

מס' קבוצה	שם התרגיל	תאריך הגשה
33	ARDUINO PID	15.06
חברי הקבוצה		
יונתן לרקין	יותם קומש	עומר עיני
204792337	208721746	316112028
		דניאל קחטן
		208803023

חלק תיאורטי

שאלה 1

$$I = ml^2$$

$$\ddot{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{I} & -\frac{c}{I} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} * \tau$$

נגדיר:

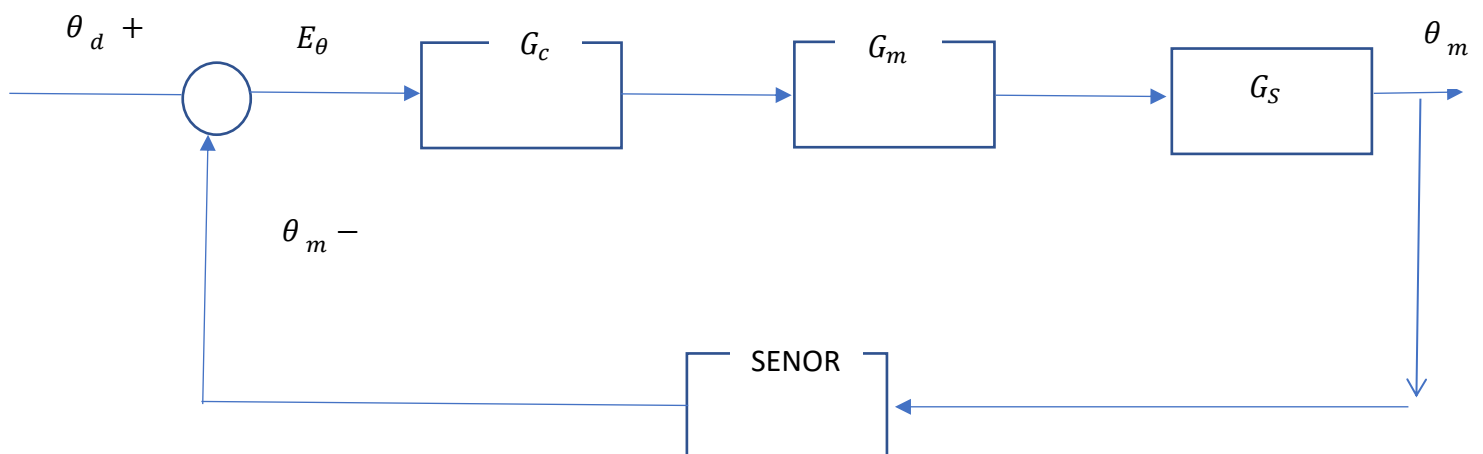
$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{I} & -\frac{c}{I} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = A * \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + B * \tau$$

$$Y = (0 \quad 1) * \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + 0 * \tau$$

$$C = (1 \quad 0) \quad D = 0$$



שאלה 2

עבור בקר $I = Ml^2$ PD

$$G_M(S) = K_m = 0.2$$

נמצא את פונקציית התמסורות

$$G_S = C * (sl - A)^{-1} * B + D$$

$$G(S) = (1 \ 0) * \left(S * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgL}{I} & -\frac{C}{I} \end{pmatrix} \right)^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} =$$

$$(1 \ 0) * \begin{pmatrix} S & -1 \\ -\frac{mgL}{I} & S + \frac{C}{I} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix}$$

נבצע מטריצה הופכית :

$$A^{-1} = \frac{1}{AB - CD} * \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left((1 \ 0) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S^2 + (C * \frac{S}{I}) - \frac{mgL}{I} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} S + \frac{C}{I} & 1 \\ \frac{mgL}{I} & S \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left((1 \ 0) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{I}(IS^2 + CS - mgL) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} S + \frac{C}{I} & 1 \\ \frac{mgL}{I} & S \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ (IS^2 + CS - mgL) \end{pmatrix} * [(1 \ 0) * \begin{pmatrix} S + \frac{C}{I} & 1 \\ \frac{mgL}{I} & S \end{pmatrix}] * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ (IS^2 + CS - mgL) \end{pmatrix} * \left(S + \frac{L}{I} + 1 \right) * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} = \frac{I}{(IS^2 + CS - mgL)} * \frac{1}{I} \\ &= \frac{1}{mI^2S^2 + CS - mgL} \end{aligned}$$

$$G_c = K_p \quad G_m = K_m = 0.2$$

סעיף ב

$$G_c = K_p \quad G_m = K_m$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m}{\theta_d} &= \frac{G_c * G_m * G_s}{1 + G_c * G_m * G_s} = \frac{K_p * K_m + \frac{1}{I * s^2 + C * s - mgl}}{1 + K_p * K_m + \frac{1}{I * s^2 + C * s - mgl}} \\ &= \frac{\frac{1}{I} * K_p * \frac{K_m}{s^2 + \frac{CS}{I} - \frac{mgl}{l}}}{1 + \frac{K_p * K_m}{I * s^2 + C * s - mgl}} \\ &= \frac{\frac{K_p * K_m}{I}}{(s^2 + \frac{CS}{I} - \frac{mgl}{l}) * (1 + \frac{K_p * K_m}{I * s^2 + C * s - mgl})} \\ &= \frac{\frac{K_p * K_m}{I}}{s^2 + \frac{CS}{I} - \frac{mgl}{l} + \frac{K_p * K_m}{I}} = \frac{\frac{K_p * K_m}{I}}{s^2 + \frac{SC}{I} + (K_p * K_m - mgl)/I} \end{aligned}$$

$$\frac{C}{I} = 2\zeta\omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{C}{2\omega_0 I}$$

$$(K_p * K_m - mgl)/I = \omega_0$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{C}{I} * \frac{1}{2\zeta} \\ \omega_0^2 = -\frac{mgl}{I} + 0.2 * \frac{K_p}{I} \end{cases}$$

$$M_p = \text{overshoot} \leq 0.2 \quad \text{נבדוק את האילוץ}$$

$$e^{-\frac{(\pi * \zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \leq 0.2$$

$$-\frac{(\pi * \zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \leq \ln(0.2)$$

$$-(\pi * \zeta) \leq \ln(0.2) * \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$(\pi^2 * \zeta^2) \leq \ln^2(0.2) (1 - \zeta^2)$$

$$\zeta^2 (\pi^2 + \ln^2(0.2)) \leq \ln^2(0.2)$$

$$\zeta^2 \leq \frac{\ln^2(0.2)}{(\pi^2 + \ln^2(0.2))}$$

$$\zeta^2 \leq 0.45595 \Rightarrow \text{לכן בתת ריסון}$$

נחזור למערכת משוואות ונציב את המקסימום.

$$m=3 \cdot 4.5 = 13.5g: \text{נציב}$$

$$M=0.0135kg$$

$$L=0.1$$

$$I = ml^2 = 0.000135$$

$$C=0.003$$

$$\omega_0 = 24.36914$$

$$\omega_0^2 = 593.855$$

נציב במשוואה השנייה:

$$593.853 = -\frac{0.0135}{0.000135} + 0.2 * K_p$$

$$K_p = 0.46835$$

נציב במשפט הערך הסופי

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \theta(s) * g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{693.852}{s^2 + s * \frac{200}{9} + 593.855} = 1.1684$$

$$e_{ss} = \theta(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \text{ לפי } e_{ss} \text{ נחשב את}$$

$$e_{ss} = 1 - 1.1684 = -0.1684$$

שאלה 3

עבור בקר PD:

סעיף א

$$G_{controller} = \frac{V}{e_\theta} = K_p + K_d \cdot s$$

$$G_{motor} = \frac{\tau}{V} = 0.2$$

$$G_{system} = \frac{Y}{\tau} = \frac{1}{Is^2 + cs - mgl} = \frac{1}{1.35 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 3 \cdot 10^{-3}s - 0.0135}$$

סעיף ב – נציב

$$K_m = 0.2$$

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{\theta(s)} &= \frac{G_c(s) \cdot G_m(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_{sensor}(s) \cdot G_c(s) \cdot G_m(s) \cdot G_s(s)} \\&= \frac{(K_p + K_d \cdot s) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{Is^2 + cs - mgl}}{1 + 1 \cdot (K_p + K_d \cdot s) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{Is^2 + cs - mgl}} \\&= \frac{\frac{K_p + K_d \cdot s}{5(Is^2 + cs - mgl)}}{\frac{5(Is^2 + cs - mgl) + K_p + K_d \cdot s}{5(Is^2 + cs - mgl)}} = \frac{K_p + K_d \cdot s}{5(Is^2 + cs - mgl) + K_p + K_d \cdot s} \\&= \frac{K_p + K_d \cdot s}{5Is^2 + (5c + K_d) \cdot s - 5mgl + K_p}\end{aligned}$$

סעיף ג

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{\theta(s)} &= \frac{\frac{K_p + K_d \cdot s}{5I}}{s^2 + \frac{5c + K_d}{5I} \cdot s - \frac{mgl}{I} + \frac{K_p}{5I}} \\&\left\{ \begin{array}{l} 2\omega_0\zeta = \frac{5c + K_d}{5I} \\ \omega_0^2 = -\frac{mgl}{I} + 0.2 \cdot \frac{K_p}{I} \end{array} \right.\end{aligned}$$

כבר חישבנו את שאלה 2 סעיף ג את $\zeta = 0.45593$

כעת נציב את הערכים במערכת המשוואות ונחלץ את K_d, K_p

$$\frac{5c + K_d}{5I} = 2\zeta\omega_0$$

$$\frac{0.015 + K_d}{\frac{27}{40000}} = 0.9119\omega_0 \rightarrow \omega_0 = \frac{600 + 40000 \cdot K_d}{24.6186}$$

נציב במשוואה 2 :

$$\frac{(600 + 40000 \cdot K_d)^2}{606.208} = \frac{40000}{27} K_p - 100 \rightarrow \frac{27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2}{24248336.55} + \frac{27}{400} = K_p$$

על פי משפט הערך הסופי :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \theta(s) \cdot G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{K_p + K_d \cdot s}{5I}}{s^2 + \frac{5c + K_d}{5I} s - \frac{mgl}{I} + \frac{K_p}{5I}} = \frac{\frac{K_p}{5I}}{-\frac{mgl}{I} + \frac{K_p}{5I}} \\ &= \frac{\frac{40000}{27} K_p}{-100 + \frac{40000}{27} K_p} \end{aligned}$$

נשתמש באילוץ נוסף המתבסס על חישוב e_{ss}

$$e_{ss} = \theta(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 - \frac{\frac{40000}{27} K_p}{-100 + \frac{40000}{27} K_p}$$

$$\left| 1 - \frac{\frac{40000}{27} K_p}{-100 + \frac{40000}{27} K_p} \right| \leq 0.5 \cdot 0.1684$$

$$\left| 1 - \frac{400K_p}{-27 + 400K_p} \right| \leq 0.0835$$

$$\left| \frac{-27}{-27 + 400K_p} \right| \leq 0.0835$$

משום שיש ערך מוחלט לא נדע מה הערך שנכפיל בעזרתו (חיובי או שלילי)
לכן נכפיל במכנה בריבוע ונפתח את הערך המוחלט כפעם מינוס ופעם פלוס.

בפלוס

$$\frac{-27}{-27 + 400K_p} \leq 0.0835$$

$$(-27) \cdot (400K_p - 27) \leq 0.0835 \cdot (400K_p - 27)^2$$

$$-10800K_p + 729 \leq 13360K_p^2 - 1803.6K_p + 60.8715$$

$$13360K_p^2 + 8996.4K_p - 668.1285 \geq 0$$

$$(K_p - 0.0675)(K_p + 0.74) \geq 0$$

$$K_p \geq 0.0675 \quad K_p \leq -6.15 \cdot 10^{-3}$$

במינוס

$$-\frac{-27}{-27 + 400K_p} \leq 0.0835$$

$$27 \cdot (400K_p - 27) \leq 0.0835 \cdot (400K_p - 27)^2$$

$$10800K_p - 729 \leq 13360K_p^2 - 1803.6K_p + 60.8715$$

$$13360K_p^2 - 12603.6K_p + 789.8715 \geq 0$$

$$(K_p - 0.875)(K_p - 0.0675) \geq 0$$

$$K_p \leq 0.0675 \quad K_p \geq 0.875$$

על מנת לעמוד בכל הטווחים

$$K_p = 0.0675$$

כעת נציב בנוסחה ונמצא את

$$K_d$$

$$\frac{27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2}{24243000} + \frac{27}{400} = 0.0675$$

$$27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2 + 1636762.71 = 1636762.71$$

$$9720000 + 1296000000K_d + 4.32 \cdot 10^{10}K_d^2 = 0$$

$$4320000K_d^2 + 129600K_d + 972 = 0$$

$$(K_d + 0.015)^2 = 0$$

$$K_d = -0.015$$

לא נרצה לקבל ערך שלילי לכן נבדוק אופציה שנייה.

$$\frac{27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2}{24243000} + \frac{27}{400} = K_p$$

$$\frac{27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2}{24243000} + \frac{27}{400} \geq 0.875 \quad / \cdot 24243000$$

$$27 \cdot (600 + 40000 \cdot K_d)^2 + 1636402.5 \geq 21212625$$

$$-9856222.5 + 1296000000K_d + 4.32 \cdot 10^{10}K_d^2 \geq 0$$

$$4320000K_d^2 + 129600K_d + -985.62225 \geq 0$$

$$(K_d - 0.0063)(K_d + 0.036) = 0$$

$$K_d = \mathbf{0.0063}$$

ערכו של K_d צריך להיות חיובי ולכן נבחר בערך השני שחישבנו שהוא החיובי.

תרגיל בית מעשי D: בקרת PID של מטוטלת הפוכה

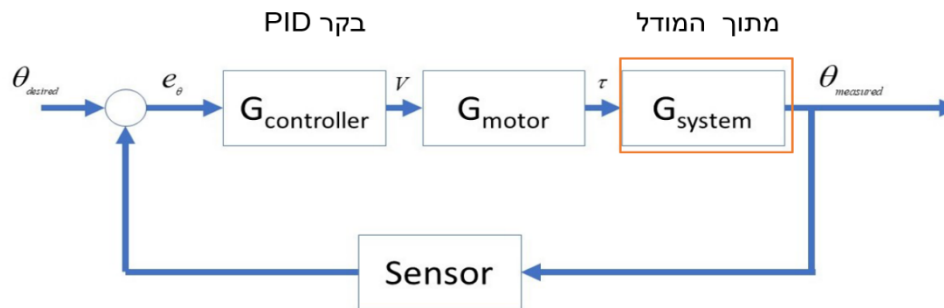
1. מטרת הפרויקט:

מטרת המערכת היא לייצב את מוט המטוטלת ההפוכה בזווית המוגדרת ע"י המשתמש (זווית רצויה) בתחום של $\pm 15^\circ$ תוך שימוש במנגנון בקרת PID על המערכת. משימת הבקרה הינה לחשב את הקבועים K_D, K_I, K_P על סמך המודל התאורטי.

2. הנחות:

- המטוטלת צריכה להתייצב בזמן סביר (עד 5 שניות).
- תיתכן שיגאה קטנה בין ניסיונות (עד מעלה).
- הנחנו שאין מצבי קיצון (לפי תשובת המתרגלת 😊)

3. תיאור התכן:



טבלה 1 – תיאור הפינים של הבקר:

מספר הפין	שם המשתנה	תצורה	הפעלה
2	ENCODER_A	INPUT	פיני קלט
3	ENCODER_B	INPUT	המשמשים לקריאת האותות מהמקודד
9	enA	OUTPUT	פלט למהירות סיבוב המנוע
10	MOTOR_CW	OUTPUT	מגדיר את כיוון סיבוב המנוע
11	MOTOR_CCW	OUTPUT	

4. תיאור תהליך הכיול:

החישוב של פרמטרי הבקרה הינם:

פרמטר תיאורטי	ערך הפרמטר הסופי
$K_p > 0.0675$	$K_p = 8$

$K_i = 3$	$K_i = 0.2$
$K_d = 3$	$K_d > 0.0063$

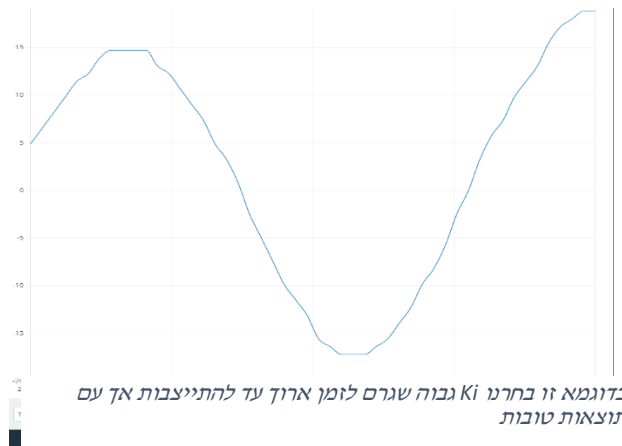
אמל"ק:

בבקרת PID , הפרמטרים k_p , k_i ו- k_d משמשים להתאמת התנהגות הבקר. לאחר כיול בחרנו בערכים $k_p=8$, $k_i=3$, $k_d=3$, שיקבעו כיצד הבקר מגיב לשגיאות במערכת.

התחלנו עם הפרמטרים שקיבלנו בחלק התיאורטי אך קיבלנו תגובה חלשה. לכן, שינינו את הפרמטר k_p , שמייצג את התגובה הפרופורציונלית של הבקר לשגיאה. נאלצנו להגדיל את ערכו כדי שהבקר יגיב חזק לשגיאה, כלומר הפלט של הבקר ישתנה באופן משמעותי ככל שהשגיאה תגדל. ערך נמוך של k_p פירושו שהבקר יגיב בצורה חלשה לשגיאה, כלומר הפלט של הבקר ישתנה רק מעט עם שינוי השגיאה ולכן הערך הנמוך תחילה כנראה לא הספיק.

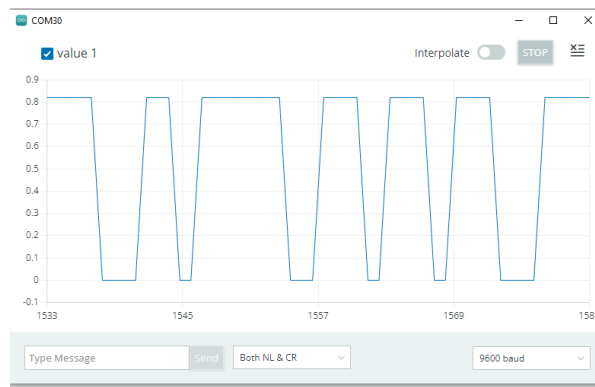
הפרמטר k_i , מייצג את סכום כל שגיאות העבר המשולבות לאורך זמן ועוזר לבטל את השגיאה השירית כאשר המערכת נמצאת במצב יציב, למשל אם יש הטיה במערכת. ערך גבוה של k_i כמו ששמנו מתקן את הטעות המתמשכת ולכן בחרנו בערך יחסית גבוהה לקבלת מערכת שלמה יותר.

הפרמטר k_d , עוזר להפחית את החריגות והתנודות במערכת הבקרה. ערך גבוה של k_d



פירושו שהבקר יגיב חזק לשינויים בשגיאה (כלומר פחות תנודתיות), וערך נמוך פירושו שהבקר יגיב חלש לשינויים בשגיאה.

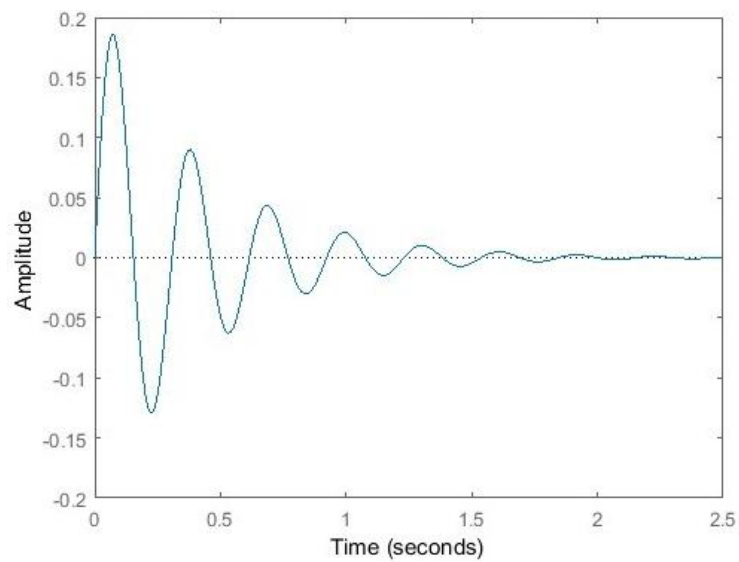
המערכת הצליחה להתייצב רק כשהגדלנו ממש את ה- k_d



5. עבור כל אחד מהבקרים שנבחנו תיאור פרמטרי הבקרים שנמצאו וביצועי הבקרים שתוכננו

בעזרת גרף (יש לערוך גרף וכן טקסט המסביר את המודגם בגרף):

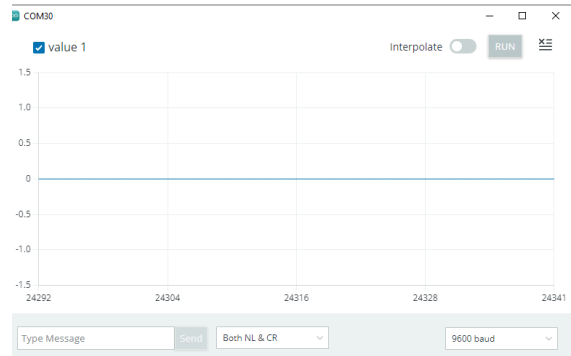
מערכת בקרה PID-



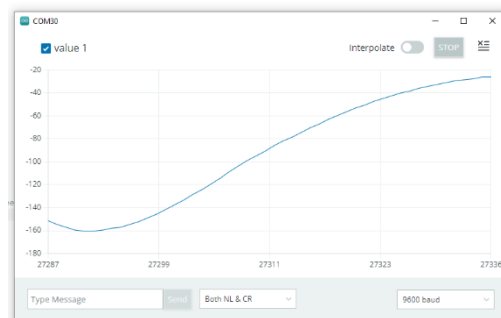
בהרצה זו הכללנו את שלושת הקבועים וקבענו שהזווית הרצויה הינה אפס. כפי שניתן לראות בגרף זמן עד להתייצבות הינו בערך 2.5 שניות.
ניתן לראות שערכי הגרף תנודתיים בין חיוביים לשליליים מסביב לאפס

מערכת בקרה PI-

בהרצה זו $0=K_d$ ולכן אנו מצפים שתגובת היתר תקטן, זמן הרגיעה ייקטן ושהיציבות תגדל.



מערכת בקרה P-



בהרצה זו $0=K_d$ וגם $0=K_i$ בנוסף להשפעות של K_d אנו מצפים שהשפעת $K_i=0$ הינה תגובת היתר וזמן הרגיעה יגדלו, ששגיאת המצב המתמיד תקטן וששגיאת המצב המתמיד תבוטל. המערכת ביצעה תיקון שגיאה בודד.

תיעוד קוד התוכנית

קוד ארדואינו-

```
#define MOTOR_CCW 11
#define MOTOR_CW 10
#define enA 9
#include <Encoder.h>
#include <PIDController.h> // Daniel - put git
#define ENCODER_A 2
#define ENCODER_B 3 // Encoder output to Arduino Interrupt pin ncoderPinB
```

```
PIDController pid;
```

```
float tick_to_deg1 ;
float encoder_count;
float enc_deg;
int motor_pwm_value;
```

```

        int Power_In_Percents;
        int userInput;
Encoder myEnc(ENCODER_B, ENCODER_A);

        /*****functions*****/
float tick_to_deg(long tick){
    return tick*360.0/440.0;
}

void forward(){ //turn the motor clockwise
    digitalWrite(MOTOR_CW, HIGH);
    digitalWrite(MOTOR_CCW, LOW);
}

void reverse(){ //turn the motor Counterclockwise
    digitalWrite(MOTOR_CW, LOW);
    digitalWrite(MOTOR_CCW, HIGH);
}

void get_user_input(){ //get the wanted degree from the user and enforce
                        possible degree

    userInput = Serial.parseFloat(); // the goal angle
    Serial.read(); // get the ENTER char from the serial
    while(abs(userInput)>=360) {
        if(userInput>0)
            userInput=userInput-360;
        else
            userInput=userInput+360;
    }

    /*****setup *****/
    void setup() {
        //define pins
        Serial.begin(9600);

```

```

        pinMode(enA, OUTPUT);
        pinMode(MOTOR_CW, OUTPUT);
        pinMode(MOTOR_CCW, OUTPUT);

        // Set initial rotation direction
        digitalWrite(MOTOR_CW, HIGH);
        digitalWrite(MOTOR_CCW, LOW);

        pid.begin(); // Initialize the PID controller
        pid.limit(-180, 180); // The PID output can be limited to values between -255
                                to 255
        pid.tune(8, 3, 3); // Set PID parameters - Kp,Ki,Kd

        Serial.print("Write the angle you want between -15 - 15");

    }

    void loop() {
        if (Serial.available() > 0) {
            get_user_input();
        }

        // Convert to real degree
        encoder_count = myEnc.read();
        enc_deg = tick_to_deg(encoder_count);

        while (abs(enc_deg) > 360) {
            if (enc_deg < 0)
                enc_deg = enc_deg + 360;
            else
                enc_deg = enc_deg - 360;
        }

        motor_pwm_value = float(pid.compute(enc_deg)); // Compute the PWM value for
                                                        the motor based on the current angle

        if (enc_deg > userInput) { // Choose the direction to rotate
            forward();
        } else {

```

```

reverse();
}

// Send time-amplitude data to Serial Plotter
Serial.println(enc_deg);
// Send current time

// Send the angle value

// Send PWM value to the motor
analogWrite(enA, abs(motor_pwm_value));

delay(1);
}

```

הנחיות למפעיל-

1. יש לחבר את המערכת לחשמל ולמחשב עם קוד הארדואינו.
2. יש להזין זווית רצויה באמצעות ממשק המשתמש ב serial monitor .
3. לאזן את המטוטלת לזווית 0.
4. יש להזיז את המטוטלת ולחכות להתייצבות המערכת.

סיכום ומסקנות:

פרויקט בקרת PID של מטוטלת נועד לשלוט בזווית של מטוטלת באמצעות בקר PID. מטרת הפרויקט היא להשתמש בבקר PID לייצוב המטוטלת בזווית רצויה.

הפרויקט כלל מספר שלבים:

מידול מערכת המטוטלת, הכולל הבנת הדינמיקה שלה והקשר בין הקלט (אות הבקרה) והיציאה (זווית המטוטלת). תכנון וכיול בקר PID הכולל בחירת ערכים מתאימים לרווחים (k_p , k_i , k_d) על סמך הדינמיקה של מערכת המטוטלת וההתנהגות הרצויה של הבקר. בדיקת ביצועי המטוטלת בתנאים שונים, כגון זוויות ראשוניות שונות או הפרעות. כוונת בקר ה-PID על ידי התאמת ערכי הקבועים בהתאם לביצועים אשר דרש מאתנו הרבה ניסויים עד שהצלחנו לייצב את המטוטלת. אנו ממליצים בהמשך לבצע את הניסויים בסקיילים יותר גדולים ומשקלים משתנים.