b/h est la longueur de lissage du potentiel gravitationnel d'une planète (qui diverge dans les simulations hydrodynamiques et qui est un paramètre des formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#)).

adiabatic_index est l'indice adiabatique γ comme son nom l'indique. De même, **mean_molecular_weight** est la masse moléculaire moyenne μ .

disk_edges définit les deux extrémités du disque, les bords internes et externes.

sample définit le nombre de points qu'auront les profils radiaux des différents paramètres du disque. Ces points ne sont pas répartis uniformément, il y a plus de points au bord interne qu'au bord externe, afin d'avoir une évolution plus fine des paramètres en fonction du rayon.

2.2.3 Densité de surface

surface_density permet de définir le profil en loi de puissance pour la densité de surface :

```
surface_density = 500 0.5
```

Ici, on a défini le profil suivant :

$$\Sigma(R) = 500. \cdot R^{-0.5} \text{ g/cm}^2$$

Mais il est aussi possible de donner un profil tabulé de densité de surface en fonction du rayon en paramètre d'entrée, en spécifiant le paramètre suivant :

```
surface_density = manual
```

Ainsi, le profil de densité de surface sera lu à partir du fichier **surface_density_profile.dat** qui doit être constitué de deux colonnes, la première étant la valeur du rayon en AU, et la deuxième la densité de surface en g/cm^2 . Les lignes doivent être classées par ordre croissant de distance orbitale. (les premières lignes étant les points les plus proches de l'étoile, et les dernières les points les plus lointains).

Remarque : Une interpolation sera réalisée si la discrétisation du fichier d'entrée est différente de celle du code.

À ceci s'ajoute un paramètre supplémentaire :


```
inner_smoothing_width = 0.05
```

Ce paramètre représente la longueur d’amortissement de la densité de surface au bord interne du disque, afin que la densité de surface au bord interne soit très faible. Cette longueur est exprimée en pourcentage de distance orbitale du bord interne ; c’est à dire que si le bord interne est à 0.1 AU, alors dans le cas présent, le lissage sera effectué sur une longueur de 0.005AU

2.2.4 Irradiation de l’étoile centrale

is_irradiation permet de définir si on veut inclure ou non l’irradiation dans le calcul de l’équilibre énergétique du disque.

```
is_irradiation = 1
disk_albedo = 0.5
r_star = 4.65e-3 ! AU
t_star = 5700 ! K
```

Les paramètres sont relativement explicite mais pour détailler, **disk_albedo** est l’albedo moyen du disque protoplanétaire, il représente le fait qu’une partie de la lumière incidente de l’étoile est directement réfléchi vers l’espace.

r_star et **t_star** sont respectivement le rayon de l’étoile en AU et sa température en Kelvin.

La manière dont est modélisée l’irradiation de l’étoile centrale est détaillée dans [§ 1.2.3 page 24].

2.2.5 Viscosité

Il est possible de définir plusieurs types de viscosité via l’option **viscosity_type** : **constant**, **alpha** et **alpha_dz**.

constant

Ce paramètre permet de définir une viscosité ν constante dans tout le disque. La valeur de la viscosité associée est définie dans le paramètre **viscosity** en cm^2/s .

```
viscosity_type = constant
viscosity = 1e15 ! cm^2/s
```

alpha

Ce paramètre permet de définir une viscosité via la prescription alpha de [Shakura and Sunyaev \[1973\]](#). La valeur du paramètre alpha sera lue dans le paramètre **alpha**.

```
viscosity_type = alpha
alpha = 5e-3
```

alpha_dz

Ce paramètre permet de définir une viscosité α par morceau, permettant de modéliser une dead zone. On aura donc 3 zones avec 3 α différents. Pour définir ces zones là, il faut donner dans le paramètre **alpha_dz** trois valeurs de α et dans **radius_dz** deux valeurs de distance orbitales (en AU) pour définir les bornes de la dead zone.

```
viscosity_type = alpha_dz
alpha_dz = 0.005 0.0001 0.005
radius_dz = 1.0 10.0 ! in AU
```

Quand cette option est activée, une modification au profil de densité est appliquée, afin de modéliser une sous-densité, puis une sur-densité avant et après le bord interne de la zone morte. L'écart maximum de ces « bumps » est de 15% de la valeur de la densité au bord interne de la zone morte.

À ceci s'ajoute un lissage des valeurs de α entre la valeur à gauche et la valeur à droite de la transition selon une tangente hyperbolique. La transition s'effectue typiquement sur une longueur égale à 10% de la position de la transition dans le disque (si la transition est à 1AU, alors la transition a lieu sur 0.1 AU autour de la transition).

2.2.6 Opacité

Afin de pouvoir les comparer, j'ai ajouté au code la possibilité de tourner avec différents modèles pour l'opacité.

Les différents modèles sont [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]

bell

```
opacity_type = bell
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Bell and Lin [1994].

zhu

```
opacity_type = zhu
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Zhu et al. [2009].

chambers

```
opacity_type = chambers
```

L’opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par [Chambers \[2009\]](#). Ce modèle est très simplifié et utilise une opacité constante sur un grand régime de température, pour ensuite faire une transition vers une loi de puissance à très haute température.

hure

```
opacity_type = hure
```

L’opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par [Huré \[2000\]](#).

À la différence de tous les autres modèles que j’ai implémenté, celui de [Huré \[2000\]](#) est directement une table d’opacité, sans faire intervenir de loi de puissance pour différents régimes.

À la différence des autres modèles, il n’introduit pas d’incertitudes supplémentaire via les loi de puissance qu’il définit.

En effet, dans le cas qui nous intéresse, c’est à dire la migration planétaire via la formule de [\[Paardekooper et al., 2011\]](#), l’indice des loi de puissance pour la densité de surface et la température a une très grande influence sur la couple effectif du disque. Et les transitions d’opacités, très marquées lors de la transition des lois de puissance, fait apparaître des zones particulières dans le disque qui n’ont parfois aucune réalité physique mais ont de grandes conséquences sur le résultat des simulations. De même, le lissage qu’elles introduisent masquent certaines zones d’intérêt qui ne sont mises en évidence qu’avec une table d’opacité où tous les effets fins ont été préservés.

2.2.7 Turbulence

Pour activer la turbulence dans le disque, c’est à dire l’effet que la turbulence peut induire sur la migration planétaire, il suffit d’utiliser le paramètre suivant :

```
is_turbulence = 1
```

La turbulence n’est ici qu’une migration stochastique de moyenne nulle qui perturbe les planètes et leur migration.

Le modèle utilisé est le même que celui détaillé dans [Ogihara et al. \[2007\]](#). Le principe est de définir un potentiel turbulent dans le disque, fait de la superposition de perturbation individuelle qui ont des modes m , temps de vie t_m et position dans le disques différents.

Dans le cas typique, il y a 100 modes différents dans le disque :

$$\Phi_{\text{turb}}(R, \phi, t) = \gamma R^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^{100} \Lambda_k(R, \phi, t) \quad (2.1)$$

avec

$$\Lambda_k = \xi_k e^{-\frac{(R-R_k)^2}{\sigma_k^2}} \cos(m_k \phi - \phi_k - \Omega_k \tilde{t}_k) \sin(\pi \tilde{t}_k / \Delta t_k) \quad (2.2)$$

ξ_k est une constante adimensionnée déterminée aléatoirement en suivant une distribution gaussienne.

R_k et ϕ_k sont respectivement les coordonnées radiales et azimutales du mode k choisies aléatoirement et de manière uniforme pour l'un entre les bornes du disque, pour l'autre entre 0 et 2π .

Chaque mode k possède un nombre de mode m_k déterminée selon une distribution logarithmique entre $m = 1$ et $m = 150$, le nombre de mode déterminant l'extension radiale et la durée du vie du mode k .

$\sigma_k = \pi R_k / 4m_k$ est l'extension radiale de ce mode tandis que Ω_k représente la vitesse angulaire képlérienne à la position $R = R_k$.

$\Delta t_k = 0.2\pi R_k / m_k c_s$ est la durée de vie du mode k .

Les modes apparaissent et disparaissent en fonction de leur temps de vie et sont remplacés afin qu'il y ait toujours 100 modes différents dans le disque à un instant t . Chaque mode k est créé à un instant $t_{0,k}$ et se termine quand $\tilde{t}_k = t - t_{0,k} > \Delta t_k$.

2.2.8 Migration

real

C'est le cas le plus classique. Il n'y a pas besoin de définir d'autres paramètres, la migration induite par le disque de gaz sera simplement calculée à partir du modèle de [Paardekooper et al. \[2011\]](#).

`torque_type = real`

mass_dependant

On définit une zone de convergence artificielle qui va dépendre de la masse des planètes. On va donc devoir définir deux bornes en masses et deux bornes en distance orbitale qui vont déterminer cette ligne de couple nul. À l'intérieur (resp. extérieur) de cette séparation virtuelle, la migration sera vers l'extérieur (resp. intérieur).

Ensuite, on définit une pente linéaire plus ou moins importante pour voir à quelle vitesse on va tendre vers la valeur de saturation à mesure qu'on s'éloigne de la zone de convergence. Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

En résumé, on a ces paramètres suivants à définir :

`torque_type = mass_dependant`

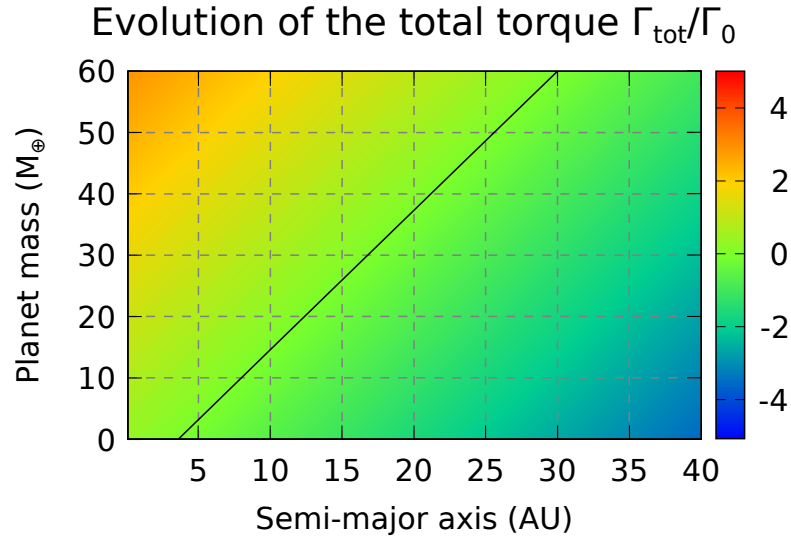


FIGURE 2.1 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **mass_dependant** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

```
mass_dep_cz_m_max = 30 ! AU
mass_dep_m_max = 60 ! m_earth
```

```
mass_dep_cz_m_min = 4 ! AU
mass_dep_m_min = 1 ! m_earth
```

```
torque_profile_steepness = 1.0
```

linear_indep

Même chose que précédemment, on peut définir un couple artificiel qui définit une zone de convergence indépendante de la masse, c’est à dire qu’on ne spécifie que la position de la zone de convergence dans le disque. On a donc :

```
torque_type = linear_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
torque_profile_steepness = 1.0
```

Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

tanh_indep

Ici, on définit aussi une zone de convergence indépendante de la masse, mais au lieu d’avoir une évolution linéaire du couple à mesure qu’on s’éloigne de la zone de convergence, on a une tangente hyperbolique qui sature à une valeur que l’on peut donner en paramètre.

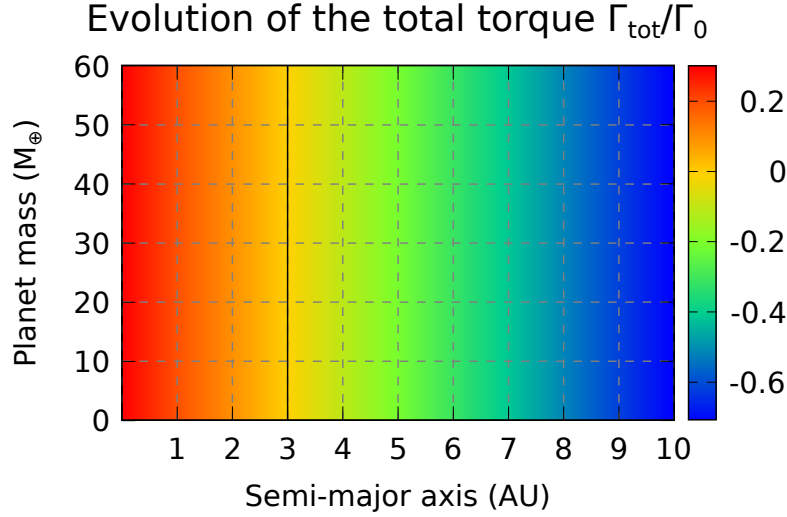


FIGURE 2.2 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **linear_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

La valeur du couple de saturation définit la valeur absolue du couple vers laquelle on va tendre quand on est très loin de la zone de convergence. Si on est à l’extérieur, ce sera cette valeur de saturation prise négativement, tandis que c’est la valeur positive qui est utilisée à l’intérieur.

On a donc les paramètres suivants à définir :

```
torque_type = tanh_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
saturation_torque = 1.0 ! in Gamma_0
```

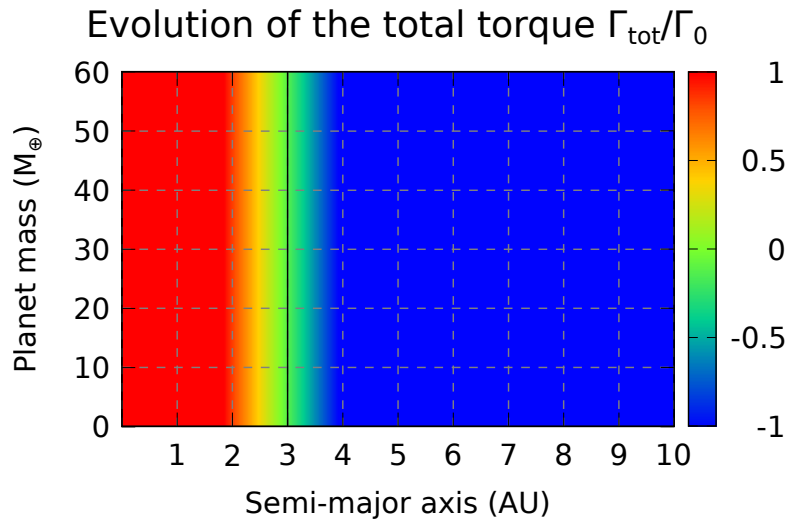


FIGURE 2.3 – Cette carte représente l’effet du disque dans le cas de l’option **tanh_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c’est à dire une zone où la migration de la planète s’arrête.

manual

Il est aussi possible de rentrer manuellement un couple total en fonction de la position de la planète dans le disque.

Les valeurs seront alors lues à partir du fichier **torque_profile.dat**. La première colonne sera les positions dans le disque en AU tandis que la deuxième colonne sera le couple exercé par le disque en unité de Γ_0 (c'est à dire que l'effet de la masse de la planète sur la vitesse de migration sera toujours pris en compte dans le code au travers de la dépendance de Γ_0 en fonction de la masse de la planète et de la masse du disque).

2.3 Disque 1D

Afin de calculer les effets d'un disque de gaz, une modélisation de ce dernier est nécessaire. Le but étant d'avoir une grande souplesse, le disque implémenté est bien entendu très simplifié. Toutes les quantités sont intégrées et invariantes selon la hauteur z et la position azimutale θ dans le disque, résultant en un modèle radial 1D de toutes les quantités.

Dans la mesure du possible, les quantités du disque ont été calculées de manière consistante. Je vais présenter dans la suite de manière chronologique comment sont calculées les grandeurs physiques du disque.

2.3.1 Profil de densité de surface

Le profil de densité de surface est défini au début de la simulation comme une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \times R^{-d} \quad (2.3)$$

où Σ_0 est la densité de surface à 1 AU et d l'indice de la loi de puissance.

Ce profil de densité de surface est défini pour une certaine étendue radiale. On définit donc un bord interne R_{in} et un bord externe R_{out} . Le bord interne est généralement à 0.1 AU et le bord externe à 100 AU.

Afin de calculer les valeurs suivantes, ce disque est échantillonné et toutes les valeurs nécessaires sont ensuite calculées à chacun de ces points.

Le profil de densité de surface est le paramètre d'entrée le plus important. Il est celui à partir duquel on calcule toutes les autres quantités du disque, température, échelle de hauteur, etc. . .

Le profil étant une loi de puissance, un amortissement est effectué au bord interne du disque afin que la valeur de la densité au bord interne soit proche de zéro.

2.3.2 Table d'opacité

Afin de pouvoir calculer le profil de température, on a besoin de choisir un modèle pour l'opacité. Je ne détaillerai pas ici les différents modèles car une étude complète sur le sujet a été effectuée, afin de comprendre l'influence du choix du modèle sur les résultats des simulations.

Par contre, quel que soit le modèle, on a généralement une dépendance en fonction de la densité et de la température. L'opacité est donc un paramètre de la résolution de l'équation qui nous permet d'avoir la température. L'opacité n'est pas, dans notre modèle, une quantité qu'on fixe *a priori*, mais plutôt un des paramètres de sortie de la résolution de l'équation de l'énergie dans le disque.

2.3.3 Profil de température

Afin de construire le profil de température point par point, on résout, pour chaque position dans le disque définie dans le profile, l'équation de l'énergie (1.37 page 27).

De manière consistante, cette équation a pour paramètre d'entrée la position, et on cherche à trouver les valeurs de la température T , échelle de hauteur H , profondeur optique τ , diffusivité thermique χ . Toutes ces valeurs sont fixées une fois qu'un ensemble cohérent de valeurs satisfait l'équation.

Afin de résoudre cette équation du type $f(x) = 0$, j'ai utilisé une version modifiée de la méthode **zbrent** de **Numerical Recipes** [Press et al., 1992]

2.4 Migration type I

La migration de type I est implémentée dans le code en utilisant le modèle 1D de disque, qui définit pour toute position du disque, une température, une densité de surface, et tous les autres paramètres nécessaires comme l'échelle de hauteur. En utilisant ces paramètres, on obtient ainsi le couple qu'exerce le disque sur la planète en fonction de sa masse et de sa position via la formule semi-analytique de Paardekooper et al. [2011].

Les deux différences principales entre le cadre du modèle de Paardekooper et al. [2011] et le disque que j'ai modélisé, c'est que dans mon cas je n'ai pas un profil de température en loi de puissance (avec une seule loi de puissance), mais j'ai une loi de puissance définie point par point. C'est à dire que pour chaque zone du disque, la température est calculée de manière cohérente avec les autres paramètres du disque, et que l'indice de la loi de puissance correspondante est calculée en fonction des températures autour.

La deuxième différence est que j'ai un profil pour l'échelle de hauteur H et le rapport d'aspect $h = H/R$ du disque au lieu d'avoir un rapport d'aspect constant pour tout le disque.

De plus, certaines erreurs se sont glissées dans ce papier. [Bitsch and Kley, 2011, appendice A] fait remarquer en particulier qu'il manque un facteur 4 dans l'équation

(33). Ainsi, la formule que j'ai utilisé pour calculer la conductivité thermique χ est :

$$\chi = \frac{16\gamma(\gamma - 1)\sigma T^4}{3\kappa\rho^2 H^2 \Omega^2} \quad (2.4)$$

Il y a aussi une erreur dans l'équation (35) car le disque se refroidit par la surface supérieur et la surface inférieure. Mais comme j'utilise dans mon code une équation de l'énergie (1.37 page 27) un peu plus complexe où j'ai tenu compte de ce fait là, cette erreur n'a pas d'incidence sur le calcul du couple.

Les formules nous donnent alors un couple exercé par le disque sur la planète.

À partir de ce couple, on définit un temps de migration t_{mig} comme :

$$t_{\text{mig}} = \frac{J}{2\Gamma} \quad (2.5)$$

où J est le moment angulaire total de la planète et $\Gamma = \dot{J}$ est le couple total exercé par le disque sur la planète.

L'accélération due à la migration $\overrightarrow{a_{\text{mig}}}$ est alors donnée par :

$$\overrightarrow{a_{\text{mig}}} = \frac{\overrightarrow{v}}{t_{\text{mig}}} \quad (2.6)$$

où \overrightarrow{v} est la vitesse instantanée de la planète.

2.5 Amortissement de e et I

L'amortissement de l'excentricité e et de l'inclinaison I d'une planète plongée dans un disque protoplanétaire est modélisée dans le code via les formules de [Cresswell and Nelson, 2008, eq. (9), (11) et (12)] :

$$t_{\text{wave}} = \frac{M_\star}{m_p} \frac{M_\star}{\Sigma_p a_p^2} \left(\frac{H}{r} \right)^4 \Omega_p^{-1} \quad (2.7a)$$

$$t_e = \frac{t_{\text{wave}}}{0.780} \left[1 - 0.14 \left(\frac{e}{H/r} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{e}{H/r} \right)^3 + 0.18 \left(\frac{e}{H/r} \right) \left(\frac{i}{H/r} \right)^2 \right] \quad (2.7b)$$

$$t_i = \frac{t_{\text{wave}}}{0.544} \left[1 - 0.30 \left(\frac{i}{H/r} \right)^2 + 0.24 \left(\frac{i}{H/r} \right)^3 + 0.14 \left(\frac{e}{H/r} \right)^2 \left(\frac{i}{H/r} \right) \right] \quad (2.7c)$$

L'amortissement de I est arrêté quand l'inclinaison descend en dessous de $I < 5 \cdot 10^{-4}$ rad afin d'empêcher les planètes d'être parfaitement dans le plan (x, y) , essentiellement pour empêcher des problèmes numériques.

2.6 Effet de l'excentricité sur le couple de corotation

Afin de tenir compte d'un effet mis en évidence par Bitsch and Kley [2010], une petite modification a été effectuée dans le calcul du couple total Γ exercé par le disque sur la planète.

En effet, il a été montré que l'excentricité d'une planète a une influence sur sa zone fer-à-cheval et par extension, sur son couple de corotation Γ_C . Un paramètre d'amortissement D , compris entre 0 et 1 a ainsi été ajouté au calcul du couple total :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot (\Gamma_L + D \cdot \Gamma_C) \quad (2.8)$$

où $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$ et Γ_L est le couple de Lindblad.

La valeur du paramètre d'amortissement D est donnée par une formule qui a été calculée pour coller au mieux aux simulations de Bitsch and Kley [2010], détaillée dans Cossou et al. [2013], et recopiée ici :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e=0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b * e}{x_s} + c\right) \right] \quad (2.9a)$$

$$a = 0.45 \quad b = 3.46 \quad c = -2.34 \quad (2.9b)$$

où x_s représente la demi-largeur de la zone fer-à-cheval divisée par le demi-grand axe.

2.7 Désactivation des effets du disque

Quand une planète sort des bornes du disque, les effets d'amortissement de e et I sont désactivés, au même titre que la migration dû à la présence du disque. Ce cas survient rarement au bord externe du disque (généralement à 100 AU), mais est beaucoup plus probable au bord interne (généralement à 0.1 AU).

2.8 Validité des éléments orbitaux

Lorsque d'une rencontre proche entre deux planètes, leurs interactions gravitationnelles rendent caduque les formules qui permettent de calculer les éléments orbitaux à partir des vitesses et positions car ceci suppose qu'on est dans le cas d'une orbite képlerienne isolée.

Dans de tels cas, on peut avoir des demi-grands axe négatifs, des excentricités supérieures à 1. Si c'est déjà en soit un problème physique, c'est aussi et surtout un problème numérique car cela fait apparaître des **Not A Number** (NaN) quand par exemple on a le demi-grand axe en argument d'une racine carrée. Ceci a donc pour conséquence concrète de faire planter le code, au mieux, ou pire, de le faire tourner avec tous les paramètres de la simulation peu à peu gangrénés par des **NaN**.

En conséquence, j'ai décidé de remplacer dans la plupart des calculs de mes simulations, le demi-grand axe par le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ qui lui n'est pas sensible à ce genre de divergences. Quand il y a une excentricité, il est clair que le rayon est différent du demi-grand axe. Mais les excentricités étant généralement faible, l'erreur faite sur le demi-grand axe reste faible. De plus les rencontres proches représentent un temps négligeable de la simulation au regard des centaines de milliers d'années sur lesquelles on intègre les orbites. On considère donc que la migration induite sur les planètes pendant leur temps de rencontre proche est totalement négligeable au regard du reste de la simulation.

Chapitre 3

Mécanismes individuels

Sommaire

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)	60
3.1.1 Définition	60
3.1.2 Résonances et excentricité	61
3.1.3 Stabilité et ordre des résonances	61
3.2 Les Zones de Convergence	61
3.2.1 Existence et intérêt	61
3.2.2 Les différents types	61
3.2.3 Diagrammes de couple a-m	61
3.2.4 Résonances et Accrétions	61

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)

3.1.1 Définition

Les *résonances de moyen mouvement* sont des configurations orbitales particulières de deux planètes dans lesquelles il existe un lien entre les périodes orbitales des planètes. Exemple, si deux planètes sont en résonance 3 : 2, ça signifie que la planète interne effectuera 3 orbites pendant que la planète externe en effectuera 2.

Ces configurations particulières confèrent une stabilité accrue aux planètes. Plus la résonance est forte et plus il sera difficile pour les planètes d'en sortir.

On met généralement une résonance sous la forme $(p + q) : p$ où p et q sont des entiers. Cette forme permet de mettre en évidence un des paramètres qui permet de rendre compte de la force de la résonance. En effet, plus q est petit et plus la résonance est forte. Ainsi, les résonances avec $q = 1$ sont les plus fortes. On dit que q est l'ordre de la résonance (plus l'ordre est petit et plus la résonance est forte).



Mais ce n'est pas le seul paramètre à prendre en compte pour évaluer la force d'une résonance et je suis bien incapable de tous les décrire.

Pour une résonance $(p + q) : p$ on définit un certain nombre d'angles θ_i dits *angles de résonance* de la forme :

$$\theta_{i+1} = (p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 - [i\varpi_1 + (q - i)\varpi_2] \quad (3.1)$$

avec i allant de 0 à q ; où λ sont les longitudes moyennes, ϖ les longitudes du péricentre et les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement à la planète interne et externe. Pour une résonance $(p + q) : p$ on a donc $q + 1$ angles de résonance.

Les angles de résonances mesurent l'angle entre les deux planètes au point de conjonction. Si un seul de ces angles est en libration (oscillation autour d'une valeur moyenne) au lieu de circuler librement de 0 à 2π alors on dit que les planètes sont en résonances. Le nombre d'angles en libration permettra aussi d'avoir une idée de la force de la résonance.

Exemple : Soit une résonance 7 : 2, les angles de résonances sont :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_1 \\ \theta_2 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (4\varpi_1 + 1\varpi_2) \\ \theta_3 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (3\varpi_1 + 2\varpi_2) \\ \theta_4 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (2\varpi_1 + 3\varpi_2) \\ \theta_5 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (1\varpi_1 + 4\varpi_2) \\ \theta_6 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_2 \end{aligned}$$

Remarque : Les *lacunes de Kirkwood* font elles aussi intervenir des résonances mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, ces résonances avec Jupiter sont des

zones déplétées en astéroïdes. La raison profonde n'est pas parfaitement connue mais il semblerait que ce soit dû au chaos. Je ne saurais pas expliquer exactement ce que ça veut dire par contre.

La résonance impose une valeur de a , mais des échanges sont possibles entre les deux corps en résonance (je ne sais pas bien de quelles valeurs par contre), et il est possible que par ce biais l'excentricité puisse augmenter, et ainsi dépleter la lacune de Kirkwood en favorisant les collisions entre les objets en résonance et les autres qui sont dans la ceinture.

3.1.2 Résonances et excentricité

3.1.3 Stabilité et ordre des résonances

3.2 Les Zones de Convergence

3.2.1 Existence et intérêt

3.2.2 Les différents types

3.2.3 Diagrammes de couple a - m

3.2.4 Résonances et Accrétions

Chapitre 4

Mécanismes de formation

Sommaire

4.1	Décalage de la Zone de Convergence	63
4.1.1	Introduction	63
4.1.2	Méthode	64
4.1.3	Le cas de deux planètes	66
4.1.4	Effet du rapport de masse	67
4.1.5	Effet des résonances	69
4.1.6	Évolution avec plus de deux planètes	70
4.1.7	Discussion	72
4.2	Formation des super terre chaude	74
4.2.1	Effet de la distribution de masse	75
4.3	Effets des paramètres du disque	75
4.3.1	Viscosité du disque	75
4.3.2	Profil de densité de surface	75
4.3.3	Profil de température	75
4.3.4	Masse du disque	75
4.3.5	Table d'opacité	75
4.3.6	Longueur de lissage	75

4.1 Décalage de la Zone de Convergence

Cette partie a fait l'objet d'un article, publié dans le journal *Astronomy & Astrophysics* : [Cossou et al. \[2013\]](#).

Le but de cette partie est de montrer que quand on met plusieurs planètes dans disque de gaz possédant une zone de convergence, ces dernières ne migrent pas individuellement mais au contraire se comportent comme un système ayant une migration globale.

4.1.1 Introduction

Des planètes de l'ordre de quelques unités à quelques dizaines de masses terrestres interagissent avec le disque de gaz dans lequel elles se forment et génèrent des ondes de densité dans le disque [[Goldreich and Tremaine, 1979](#)]. La planète elle même est influencée par cette onde de densité et migre par migration de Type I [[Ward, 1997](#)].

Dans les disques isothermes, la migration de Type I est gouvernée par le couple différentiel dû aux ondes de Lindblad. Pour les planètes, la migration qui en résulte est rapide et dirigée vers l'étoile centrale [[Tanaka et al., 2002](#)]. Dans les disques radiatifs, un couple apparaît dans la zone en fer-à-cheval de la planète. Ce dernier peut contrebalancer le couple différentiel de Lindblad au point de transformer la migration vers l'intérieur précédemment présentée en migration vers l'extérieur. Ainsi, dans de tels disques, la migration peut être dirigée soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur [[Paardekooper and Mellema, 2006](#), [Kley and Crida, 2008](#)]. Ceci rend possible l'existence de zone dans les disques où la migration est convergente. Ces dernières sont appelées zone de convergence [CZs ; [Lyra et al., 2010](#), [Paardekooper et al., 2011](#)].

À la zone de convergence, le couple de corotation (positif) compense exactement le couple différentiel de Lindblad (négatif). Ainsi, à la zone de convergence, une planète ne migre pas. Les zones de convergences pourraient ainsi concentrer les embryons planétaires et être le lieu de formation de planètes (ou cœurs) massives [[Lyra et al., 2010](#), [Horn et al., 2012](#)].

Cependant, durant leur migration vers la zone de convergence les planètes vont interagir entre elles et se placer en résonance de moyen mouvement (Mean Motion Resonance : MMR), s'opposant ainsi à l'accrétion illimitée de matière à la zone de convergence [[Morbidelli et al., 2008](#), [Sándor et al., 2011](#)]. Malgré cela, des collisions ont bien lieu à la zone de convergence quand les embryons sont emprisonnés dans une chaîne de résonance avec suffisamment de corps pour engendrer des perturbations. De plus, la turbulence pourrait casser les résonances et augmenter le taux d'accrétion.

[Bitsch and Kley \[2010\]](#) a montré que le couple de corotation était atténué quand une planète avait une excentricité telle que son orbite oscille sur une distance de l'ordre de la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s .

Quand deux planètes sont en résonance à cause de la migration convergente, leurs excentricités sont excités de manière continues malgré la présence du disque qui a tendance à amortir les excentricités et circulariser les orbites. [par exemple [Cresswell and Nelson, 2008](#)]. Ce phénomène devrait à son tour modifier le couple de corotation et

ainsi modifier l'équilibre entre couple différentiel de Lindblad et couple de corotation. En conséquence, la migration de la planète elle-même devrait être modifiée.

Nous présentons des simulations de migration convergentes de planètes de faible masse ($M = 1 - 10 M_{\oplus}$) dans un disque de gaz idéalisé (voir [§ 2.2.8 page 53]). On utilise un modèle simplifié de rétroaction de l'excentricité sur le couple de corotation. Nous montrons que les planètes qui prisent de manière isolées migrent à la zone de convergence, ne migrent plus au même endroit quand il y a plusieurs planètes. Au lieu de ça, elles migrent à une position d'équilibre décalée vers l'intérieur du disque qui correspond à une somme nulle des couples exercées sur le système.

La position de cet zone d'équilibre dépend de l'excentricité maintenue par perturbation mutuelle de chaque planète constituante du système.

4.1.2 Méthode

On modélise une Zone de Convergence (CZ : Convergence Zone) artificielle, qui imite une zone de convergence indépendante de la masse, c'est à dire que la position de la zone de convergence est la même pour toutes les planètes quelle que soit leur masse. En particulier, on s'intéresse à la zone de convergence que l'on peut trouver à une transition d'opacité telle que celle représentée sur [FIGURE 4.1], où l'on peut voir un renversement brutal du couple, qui passe de positif à négatif [voir par exemple [Masset, 2011](#)].

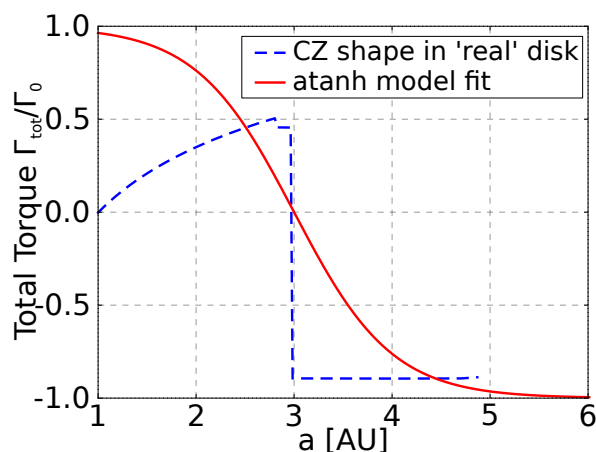


FIGURE 4.1 – Le couple total de notre disque standard est représenté en rouge. La ligne bleue pointillée représente le profil de couple ressenti par une planète de $10 M_{\oplus}$ autour d'une transition d'opacité, calculé à partir des équations de [Paardekooper et al. \[2011\]](#).

À noter qu'une fonction de Heavyside n'a pas été utilisée car la marche d'escalier dans le profil *réel* n'est due qu'au fait que la table d'opacité n'a pas été lissée, on est donc témoin ici du changement de régime numérique, mais on ne s'attend pas à une transition aussi marquée dans un cas physique et non numérique.

La position de la zone de convergence était 3 UA. À l'intérieur de 3 UA, le couple est positif et égal à $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2$, la migration se fait donc vers l'extérieur. Au delà de 3 UA, le couple total est égal à $-\Gamma_0$. Ici q est le rapport entre les masses de la planète et de l'étoile, h est le rapport d'aspect qui dépend du profil de température

mais faut typiquement 0.05. Σ_p , r_p et Ω_p sont respectivement la densité de surface, la distance orbitale et la vitesse angulaire pour la planète.

Le couple total est la somme du couple différentiel de Lindblad Γ_L — que l’on suppose constant et indépendant de e — et le couple de corotation Γ_C . Le principal intérêt de la zone de convergence artificielle est de s’affranchir de la forme très complexe du profil réel et ne garder que la zone de convergence, afin d’en étudier les effets de manière isolée.

[Bitsch and Kley \[2010\]](#) montre que la structure de la zone fer-à-cheval est modifiée quand l’excentricité d’un corps massif augmente. En conséquence, son couple de corotation Γ_C , lié à cette région du disque, diminue.

Nous avons élaboré une formule simple qui reproduit l’effet de l’excentricité sur Γ_C par une simple calibration des simulations 3D de [Bitsch and Kley \[2010\]](#) :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e=0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b \cdot e}{x_s} + c\right) \right] \quad (4.1)$$

où x_s représente la demi-largeur de la région fer-à-cheval en unité de distance orbitale de la planète considérée, e est l’excentricité de la planète, et notre ajustement statistique donne les valeurs suivantes pour les paramètres de la fonction :

$$a = 0.45 \quad b = 3.46 \quad c = -2.34 \quad (4.2)$$

On défini x_s comme [[Paardekooper et al., 2010](#), eq. (44)] :

$$x_s = \frac{1.1}{\gamma^{1/4}} \left(\frac{0.4}{b/h} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{h}} \quad (4.3)$$

où γ est l’indice adiabatique, q le rapport entre les masses de la planète et de l’étoile, h le rapport d’aspect et b/h la longueur de lissage du potentiel gravitationnel de la planète, afin d’éviter une divergence du potentiel au voisinage de la position de la planète (problème issu des simulations hydrodynamiques 2D qui se répercute sur les formules de [Paardekooper et al. \[2011\]](#)).

[FIGURE 4.2 page suivante] montre que notre formule simple (4.1) correspond bien à la tendance des simulations hydrodynamiques de l’effet de e sur Γ_C , en particulier pour les excentricités faibles. Il faut tout de même noter qu’il y a peu de points « expérimentaux » et qu’il semble y avoir des fluctuations aléatoires influençant les valeurs mesurées.

Afin de réaliser nos simulations, nous avons utilisé une version modifiée de l’intégrateur **Mercury** [[Chambers, 1999](#)]. Nous avons inclus à la fois une zone de convergence artificielle (où $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_C$) et le fait que Γ_C est modifiée par l’excentricité selon (4.1). L’amortissement de l’excentricité et de l’inclinaison est modélisé via les formulées décrites dans [Cresswell and Nelson \[2008\]](#).

Nous supposons que le disque possède le profil de densité de surface suivant :

$$\Sigma(R) = 500 (R/1 \text{ AU})^{-1/2} \text{ g.cm}^{-2} \quad (4.4)$$

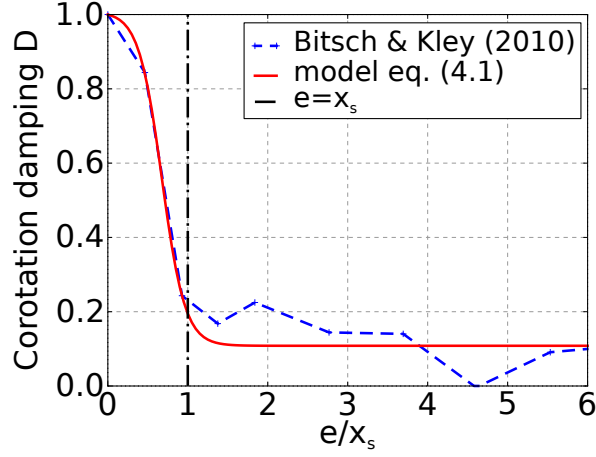


FIGURE 4.2 – Diminution du couple de corotation Γ_C en fonction de l’excentricité e . On suppose que l’atténuation ($0 < D < 1$) du couple de corotation en fonction de l’excentricité e est la même dans un disque isotherme ou radiatif. Ainsi, on extrait la valeur de D à partir de la figure 2 de Bitsch and Kley [2010] en faisant la différence entre la valeur pour le disque radiatif et celle pour le disque isotherme, et normalisant de sorte que D vale 1 dans le cas $e = 0$.

Ce profil est alors utilisé dans le calcul de Γ_0 et de l’amortissement induit par le disque sur e et I .

Pour implémenter la migration induite par le couple du disque Γ , on note que $\Gamma = \frac{dJ}{dt}$, et on définit une accélération de migration a_m telle que [Cresswell and Nelson, 2008, eq. (14)] :

$$a_m = -\frac{v}{t_m} \quad (4.5)$$

où v est la vitesse de la planète et $t_m = J/\frac{dJ}{dt}$ le temps de migration (J est le moment angulaire).

Dans toutes les simulations, les planètes étaient initialement sur des orbites à faible excentricité ($e < 0.001$) et faible inclinaison ($I < 1^\circ$). Chaque simulation a été intégrée pendant trois millions d’années, avec un pas de temps compris entre 0.4 et 3 jours.

4.1.3 Le cas de deux planètes

[FIGURE 4.3 page ci-contre] montre l’évolution de deux planètes de $1 M_\oplus$ initialement de part et d’autre d’une zone de convergence située à 3 UA. Alors qu’elles se rapprochent l’une de l’autre, les deux planètes croisent une série de résonances et finissent piégées dans la résonance 7:6. Les excentricités des deux planètes atteignent alors un équilibre entre excitation résonante et amortissement par le disque. Cette excentricité d’équilibre est environ égale à 0.5 fois la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s et amorti le couple de corotation à environ 80% de sa valeur nominale (quand $e = 0$).

Les planètes se stabilisent et arrêtent de migrer à 1.77 et 1.96 UA, toutes les deux à l’intérieur de la position nominale de la zone de convergence qu’elle ressentiraient si elles étaient seules et isolées dans le disque. Compte tenu de leurs excentricités, la zone de convergence de la planète la plus interne est décalée à 1.95 UA tandis qu’elle est décalée

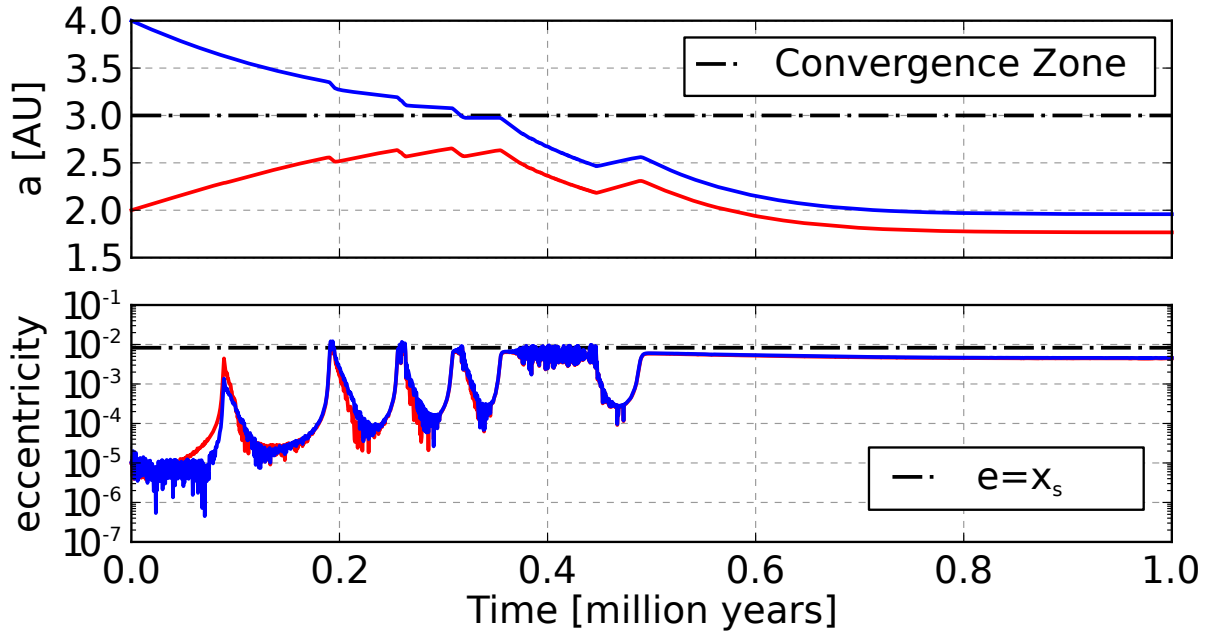


FIGURE 4.3 – Simulation de la migration convergence de deux planètes de $1 M_{\oplus}$ vers la zone de convergence située à 3 UA, la rétroaction de l'excentricité e sur le couple de corotation Γ_C étant incluse (voir Figure 4.2).

à 1.74 UA pour la planète externe (située à 1.96 UA). On constate alors qu'aucune des deux planètes n'est à une position d'équilibre. Elles continuent de migrer chacune vers une position d'équilibre qui leur est inaccessible à cause de la présence de l'autre planète.

Le décalage de la zone d'équilibre provient ici de l'équilibre nouveau entre le couple de Lindblad resté inchangé et le couple de corotation atténué par l'excentricité. *Les deux planètes se stabilisent autour d'une zone où le couple total exercé sur le système dans sa globalité est nul, même si chaque planète prise séparément ressent un couple de migration non nul.* Aucune des deux planètes n'est ici à une zone de convergence (même celle calculée en tenant compte de l'atténuation du couple de corotation).

Il est clair que les excentricités des planètes — excitées par les interactions entre planètes — sont le facteur clé pour déterminer la force du couple de corotation et la position effective de la zone de stabilisation du système. Pour deux planètes de même masse, le même comportement qualitatif est observé, quelle que soit la masse ou la résonance considérée : Une plus grande excentricité implique un amortissement plus fort du couple de corotation Γ_C et une stabilisation du système de plus en plus proche de leur étoile.

4.1.4 Effet du rapport de masse

Nous étudions maintenant le cas de deux planètes de masses différentes. [FIGURE 4.4 page suivante] représente les positions finales d'une série de simulations simples dans lesquelles une planète de $10 M_{\oplus}$ est placée systématiquement à 3 UA en compagnie d'une autre planète, placée à 4 UA et dont la masse varie successivement entre 0.1 et $3 M_{\oplus}$.

Dans [FIGURE 4.4 page suivante], la planète externe est systématiquement en réso-

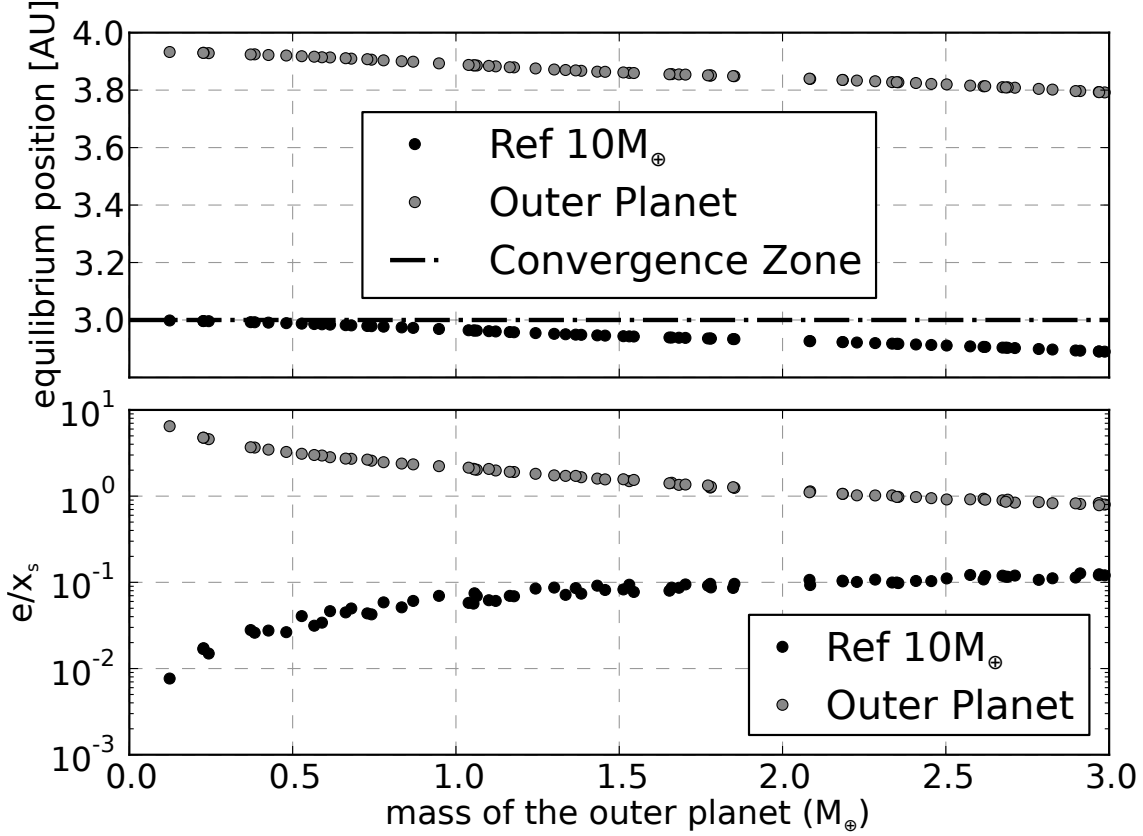


FIGURE 4.4 – Système final d’une série de simulations avec initialement une première planète à 3 UA de $10 M_{\oplus}$ et une deuxième planète à 4 UA dont la masse varie de 0.1 à $3 M_{\oplus}$. Les graphiques montrent la position d’équilibre des planètes (en haut) et les excentricités normalisées par rapport à la demi-largeur de la zone fer-à-cheval e/x_s (en bas) en fonction de la masse de la deuxième planète.

nance 3:2 avec la planète interne. Ainsi, la position finale des planètes est déterminée par leur masse respective ou, pour cette expérience, par la masse de la planète externe vu que la masse de la planète interne est fixe.

Plus la deuxième planète est massive, et plus le décalage du système planétaire par rapport à la zone de convergence est important. En effet, une planète externe plus massive induit une excentricité plus importante pour la planète interne, ce qui correspond à un amortissement plus important de son couple de corotation Γ_C et un décalage plus important de la zone d’équilibre du système. Compte tenu du fait que chaque planète possède une masse et une excentricité différentes, elles ressentent une zone de convergence différente (une pour chaque valeur de e/x_s). Pour autant, l’importance du décalage vers l’étoile centrale de la position d’équilibre est principalement déterminée par la dynamique de la planète la plus massive et de sa nouvelle zone de convergence.

[FIGURE 4.4] représente uniquement un sous-ensemble de toutes les simulations de cette expérience. Pour des masses plus importantes, les deux planètes étaient dans des résonances différentes, ce qui causait des discontinuités dans le diagramme, rendant difficile sa lecture. Malgré tout, le comportement du système de deux planètes est qualitativement le même.

4.1.5 Effet des résonances

Dans la position d'équilibre d'un système de deux planètes, l'ordre de la résonance entre les deux corps est aussi important (pour une résonance de moyen mouvement $(p+q):p$, p est l'ordre de la résonance).

Deux planètes en résonance 3:2 auront des excentricités plus importantes que si elles étaient en résonance 11:10. L'explication simple est qu'une résonance d'ordre moins élevé implique des conjonctions plus fréquentes, et ainsi des perturbations plus importantes (voir [Murray and Dermott \[2000\]](#) pour plus de détails). La résonance dans laquelle un système de deux planètes se place dépend de la vitesse de migration relative et du taux d'amortissement de l'excentricité par le disque (voir par exemple [Mustill and Wyatt \[2011\]](#)). Ces deux derniers paramètres sont déterminés à la fois par le disque, le profil de couple et les positions initiales des planètes.

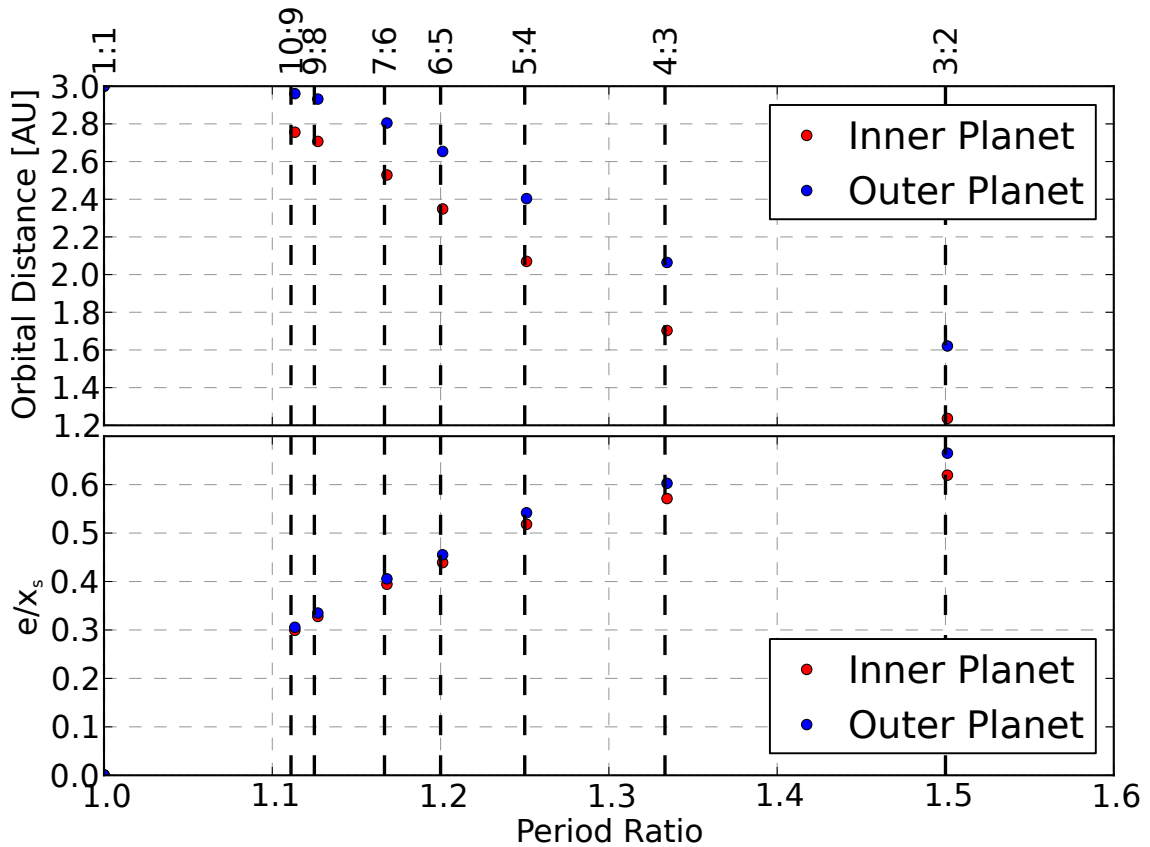


FIGURE 4.5 – demi-grand axe final (en haut) et excentricité (en bas) de deux planètes de $3 M_{\oplus}$ piégées dans différentes résonances de moyen mouvement. Pour une planète de $3 M_{\oplus}$, la demi-largeur de la zone fer-à-cheval vaut environ 0.014.

Afin de tester l'effet des résonances, nous avons fait une série de 100 simulations (chacune intégrée pour un million d'années), avec deux planètes de $3 M_{\oplus}$ placés aléatoirement entre 1 et 10 UA, avec la même zone de convergence artificielle placée à 3 UA que précédemment.

[FIGURE 4.5] montre que dans tous les cas, les planètes sont bloquées dans des résonances allant de 11:10 à 3:2 (ordre de la résonance de 2 à 10). Conformément à ce qui était attendu, les excentricités maintenues grâce aux résonances diminuent à

mesure que l'ordre des résonance augmente, et ceci induit un décalage moins important du système planétaire par rapport à la zone de convergence à 3 UA. L'amplitude du décalage vers l'intérieur de la position d'équilibre varie de 0.2 à 1.5 UA.

Dans deux simulations, les planètes ont commencé si proches l'une de l'autre qu'elles se sont retrouvé en résonance co-orbitale (résonance 1:1). Dans ces cas là, leurs excentricités sont restées très faibles, et les deux planètes ont migré en co-orbite jusqu'à la zone de convergence nominale à 3 UA.

4.1.6 Évolution avec plus de deux planètes

On se concentre maintenant sur le cas multi-planètes. Nous avons lancé 10 simulations pour des cas avec deux, trois, cinq ou dix planètes, toutes de $3 M_{\oplus}$. Les planètes étaient placées aléatoirement entre 1 et 10 UA, et étaient sur des orbites de faible inclinaison et excentricité initialement. Comme précédemment, chaque simulation a été intégrée pendant trois millions d'années dans un disque statique (sans dissipation).

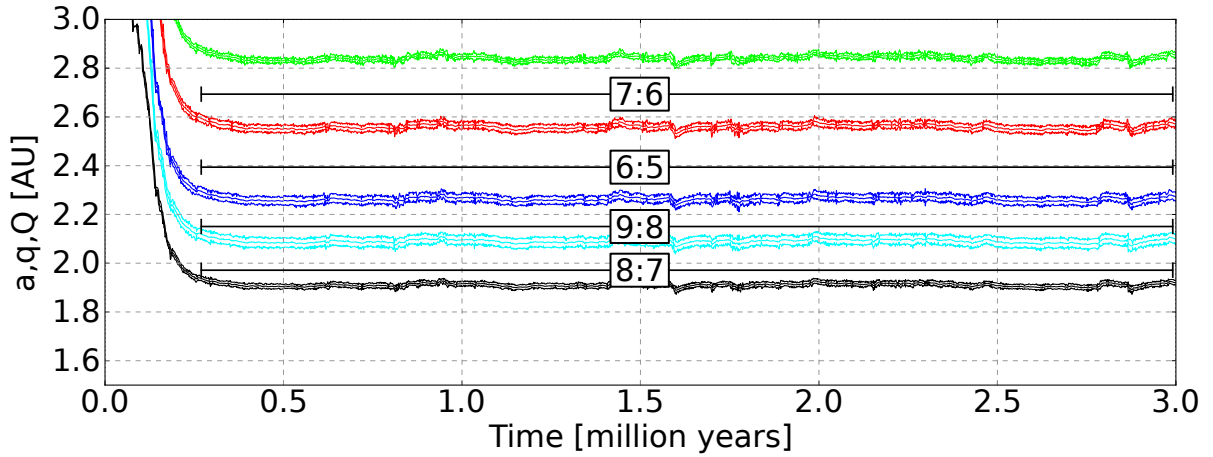
Dans les cas avec 3 planètes, on trouve 3 scénarii différents. Dans un premier cas, les 3 planètes sont prises dans une chaîne de résonance et migrent vers l'intérieur toutes ensemble jusqu'à une zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système est nul. Cette zone est typiquement entre 2 et 2.5 UA. Les excentricités des trois planètes ne sont pas identiques, la planète au centre de la chaîne de résonance est généralement la plus excitée.

Dans le deuxième scénario le plus probable, deux planètes entrent en résonance et migrent vers l'intérieur tandis que la troisième et dernière planète est trop loin dans le disque pour être elle aussi prise en résonance avec les deux autres. Cette dernière planète migre alors à la zone de convergence à 3 UA, tandis que les deux planètes internes stoppent leur migration autour d'une zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système est nul.

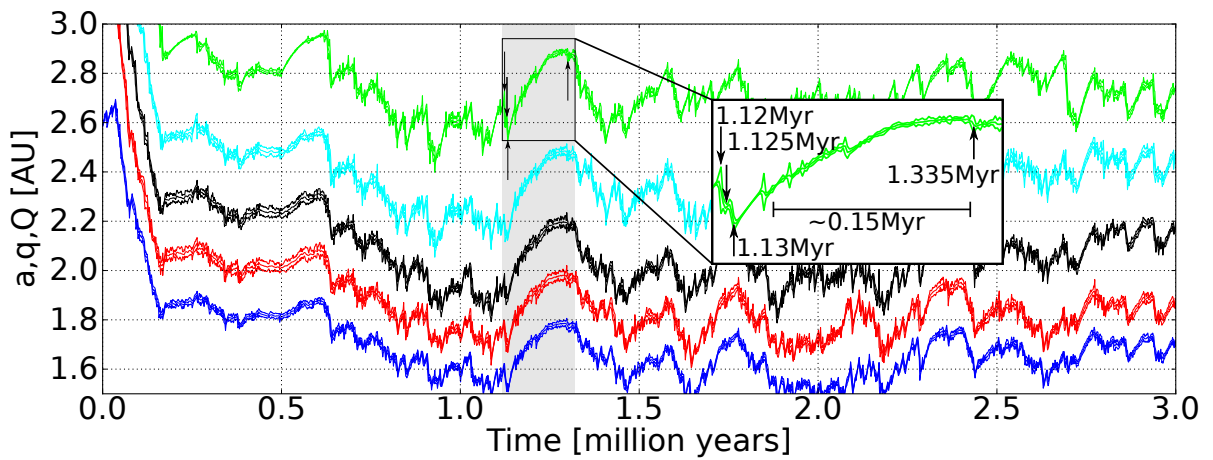
Enfin, dans un troisième scénario, une collision a lieu et le système revient à un cas à deux planètes de masse différente comme vu précédemment [FIGURE 4.4 page 68].

Pour les cas à 5 et 10 planètes, la situation est plus complexe. Les systèmes de 5 planètes forment des chaînes de résonances et migrent vers l'intérieur, en direction d'une position d'équilibre où le couple total est nul. Cependant, les perturbations entre planètes ajoutent un aspect erratique à la migration des planètes. Même les systèmes les plus stables subissent des périodes d'instabilités durant lesquelles les planètes dérivent radialement dans la même direction. Ces périodes sont déclenchées par la sortie d'une résonance d'un couple de planètes à l'intérieur du système. Cette sortie de résonance se propage alors comme une perturbation à travers tout le système. L'amplitude et la fréquence de ces périodes chaotiques varient d'une simulation à l'autre.

Par exemple, dans la simulation [FIGURE 4.6a page ci-contre], la chaîne de résonance subit plusieurs petites perturbations sans grandes conséquences au regard de l'espace inter-planétaire typique de cette simulation. Par opposition, les perturbations de la simulation [FIGURE 4.6b page suivante] sont bien plus importantes.



(a) Simulation relativement stable, même si de courts épisodes de perturbations des résonances ont lieu



(b) Simulation qui possède un comportement chaotique soutenu

FIGURE 4.6 – Deux exemples de simulations avec 5 planètes

Considérons en particulier l'épisode chaotique entre 1.1 et 1.3 million d'années dans le cas décrit [FIGURE 4.6b]. À 1.12 million d'années, les deux planètes externes sont piégées dans une résonance orbitale 4:3. Elles migrent alors vers l'intérieur, à cause de la soudaine excitation de leurs excentricités via la résonance. Cette perturbation se propage alors vers le système interne, et les excentricités de toutes les planètes augmentant soudainement, le système total se met peu à peu à migrer entièrement vers l'intérieur. 5000 ans plus tard, les deux planètes externes, encore les mêmes, sortent puis entrent de nouveau en résonance 4:3, perturbant de nouveau le système. Finalement, à 1.13 million d'années, les deux planètes externes sortent définitivement de la résonance 4:3. Retrouvant leur liberté de corps isolé, les deux planètes migrent vers la zone de convergence avec leurs excentricités de nouveau quasi nulle, la résonance n'étant plus là pour maintenir les excentricités face à l'amortissement du disque.

Sans le couple négatif des deux planètes externes, l'équilibre des couples du système global est modifié. En réaction, le système interne de trois planètes migre vers l'extérieur vers une nouvelle zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système de trois planètes est nul. Ceci explique alors pourquoi les 5 planètes migrent brutalement vers l'extérieur.

Cependant, les deux planètes externes entrent rapidement en résonance 5:4. Pendant les quelques 0.15 million d'années suivants, elles entrent périodiquement en résonance

5:4 mais la migration vers l'extérieur continue car la plupart du temps elles ne sont pas en résonance et leur excentricité reste relativement faible. La migration globale vers l'extérieur du système s'arrête à 1.335 million d'années quand les deux planètes externes traversent la résonance 5:4 et sont piégées dans la résonance orbitale 6:5. Cette configuration stabilise le système, excite les excentricités des planètes externes et entraîne la migration globale du système tout entier vers l'intérieur, marquant la fin de cet épisode chaotique.

Le reste de l'évolution est composé du même type de perturbations. Les perturbations proviennent des planètes qui entrent ou sortent des résonances, et qui se propagent alors au reste du système.

Quand les planètes sortent de résonance, leur excentricité décroît rapidement, entraînant une migration vers l'extérieur. Par opposition, les planètes entrant en résonance voient leur excentricité croître et être maintenu à un niveau constant non nul qui entraîne une migration vers l'intérieur.

Au travers de ces perturbations, des systèmes entiers de planètes subissent des migrations chaotique relativement modestes qui illustre la difficulté pour le système de maintenir une chaîne de résonance pendant de longues périodes.

La totalité des systèmes de 5 planètes que nous avons modélisés est resté stable, dans le sens où aucune collision n'a eu lieu. Mais l'amplitude de la migration chaotique subie par le système varie d'un système à l'autre. Les deux exemples de [FIGURE 4.6 page précédente] montrent les deux cas les plus extrêmes. Les simulations avec 10 planètes étaient encore plus chaotiques et des collisions ont eu lieu.

Le point le plus important pour déterminer l'amplitude des oscillations chaotiques d'un système est l'ordre des résonances. Des résonances d'ordre p faible (par exemple 3:2) maintiennent des excentricités élevés et sont moins stables car elles sont sensibles aux variations d'excentricité. Dans le même temps, les résonances d'ordre p élevé (par exemple 11:10) maintiennent des excentricités plus faibles et sont moins sensibles aux perturbations d'excentricité.

Par exemple [FIGURE 4.6a page précédente], les perturbations sont rapidement amorties tandis que dans le panneau du bas, la fréquence des perturbations est suffisamment importante pour que le système n'ait pas le temps de les amortir et ne tendent donc pas vers une configuration stable. *Dans ce contexte, un système compact est donc plus stable qu'un système plus étendu, ce qui est exactement l'opposé d'une situation purement gravitationnelle* [Marchal and Bozis, 1982].

4.1.7 Discussion

Au travers de cette partie, nous avons montré que les planètes ne migrent pas forcément à la zone de convergence. Au lieu de cela, les embryons migrent rapidement vers la zone de convergence et sont piégés dans des chaînes de résonance. Ceci entraîne l'augmentation brutale de leur excentricité qui reste suffisamment importante pour atténuer le couple de corotation. La zone d'équilibre de la chaîne de résonance dans le disque est déterminé par la somme des couples ressentis individuellement par les planètes (chaque

terme étant la somme d'un couple de corotation atténué et d'un couple différentiel de Lindblad non atténué). Dans la pratique, cette zone de couple nul effective est déterminée principalement par la zone de convergence décalée de la planète la plus massive de la chaîne de résonance. Ce n'est pas une vraie zone de convergence car chaque planète voit une zone de convergence différente en fonction de son excentricité.

Le décalage vers l'intérieur existe parce que les excentricités des planètes sont maintenues par les perturbations résonantes. L'amplitude de l'excentricité d'une planète est le résultat de la compétition entre l'excitation résonante et l'amortissement de l'excentricité par le disque. Pour des excentricités suffisamment importantes, un système entier de planètes en résonance peut migrer jusqu'au bord interne.

Changer les propriétés du disque pourrait ainsi changer les valeurs typiques des excentricités en modifiant le temps caractéristique d'amortissement des excentricités. Cependant, changer les propriétés du disque a aussi des conséquences sur d'autres grandeurs influençant le système, tel que le profil de couple exercé par le disque sur les planètes. En changeant les propriétés du disque, il n'est pas évident de dire quels seront les conséquences sur l'évolution des planètes, compte tenu du fait que les planètes pourront être dans des résonances différentes, avec des excitations d'excentricités différents, et des critères de stabilité différents.

La zone de convergence dépend de paramètres du disque tels que la viscosité, les profils de température et de densité de surface [voir par exemple [Paardekooper et al., 2011](#)]. Ici, nous avons utilisé un profil de disque issu de modèles complexes, mais qui reste malgré tout artificiel. Même si les résultats dépendent d'un modèle particulier, ils sont robustes aux variations du profil de couple en fonction de la distance orbitale, tant qu'une zone de convergence existe pour rassembler les embryons au cours de l'évolution.

Dans un disque plus réaliste, on s'attend à quelques différences. En premier lieu, il pourrait exister plusieurs zones de convergence dans un même disque ayant pour origine des processus physiques différents [[Lyra et al., 2010](#), [Hasegawa and Pudritz, 2011](#)].

Ensuite, des zones de convergences dépendantes de la masse des planètes peuvent exister dans les parties externes du disque, où ce mécanisme devrait être moins efficace compte tenu du fait que dans de telles zones de convergence, les embryons de masse différentes ne migrent pas à la même position dans le disque. Dans de telles zones, il pourrait être beaucoup plus difficile de former les chaînes de résonances essentielles pour notre mécanisme.

Troisièmement, alors que le disque se dissipe, le profil de couple et la position des zones de convergences sont aussi altérées [[Lyra et al., 2010](#), [Horn et al., 2012](#)].

Enfin, la turbulence est censée être commune dans les disques protoplanétaires [[Armitage, 2011](#)]. Même si la turbulence n'affecte pas l'évolution à long terme d'une planète isolée dans un disque radiatif [[Pierens et al., 2012](#)], on s'attend à ce qu'elle modifie la capture en résonance et l'évolution des excentricités [voir [Pierens et al., 2011](#)].

4.2 Formation des super terre chaude

Les détections d'exoplanètes par vitesse radiale et transit montrent que 30 à 50% des étoiles de la séquence principale possèdent au moins une planète de moins de $10 M_{\oplus}$ sur des orbites comprises entre 85 et 100 jours [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010, Howard et al., 2012, ?]. De plus, les super Terre chaudes sont préférentiellement détectées dans des systèmes multiples [??]. Pourtant, même si ces systèmes peuvent nous sembler bien plus compacts que le système solaire au premier abord, d'un point de vue gravitationnel, ils possèdent à peu près le même espacement en terme de rapport de période et de rayon de Hill mutuel [?].

[FIGURE 4.7] montre les propriétés statistiques des planètes détectées dans des systèmes multiples, incluant les candidats Kepler.

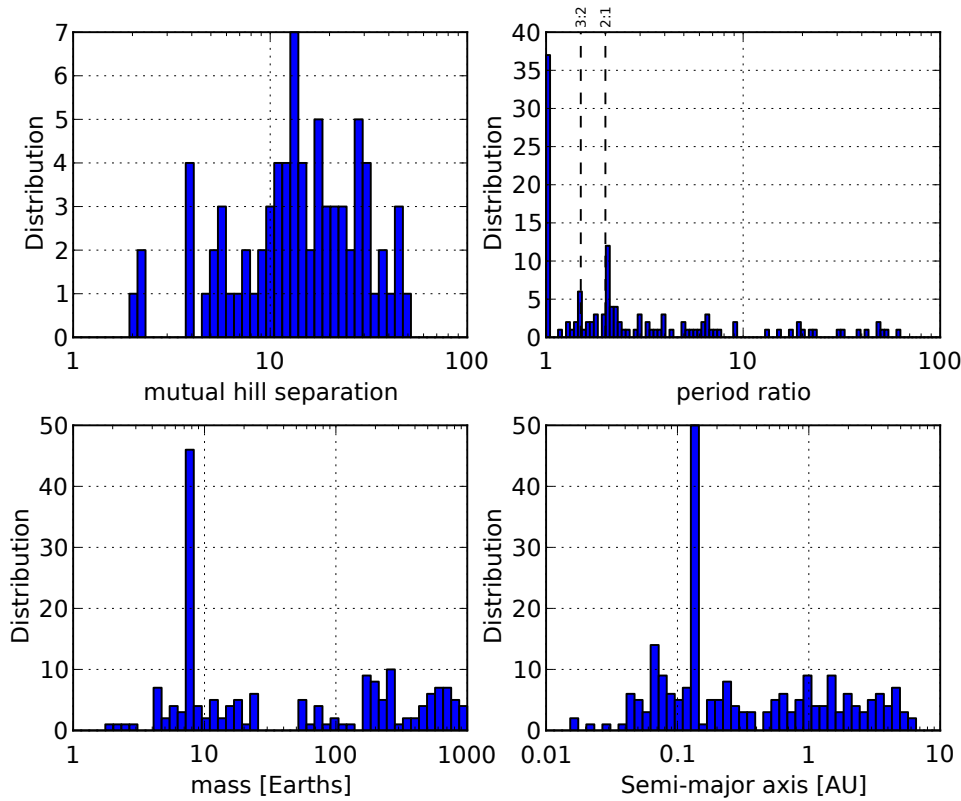


FIGURE 4.7 – Propriétés des exoplanètes détectées dans des systèmes multiples ($N \geq 2$). Données (01/01/2013) : <http://exoplanets.org/>

Plusieurs mécanismes de formations tentent d'expliquer la présence de super Terres, ces planètes ayant une masse de 1 à $10 M_{\oplus}$, tout en étant compatible avec les contraintes observationnelles. Deux modèles principaux peuvent à ce jour expliquer la formation de ces planètes.

Le premier modèle, la « formation *in-situ* » [?] n'est possible que si le disque est suffisamment massif localement pour permettre la formation de planète de plusieurs masses terrestres. La formation est alors semblable à celle des planètes telluriques dans le système solaire [??].

Le deuxième modèle implique la migration de type 1 [?]. Dans ce cas là, il n'est

pas nécessaire de supposer un disque extrêmement massif afin de former plusieurs super terres.

Les deux modèles permettent d'expliquer l'espacement observés. Le modèle impliquant la migration de type 1 prédit aussi que les systèmes multiples vont être proches de résonances de moyen mouvement. On peut en effet observer des pics sur [FIGURE 4.7 page ci-contre] autour des résonances 3:2 et 2:1. Dans le cas de la formation *in-situ*, on s'attend à des planètes assez pauvres en eau, alors qu'en impliquant la migration, la variété de composition des planètes ainsi formées est beaucoup plus grande [?].

Il existe de plus d'autres modèles, impliquant des résonances séculaires avec des planètes géantes plus loin dans le système, la photo-évaporation de super Neptunes, circularisation des planètes excentriques. Ces modèles sont présentés et comparés dans ? et ne sont pas discutés ici.

4.2.1 Conditions initiales

Initialement dans le système, on génère des embryons dont la masse varie de 0.1 à $2 M_{\oplus}$, pour une masse totale allant de 30 à $100 M_{\oplus}$. Des masses aléatoires différentes d'un embryon à l'autre permettent d'éviter les biais dûs aux masses égales. En effet, deux embryons de même masse migrent à la même vitesse, ce qui n'est généralement pas le cas autrement.

De plus, quand deux corps sont en résonance, il y a un effet du rapport de masse sur les niveaux réciproques d'excentricité. Des masses égales maximisent les perturbations gravitationnelle de deux corps en résonance. Quand ce n'est pas le cas, le plus gros corps est celui qui a l'excentricité la plus faible, mais c'est aussi celui qui impose la stabilisation du système de deux corps là où lui ressent le couple du disque le plus faible.

4.2.2 Systèmes possibles

En dessous d'une certaine masse limite qui dépend des paramètres du disque mais qui se situe généralement entre 2 et $10 M_{\oplus}$, les planètes migrent toutes vers l'intérieur, quelle que soit leur position initiale dans le disque.

Le premier cas de figure est le suivant : les embryons migrent vers l'intérieur et il n'y a pas suffisamment de collisions durant leur migration pour qu'ils puissent migrer vers l'extérieur à un quelconque moment. On se trouve alors dans le cas d'une formation au bord interne décrite [§ ?? page ??].

Dans un deuxième cas, une ou plusieurs planètes grossissent suffisamment par collision pour ressentir un couple positif vers l'extérieur. Plusieurs sous-cas de figures sont alors possibles, décrits [§ ?? page ??].

Formation au bord interne : systèmes compacts

Le bord interne est ici l'élément clé du modèle. Des embryons migrent vers l'intérieur, de manière isolée ou par vague de sous-système en résonance.

Le bord interne stoppe la migration pour plusieurs raisons. La première raison est que la densité de surface est lissée de sorte que la densité juste avant la fin du disque soit proche de 0. Une décroissance rapide de la densité de surface

Migration vers l'extérieur : candidats de planètes géantes

Dans ce cas de figure, une planète a une masse suffisante pour ressentir un couple positif qui génère une migration vers l'extérieur. Mais elle n'est pas isolée dans le disque. Autour d'elle se trouvent d'autres embryons qui migrent tous vers l'intérieur.

L'effet décrit [§ ?? page ??] joue alors un rôle prépondérant. La planète migrant vers l'extérieur rencontre rapidement d'autres embryons et des captures en résonances ont rapidement lieu. La migration différentielle et le rapport de masse ont ici une importance capitale. Si la différence de vitesse est trop grande, alors les deux planètes ne peuvent pas former un système. La résonance est rapidement cassée et les deux corps continuent leur migration. C'est d'autant plus vrai si le rapport de masse est important, car la brève augmentation d'excentricité qui a lieu lors d'une capture en résonance n'aura que peu d'effet sur la plus grosse planète. Cette dernière sera très peu sensible aux perturbations gravitationnelles de son compagnon résonant et continuera sa migration vers l'extérieur sans quasiment ralentir.

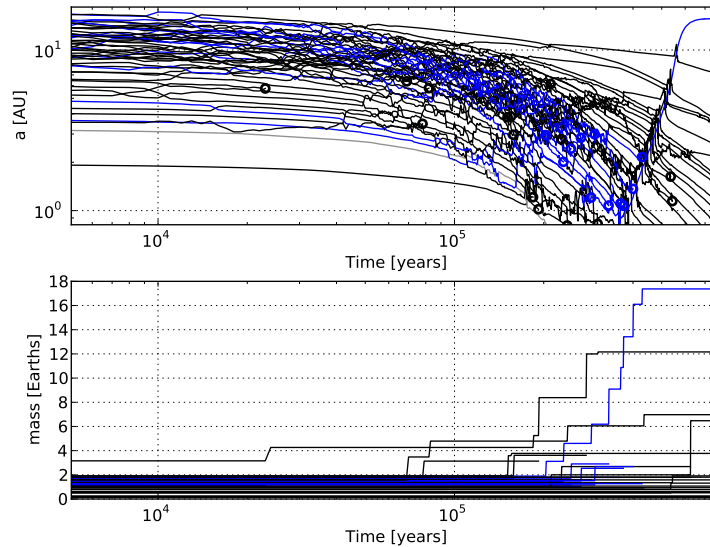


FIGURE 4.8 – Formation d'un cœur de planète géante. La planète dont l'évolution est notée en bleu devient massive suffisamment vite pour pouvoir migrer vers l'extérieur. Les cercles représentent des collisions. Les autres courbes bleu qui disparaissent sont des embryons qui rentrent en collision avec la planète considérée et fusionnent avec elle.

[FIGURE ?? page ??] montre une telle planète. Cette dernière, par collisions, atteint la masse de $6 M_{\oplus}$ au bout de 300000 ans alors qu'elle se trouve à 1.2 AU ce qui est suffisant pour qu'elle puisse migrer vers l'extérieur. Cependant, les perturbations gravitationnelles des autres corps qui eux migrent vers l'intérieur l'empêchent de se comporter comme elle le ferait si elle était isolée. Dans les quelques dizaines de milliers d'années suivantes, 3 nouvelles collisions ont lieu. La planète fait maintenant $13 M_{\oplus}$. La différence de masse avec ses voisins immédiat lui permet de migrer vers l'extérieur malgré les per-

turbations résonantes qui augmentent son excentricité. Comme détaillé [§ ?? page ??], plus le rapport de masse est important, et plus la migration est dominée par la planète massive. Dans un système résonant avec rapport de masse élevé, la petite planète a une excentricité importante, son couple de corotation est fortement atténué, ce qui n'est pas le cas de la planète massive. Cette dernière migre comme si elle n'était pas en résonance, et à partir de là, soit elle emporte le système avec elle, soit, comme dans le cas présent, la résonance fini par se briser et les deux planètes continuent leur migration séparément.

Dans la suite de la simulation, la planète est trop massive pour être arrêtée. La planète massive migrant vers l'extérieur, elle capture en résonance un embryon de faible masse. Les deux planètes migrent alors vers l'extérieur, emportées par la migration de la planète la plus massive. Pourtant le système n'est pas stable. Les perturbations finissent par briser le système de deux planètes qui a alors deux possibilités. Soit une collision survient, augmentant sa masse, soit la brève rencontre se termine par un échange d'orbite, les deux planètes continuant leur migration séparément.

À la fin de la simulation, la planète de $17.4 M_{\oplus}$ est à sa zone de couple nul, à 15.7 AU.

4.3 Effets des paramètres du disque

4.3.1 Viscosité du disque

4.3.2 Profil de densité de surface

4.3.3 Profil de température

4.3.4 Masse du disque

4.3.5 Table d'opacité

4.3.6 Longueur de lissage

Chapitre 5

Discussion et limite du modèle

Sommaire

5.1 Étude de sensibilité	77
5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation	77
5.1.2 Modélisation de la viscosité	77
5.2 Approximations	77
5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D	77
5.2.2 La modélisation des bords du disque	77
5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes	77
5.2.4 Auto-gravité	77
5.3 Idées	77
5.3.1 Snow line comme source de particules	77

5.1 Étude de sensibilité

5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation

5.1.2 Modélisation de la viscosité

5.2 Approximations

5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D

5.2.2 La modélisation des bords du disque

5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes

5.2.4 Auto-gravité

5.3 Idées

5.3.1 Snow line comme source de particules

Conclusion

J'ai cherché tout au long de ma thèse à développer un code numérique simple et modulaire avec une idée en tête, pouvoir tester les interactions et/ou différences entre différents modèles, que ce soit pour la viscosité, l'opacité, ou même des rétroactions subtiles comme celle de l'excentricité sur le couple de corotation.

Annexe

A

Formulaire

Sommaire

A.1	Variables usuelles	80
A.2	Propriétés du disque	80
A.3	Propriétés des orbites képlériennes	81

Ici sont répertoriées bon nombre de formules que j’ai utilisé et qui relient des grandeurs physique entre elles. Dans la mesure du possible, une source est donnée où la formule est mentionnée. Ceci a pour but de centraliser ces formules, liées à la physique des disques, et que j’ai parfois eu du mal à retrouver parmi la quantité d’articles ou de livres traitant du sujet.

A.1 Variables usuelles

Dans la thèse, j’utilise couramment les mêmes notations pour une propriété physique donnée. Ici je fais un inventaire des notations, afin qu’on puisse s’y référer, et pour gagner en clarté dans le texte en m’évitant de redéfinir à chaque fois les mêmes unités :

ν	Viscosité du disque
c_s	vitesse du son
α	paramètre adimensionné pour la prescription α du disque, permettant de définir une viscosité fonction de la vitesse du son
H	Échelle de hauteur du disque
$h = H/R$	rapport d’aspect du disque
Ω	vitesse angulaire d’une particule fluide ou d’une planète dans le disque
k_B	constante de Boltzmann
T	Température
μ	Masse moléculaire moyenne du gaz constituant principal du disque
Σ	Densité de surface du disque de gaz
ρ	Densité volumique du disque de gaz
q	rapport adimensionné entre la masse de la planète et la masse de son étoile

TABLE A.1 – Liste de la plupart des variables utilisées tout au long de la thèse. Les paramètres avec un p en indice indiquent simplement que c’est la valeur du paramètre à la position orbitale de la planète.

A.2 Propriétés du disque

La prescription alpha pour la viscosité d’un disque est définie par :

$$\nu = \alpha c_s H \quad (\text{A.1})$$

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (\text{A.2})$$

$$H = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{c_s}{\Omega} \quad (\text{A.4})$$

où m_H est la masse d'un atome d'hydrogène.

On considère que la densité de surface est égale à la densité volumique, intégrée sur la taille verticale $2H$ du disque.

$$\Sigma = 2\rho H \quad (\text{A.5})$$

A.3 Propriétés des orbites képlériennes

Annexe **B**

Physique des disques

Sommaire

B.1 Bilan de moment angulaire	83
Conclusion de la partie	86

Ce chapitre est destiné à détailler les calculs redémontrant les équations fondamentales de la physique des disques. Dans le premier chapitre de la thèse, je fais des démonstrations somme toute assez succinctes mais durant ma thèse j'ai été amené à les redémontrer et j'ai eu besoin de bien plus d'étapes détaillées de calcul que ce que j'ai pu trouver dans les papiers. J'ai donc entrepris de le refaire en détail, et je regroupe ici les étapes de calcul et les astuces nécessaires pour arriver aux équations.

B.1 Bilan de moment angulaire

On cherche à faire le bilan de moment cinétique sur l'anneau décrit [FIGURE 1.3 page 18]. Son moment cinétique est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{J}_a &= \vec{R} \wedge (m_a \vec{v}(R)) \\ &= m_a \cdot R \cdot R\Omega(R)\hat{e}_z \\ &= 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \cdot R \cdot R\Omega(R)\hat{e}_z \\ \vec{J}_a &= 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R) \hat{e}_z\end{aligned}\tag{B.1}$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment (1.16 page 19) :

$$\begin{aligned}dJ(R) &= \vec{r} \wedge (dF_M(R) \vec{v}(R)) \\ &= dF_M(R) \cdot R^2 \Omega(R) \hat{e}_z \\ dJ(R) &= 2\pi v_r(R) \Sigma(R) \cdot R^3 \Omega(R) \hat{e}_z\end{aligned}\tag{B.2a}$$

$$\begin{aligned}dJ(R + \Delta R) &= \vec{r} \wedge (dM(R + \Delta R) \vec{v}(R + \Delta R)) \\ &= dF_M(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^2 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z \\ dJ(R + \Delta R) &= -2\pi v_r(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \cdot (R + \Delta R)^3 \Omega(R + \Delta R) \hat{e}_z\end{aligned}\tag{B.2b}$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

Le taux de cisaillement A est donné par :

$$A = r \frac{d\Omega}{dr}\tag{B.3}$$

et représente les frottements induits par la rotation différentielle.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$dF_{\text{vis}} = \nu \Sigma A = \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr}\tag{B.4}$$

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi R \times dF_{\text{vis}}(R) \\ \overrightarrow{F}_{\text{in}}(R) &= 2\pi\nu\Sigma R^2 \frac{d\Omega}{dr}(R)\hat{e}_\theta\end{aligned}\tag{B.5a}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi(R + \Delta R) \times dF_{\text{vis}}(R + \Delta R) \\ \overrightarrow{F}_{\text{out}}(R + \Delta R) &= 2\pi\nu\Sigma(R + \Delta R)^2 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) \cdot \hat{e}_\theta\end{aligned}\tag{B.5b}$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation \hat{e}_θ . À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}_{\text{in}} &= R\hat{e}_r \wedge \overrightarrow{F}_{\text{in}} \\ \overrightarrow{\Gamma}_{\text{in}} &= 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{B.6a}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}_{\text{out}} &= (R + \Delta R)\hat{e}_r \wedge \overrightarrow{F}_{\text{out}} \\ \overrightarrow{\Gamma}_{\text{out}} &= 2\pi\nu\Sigma(R + \Delta R)^3 \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R)\hat{e}_z\end{aligned}\tag{B.6b}$$

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{dJ_a}{dt} = dJ(R + \Delta R) + dJ(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}}\tag{B.7}$$

En utilisant (B.1 page 83), (B.2 page 83), (B.6 page ci-contre), dans (B.7 page précédente)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R)) &= -(R + \Delta R)^3 v_R(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R) \Omega(R + \Delta R) \\ &\quad + R^3 v_R(R) \Sigma(R) \Omega(R) + [\nu(R + \Delta R)^3 \Sigma(R + \Delta R) \\ &\quad \frac{d\Omega}{dr}(R + \Delta R) - \nu \Sigma(R) R^3 \frac{d\Omega}{dr}(R)]\end{aligned}$$

On fait tendre ΔR vers 0, et de manière similaire au bilan de masse obtenu précédemment, il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 \Sigma \Omega) = - \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t sont des variables indépendantes, on peut donc sortir R de la dérivée partielle temporelle afin de faire apparaître une forme qui fait penser à une équation de continuité.

$$R \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \Sigma \Omega) = - \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

R et t étant des variables indépendantes, on peut écrire :

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \quad (\text{B.8})$$

On suppose que $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ vu que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps (on ne considère pas une masse variable de l'étoile due à l'accrétion), et sachant que R ne dépend pas explicitement de t , en utilisant la formule :

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \cdot R^2 \Omega) = (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \cancel{\Sigma \frac{\partial R^2 \Omega}{\partial t}} \quad (\text{B.9})$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (R^3 v_R \Sigma \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma \cdot R^2 \Omega) \\ &= (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En utilisant (B.9) et (B.10 page 85) dans (B.8 page 85), on fait alors apparaître (1.17 page 19), ce qui donne :

$$\begin{aligned} R (R^2 \Omega) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (R^2 \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ (R^2 \Omega) \left[\cancel{R \frac{\partial \Sigma}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial r} (R v_R \Sigma) \right] + R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R \frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ R \Sigma v_R &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma R^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On injecte alors (B.11 page 85) dans (1.17 page 19) afin de supprimer v_r de l'expression et obtenir finalement :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (R^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) \right]$$

On décale le signe moins au niveau de la dérivée de la vitesse angulaire, cette dernière étant généralement négative, ça permet d'avoir un terme positif :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(-\frac{d\Omega}{dr} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.12})$$

On fait maintenant l'approximation que le mouvement est képlerien, avec pour première conséquence que $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$. On peut alors simplifier l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma r^3 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r^5}} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \sqrt{\frac{r}{GM}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \Sigma \frac{3}{2} \sqrt{GM} r^{1/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Conclusion de la partie

On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^{1/2} \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

Bibliographie

- R. D. Alexander, C. J. Clarke, and J. E. Pringle. Photoevaporation of protoplanetary discs - II. Evolutionary models and observable properties. *MNRAS*, 369 :229–239, June 2006. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10294.x.
- Ph André. The initial conditions for protostellar collapse : observational constraints. *EAS Publications Series*, 3 :1–38, 2002.
- P. J. Armitage. Dynamics of Protoplanetary Disks. *ARA&A*, 49 :195–236, September 2011. doi : 10.1146/annurev-astro-081710-102521.
- S. A. Balbus and J. F. Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376 :214–233, July 1991. doi : 10.1086/170270.
- C. Baruteau and F. Masset. On the Corotation Torque in a Radiatively Inefficient Disk. *ApJ*, 672 :1054–1067, January 2008. doi : 10.1086/523667.
- C. Baruteau and F. Masset. Recent Developments in Planet Migration Theory. In J. Souchay, S. Mathis, and T. Tokieda, editors, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 861 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 201, 2013. doi : 10.1007/978-3-642-32961-6_6.
- K. R. Bell and D. N. C. Lin. Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. *ApJ*, 427 :987–1004, June 1994. doi : 10.1086/174206.
- K. R. Bell, P. M. Cassen, H. H. Klahr, and T. Henning. The Structure and Appearance of Protostellar Accretion Disks : Limits on Disk Flaring. *ApJ*, 486 :372, September 1997. doi : 10.1086/304514.
- J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics : Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
- B. Bitsch and W. Kley. Orbital evolution of eccentric planets in radiative discs. *A&A*, 523 :A30, November 2010. doi : 10.1051/0004-6361/201014414.
- B. Bitsch and W. Kley. Range of outward migration and influence of the disc’s mass on the migration of giant planet cores. *A&A*, 536 :A77, December 2011. doi : 10.1051/0004-6361/201117202.

- J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304 :793–799, April 1999. doi : 10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.
- J. E. Chambers. An Analytic Model for the Evolution of a Viscous, Irradiated Disk. *ApJ*, 705 :1206–1214, November 2009. doi : 10.1088/0004-637X/705/2/1206.
- S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases.* Cambridge University Press, 1970.
- E. I. Chiang and P. Goldreich. Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks. *ApJ*, 490 :368, November 1997. doi : 10.1086/304869.
- C. J. Clarke, A. Gendrin, and M. Sotomayor. The dispersal of circumstellar discs : the role of the ultraviolet switch. *MNRAS*, 328 :485–491, December 2001. doi : 10.1046/j.1365-8711.2001.04891.x.
- C. Cossou, S. N. Raymond, and A. Pierens. Convergence zones for Type I migration : an inward shift for multiple planet systems. *A&A*, 553 :L2, May 2013. doi : 10.1051/0004-6361/201220853.
- P. Cresswell and R. P. Nelson. Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 482 :677–690, May 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20079178.
- P. Cresswell, G. Dirksen, W. Kley, and R. P. Nelson. On the evolution of eccentric and inclined protoplanets embedded in protoplanetary disks. *A&A*, 473 :329–342, October 2007. doi : 10.1051/0004-6361:20077666.
- T. Currie, C. J. Lada, P. Plavchan, T. P. Robitaille, J. Irwin, and S. J. Kenyon. The Last Gasp of Gas Giant Planet Formation : A Spitzer Study of the 5 Myr Old Cluster NGC 2362. *ApJ*, 698 :1–27, June 2009. doi : 10.1088/0004-637X/698/1/1.
- E. D’Onghia, M. Vogelsberger, and L. Hernquist. Self-perpetuating Spiral Arms in Disk Galaxies. *ApJ*, 766 :34, March 2013. doi : 10.1088/0004-637X/766/1/34.
- A. Duquennoy and M. Mayor. Multiplicity among solar-type stars in the solar neighbourhood. II - Distribution of the orbital elements in an unbiased sample. *A&A*, 248 :485–524, August 1991.
- D. A. Fischer and J. Valenti. The Planet-Metallicity Correlation. *ApJ*, 622 :1102–1117, April 2005. doi : 10.1086/428383.
- C. F. Gammie. Layered Accretion in T Tauri Disks. *ApJ*, 457 :355, January 1996. doi : 10.1086/176735.
- C. F. Gammie. Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. *ApJ*, 553 :174–183, May 2001. doi : 10.1086/320631.
- P. Goldreich and D. Lynden-Bell. I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. *MNRAS*, 130 :97, 1965.

- P. Goldreich and S. Tremaine. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233 :857–871, November 1979. doi : 10.1086/157448.
- R. A. Gutermuth, P. C. Myers, S. T. Megeath, L. E. Allen, J. L. Pipher, J. Muzerolle, A. Porras, E. Winston, and G. Fazio. Spitzer Observations of NGC 1333 : A Study of Structure and Evolution in a Nearby Embedded Cluster. *ApJ*, 674 :336–356, February 2008. doi : 10.1086/524722.
- Y. Hasegawa and R. E. Pudritz. The origin of planetary system architectures - I. Multiple planet traps in gaseous discs. *MNRAS*, 417 :1236–1259, October 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2011.19338.x.
- C. Hayashi. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70 :35–53, 1981. doi : 10.1143/PTPS.70.35.
- B. Horn, W. Lyra, M.-M. Mac Low, and Z. Sándor. Orbital Migration of Interacting Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Turbulent Models. *ApJ*, 750 :34, May 2012. doi : 10.1088/0004-637X/750/1/34.
- A. W. Howard, G. W. Marcy, S. T. Bryson, J. M. Jenkins, J. F. Rowe, N. M. Batalha, W. J. Borucki, D. G. Koch, E. W. Dunham, T. N. Gautier, III, J. Van Cleve, W. D. Cochran, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Torres, T. M. Brown, R. L. Gilliland, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, D. Ciardi, F. Fressin, M. R. Haas, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Seager, L. Rogers, D. D. Sasselov, J. H. Steffen, G. S. Basri, D. Charbonneau, J. Christiansen, B. Clarke, A. Dupree, D. C. Fabrycky, D. A. Fischer, E. B. Ford, J. J. Fortney, J. Tarter, F. R. Girouard, M. J. Holman, J. A. Johnson, T. C. Klaus, P. Machalek, A. V. Moorhead, R. C. Morehead, D. Ragozzine, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, S. N. Quinn, H. Isaacson, A. Shporer, P. W. Lucas, L. M. Walkowicz, W. F. Welsh, A. Boss, E. Devore, A. Gould, J. C. Smith, R. L. Morris, A. Prsa, T. D. Morton, M. Still, S. E. Thompson, F. Mullally, M. Endl, and P. J. MacQueen. Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler. *ApJS*, 201 :15, August 2012. doi : 10.1088/0067-0049/201/2/15.
- A.W. Howard, G.W. Marcy, J.A. Johnson, D.A. Fischer, J.T. Wright, H. Isaacson, J.A. Valenti, J. Anderson, D.N.C. Lin, and S. Ida. The occurrence and mass distribution of close-in super-earths, neptunes, and jupiters. *Science*, 330(6004) :653–655, 2010.
- I. Hubeny. Vertical structure of accretion disks - A simplified analytical model. *ApJ*, 351 :632–641, March 1990. doi : 10.1086/168501.
- J.-M. Huré. On the transition to self-gravity in low mass AGN and YSO accretion discs. *A&A*, 358 :378–394, June 2000.
- M. Ilgner and R. P. Nelson. On the ionisation fraction in protoplanetary disks. I. Comparing different reaction networks. *A&A*, 445 :205–222, January 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20053678.
- J. A. Johnson, R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, S. S. Vogt, J. T. Wright, and K. M. G. Peek. A New Planet around an M Dwarf : Revealing a Correlation

- between Exoplanets and Stellar Mass. *ApJ*, 670 :833–840, November 2007. doi : 10.1086/521720.
- W. Kley and A. Crida. Migration of protoplanets in radiative discs. *A&A*, 487 :L9–L12, August 2008. doi : 10.1051/0004-6361:200810033.
- C. J. Lada, A. A. Muench, K. L. Luhman, L. Allen, L. Hartmann, T. Megeath, P. Myers, G. Fazio, K. Wood, J. Muzerolle, G. Rieke, N. Siegler, and E. Young. Spitzer Observations of IC 348 : The Disk Population at 2-3 Million Years. *AJ*, 131 :1574–1607, March 2006. doi : 10.1086/499808.
- L. Landau and E. Lifschitz. *Mécanique des fluides, vol. 6*. Éditions Mir, Paris, 752pp, 1989.
- D. N. C. Lin and J. Papaloizou. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets. *ApJ*, 309 :846–857, October 1986. doi : 10.1086/164653.
- W. Lyra, S.-J. Paardekooper, and M.-M. Mac Low. Orbital Migration of Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Models : Avoiding Catastrophic Infall. *ApJ*, 715 :L68–L73, June 2010. doi : 10.1088/2041-8205/715/2/L68.
- C. Marchal and G. Bozis. Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem. *Celestial Mechanics*, 26 :311–333, March 1982. doi : 10.1007/BF01230725.
- F. S. Masset. On the Co-orbital Corotation Torque in a Viscous Disk and Its Impact on Planetary Migration. *ApJ*, 558 :453–462, September 2001. doi : 10.1086/322446.
- F. S. Masset. The co-orbital corotation torque in a viscous disk : Numerical simulations. *A&A*, 387 :605–623, May 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20020240.
- F. S. Masset. On type-I migration near opacity transitions. A generalized Lindblad torque formula for planetary population synthesis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111 :131–160, October 2011. doi : 10.1007/s10569-011-9364-0.
- M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378 :355–359, November 1995. doi : 10.1038/378355a0.
- M. Mayor, C. Lovis, F. Pepe, D. Ségransan, and S. Udry. The road to Earth twins. *Astronomische Nachrichten*, 332 :429, June 2011. doi : 10.1002/asna.201111558.
- K. Menou and J. Goodman. Low-Mass Protoplanet Migration in T Tauri α -Disks. *ApJ*, 606 :520–531, May 2004. doi : 10.1086/382947.
- A. Morbidelli, A. Crida, F. Masset, and R. P. Nelson. Building giant-planet cores at a planet trap. *A&A*, 478 :929–937, February 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20078546.
- C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge : University Press, February 2000.
- A. J. Mustill and M. C. Wyatt. A general model of resonance capture in planetary systems : first- and second-order resonances. *MNRAS*, 413 :554–572, May 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2011.18201.x.

- R. P. Nelson, J. C. B. Papaloizou, F. Masset, and W. Kley. The migration and growth of protoplanets in protostellar discs. *MNRAS*, 318 :18–36, October 2000. doi : 10.1046/j.1365-8711.2000.03605.x.
- M. Ogiwara, S. Ida, and A. Morbidelli. Accretion of terrestrial planets from oligarchs in a turbulent disk. *Icarus*, 188 :522–534, June 2007. doi : 10.1016/j.icarus.2006.12.006.
- G. I. Ogilvie and S. H. Lubow. On the wake generated by a planet in a disc. *MNRAS*, 330 :950–954, March 2002. doi : 10.1046/j.1365-8711.2002.05148.x.
- G. I. Ogilvie and S. H. Lubow. Saturation of the Corotation Resonance in a Gaseous Disk. *ApJ*, 587 :398–406, April 2003. doi : 10.1086/368178.
- S.-J. Paardekooper and G. Mellema. Halting type I planet migration in non-isothermal disks. *A&A*, 459 :L17–L20, November 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20066304.
- S.-J. Paardekooper, C. Baruteau, A. Crida, and W. Kley. A torque formula for non-isothermal type I planetary migration - I. Unsaturated horseshoe drag. *MNRAS*, 401 :1950–1964, January 2010. doi : 10.1111/j.1365-2966.2009.15782.x.
- S.-J. Paardekooper, C. Baruteau, and W. Kley. A torque formula for non-isothermal Type I planetary migration - II. Effects of diffusion. *MNRAS*, 410 :293–303, January 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2010.17442.x.
- J. C. B. Papaloizou and J. D. Larwood. On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. *MNRAS*, 315 :823–833, July 2000. doi : 10.1046/j.1365-8711.2000.03466.x.
- A. Pierens, C. Baruteau, and F. Hersant. On the dynamics of resonant super-Earths in disks with turbulence driven by stochastic forcing. *A&A*, 531 :A5, July 2011. doi : 10.1051/0004-6361/201116611.
- A. Pierens, C. Baruteau, and F. Hersant. Protoplanetary migration in non-isothermal discs with turbulence driven by stochastic forcing. *MNRAS*, 427 :1562–1573, December 2012. doi : 10.1111/j.1365-2966.2012.22013.x.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. Cambridge university press, 1992.
- J. E. Pringle. Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19 :137–162, 1981. doi : 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033.
- Z. Sándor, W. Lyra, and C. P. Dullemond. Formation of Planetary Cores at Type I Migration Traps. *ApJ*, 728 :L9, February 2011. doi : 10.1088/2041-8205/728/1/L9.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24 :337–355, 1973.
- M. Simon and L. Prato. Disk Dissipation in Single and Binary Young Star Systems in Taurus. *ApJ*, 450 :824, September 1995. doi : 10.1086/176187.
- H. Sung, J. R. Stauffer, and M. S. Bessell. A Spitzer View of the Young Open Cluster NGC 2264. *AJ*, 138 :1116–1136, October 2009. doi : 10.1088/0004-6256/138/4/1116.

- H. Tanaka and W. R. Ward. Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves. *ApJ*, 602 : 388–395, February 2004. doi : 10.1086/380992.
- H. Tanaka, T. Takeuchi, and W. R. Ward. Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, 565 :1257–1274, February 2002. doi : 10.1086/324713.
- A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139 :1217–1238, May 1964. doi : 10.1086/147861.
- W. R. Ward. Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 126 :261–281, April 1997. doi : 10.1006/icar.1996.5647.
- J. P. Williams and L. A. Cieza. Protoplanetary Disks and Their Evolution. *ARA&A*, 49 :67–117, September 2011. doi : 10.1146/annurev-astro-081710-102548.
- E. Winston, S. T. Megeath, S. J. Wolk, J. Muzerolle, R. Gutermuth, J. L. Hora, L. E. Allen, B. Spitzbart, P. Myers, and G. G. Fazio. A Combined Spitzer and Chandra Survey of Young Stellar Objects in the Serpens Cloud Core. *ApJ*, 669 :493–518, November 2007. doi : 10.1086/521384.
- S. J. Wolk and F. M. Walter. A Search for Protoplanetary Disks Around Naked T Tauri Stars. *AJ*, 111 :2066, May 1996. doi : 10.1086/117942.
- A. Wolszczan and D. A. Frail. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355 :145–147, January 1992. doi : 10.1038/355145a0.
- Z. Zhu, L. Hartmann, and C. Gammie. Nonsteady Accretion in Protostars. *ApJ*, 694 : 1045–1055, April 2009. doi : 10.1088/0004-637X/694/2/1045.